

COMMUNICATIONS ET LECTURES.

Note sur les courbes du troisième ordre; par MM. F. Folie et C. Le Paige.

La publication récente d'un travail intéressant sur les formes trilinéaires (*), dû à un géomètre très-distingué, M. H. Schubert, connu surtout par ses belles recherches sur la géométrie *dénomérante* (*abzählende Geometrie*), travail dans lequel il applique la théorie de ces formes à l'étude de la surface du 3^e ordre, nous engage à faire connaître les principaux résultats auxquels nous sommes parvenus, depuis longtemps déjà, dans la théorie des courbes du 3^e ordre. Des travaux multiples nous ont mis dans l'impossibilité de rédiger, jusqu'à ce jour, la seconde partie de notre Mémoire sur les courbes du 3^e ordre, dans laquelle nous appliquerons les théories analytiques exposées dans la première partie (**).

Dans la note qui va suivre, nous nous bornerons à quelques énoncés, réservant pour une publication plus complète les démonstrations et les conséquences à déduire de ces propriétés fondamentales.

I. Le lieu des points triples de trois faisceaux homogra-

(*) *Mathem. Ann.*, t. XVII.

(**) Relativement à la conception des théories dont nous avons fait une application plus particulière aux cubiques, voir différentes notes insérées aux *Bulletins*, t. XLIV, n^o 11, 1877; t. XLV, n^o 2, 1878, et dans les *Mémoires de la Société royale des sciences de Liège*, 2^e série, t. VII, 1878.

phiques est une courbe du 3^e ordre qui passe par les centres des trois faisceaux.

II. Toute courbe du 3^e ordre peut être engendrée par les intersections de trois faisceaux homographiques, ayant leurs centres en trois points quelconques de la courbe.

III. Une transversale rencontre une cubique, et les côtés de trois trilatères trijugués à cette courbe, en douze points appartenant à une I^5 . (Extension du théorème de Desargues).

IV. Il existe une relation linéaire entre les sommes des produits des distances d'un point quelconque de la courbe aux côtés de trois trilatères trijugués (Extension du théorème de Pappus).

V Il existe une relation linéaire entre les rapports anharmoniques du 3^e ordre du faisceau obtenu en joignant un point quelconque de la cubique à six points trijugués (Extension du théorème de Chasles).

VI. Une transversale rencontre une cubique et les côtés de deux trilatères conjugués à la courbe en neuf points appartenant à une I^5 (Seconde extension du théorème de Desargues).

VII. Le rapport des produits des distances d'un point quelconque de la courbe aux côtés de deux trilatères conjugués est constant (Seconde extension du théorème de Pappus).

VIII. Le rapport anharmonique du faisceau de six droites, obtenu en joignant un point de la courbe aux sommets de deux trilatères conjugués, est constant (Seconde extension du théorème de Chasles).

IX. Les côtés opposés de deux quadrilatères conjugués à une courbe de 3^e ordre se coupent en quatre points situés en ligne droite.

Les théorèmes III et VI sont des cas particuliers de deux théorèmes analogues à celui de Sturm sur les coniques passant par quatre points, le second, souvent employé, est dû à Poncelet; le premier peut s'énoncer ainsi :

X. Toutes les cubiques qui passent par sept points déterminent sur une transversale des points appartenant à une I_2 .

Ce théorème sert de base à la méthode de construction des cubiques que nous développerons dans notre Mémoire.

En effet, on peut prendre, comme cubiques fondamentales, des cubiques décomposables. Ce procédé de construction est général. Nous l'avons annoncé dès 1878 (*).

Des théories exposées dans la première partie de notre Mémoire se déduit facilement la solution des trois problèmes suivants :

Trouver les 1, 2 ou 3 intersections d'une droite δ avec une cubique ζ , déterminée par neuf points, quand on aurait déjà 2, 1 ou 0 de ces points d'intersection.

La solution de ces problèmes permet de ramener la construction des cubiques aux deux problèmes fondamentaux :

1° Construire une cubique, connaissant trois de ses trilatères trijugués et trois de ses points.

2° Construire une cubique connaissant deux de ses trilatères conjugués et un de ses points.

Des constructions énoncées, ressortent d'ailleurs, d'une manière fort simple, la plupart des propriétés fondamentales des cubiques, comme nous aurons l'occasion de le faire voir dans notre travail complet.

Nous pouvons ajouter que les théorèmes I et II, com-

(*) Voir *Éléments d'une théorie des faisceaux*, p. 109.

prennent, comme simples corollaires, tous ceux qui suivent, et que, de plus, on en peut déduire, soit comme cas particuliers immédiats, soit comme conséquences, les méthodes de construction des cubiques, dues à Chasles, à Schröter et à Grassmann.

Nous ajouterons encore que nous avons, depuis longtemps, appliqué la théorie générale (dont les théorèmes I et II ne sont que l'application particulière relative aux cubiques) aux courbes et aux surfaces de tous les ordres (*).

Cette théorie se prête d'ailleurs aussi aisément aux recherches de géométrie synthétique que de géométrie analytique.

Nous ferons observer que, dans le travail cité, de M. Schubert, ce savant géomètre fait remarquer que M. August, qui a donné, en 1862, la génération des surfaces du 3^e ordre par des intersections de plans, n'a pas vu, dans cette génération, une nouvelle méthode de recherches en géométrie synthétique, et nous croyons avoir été les premiers à énoncer explicitement, sous sa forme la plus générale, le principe à la fois analytique et géométrique de cette méthode (**).

(*) Voir *Principes de la théorie des faisceaux* (BULL. DE L'ACAD. ROY. DE BELG. ET BULL. DE DARBOUX).

(**) Voir *Ibid.*