COMMUNICATIONS ET LECTURES.

Principe de la théorie des faisceaux; par M. F. Folie, membre de l'Académie.

Dès le commencement de la découverte du rapport anharmonique du n^e ordre, nous nous sommes préoccupé de l'appliquer à la génération de lieux du même ordre; et les énoncés suivants, que nous donnions dans notre première Note sur ce rapport anharmonique (*), témoignent que déjà nous étions sur la voie :

« *Les intersections de trois faisceaux du troisième* » *ordre sont sur une courbe du même ordre, qui passe* » *par les centres de ces faisceaux,*

» théorème dans lequel le terme de faisceaux du troisième » ordre a une signification précise, que nous développerons » prochainement.

» Il en est de même encore des intersections de trois » faisceaux homographiques du troisième ordre, etc. »

Ce n'est pas toutefois, sans une certaine appréhension, que nous étendions ainsi, aux faisceaux du troisième ordre, le mode de génération des coniques au moyen de ceux du second.

Il se présentait en effet tout d'abord, dans cette généralisation, une très-grande difficulté :

Dans la théorie des faisceaux du second ordre, on n'a

(*) Ma communication sur le rapport anharmonique du n^e ordre a paru dans le *Bulletin* de novembre 1877, 2e série, t. XLIV, p. 469.

à chercher que le lieu des intersections de deux rayons homologues.

Dans celle des faisceaux du troisième et du quatrième ordre, on a à chercher le lieu des intersections de trois, quatre, etc., rayons homologues.

Il s'agissait donc de savoir s'il était nécessaire d'écrire les conditions de concours de ces trois, quatre, etc., rayons, ou bien si ces dernières résultaient à l'évidence des conditions mêmes du problème. Nous avons beaucoup hésité sur ce point capital, et nous l'avons longuement discuté avec M. Le Paige, que les lecteurs du *Bulletin* connaissent bien pour s'être occupé avec un grand succès des nouvelles théories géométriques.

C'est même lui qui, le premier d'entre nous, a nettement soutenu le principe qui fait l'objet de cette Note, et que nous allons exposer avec les raisons, au moyen desquelles il l'a défendu, à l'origine même de nos discussions à ce sujet. (Décembre 1877.)

Jusqu'aujourd'hui, la recherche d'un lieu plan pouvait se réduire à ce problème général :

Étant donnés deux lieux variables en vertu du paramètre α,

$$\varphi(x, y, \alpha) = 0, \quad \psi(x, y, \alpha) = 0,$$

trouver un lieu qui passe par les intersections des lieux homologues φ *et* ψ (homologue signifiant que la valeur de α est la même dans les équations des deux lieux);

et la solution de ce problème consiste tout simplement à éliminer α entre les deux équations données.

Que φ et ψ soient deux faisceaux de rayons, et le principe précédent donne la génération d'un lieu plan par les intersections de leurs rayons homologues.

Pour engendrer un lieu par les intersections des rayons

homologues de trois faisceaux, il s'agissait de savoir comment on pourrait résoudre le problème :

Étant donnés trois lieux variables en vertu des paramètres α *et* β,

$$\varphi(x, y, \alpha, \beta) = 0, \quad \chi(x, y, \alpha, \beta) = 0, \quad \psi(x, y, \alpha, \beta) = 0,$$

trouver un lieu qui passe par les points de concours des lieux homologues φ, χ, ψ.

L'élimination de α et β entre les trois équations $\varphi = 0$, $\chi = 0$, $\psi = 0$, suffisait-elle, à elle seule, pour établir que, puisqu'elle suppose les mêmes valeurs à x et y dans les trois équations, il en résulte que le lieu fourni par cette élimination passe par les points de concours des trois lieux homologues φ, χ, ψ, tel est le principe que nous avons été amené à poser, et que M. Le Paige a soutenu sans hésitation, en en donnant d'abord les deux démonstrations suivantes :

« I. Soient, en général,

$$\varphi(x, y, \lambda) = 0 \ (1), \quad \chi(x, y, \mu) = 0 \ (2), \quad \psi(x, y, \nu) = 0 \ (3),$$

les équations de trois familles de courbes, et supposons, en outre, qu'entre les paramètres λ, μ, ν il existe la relation

$$F(\lambda, \mu, \nu) = 0. \quad \dots \dots \quad (4)$$

On peut considérer $(x, y, \lambda, \mu, \nu)$ comme l'élément d'un espace à ∞^5 éléments.

Mais ces éléments sont liés par quatre relations.

Par suite, le système des équations (1), (2), (3), (4) représente une variété à ∞^1 éléments.

Le résultat de l'élimination de λ, μ, ν, étant de la forme $f(x, y) = 0$, cette variété est une courbe comprise dans le plan des x, y.

Pour définir l'ordre du lieu, il suffira d'éliminer y, λ, μ, ν, entre les quatre équations proposées et $x\xi + y\eta + 1 = 0$.

II. Dans le cas des faisceaux, la question se traite d'ailleurs simplement d'une manière directe; nous nous bornerons, par plus de simplicité, au troisième ordre.

Soient

$$\alpha + \lambda\beta = 0, \quad \beta + \mu\gamma = 0, \quad \gamma + \nu\alpha = 0,$$

les équations des trois rayons homologues; ces rayons rencontrent une droite quelconque

$$x\xi + y\eta + 1 = 0,$$

chacun en un point, dont nous désignons l'abscisse par x_1, x_2, x_3, suivant qu'il appartient à l'un ou à l'autre des trois rayons.

On a évidemment

$$\lambda = \frac{a_1x_1 + b_1}{x_1 + c_1}, \quad \mu = \frac{a_2x_2 + b_2}{x_2 + c_2}, \quad \nu = \frac{a_3x_3 + b_3}{x_3 + c_3}.$$

Si nous substituons ces valeurs de λ, μ, ν, dans la relation d'homographie

$$\mathrm{F}(\lambda\mu\nu) \equiv \lambda\mu\nu + k_{12}\lambda\mu + \cdots + k_1\lambda + \cdots + k = 0,$$

nous voyons sans peine qu'elle donne la relation

$$x_1x_2x_3 + \mathrm{A}_{12}x_1x_2 + \cdots + \mathrm{A}_1x_1 + \cdots + \mathrm{A} = 0,$$

c'est-à-dire que les rayons des trois faisceaux déterminent sur une transversale trois séries de points homographiques; sur chaque transversale existent donc trois points triples.

Le lieu de ces points sera une courbe du troisième ordre, puisqu'elle ne peut être rencontrée par une droite en plus de trois points. »

La première de ces démonstrations, fondée sur des considérations métagéométriques, ne sera peut-être pas également goûtée de tous les géomètres.

On pourrait cependant en faire disparaître ce défaut, en considérant l'un des paramètres λ, μ, ν, comme étant une troisième variable z. Les trois premières équations, considérées comme simultanées, représenteraient alors les points communs aux trois surfaces φ, χ, ψ; et l'élimination de λ, μ, ν, entre ces équations et la 4^e, donnerait celle d'un lieu passant par ces points communs.

Ainsi modifiée, cette démonstration n'en présenterait pas moins certaines difficultés; et c'est pourquoi nous n'y insistons pas.

La seconde sera admise aisément, aujourd'hui que le principe de correspondance de M. Chasles est universellement connu; elle n'en diffère pas, en effet, dans le fond; et elle pourrait s'appliquer à des faisceaux de courbes algébriques, de même qu'à des faisceaux de rayons.

Mais nous avons cru utile de chercher une démonstration du même principe, fondée seulement sur les théories géométriques les mieux connues.

Nous allons l'exposer d'abord pour le cas le plus simple; nous ferons voir ensuite comment on passera de ce cas aux suivants.

Théorème. *Soit le système d'équations*

$$(\mathrm{A})\ \varphi(x, y, \alpha, \beta) = 0 \quad 1) \quad \chi(x, y, \alpha, \beta) = 0 \quad 2) \quad \psi(x, y, \alpha, \beta) = 0,$$

il s'agit de démontrer que

si l'on élimine α et β entre ces trois équations, on obtient l'équation d'un lieu passant par les points communs à la fois aux trois courbes représentées par ces équations.

Démonstration. Dans le système (A), les équations 1), 2), 3) représentent chacun un système doublement indéfini de courbes, si les quantités α et β sont toutes deux arbitraires; simplement indéfini, si α seul est arbitraire; une courbe définie, si aucune de ces quantités n'est arbitraire.

Éliminer β entre φ et ψ, c'est trouver un lieu φ_1, passant par les intersections des deux lieux φ et ψ, déterminés par une valeur particulière de α, de sorte que chaque point de ce lieu est un point d'intersection d'une courbe φ et d'une courbe ψ, déterminées par une valeur particulière de α, et par une valeur particulière de β.

De même, éliminer β entre χ et ψ, c'est trouver un lieu χ_1, passant par les intersections des deux lieux χ et ψ, déterminés par une valeur particulière de α, de sorte que chaque point de ce lieu est un point d'intersection d'une courbe χ et d'une courbe ψ, déterminées par une valeur particulière de α, et par une valeur particulière de β.

Si les deux équations $\varphi_1=0$ et $\chi_1=0$ sont considérées comme simultanées, de sorte que x, y, α ont les mêmes valeurs dans ces équations, elles représentent les points communs aux lieux φ_1 et χ_1, points qui sont en nombre défini pour une valeur particulière de α. Et comme, par chacun de ces points, suivant qu'on les considère sur le lieu φ_1, ou sur le lieu χ_1, passent une courbe φ et une courbe ψ, ou une courbe χ et une courbe ψ, chacun d'eux sera donc un point commun d'intersection des trois courbes φ, χ, ψ.

Si α varie, le lieu de ces points communs sera une courbe, dont on obtiendra l'équation en éliminant α entre les deux équations $\varphi_1=0$ et $\chi_1=0$, ou bien en éliminant α et β entre $\varphi=0$, $\chi=0$, $\psi=0$, ce qu'il fallait démontrer.

1re Remarque. Il est évident que le système des équations

$$\text{(B)}\ \varphi(x,y,\alpha,\beta,\gamma)=0\ 1),\quad \chi=0\ 2),\quad \psi=0)\ 3),\quad \omega(\alpha,\beta,\gamma)=0\ 4)$$

se ramène au système (A), et qu'on peut, par suite, y appliquer la démonstration précédente.

2e Remarque. Une conséquence, qui doit nécessairement résulter du principe précédent, c'est que l'élimination de α et de β entre les trois équations $\varphi=0$, $\chi=0$, $\psi=0$, suppose *implicitement* que la condition de concours des trois lieux φ, χ, ψ se vérifie identiquement.

Démontrons ce point.

Cette condition s'obtient en éliminant x et y entre les trois équations $\varphi=0$, $\chi=0$, $\psi=0$.

Soit $f(\alpha,\beta)=0$ 4)

le résultat de cette élimination, ou la condition de concours des lieux φ, χ, ψ.

Il suit de la théorie de l'élimination que le système d'équations 1), 2), 3), ou φ, χ, ψ, est équivalent au système d'équations 1), 2), 4), ou φ, χ, f, ce qui est déjà, au fond, la démonstration cherchée (*).

Mais poursuivons-la plus explicitement.

Or, si l'on élimine α et β entre ces trois dernières équations, on obtient un lieu passant par les points d'intersection des lieux φ et χ, points dont le nombre est *simplement* indéfini, puisqu'il existe entre les paramètres arbitraires α et β la relation $f=0$; et, comme cette relation est la condition même de concours des lieux φ, χ, ψ, il s'ensuit que le lieu obtenu est le lieu de ces points de concours.

(*) On voit qu'elle suppose que les fonctions φ, χ, ψ sont de simples fonctions algébriques.

Celui-ci peut donc s'obtenir indifféremment au moyen, ou du système φ, χ, ψ, ou du système φ, χ, f; en d'autres termes, le premier système renferme *implicitement* la condition $f=0$, *cqfd.*

Il est aisé d'étendre la démonstration qui précède aux cas de quatre, cinq, etc., courbes; nous nous bornerons à la donner pour le premier de ceux-ci.

THÉORÈME. *Soit le système d'équations*

$$(\mathrm{A}) \quad \ldots \quad \varphi(x,y,\alpha,\beta,\gamma)=0 \quad 1), \qquad \chi(x,y,\alpha,\beta,\gamma)=0, \quad 2)$$
$$\psi(x,y,\alpha,\beta,\gamma)=0, \quad 3) \qquad \omega(x,y,\alpha,\beta,\gamma)=0, \quad 4)$$

il s'agit de démontrer que

si l'on élimine α, β et γ entre ces quatre équations, on obtient l'équation d'un lieu passant par les points communs à la fois aux quatre courbes représentées par ces équations.

DÉMONSTRATION. Dans le système A), les équations 1, 2, 3, 4, représentent, chacune, un système triplement indéfini de courbes, si les quantités α, β et γ sont toutes les trois arbitraires; doublement indéfini, si deux d'entre elles seulement le sont; simplement indéfini, si l'une d'entre elles seulement l'est; une courbe définie enfin, si aucune de ces quantités n'est arbitraire.

Éliminer γ entre φ et ω, c'est trouver un lieu φ_2 passant par les intersections des deux lieux φ et ω, déterminés chacun par des valeurs particulières de α et de β; de sorte que chaque point de ce lieu est un point d'intersection d'une courbe φ et d'une courbe ω déterminées, et par ces valeurs particulières de α et de β, et par une valeur particulière de γ.

Il en est de même de l'élimination de γ entre χ et ω, ou entre ψ et ω; elles donneront des lieux χ_2 ou ψ_2, dont chaque point est un point d'intersection d'une courbe χ ou ψ et d'une courbe ω, déterminées par des valeurs particulières de α, β et γ.

Or, nous venons de voir que, si l'on élimine α et β entre les trois équations $\varphi_2=0$, $\chi_2=0$, $\psi_2=0$, on obtient un lieu passant par les points communs aux trois lieux φ_2, χ_2, ψ_2.

Et comme, par chacun de ces points, suivant qu'on le considère sur l'un ou l'autre des lieux, passent une courbe φ et une courbe ω, ou bien χ et ω, ou bien ψ et ω, chacun d'eux sera donc un point commun d'intersection des quatre courbes φ, χ, ψ, ω.

Or, éliminer d'abord γ entre les quatre équations du système A), puis α et β entre les trois équations résultantes $\varphi_2=0$, $\chi_2=0$, $\psi_2=0$, c'est éliminer α, β et γ entre les quatre premières équations, *cqfd.*

Il va de soi que les deux remarques précédentes peuvent s'appliquer à ce nouveau cas.

Les géomètres saisiront immédiatement la portée de ce principe; les analystes y trouveront certainement matière à des recherches intéressantes.

Mais, pour des lecteurs moins familiers avec la haute analyse, ou avec la haute géométrie, ce principe pourra paraître, ou bien simple, pour ne pas dire bien naïf, ou bien peu important.

Nous ne sommes pas nous-même assez analyste pour pouvoir donner, du principe général, une démonstration purement analytique, et nous serions heureux que cette démonstration pût être faite, indépendamment de la nature des équations proposées. Nous avouons même que, dans le cas le plus général, la démonstration basée sur la conception de Riemann nous paraît seule acceptable.

Quant à l'importance du principe dans les applications, nous la ferons comprendre immédiatement au moyen de la plus simple de celles-ci, en résolvant le problème :

Chercher le lieu des points triples des rayons homologues de trois faisceaux homographiques.

Prenons les centres de ces trois faisceaux pour sommets d'un triangle $\alpha.\beta.\gamma = 0$.

Les équations des rayons de chacun des faisceaux seront

$$\alpha + \lambda\beta = 0 \quad 1) \qquad \beta + \mu\gamma = 0 \quad 2) \qquad \gamma + \nu\alpha = 0 \quad 3)$$

et la condition d'homographie pourra s'exprimer par (*)

$$a_{12}\lambda\mu + a_{23}\mu\nu + a_{31}\nu\lambda + a_1\lambda + a_2\mu + a_3\nu + 1 = 0. \quad 4)$$

L'équation du lieu cherché se trouvera simplement, en vertu du principe posé plus haut, par l'élimination de λ, μ et ν entre les équations 1), 2), 3) et 4), et sera, par suite :

$$a_{12}\alpha^2\beta + a_{23}\beta^2\gamma + a_{31}\gamma^2\alpha - a_1\alpha^2\gamma - a_2\beta^2\alpha - a_3\gamma^2\beta + \alpha\beta\gamma = 0.$$

Cette équation représente évidemment une courbe générale du troisième ordre, qui passe par les centres des trois faisceaux.

Nous ne nous arrêterons pas davantage aux applications du principe, sur lesquelles nous nous proposons de revenir ailleurs.

Ce seul exemple suffira pour montrer, à tout lecteur quelque peu géomètre, combien le principe proposé est fécond. Car les faisceaux de rayons de l'exemple qui précède peuvent se remplacer par des faisceaux de droites assujéties

(*) Voir *Bulletin*, 2e série, t. XLV, p. 162.

à de certaines conditions, ou par des faisceaux de courbes; l'homographie par toute autre équation de condition entre les paramètres des courbes homologues, et le cas de trois faisceaux enfin, par celui d'un nombre de faisceaux quelconque.

—

Communication préliminaire sur les mouvements et l'innervation de l'organe central de la circulation chez les animaux articulés; par M. Félix Plateau, membre de l'Académie.

De nombreux naturalistes se sont occupés de la structure et des mouvements du vaisseau dorsal ou cœur des articulés (1). La disposition et les fonctions de la partie cardiaque du système nerveux de ces animaux ont fait aussi l'objet de quelques travaux très-intéressants parmi lesquels je citerai ceux de MM. Lemoine (2), Dogiel (3) et Berger (4). Il restait cependant beaucoup de questions à résoudre. J'ai recours, pour leur solution, à deux moyens

(1) Voyez pour l'énumération et l'analyse d'un grand nombre de travaux sur cette matière : Milne Edwards, *Leçons sur la physiologie et l'anatomie comparée de l'homme et des animaux*, t. III, pp. 179 et suivante. Paris 1858. Je résumerai les recherches plus récentes dans un mémoire étendu.

(2) Lemoine, *Recherches pour servir à l'histoire des systèmes nerveux, musculaire et glandulaire de l'Écrevisse.* Thèse. Paris 1868. (Reproduit aussi dans les Annales des sciences naturelles, 5e série, t. IX, 1868.)

(3) Dogiel, *De la structure et des fonctions du cœur des crustacés* (Archives de physiologie, etc., de Brown Sequard, 9e année, 1877, p. 400, et Comptes rendus, 1876, t. 82, p. 1117).

(4) Émil Berger, *Über das Vorkommen von Ganglienzellen im Herzen von Flusskrebs* (Sitzb. der K. Akad. der Wissensch. Wien, 1876).