

Deuxième note sur l'extension de la notion du rapport anharmonique; par M. F. Folie, membre de l'Académie.

Dans une précédente note (*), nous avons fait voir que, pour généraliser aisément le rapport anharmonique du second ordre, il fallait l'écrire, non pas $\frac{12}{14} : \frac{52}{54}$, mais $\frac{12.54}{41.25}$; et qu'on obtient en effet, en suivant pour le n^{e} ordre la règle indiquée dans cette dernière forme, l'expression générale que voici du rapport anharmonique du n^{e} ordre :

$$(125 \dots n) = \frac{12.54.56 \dots (n-1)n}{n1.25.45 \dots (n-2)(n-1)}.$$

Il pourrait être fort utile d'étudier, pour ce rapport, les relations qui existent entre les diverses formes qu'il peut prendre, par l'inversion des chiffres, comme M. Chasles l'a fait pour le second ordre (**).

C'est un travail que nous n'avons guère le loisir d'entreprendre, et que nous croyons, pour cette raison, devoir signaler à l'attention des jeunes géomètres.

Ils pourront prendre pour guide, dans cette recherche, outre la notation précédente, le passage cité de M. Chasles, d'où ils déduiront aisément les formules qui suivent :

$$(1254) = (4521) = (5412) = (2145), \\ (1254)(5214) = 1, \quad (1254)(1452) = 1, \quad \text{etc.};$$

(*) *Bulletins*. 2^e série, t. XLIV, n^o 11, 1877.

(**) *Traité de géométrie supérieure*, p. 24.

et, de plus, en désignant par

$$r, r', r'', r''', r^{\text{iv}}, r^{\text{v}}$$

les rapports successifs

$$(1254), (1245), (1542), (1524), (1425), (1452) :$$

$$r + r''' = 1, \quad r' + r^{\text{iv}} = 1, \quad r'' + r^{\text{v}} = 1,$$

$$\frac{1}{r} + \frac{1}{r'} = 1, \quad \frac{1}{r''} + \frac{1}{r'''} = 1, \quad \frac{1}{r^{\text{iv}}} + \frac{1}{r^{\text{v}}} = 1;$$

d'où il résulterait encore

$$r' + \frac{1}{r'''} = 1, \quad r'' + \frac{1}{r} = 1,$$

$$r + \frac{1}{r^{\text{iv}}} = 1, \quad r^{\text{iv}} + \frac{1}{r''} = 1,$$

$$r''' + \frac{1}{r^{\text{v}}} = 1, \quad r^{\text{v}} + \frac{1}{r'} = 1.$$

Il ne sera pas inutile, enfin, de noter que

$$(1244) = 1;$$

de même que

$$(124416) = -1,$$

et ainsi de suite; que

$$(125415) = -(1254); \quad (125456) = -(1254) \times (5614). \\ (125456) = (545612) = (561254), \text{ etc.}$$

Il s'agirait de trouver, pour le 5^e ordre d'abord, les formules analogues à celles que nous venons de rappeler plus haut.

Mais un autre problème se présente encore : c'est de

rattacher directement l'involution du 3^e ordre au rapport anharmonique du même ordre.

Ce problème ne semble pas aussi directement abordable; les recherches que nous avons faites à ce sujet nous ont conduit, toutefois, à des résultats assez intéressants, en ce qu'ils sont susceptibles de généralisation; peut-être même donneront-ils la solution complète du problème.

On sait que l'involution des trois couples de points 1, 2; 1', 2'; 1'', 2'', qui s'exprime par les équations

$$\frac{11'. 12'}{21'. 22'} = \frac{11''. 12''}{21''. 22''} = \frac{1'1''. 2'2''}{2'1''. 2'2''} \dots (1),$$

peut s'écrire également, si l'on se borne à la première égalité (*), et qu'on se rappelle les formules données plus haut :

$$(11'21'') (12'22'') = 1 \dots (2)$$

L'involution du 3^e ordre, qui s'exprime par l'égalité des trois rapports

$$\left[\frac{11'. 12'. 15'}{11''. 12''. 15''} \right] = \left[\quad \right]_2 = \left[\quad \right]_3,$$

dont les deux derniers s'obtiennent par le changement de 1 en 2 ou en 3 dans le premier, peut, de même, s'écrire :

$$(11'21'') (12'22'') (15'25'') = 1 \dots (3),$$

formule dans laquelle on peut changer 1 ou 2 en 3, ce qui fournit deux autres égalités.

Malheureusement elle ne renferme que des rapports anharmoniques du second ordre; et il s'agirait de les trans-

(*) *Traité de géométrie supérieure*, p. 127.

former en rapports du 3^e, ce qui fait l'objet essentiel de notre recherche.

On voit d'abord que cette nouvelle forme de l'involution du 3^e ordre est immédiatement applicable aux ordres supérieurs.

Or, en la comparant à celle de l'involution du 2^e ordre, et en cherchant à généraliser celle-ci directement pour arriver au 3^e, on est naturellement amené à poser l'égalité suivante :

$$(11'21''51''') (12'22''52''') (15'25''55''') = 1 \dots (5).$$

Si l'on admet que, dans cette expression, l'on peut intervertir les accents, ou les chiffres, ce qui revient au même, elle donnera lieu à d'autres égalités de même forme, telles que

$$(11''21'51''') \dots = 1; (11'''21''51') \dots = 1, \text{ etc.}$$

Or, de la transformation de ces égalités, et de leur comparaison entre elles, il résultera qu'elles conduisent à l'expression précédemment donnée :

$$(11'21'') (12'22'') (15'25'') = 1 \dots (5),$$

ou, en d'autres termes, que les égalités (5'), dans lesquelles ne figurent que des rapports anharmoniques du 3^e ordre, expriment l'involution des ternes de points 123, 1'2'3', 1''2''3'', 1'''2'''3''', absolument comme les égalités (5) expriment l'involution des trois premiers parmi ces ternes.

La formule (5'), de même que la formule (5), est susceptible de se généraliser très-simplement. C'est ainsi que cette dernière s'écrira immédiatement, pour exprimer l'involution du 4^e ordre :

$$(11'21'') (12'22'') (15'25'') (14'24'') = 1 \dots (4),$$

formule dans laquelle on peut changer 1, ou bien 2, en 3 ou en 4.

Et nous croyons pouvoir affirmer que l'involution des quaternes de points 1...4, ..., 1ⁿ...4ⁿ s'exprimera par la formule

$$(11'21''51'''41''') (12'22''52'''42''') (\dots) (\dots) = 1, \quad (4')$$

et par celles qui s'en déduisent au moyen de l'inversion des accents ou des chiffres.

Telles seraient donc les expressions générales de l'involution du n^e ordre, tant au moyen de rapports anharmoniques du même ordre, qu'au moyen de rapports du 2^e, du 3^e, etc. ordre.

Ainsi, par exemple, l'involution du 4^e ordre, pour nous borner à celle-ci, s'exprimerait par les formules :

$$\prod_{1'}^{4'} (11'21'') = 1, \text{ où l'on pourra changer la combinaison } 12 \text{ en } 25, 54, 41, 15, 24.$$

$$\prod_{1'}^{4'} (11'21''51''') = 1, \text{ où l'on pourra changer la combinaison } 125 \text{ en } 254, 541, 412.$$

$$\prod_{1'}^{4'} (11'21''51'''41''') = 1, \text{ où l'on pourra changer la combinaison } 1254 \text{ en } 2541, 5412, 4125.$$

Nous engageons les jeunes géomètres à les vérifier.

Nous énoncerons également une propriété générale, à laquelle nous sommes arrivé incidemment, en recherchant les propriétés du rapport anharmonique du n^e ordre.

La voici pour les courbes de la 3^e classe :

Si 1, 2, 3; 1', 2', 3' désignent les sommets de deux

trigones conjugués à une courbe de la 3^e classe (*); 1₁, 1₂, 1₃, etc. les intersections d'une tangente quelconque avec les jonctions 1'1, 1'2, 1'3, etc., on a, entre les segments déterminés entre ces points, les relations

$$\frac{12'_1 \cdot 25'_2 \cdot 51'_3}{1'1'_1 \cdot 2'2'_1 \cdot 3'3'_1} = \frac{15'_1 \cdot 52'_2 \cdot 21'_3}{1'1'_2 \cdot 2'2'_2 \cdot 5'5'_1} = c^{10} \dots (A),$$

ainsi que les autres relations analogues.

Ces relations, combinées avec celle que donne le théorème de Carnot, conduisent à d'autres propriétés que nous croyons nouvelles, même dans la théorie des coniques peut-être; la relation (A), en effet, existe pour ces courbes, *mutatis mutandis*.

Cette même relation (A) existe pour les courbes du 3^e ordre, sans qu'on ait une lettre à y changer, à condition que 1, 2, 3, etc., désignent maintenant les côtés de deux trilatères conjugués à cette courbe (**); 1₁, 1₂, etc., les rayons qui joignent un quelconque de ses points aux intersections 1'1, 1'2, etc.; et 12₁ etc., les sinus des angles compris entre les directions des côtés 1 et 2₁, etc.

Combinée avec le théorème corrélatif de celui de Carnot, elle conduira également à des relations nouvelles.

Nous terminerons cette Note par les énoncés de quelques théorèmes remarquables dus à M. C. Le Paige, qui s'occupe,

(*) *Fondements d'une géométrie supérieure cartésienne*, par F. Folie, p. 42. Bruxelles. Hayez, 1872.

(**) *Ibid.*, pp. 11, 20 et 21. Bruxelles. Hayez, 1872.

en même temps que nous, et avec beaucoup de succès, de l'extension des théories de la géométrie supérieure.

« Soient six points, désignés par les chiffres 1, 2, 3, 4, 5, 6. Nous représenterons, comme nous l'avons fait jusqu'ici, par \mathfrak{I}_{162}^m , le rapport anharmonique des six droites qui joignent ces points à un point fixe m , c'est-à-dire la fonction

$$\frac{\sin(1m4) \sin(5m6) \sin(5m2)}{\sin(1m2) \sin(5m4) \sin(5m6)};$$

les autres fonctions \mathfrak{I} que nous employons ont des significations analogues.

Cela posé, on a les théorèmes suivants :

I. — Si l'on joint un point quelconque m d'une cubique à six points 1, 2, 3, 4, 5, 6 de la cubique (*), il existe entre les invariants \mathfrak{I}_{162}^m , \mathfrak{I}_{524}^m , une relation

$$1 + a_1 \mathfrak{I}_{162}^m + a_2 \mathfrak{I}_{524}^m = 0,$$

dans laquelle a_1 , a_2 sont des constantes, indépendantes de la position de m .

II. — Si l'on joint les trois points 1, 3, 5, à un point quelconque m de la cubique, les droites $m1$, $m3$, $m5$, sont trois rayons homographiques.

III. — Les neuf droites 12, 14, 16; 32, 34, 36; 52, 54, 56, et la cubique sont coupées par une transversale en douze points en involution.

(*) Ces six points ont des positions particulières sur lesquelles nous nous étendrons plus tard. La même observation s'applique aux théorèmes suivants.

Ces trois propositions ont pour corrélatives les suivantes :

IV. — Une tangente mobile t à une courbe de la troisième classe est rencontrée par six tangentes fixes en six points, tels que l'on a la relation

$$1 + a_1 \mathfrak{I}_{162}^t + a_2 \mathfrak{I}_{524}^t = 0.$$

V. — Une tangente mobile détermine sur trois tangentes fixes 1, 3, 5, trois séries homographiques.

VI. — Les trois tangentes à la courbe, menées par un point m , et les neuf droites qui joignent ce point aux intersections des tangentes 1, 3, 5, avec les tangentes 2, 4, 6, sont douze droites en involution.

Ces théorèmes subsistent pour les courbes du n^{me} ordre et de la n^{me} classe, *mutatis mutandis*.

La notion des points conjugués harmoniques des différents ordres conduit à des applications géométriques que nous nous bornerons à indiquer pour les quartiques.

Si une quartique est définie par l'une ou l'autre des relations suivantes

$$C_4 \equiv \sum_1^4 k_i P_i^4 = 0,$$

$$C_4 \equiv \sum_1^4 k_i P_i^4 = 0,$$

nous dirons que

$$P_1 P_2 \dots P_5 = 0,$$

$$P_1 P_2 \dots P_6 = 0,$$

définissent un pentagone et un hexagone harmoniques, relatifs à la quartique : ces figures harmoniques jouissent des propriétés suivantes :

VII. — Toute droite passant par l'un des sommets du pentagone harmonique rencontre les trois côtés, qui n'aboutissent pas à ce sommet, en trois points, et la quartique en

quatre points, et ces huit points sont conjugués harmoniques du quatrième ordre.

VIII. — *Toute droite, qui joint deux sommets opposés de l'hexagone harmonique, rencontre les deux autres côtés en deux points, et la quartique en quatre points, et ces huit points sont conjugués harmoniques du quatrième ordre.*

Nous avons employé les mots pentagone et hexagone, bien qu'il eût été préférable de dire quinquélatère et sélatère, parce que cet emploi ne peut, ici, donner lieu à aucune obscurité.

Nous espérons pouvoir développer et étendre ces notions qui sont générales. »

Application de la bobine de Ruhmkorff au téléphone pour reproduire la parole aux grandes distances; par M. le lieutenant-colonel d'artillerie en retraite Navez et M. Louis Navez, fils.

Le téléphone de M. Graham Bell, tel qu'il est employé, ne peut mettre en relation que des stations peu éloignées l'une de l'autre. Les courants d'induction que l'appareil lance dans le circuit, ne sont pas assez énergiques pour vaincre la résistance que les grandes lignes leur opposent. Il n'est guère probable que le système dont nous parlons puisse être considérablement amélioré sous le rapport de la résistance à vaincre, parce que la force motrice de la combinaison mécanique ne peut être reproduite, sous sa première forme, qui est la voix humaine, qu'après avoir subi différentes transformations et, par conséquent, éprouvé des pertes de force vive.