Extension de la notion du rapport anharmonique. *Définition de ce rapport pour le* n^e *ordre en général. Son utilité dans l'étude des courbes et surfaces supérieures;* par M. F. Folie, membre de l'Académie.

Tous ceux qui se sont occupés de géométrie supérieure savent qu'elle repose presque tout entière sur les propriétés qui dérivent de la considération du rapport anharmonique; ouvrez les ouvrages des deux géomètres les plus célèbres des temps modernes, Steiner et Chasles, vous y trouverez le rapport anharmonique, comme point de départ de toutes leurs théories.

Ce rapport fameux, qui était connu des Grecs, et auquel M. Chasles, en écrivant son Histoire des progrès de la Géométrie, a donné le nom qu'il porte et qu'il conservera dans la science, conduit, comme on le sait, à la théorie de l'involution, d'où sont sortis les beaux théorèmes de Pascal et de Brianchon.

Poncelet, qui a eu tant d'heureuses inspirations a, peut-être, négligé la meilleure d'entre elles : il a généralisé le théorème de Desargues, complété par Sturm, en l'étendant aux faisceaux de courbes supérieures, et ne semble pas avoir aperçu l'importance capitale de son théorème; il a même laissé à M. De Jonquières l'honneur de définir, sous le nom d'involution du n^e ordre, la propriété qu'il avait découverte.

Plus tard, nous avons nous-même retrouvé, en suivant une voie propre, cette involution qui nous était restée inconnue parce que, jusqu'à cette époque, la géométrie supérieure n'avait fait qu'incidemment l'objet de nos études; et nous y étions arrivé par la considération des figures polygonales ou polyédrales conjuguées inscrites ou circonscrites à des courbes ou à des surfaces. Notre méthode nous avait amené à étendre, à ces figures, les théorèmes de Pappus, de Desargues, de Pascal et de Brianchon, et, en généralisant notre extension du théorème de Desargues, à retrouver le théorème de Poncelet (*).

Mais, pour que l'analogie fût complète entre ces théories et celles des coniques, il manquait encore une pierre à l'édifice, et même la pierre angulaire.

L'involution du second ordre se déduisant du rapport anharmonique, celle du n^e ordre devait se déduire d'un rapport analogue à ce dernier.

Que des hommes de génie, comme Steiner et Chasles, n'y aient pas songé, cela s'explique : la combinaison de rapports anharmoniques du second ordre leur permettait, en effet, de se passer, dans l'étude des courbes supérieures, de rapports plus compliqués.

Mais que Poncelet, l'inventeur de l'involution du n^e ordre, n'y ait pas pensé davantage, on le conçoit déjà moins, et c'est là précisément ce qui nous fait penser qu'il n'a pas accordé à sa découverte l'attention, ou, si l'on veut, la méditation qu'elle méritait d'exciter.

On eût pu nous adresser, avec bien plus de raison, le même reproche, si, après avoir démontré, pour les courbes et les surfaces supérieures, les théorèmes analogues à ceux de Pappus, de Desargues, de Pascal et de Brianchon pour les coniques, nous ne nous étions pas dit que, tous ces théorèmes n'étant, au fond, que des expressions différentes ou des corollaires de la propriété anharmonique de cinq points ou de cinq tangentes d'une conique, les théorèmes que nous avions découverts devaient être, eux aussi, des expressions différentes ou des corollaires d'une certaine propriété anharmonique des courbes ou des surfaces supérieures.

(*) V. *Fondements d'une géométrie supérieure cartésienne.* Bruxelles, Hayez, 1872.

Et cependant, ce n'est que cette année-ci même, en reprenant, dans nos leçons de géométrie supérieure, la recherche du rapport anharmonique dans les systèmes de trois bilatères (*) ou de trois digones (**) conjugués entre eux, que nous avons trouvé un procédé se prêtant aisément à la généralisation désirée.

En l'appliquant d'abord à un système de trois trilatères conjugués, nous avons eu la bonne fortune de rencontrer un rapport et des propriétés, analogues, de tous points, au rapport et aux propriétés anharmoniques des bilatères ou des coniques.

Ce pas fait, la généralisation complète s'ensuivait d'elle-même. Quel nom fallait-il donner à ce nouveau rapport? Fallait-il généraliser le terme de *double rapport* (***), sous lequel Steiner dénomme le rapport anharmonique? C'eût été possible, comme nous le montrerons plus bas; mais cela eût compliqué de beaucoup l'expression de ce rapport, qui, pour se généraliser commodément, ne doit plus, on va le voir, s'écrire sous la forme d'un double rapport.

Fallait-il faire du terme de M. Chasles un genre, et le diviser en sous-genres, qu'on aurait appelés dianharmoniques, trianharmoniques, etc.? A côté de certains avantages, cette terminologie avait le grave inconvénient de substituer au mot anharmonique, que les Français, les Anglais

(*) Trois couples de droites tels que chacun est déterminé par les jonctions des intersections des deux autres.

(**) . . . points . . . . intersections des jonctions . . Ces deux systèmes forment, chacun, un quadrilatère complet.

(***) *Doppeltverhältniss.*

et les Italiens et même les Allemands ont adopté à la suite de M. Chasles, et qui ne périra pas, un terme nouveau et même un peu barbare.

Nous avons donc préféré de conserver le terme même de M. Chasles, qui a illustré les publications de notre Académie il y a quarante ans, et qui, sous son acception plus générale, est peut-être destiné à y ajouter quelque lustre encore.

Le rapport anharmonique, dans les coniques, sera donc le rapport anharmonique du second ordre; dans les courbes supérieures, le rapport analogue s'appellera *rapport anharmonique du* n^{me} *ordre*.

Le temps nous fait défaut pour développer les propriétés de ce rapport anharmonique du n^e ordre.

Il faudra que nous nous bornions à en énoncer les principales, en nous limitant même, dans cette note, au 3ᵉ ordre.

On sait que, si les chiffres 1, 2, 3, 4 représentent, à la manière des lettres a, b, c, d, quatre points en ligne droite, le rapport anharmonique de ces quatre points, sous l'une de ses formes, est

$$(1, 2, 3, 4) = \frac{12}{14} : \frac{32}{34}.$$

Nous l'écrirons sous la forme plus commode, et surtout plus commodément généralisable

$$(1, 2, 3, 4) = \frac{12.34}{41.23},$$

dans laquelle on voit que le numérateur est le produit des distances mutuelles de deux couples, et que le dénominateur est un produit analogue, formé en transportant le dernier chiffre du numérateur au premier rang, sans altérer le rang des autres chiffres.

Ceci posé, considérons six points en ligne droite 1, 2...6; l'une des expressions du rapport anharmonique de ces six points, ou du *rapport anharmonique du 3ᵉ ordre*, sera

$$(1, 2, 3, 4, 5, 6) = \frac{12.34.56}{61.23.45}.$$

De même, le *rapport anharmonique du 4ᵉ ordre* serait

$$(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8) = \frac{12.34.56.78}{81.23.45.67},$$

et ainsi des autres.

On aurait, évidemment, des expressions analogues pour les rapports anharmoniques des faisceaux du 2ᵉ, du 3ᵉ, du 4ᵉ ordre, etc.

Ces rapports anharmoniques des ordres supérieurs jouissent de propriétés analogues à celles du rapport anharmonique du 2ᵉ ordre.

Ainsi, en nous bornant au 3ᵉ ordre :

Le rapport anharmonique de six points en ligne droite est égal à celui du faisceau qu'on obtient en les joignant à un centre quelconque, et réciproquement.

Ainsi encore, si le lecteur veut bien se rappeler notre définition de deux couples de trilatères conjugués inscrits à une courbe du 3ᵉ ordre (*), il pourra vérifier ce théorème, ainsi que son corrélatif :

Si l'on joint un point quelconque d'une courbe du 3ᵉ ordre aux extrémités des côtés de deux trilatères conjugués inscrits, le rapport anharmonique du faisceau ainsi formé est constant.

(J'entends par extrémités d'un côté ses intersections avec les côtés, de noms contraires, du trilatère conjugué; si, par exemple, 1, 2, 3 et 1′, 2′, 3′ désignent les côtés des

---

(*) *Fondements d'une Géom. sup. cart.*, p. p11 et 21.

deux trilatères conjugués, les extrémités du côté 1 seront ses intersections avec les côtés 2′ et 3′, et ainsi de suite, ces intersections étant, du reste, sur la courbe, en vertu de la définition même.)

Enfin, nous croyons qu'il nous sera possible de déduire, de cette extension donnée à la notion du rapport anharmonique, la construction par points des courbes algébriques supérieures, au moyen de théorèmes analogues au suivant :

Les intersections de trois faisceaux du 3e ordre sont sur une courbe du même ordre, qui passe par les centres de ces faisceaux,

théorème dans lequel le terme de *faisceaux de 3e ordre* a une signification précise, que nous développerons prochainement.

On voit, par ces quelques exemples, l'analogie frappante qui existe entre les propriétés du rapport anharmonique du n^{me} ordre, et celles du rapport anharmonique du second.

On pressent déjà que ces propriétés sont la source même de celles que nous avons antérieurement données sous le nom d'*extensions* des théorèmes de *Pappus*, de *Desargues*, de *Pascal* et de *Brianchon*, et qu'elles sont destinées à devenir, pour les courbes supérieures, la base de leur étude, comme le rapport anharmonique du 2e ordre l'est devenu, pour les coniques, entre les mains de Steiner et de Chasles.

Pourquoi ces illustres géomètres ont-il pu se passer, dans la recherche des propriétés des courbes supérieures, de cette notion généralisée du rapport anharmonique, c'est ce que l'on concevra aisément, à l'aide de cette remarque, que *le rapport anharmonique du 3e ordre est égal au quotient de deux rapports anharmoniques du* 2e (au lieu de quotient, on pourrait évidemment dire produit); remarque qui peut

s'étendre aux rapports anharmoniques d'ordre supérieur.

On voit, en effet, que le rapport

$$\frac{12.34.56}{61.25.45}$$

peut s'écrire, par exemple,

$$-\frac{12.34.56.14}{41.25.45.61} = -\frac{(1, 2, 3, 4)}{(4, 5, 6, 1)}.$$

Il nous restera bien des propriétés nouvelles à déduire de cette notion du rapport anharmonique du n^e ordre : l'homographie du même ordre est appelée à y jouer un grand rôle.

Déjà M. Le Paige, à qui nous avions communiqué notre idée (*), a formulé les équations analytiques générales de

(*) Je dois rendre à M. Le Paige cette justice que, dans le courant de l'été dernier, il m'a parlé de recherches analytiques qui l'avaient conduit à un rapport auquel il donnait le nom d'hyperharmonique, mais sans pouvoir lui trouver une signification géométrique.

Fort occupé en ce moment, et des devoirs de ma charge, et, dans mes moments de loisir, des travaux dont j'ai communiqué différents résultats à l'Académie, dans mes Notes sur l'évolution et sur une synthèse des théorèmes de Pascal et de Brianchon, j'ai tellement perdu de vue cette conversation, que, quand j'ai trouvé, en octobre, la généralisation de la notion du rapport anharmonique, l'idée de M. Le Paige ne m'est pas même revenue un instant à l'esprit. Comme je lui faisais part, selon notre coutume mutuelle, de la découverte que je venais de faire, sans que j'eusse encore eu le temps de la vérifier d'une manière complète, il insista vivement pour en avoir l'expression dans le cas du 3e ordre; à peine la lui eus-je donnée, que je reçus, le même jour, une lettre qui me remit en mémoire notre conversation de l'été.

Cette lettre écrite, je puis l'attester, avant que M. le Paige eût pu se faire une idée nette de ce que j'entendais par rapport anharmonique du n^e ordre, puisqu'en ce moment je m'étais borné à lui en donner l'expression, témoigne qu'il y était arrivé avant moi par l'étude des formes : la signification géométrique lui avait échappé, et c'est pourquoi, sans cette homographie. Antérieurement, il avait découvert, d'une façon tout à fait indépendante, et exclusivement analytique, la notion des points conjugués harmoniques du n^e ordre ; et il vient de la rattacher, dans le travail dont j'ai eu l'honneur de rendre compte il y a quelques instants, à notre notion du rapport anharmonique du n^e ordre.

---

doute, il n'a pas accordé à ce rapport l'attention qu'il aurait fallu, et qui lui en eût donné, probablement, la notion précise que je viens d'exposer.

Voici cette lettre, que je me fais un plaisir et un devoir de transcrire, afin de rendre à chacun ce qui lui est dû :

« Mon cher Monsieur,

» De retour chez moi, j'ai recherché dans mes notes quelques essais » que j'avais faits en vue de trouver le rapport anharmonique du n^e ordre » et j'y rencontre cette indication dans un travail de juillet dernier :

$$\text{» Rapport hyperharmonique} = \frac{(\lambda_0-\mu_1)(\lambda_1-\mu_2)(\lambda_2-\mu_0)}{(\lambda_0-\mu_0)(\lambda_1-\mu_1)(\lambda_2-\mu_2)}.$$

» Cette expression concorde entièrement avec votre rapport anharmo- « nique du 3e ordre.

» En effet, dans cette expression, λ_0, λ_1, λ_2 représentent les distances, » à partir de l'origine, d'un groupe de trois points ; μ_0, μ_1, μ_2, les dis- » tances d'un second groupe. Or, votre rapport de sinus, étant projectif, » donne, lorsqu'on remplace les sinus par les segments correspondants, » l'expression que je viens d'écrire.

» Je me rappelle avoir, à l'époque où cette note a été écrite, énoncé les » deux théorèmes suivants :

» Six points λ_0, μ_0, λ_2, μ_1, λ_2, μ_2 sont en involution lorsque le rap- » port hyperharmonique de ces points, pris dans l'ordre direct, est égal » au rapport hyperharmonique de ces mêmes points, pris dans l'ordre » inverse. »

« Six points λ_0, μ_0 ; λ_1, μ_1 ; λ_2 ; μ_2 sont en évolution lorsque le rap- » port hyperharmonique de ces points, pris dans l'ordre direct, est égal, » au signe près, au rapport hyperharmonique de ces mêmes points, pris » dans l'ordre inverse. »

« J'avais été amené à la conception du rapport hyperharmonique par » des considérations purement analytiques.

» Je me propose de reprendre ces recherches afin de les étendre au cas

Nous comptons bien communiquer à la classe, lors de sa prochaine séance, le résultat des recherches que nous allons poursuivre dans cette direction ; et nous croyons pouvoir espérer que les quelques pages qui précèdent ne seront pas lues sans intérêt par les géomètres.

—

Recherches sur la structure de l'appareil digestif et sur les phénomènes de la digestion chez les Aranéides dipneumones ; par M. Félix Plateau, membre de l'Académie.

TROISIÈME PARTIE.

PARTIE PHYSIOLOGIQUE, OBSERVATIONS ET EXPÉRIENCES SUR LA DIGESTION.

§ XV.

AVANT-PROPOS.

Dans son *Traité d'histologie de l'homme et des animaux* (1), M. Leydig s'exprimait ainsi : « Au point de vue » des phénomènes intimes qui se passent dans les organes » isolés composant le système de la digestion, nous » n'avons, à cause de l'exiguïté de nos connaissances sur

---

» du n^e ordre : j'espère pouvoir compléter, pour la prochaine séance de » l'Académie, un travail sur cet objet, faisant suite à mon précédent Mé- » moire.

» Recevez, etc.

» C. Le Paige.

» Herstal, le 26 octobre 1877. »

Ce dernier travail est celui même sur lequel nous venons de faire notre rapport à la classe.

(1) Traduction française. Paris, 1866, p. 413.