*Suite à la note précédente sur l'*ÉVOLUTION. — I. *Synthèse des théorèmes de Pascal et de Brianchon.* — II. *Nouvelles extensions de ces théorèmes.* — III. *De l'*ÉVOLUTION *dans l'hexagone inscrit ou circonscrit à une conique;* par M. F. Folie, membre de l'Académie.

§ I.

En cherchant à étendre à l'hexagone la propriété que nous avons énoncée, sous le nom d'ÉVOLUTION, relativement à deux triangles, l'un inscrit à une conique, l'autre circonscrit à la même courbe par les sommets du premier, nous avons dû tout d'abord tâcher de mettre l'équation de la conique, rapportée à l'hexagone, sous une forme analogue à celle que nous avions trouvée en la rapportant aux deux triangles, et qui nous avait donné l'idée de cette propriété.

Or nous avons été étonné de rencontrer, dans le cours de cette recherche, une proprieté fort curieuse, et tout à fait inattendue, en ce sens que nous n'en avions, pas plus que nos maîtres, prédécesseurs ou contemporains, nul pressentiment, il faut bien le reconnaître.

Et pourtant, cette propriété appartient, presque dans ses propres termes, à Desargues.

Pascal, s'il avait pensé à combiner la proposition de Desargues avec l'hexagramme mystique, fût arrivé bien certainement au théorème de Brianchon.

Et il est vraiment surprenant que ce dernier surtout, et les grands géomètres qui lui ont succédé, n'aient

pas trouvé le lien étroit qui unissait la proposition de Desargues à celles de Pascal et de Brianchon.

C'est bien ici le lieu d'appliquer ces paroles si profondément vraies de M. Paul Serret (1), et qui, dans le cas présent, s'appliquent plus encore à lui-même qu'à tout autre, puisqu'il a rencontré cette propriété sur son chemin, et qu'il s'est arrêté au moment où il n'avait plus qu'un pas à faire pour la saisir :

« Mais il est présumable qu'il y faudra surtout infini-
» ment de bonheur; et c'est ce que la plus profonde
» géométrie ne donne pas toujours. »

Afin de mettre notre énoncé sous une forme aussi concise que possible, nous rappellerons les définitions suivantes, que nous avons données dans nos *Fondements d'une géométrie supérieure cartésienne*, et dont on trouvera la justification dans ce Mémoire. Cette justification ressortira au surplus, à l'évidence, des pages qui suivent.

« Nous appellerons polygones conjugués de n côtés,
» inscrits à une courbe du n^{me} ordre, deux polygones tels
» que chaque côté de l'un passe par l'un des points d'in-
» tersection de chaque côté de l'autre avec la courbe.

» De même, nous appellerons polygones conjugués de
» $n+1$ côtés, inscrits à une courbe du n^{me} ordre, deux
» polygones tels que chaque côté de l'un passe par l'un
» des points d'intersection de chaque côté de l'autre,
» un seul excepté, avec la courbe; les côtés opposés dans
» ces deux polygones seront ceux qui n'auront pas de
» point commun sur la courbe.

» Ainsi, deux triangles conjugués inscrits à une

(1) *Géométrie de direction*, p. 518.

» conique sont, par exemple, deux triangles de côtés » respectifs A, B, C, et a, b, c, tels que A passe par l'un » des deux points d'intersection de b et c avec la conique; » B par l'autre intersection de c et par l'une de celles de » a; et enfin C par l'autre intersection de a et de b; et les » côtés opposés, dans ces deux triangles, sont A et a, B » et b, C et c, parce qu'ils ne se coupent pas deux à deux » sur la courbe.

» Pour tracer ces deux triangles, on commencera par » former le premier au moyen de trois côtés A, B, C, qui » coupent chacun la courbe en deux points; le second se » formera en joignant ces points deux à deux par des » droites distinctes de A, B, C, ce qui pourra se faire de » huit manières différentes.

» Les deux triangles A, B, C, a, b, c, forment évidem- » ment un hexagone inscrit; mais on verra que la dénomi- » nation de triangles conjugués inscrits se prête immé- » diatement à une généralisation que ne comporte pas » la dénomination d'hexagone inscrit (1). »

Cela posé, nous pourrons dire que :

(I). *Dans deux triangles conjugués inscrits à une conique, les droites de jonction des sommets opposés, pris deux à deux, concourent en un même point;* c'est-à-dire que les six sommets, qu'on obtient par les intersections succes-

(1) Voir *Fondements d'une géométrie supérieure cartésienne*, pp. 5 et 6. Peut-être un autre terme que *conjugués* eût-il été préférable, parce que celui de *polygone conjugué* à *une conique* existait déjà; mais on doit éviter, autant que possible, les néologismes; et la confusion est ici d'autant moins à craindre, qu'elle ne pourrait avoir lieu que pour les coniques, et qu'ensuite, dans notre définition, il s'agit toujours, non d'*un* polygone conjugué à la courbe, mais de *deux* polygones conjugués *inscrits* ou *circonscrits* à la courbe.

sives des côtés alternants d'un hexagone inscrit à une conique, forment ceux d'un hexagone circonscrit à une autre conique.

Le corrélatif, qui n'est autre chose, au fond, que la réciproque de ce théorème, est également vrai; on peut donc énoncer cette propriété :

(II). *Dans deux triangles conjugués circonscrits à une conique, les points d'intersection des côtés opposés, pris deux à deux, sont en ligne droite;* c'est-à-dire que les six côtés, qu'on obtient par les jonctions successives des sommets alternants d'un hexagone circonscrit à une conique, forment ceux d'un hexagone inscrit à une autre conique.

Soient, par exemple, 1, 2, 3, 4, 5, 6, les côtés successifs d'un hexagone inscrit à une conique; de sorte que 1, 3, 5 et 2, 4, 6 sont les côtés des deux triangles conjugués; et que 1 et 4, 2 et 5, 3 et 6 sont les côtés, respectivement opposés, de ces deux triangles.

Désignons par I, III, V et II, IV, VI les sommets, opposés aux côtés de même nom, dans ces triangles.

On voit que les sommets, respectivement opposés, des deux triangles sont I et IV, II et V, III et VI; et l'énoncé (I) dit que les droites de jonction (I, IV), (II, V), (III, VI) concourent en un même point.

Réciproquement, I, II, III, IV, V, VI sont les sommets successifs d'un hexagone circonscrit à une conique; de sorte que I, III, V et II, IV, VI sont les sommets des deux triangles conjugués circoncrits, et que I et IV, II et V, III et VI sont les sommets, respectivement opposés, de ces deux triangles.

1, 3, 5 et 2, 4, 6, seront les côtés, opposés aux sommets de même nom, dans ces triangles.

On voit que les côtés respectivement opposés des deux triangles sont 1 et 4, 2 et 5, 3 et 6, et l'énoncé (II) dit que les points d'intersections (1, 4), (2, 5), (3, 6), sont situés en ligne droite.

Il résulte de là que :

Les intersections successives des côtés alternants d'un hexagone de Pascal forment les sommets successifs d'un hexagone de Brianchon ; de même que :

Les jonctions successives des sommets alternants d'un hexagone de Brianchon forment les côtés successifs d'un hexagone de Pascal;

Et, enfin, que ces deux propriétés se retrouvent, au fond, dans la suivante, découverte par Desargues :

Si deux triangles sont tels, que leurs côtés se coupent, deux à deux respectivement, en trois points situés en ligne droite, les droites de jonction des sommets opposés, pris deux à deux, concourent en un même point; et réciproquement.

Il suffit, pour se convaincre immédiatement de l'identité de ces propriétés, de se rappeler :

1° Qu'un hexagone inscrit à une conique est un système de deux triangles tels que leurs côtés opposés se coupent en trois points situés en ligne droite; ou

2° Qu'un hexagone circonscrit est un système de deux triangles tels que les droites de jonction des sommets opposés concourent en un même point.

Appliquant le théorème de Desargues au premier cas, on voit que les droites de jonction des sommets opposés des deux triangles concourent en un même point, et que ces sommets sont, par suite, ceux d'un hexagone de Brianchon, comme le dit l'énoncé (I).

Dans le second cas, on appliquera la réciproque du théorème de Desargues, et l'on verra que les points

d'intersection des côtés opposés des deux triangles sont situés en ligne droite, et que ces côtés sont, par suite, ceux d'un hexagone de Pascal, comme le dit l'énoncé (II) (1).

---

(1) Plus d'un lecteur se demandera certainement s'il est bien possible que cette liaison si évidente, entre trois des théorèmes les plus fondamentaux de la géométrie supérieure, n'ait été aperçue par aucun géomètre.

Nous nous sommes également posé cette question; et, après avoir vérifié scrupuleusement dans la plupart des traités connus, si nous ne trouverions aucune trace de cette liaison, nous croyons pouvoir répondre hardiment par la négative.

Brianchon, Steiner, Poncelet, Hesse, etc., ont bien cherché les propriétés des hexagones dont l'un est le polaire réciproque de l'autre; mais ils ne semblent pas s'être doutés que l'hexagone, dont les sommets successifs sont les intersections des côtés alternants d'un hexagone de Pascal, peut être considéré comme le polaire réciproque de ce dernier. (V. *Traité des propriétés projectives*, édition de 1865, t. I, n^{os} 227-228 et 570-572. — *Steiner-Schröter*, *Vorlesungen*, p. 130. — *Hesse*, article cité dans la note suivante.)

C'est grâce à notre définition des couples de triangles conjugués inscrits ou circonscrits à une conique, que cette liaison apparaît de la manière la plus manifeste; et l'on y verra une nouvelle justification, surabondante du reste, de cette définition, sans laquelle il nous eût été difficile d'étendre, aux courbes et aux surfaces supérieures, les théorèmes de Pascal et de Brianchon.

Peut-être n'est-il pas inutile que nous donnions ici, dans des termes aussi analogues que possible à ceux de notre énoncé, celui qu'on trouve dans les passages cités plus haut, de Steiner-Schröter et de Hesse, afin qu'on puisse juger de la différence qui existe entre ces deux énoncés :

Les intersections successives des côtés alternants d'un hexagone de Brianchon sont les sommets successifs d'un hexagone de Pascal; et réciproquement :

Les jonctions successives des sommets alternants d'un hexagone de Pascal sont les côtés successifs d'un hexagone de Brianchon.

Nous ferons remarquer que ces énoncés peuvent se traduire en un théorème analogue à celui de Desargues, que nous avons mentionné; et que leur combinaison avec les nôtres donnera naissance à une série indéfinie d'hexagones alternants de Pascal et de Brianchon.

Ce théorème donne donc, à ceux de Pascal et de Brianchon, un complément auquel on pouvait d'autant moins s'attendre, que les développements de ces théorèmes ont été l'objet des études des géomètres contemporains les plus distingués, les Steiner, les Chasles, les Kirkman, les Cayley, les Salmon, les Hesse (1). Il est, en outre, un trait d'union aussi remarquable, à un certain point de vue, que celui que fournit le principe de dualité, entre ces deux théorèmes si fameux dans l'histoire de la Géométrie, en ce qu'il les montre, non pas séparément, comme le principe de dualité, dans deux figures différentes, mais simultanément, dans une seule et même figure. Enfin il pourra devenir quelque jour, grâce aux méditations d'un profond esprit, le germe d'un nouveau principe, comme le théorème de Brianchon a été le germe du principe de dualité.

Peut-on appliquer ce théorème aux courbes supérieures? Nous avons trouvé, dans le Mémoire cité plus haut (2), l'extension des théorèmes de Pascal et de Brianchon aux courbes planes, et nous avons démontré qu'elle est tout à fait générale jusqu'au 5[e] ordre ou à la 5[e] classe. Il est donc certain que le théorème précédent pourra s'étendre, comme ces derniers, dont il est la synthèse, aux courbes supérieures. Mais ici surgira, tout naturellement, une difficulté qu'il faudra surmonter d'abord.

(1) Nous ne voulons pas insister ici sur les nombreux développements que ce théorème va produire dans les propriétés des points et des droites de Steiner, Kirkman, Cayley et Salmon. Voir, au sujet de ces propriétés, HESSE, *Ueber das Hexagrammum mysticum*, Journal de Crelle-Borchardt, tome LXVIII, page 193, année 1868, et BAUER, *Ueber das Pascal'sche Theorem*, MÉM. DE L'ACAD. DE MUNICH, tome XI, 1874.

(2) Voir *Fondements d'une géométrie supérieure cartésienne*, pp. 18 à 59.

Les coniques, en effet, étant tout à la fois du second ordre et de seconde classe, on conçoit, pour ces courbes, la synthèse des théorèmes de Pascal et de Brianchon dans une seule et même figure. Faudra-t-il, pour que cette synthèse puisse avoir lieu dans les courbes supérieures, que leur classe soit aussi la même que leur ordre, c'est présumable. Toutefois, nous n'avons pas encore pu vérifier ce point important.

Si ces prévisions se confirmaient, la synthèse des théorèmes analogues à celui de Pascal pour les courbes du troisième ordre (1), et à celui de Brianchon pour celles de la troisième classe (2), s'énoncerait :

Les sommets de deux quadrilatères conjugués, inscrits à une courbe du troisième ordre et de la troisième classe, sont ceux de deux tétragones conjugués circonscrits à une autre courbe du troisième ordre et de la troisième classe, les sommets opposés de ces deux tétragones étant les intersections respectives des côtés opposés des deux quadrilatères;

Et réciproquement :

Les côtés de deux tétragones conjugués, circonscrits à une courbe du troisième ordre et de la troisième classe, sont ceux de deux quadrilatères conjugués inscrits à une autre courbe du troisième ordre et de la troisième classe, les

(1) Voici l'énoncé de ce théorème : *Dans un système de deux quadrilatères conjugués inscrits à une courbe du troisième ordre, les côtés opposés se coupent en quatre points situés en ligne droite.* Fondements, etc., p. 22.

(2) Voici l'énoncé de ce théorème : *Dans un système de deux quadrilateres conjugués circoncrits à une courbe de la troisième classe, les droites qui relient les quatre couples de sommets opposés concourent en un même point.* Fondements, etc., p. 44.

côtés opposés de ces deux quadrilatères étant les jonctions respectives des sommets opposés des deux tétragones (1).

Cet énoncé pourrait s'étendre avec la plus grande facilité aux courbes supérieures et, probablement aussi, aux surfaces du troisième ordre et de la troisième classe (2), ainsi qu'aux courbes gauches.

On voit surgir, dans ce qui précède, l'idée d'un lien, à peine entrevu jusqu'à ce jour, entre les deux grandes divisions que le principe de dualité a créées dans les figures géométriques.

Cette idée deviendra, sans doute, quelque jour, féconde en applications.

§ II.

En appliquant aux courbes du troisième ordre, quelle que soit leur classe, la méthode dont nous avons fait usage dans le cas de l'hexagone inscrit à une conique, nous sommes arrivé également à des résultats intéressants.

Nous mentionnerons le suivant, que le lecteur traduira

(1) Depuis que ces lignes ont été écrites, nous avons pu vérifier que notre théorème sur l'*évolution*, dans deux triangles, l'un inscrit, l'autre circonscrit à une *conique*, est applicable également à deux triangles, l'un inscrit, l'autre circonscrit à une *cubique* (courbe du 3^{me} ordre et de la 3^{me} classe); et nous présumons que cette propriété caractérise toutes les courbes planes dont l'ordre est le même que la classe. (15 août 1877.)

(2) Voici les énoncés des théorèmes relatifs à chacune de ces catégories de surfaces : *Dans un système de deux tétraèdres conjugués inscrits à une surface du troisième ordre, les faces opposées se coupent suivant quatre droites situées dans un même plan.*

Dans un système de deux tétragones conjugués inscrits à une surface de la troisième classe, les droites qui unissent deux à deux les sommets opposés concourent en un même point. Fondements, etc., pp. 104 et 118.

aisément en son corrélatif, pour les courbes de la troisième classe :

Théorème. *Si l'on combine trois à trois, dans un ordre quelconque, les couples de côtés opposés de deux quadrilatères conjugués inscrits à une courbe du troisième ordre, on obtient un hexagone inscrit à une conique,* propriété presque évidente du reste, puisque, dans cet hexagone, les côtés opposés se coupent en trois points situés en ligne droite.

Les quatre coniques qui résultent de ces combinaisons jouissent d'autres propriétés remarquables, sur lesquelles nous reviendrons.

Par la même raison, on voit que l'on peut énoncer également les théorèmes suivants, qui se déduisent immédiatement de ceux que nous avons donnés dans l'ouvrage cité (1) :

Théorème. *Si l'on combine trois à trois, dans un ordre quelconque, les couples de côtés opposés de deux quinquélatères (ou de deux sélatères) conjugués inscrits à une courbe du quatrième (ou du cinquième) ordre, on obtient un hexagone inscrit à une conique.*

Et de même :

Théorème. *Si l'on combine quatre à quatre, dans un ordre quelconque, les couples de côtés opposés de deux*

(1) Voici ces énoncés :

Dans un système de deux quinquélatères conjugués inscrits à une courbe du quatrième ordre, les côtés opposés se coupent en cinq points situés en ligne droite.

Dans un système de deux sélatères conjugués inscrits à une courbe du cinquième ordre, les côtés opposés se coupent en six points situés en ligne droite. Fondements, etc., pp. 26 et 29.

quinquélatères (ou de deux sélatères) conjugués inscrits à une courbe du quatrième (ou du cinquième) ordre, on obtient un système de deux quadrilatères conjugués inscrits à une courbe du troisième ordre.

Enfin :

Théorème. *Si l'on combine cinq à cinq, dans un ordre quelconque, les couples de côtés opposés de deux sélatères conjugués inscrits à une courbe du cinquième ordre, on obtient un système de deux quinquélatères conjugués inscrits à une courbe du quatrième ordre.*

On énoncera les théorèmes corrélatifs de la même manière, en remplaçant simplement les termes de *pluri-latères conjugués inscrits* par ceux de *polygones conjugués circonscrits*, le mot *côtés* par celui de *sommets*, et enfin l'*ordre* par la *classe* (1).

De même encore :

Théorème. *Si l'on combine trois à trois, dans un ordre quelconque, les couples de faces opposées de deux tétraèdres conjugués inscrits à une surface du troisième ordre, on obtient un couple de trièdres conjugués inscrits à un hyperboloïde.*

Et le théorème corrélatif :

Théorème. *Si l'on combine trois à trois, dans un ordre quelconque, les couples de sommets opposés de deux tétragones conjugués circonscrits à une surface de la troisième classe, on obtient un couple de trigones conjugués circonscrits à un hyperboloïde.*

(1) Voir *Fondements*, etc., pp. 6 et 7 et 32 à 49.

§ III.

Il nous reste à montrer ce que devient, pour l'hexagone inscrit à une conique, la relation de l'Évolution, que nous avons trouvée pour un couple de triangles, l'un inscrit, et l'autre circonscrit à une conique.

Si nous désignons par 1, 2, 3, 1', 2', 3', les côtés consécutifs d'un hexagone inscrit, de sorte que 1, et 1', 2 et 2', 3 et 3' sont les côtés opposés de cet hexagone; par *1, 2, 3* les diagonales qui relient les sommets opposés, et qui passent respectivement par les intersections 23, 31, et 12; par *1', 2', 3'* celles qui passent par les intersections 2'3, 3'1 et 1'2; enfin, si nous représentons par les mêmes chiffres les points d'intersection d'une transversale avec ces diverses droites, il est aisé de démontrer qu'on aura les relations

$$12'.\,23'.\,31' \times 12'.\,23'.\,31' = 1'2.\,2'3.\,3'1 \times 1'2.\,2'3.\,3'1,$$
$$12.\,23.\,31 \times 1'2.\,2'3.\,3'1 = 12.\,23.\,31. \times 12'.\,23'.\,31',$$

ainsi que d'autres analogues, mais moins symétriques.

Il est à remarquer que chacune de ces égalités peut être considérée comme le produit de deux relations simples d'Évolution, qui n'ont, toutefois, pas lieu séparément (1) : la première, comme le produit des relations d'évolution entre 11', 22', 33', et entre *11', 22', 33'*; la seconde, comme le produit des relations d'évolution entre *11, 22, 33* et *1'1, 2'2, 3'3*.

Le lecteur écrira aisément les relations corrélatives, qui ont lieu pour l'hexagone circonscrit.

(1) C'est par inadvertance que nous les avons indiquées, dans le *Bulletin* de mai, comme existant.