*Sur l'*ÉVOLUTION, *ou nouvelle proposition fondamentale dans la théorie des coniques et des surfaces du second degré, et son extension aux courbes et aux surfaces supérieures;* par M. F. Folie, membre de l'Académie.

Dans nos leçons sur la géométrie supérieure, nous avons été amené à étendre les propriétés involutoires dont nous nous sommes occupé dans un précédent ouvrage (1).

Ces dernières propriétés se rapportent exclusivement à des figures polygonales ou polyédrales, *inscrites* à des courbes ou à des surfaces d'un certain *ordre*, ou bien *circonscrites* à des courbes ou à des surfaces d'une certaine *classe*.

On n'a pas encore, à notre connaissance, cherché à transporter ces mêmes propriétés à des systèmes de figures, dont les unes sont *inscrites*, les autres *circonscrites* à une même courbe ou à une même surface.

Dans cette recherche, comme dans une multitude d'autres, il eût suffi de se poser la question, dans un cas simple, pour la résoudre, et pour être conduit à étendre, par voie de généralisation, le résultat trouvé, à tous les cas auxquels il est immédiatement applicable.

Ce n'est pas que les géomètres philosophes n'aient aperçu ce desideratum, témoin les lignes suivantes de M. P. Serret (2) : « Et non-seulement nous ne savons rien encore » des propriétés analogues de six éléments *mêlés* d'une » conique : points et tangentes, couples de droites ou de

(1) *Fondements d'une géométrie supérieure cartésienne*, par F. Folie. Bruxelles, F. Hayez, imprimeur de l'Académie royale de Belgique. 1872.

(2) *Géométrie de direction. Application des coordonnées polyédriques.* Paris, Gauthier-Villars, imprimeur-libraire. 1869, page 518.

» points conjugués, triangles inscrit et circonscrit; mais » personne ne paraît avoir remarqué qu'il nous reste sur » ce point quelque chose à apprendre. »

Cependant, ni M. P. Serret, en écrivant ces lignes, ni les autres géomètres, en les lisant (et je suis de ce nombre), n'ont songé à se demander si, par exemple, l'involution qui a lieu entre les trois couples de points déterminés, par une transversale, sur une conique, sur deux des côtés d'un triangle inscrit, et sur le troisième côté et la tangente au sommet opposé, ne donnait pas lieu à une relation analogue entre les couples de points déterminés, par une transversale, sur chaque côté du triangle et sur la tangente au sommet opposé; idée toute simple, cependant, d'une vérification tout à fait élémentaire, et qui semble tellement naturelle, qu'une fois trouvée, on s'étonne qu'elle ne l'ait pas été tout d'abord par Desargues lui-même.

Eh bien, non! l'on ne s'est pas posé cette question; et nous-même, nous n'y sommes arrivé que par une voie indirecte.

C'est cette voie que nous croyons utile d'indiquer, pensant qu'il y a, pour les jeunes géomètres, un plus grand profit à retirer de cet historique, que d'une série, même parfaitement coordonnée, de propositions, dont on saisit bien la déduction, mais sans en connaître le point de départ.

Ce point de départ, le voici :

On sait que, lorsqu'une surface du second degré est circonscrite à un tétraèdre, les faces de celui-ci coupent les plans tangents aux sommets opposés suivant quatre droites qui appartiennent à un même hyperboloïde; la démonstration consistant à faire voir qu'une droite, qui rencontre trois de ces intersections, rencontre la quatrième. Or, en rapprochant ce mode de démonstration de celui dont nous avons fait usage pour étendre aux surfaces du second degré le théorème de Pascal, nous avons constaté une ressemblance frappante dans les deux modes ; nous en avons conclu que, ce dernier mode reposant sur une propriété involutoire (1), il en devait probablement être de même du premier.

Nous étions donc induit ainsi à rechercher s'il n'existait pas une relation involutoire entre les faces des tétraèdres inscrit et circonscrit.

Mais, si cette relation existait, on devait évidemment pouvoir l'appliquer aux coniques, en remplaçant les tétraèdres par des triangles inscrit et circonscrit.

Or, il est aisé de vérifier que, si l'on appelle $1, 1'$; $2, 2'$; $3, 3'$, les points d'intersection d'une transversale quelconque avec les couples de côtés opposés de ces deux triangles, on a, entre ces points, la relation :

$$1\,2'.\,2\,3'.\,3\,1' = 1'\,2.\,2'\,3.\,3'\,1,$$

relation identique, au signe près, avec celle de l'involution, et à laquelle, pour la distinguer de cette dernière, nous donnerons le nom d'ÉVOLUTION.

Nous pourrons donc énoncer ce théorème :

Lorsqu'une conique est circonscrite à un triangle, les côtés de celui-ci, et les tangentes menées à la conique par les sommets opposés, sont coupés par une transversale en trois couples de points en ÉVOLUTION.

(1) Nous sommes parti en effet du théorème suivant :

Dans un quadrilatère gauche inscrit à une surface du second degré, une transversale quelconque rencontre les deux couples de faces opposées, et la surface, en trois couples de points qui sont en involution.

COROLLAIRE. *Lorsque deux quadrilatères gauches, inscrits à une surface du second degré, sont situés de telle manière que les intersections de trois de leurs faces deux à deux s'appuient sur une même droite, l'intersection des quatrièmes faces s'appuie sur cette droite.* — Fondements d'une géométrie supérieure cartésienne, pp. 86 et 87.

En transportant cette propriété des coniques aux surfaces du second degré, nous obtiendrons le théorème suivant :

Lorsqu'une surface du second degré est circonscrite à un tétraèdre, les faces de celui-ci, et les plans tangents menés à la surface par les sommets opposés, sont coupés par une transversale en quatre couples de points en ÉVOLUTION.

Ce dernier se déduirait de notre théorème, cité en note (1), sur le quadrilatère inscrit à une surface du second degré.

Tels sont ces théorèmes, dans lesquels on trouve mêlés à la fois les deux éléments d'une courbe ou d'une surface : les points, et les tangentes ou les plans tangents.

Ils ont évidemment leurs corrélatifs, qui sont trop aisés à formuler pour que nous nous y arrêtions.

Mais l'induction nous amenait naturellement à généraliser davantage le théorème sur les coniques, c'est-à-dire à remplacer les tangentes par des cordes, et, dans le théorème corrélatif, les cordes par des tangentes.

Cette induction s'est encore vérifiée, plus même, peut-être, que nous ne nous y attendions. Nous nous bornerons pour le moment, toutefois, à énoncer le théorème suivant :

Une transversale coupe les côtés opposés d'un hexagone inscrit à une conique en trois couples de points en ÉVOLUTION,

propriété moins frappante que celle de Pascal, mais pourtant plus primitive, quoique venue plus tard, puisqu'elle a celle-ci comme corollaire immédiat.

De même :

Les rayons menés par un centre quelconque, et par les sommets opposés d'un hexagone circonscrit à une conique, forment un faisceau en ÉVOLUTION.

(1) Voir la note précédente.

Les propriétés analogues existent pour les surfaces du second degré ; et, chose singulière, elles ont été données, en partie, par M. P. Serret, pour les cubiques gauches, tandis qu'il a omis de chercher leurs correspondantes dans le plan, et même sur les surfaces du second degré.

Il est vrai qu'il considère son théorème comme étant tout simplement l'analogue de celui de Desargues, ainsi qu'il le dit lui-même, en donnant de ces deux théorèmes les énoncés suivants (1) :

Une corde et un quadrangle étant inscrits à une conique, les deux extrémités de cette corde et ses traces sur les côtés opposés du quadrangle font trois couples de points harmoniquement conjugués par rapport à un même système de deux points, *ou six points en involution.*	*Une corde et un octaèdre hexagonal étant inscrits à une cubique gauche, les deux extrémités de cette corde et ses traces sur les plans des faces opposées de l'octaèdre font cinq couples de points* harmoniquement conjugués par rapport à un même système de deux points, *ou dix points en involution.*
Et si l'on substitue aux deux couples de côtés opposés *de ce quadrangle* les trois couples de côtés opposés du *quadrangle* complet *correspondant, on aura en tout huit points en involution.*	*Et si l'on substitue* aux quatre couples de faces opposées *de cet octaèdre* les dix couples de faces opposées *de tous les octaèdres construits sur les mêmes sommets, on aura en tout vingt-deux points en involution.*

Mais, pour nous, le théorème de M. P. Serret sur les cubiques gauches se lie plus intimement à un théorème plus général sur les surfaces du second degré, dont ces courbes sont l'intersection.

Nous aurons l'occasion de revenir sur ces théorèmes, que nous n'avons pas encore pu développer complétement jusqu'à présent, ainsi que sur d'autres extensions et généralisations dont ils sont susceptibles, particulièrement dans la théorie des surfaces du troisième ordre ou de la troisième classe (1).

(1) *Géométrie de direction*, p. 525.

Nous ferons remarquer aussi que notre théorème fondamental sur les triangles inscrit et circonscrit à une conique peut s'étendre aux courbes planes supérieures, comme nous y avons étendu les théorèmes de Desargues, de Pascal et de Brianchon (2), et qu'il est susceptible, comme ces derniers, de deux ordres de généralisation tout à fait distincts (3).

Enfin, de même que nous avons passé, dans les coniques, du quadrilatère à l'hexagone, on pourra passer de celui-ci à l'octogone, composé, soit de 8 cordes, soit de 8 tangentes, soit de 4 cordes et de 4 tangentes, et ainsi de suite. On trouvera, de cette manière, les conditions nécessaires pour que 8 points (ou 8 tangentes), etc., appartiennent à une même conique, et l'on pourra suivre la même marche dans les courbes supérieures, et en essayer l'application aux surfaces.

Les théories que nous venons de résumer ouvrent un vaste champ de recherches, même dans cette étude des coniques, qui semblait bien épuisée, depuis les travaux des Steiner, des Chasles et des Hesse, au moins dans ses théorèmes fondamentaux.

(1) Voir à ce sujet nos extensions, à ces surfaces, des théorèmes de Pappus, de Desargues, de Pascal et de Brianchon. — *Fondements d'une géométrie supérieure cartésienne*, liv. II, ch. II Iet IV, pp. 99 à 119.

(2) *Ibid.* Livre Ier, ch. I et II, pp. 20 à 49.

(3) *Ibid.* Addition aux ch. I et II du Livre Ier, pp. 50 à 62.