
XII. — *Note sur l'extension des théorèmes de Pascal
et de Brianchon aux courbes planes et aux
surfaces du 3^e ordre ou de la 3^e classe,*

PAR

F. FOLIE,

Correspondant de l'Académie royale de Belgique.

En adressant cette note à l'Académie, nous avons pour but de faire connaître dès maintenant quelques théorèmes auxquels nous sommes arrivé en poursuivant des recherches qui ne sont pas encore achevées, et qui devront être l'objet de développements assez considérables (1).

Ces théorèmes attireront l'attention des géomètres, surtout en ce qu'ils sont l'extension du fameux théorème de Pascal aux surfaces, et par suite aux courbes planes du 3^e ordre, et celle du théorème de Brianchon aux surfaces et aux

(1) Cette note avait été, en effet, présentée à la classe des sciences de l'Académie dans sa séance du 3 décembre 1870. (Voir *Bulletin de l'Académie*, 2^e série, t. 30, n^o 12). Comme nous avons depuis lors (le 2 février 1871), adressé à l'Académie le travail analytique complet auquel nous faisons ici allusion, nous avons prié M. le secrétaire perpétuel de vouloir bien nous renvoyer notre note, qui ferait double emploi avec ce travail dans les Mémoires de l'Académie, et il a eu l'obligeance de déférer à notre désir.

S'il surgissait une question de priorité relativement à la découverte des théorèmes qui font l'objet de cette note, nous ferions observer que nous avons découvert ceux qui concernent les surfaces dès le mois de juin dernier, et que nous en avons informé vers cette époque plusieurs savants distingués; quant à ceux qui concernent les courbes, nous les avons trouvés un an auparavant (juin 1869), comme on le verra plus bas.

courbes planes de la 3^e classe; et, en outre, en ce qu'ils semblent prouver définitivement que l'extension de ces théorèmes aux surfaces du 2^e degré, qui a tant préoccupé les géomètres, n'est pas autre chose que ces propriétés de l'hexagone gauche décrit sur un hyperboloïde que Dandelin a données dès 1826 (1).

Dans cette note, nous supposerons connus les principaux théorèmes sur les surfaces du 3^e ordre, qui sont dus à Steiner (2), et qui ont fait l'objet de développements nouveaux de la part de MM. Clebsch (3), Cremona (4), Schrödter (5), Geiser, etc. (6), et nous en déduirons l'extension du théorème de Pascal par une voie purement géométrique. Quant à l'extension du théorème de Brianchon, nous la tirerons simplement du principe de dualité.

Dans un prochain travail, nous indiquerons la véritable voie qui nous a conduit à étendre aux courbes planes et aux surfaces du 3^e ordre et à celles de la 3^e classe, non-seulement les théorèmes qui font l'objet de cette note, mais encore la plupart des autres théorèmes fondamentaux de la géométrie supérieure.

Sur toute surface du 3^e ordre il existe 27 droites remarquables dont la découverte est due à Steiner; elles jouissent de cette propriété essentielle que chacune d'entre elles coupe 5 couples d'entre les autres, et forme avec elles 5 triangles tritangents, de sorte que les 27 droites, par leurs combinaisons entre elles, peuvent former 45 de ces triangles. Dans deux de ces triangles, qui n'ont aucune droite commune, les côtés se coupent nécessairement deux

(1) *Nouveaux Mémoires de l'Académie de Bruxelles*, t. 3, 1826.

(2) *Journal de Crelle*, t. 53.

(3) *Id.*, t. 59 et 65.

(4) *Id.*, t. 68.

(5) *Journal de Crelle*, t. 56.

(6) *Id.*, t. 69.

à deux; et il en résulte que deux de ces triangles suffisent pour construire deux trièdres que nous appellerons conjugués, et qui sont tels que chaque face de l'un est déterminée par un triangle dont les côtés appartiennent respectivement aux trois faces de l'autre : si les trois faces de l'un de ces trièdres sont déterminées par les triangles

$$a, b, c; a', b', c'; a'' b'', c'',$$

les faces du trièdre conjugué le seront, par exemple, par les triangles

$$a, a', a''; b, b', b''; c, c', c''.$$

Telles sont les propriétés sur lesquelles nous fonderons notre théorème, et dont on pourra trouver les développements dans les travaux cités.

Ce théorème est relatif à un autre genre de figures conjuguées dont nous aurons d'abord à donner la définition et à démontrer l'existence.

Nous voulons parler d'un *système de deux tétraèdres conjugués inscrits à une surface du 3^e ordre.*

Nous nommons ainsi un système de deux tétraèdres tels que chaque face de l'un est déterminée par un triangle tritangent dont les côtés appartiennent respectivement à trois des faces de l'autre; les faces opposées de ces deux tétraèdres seront celles qui ne renferment pas un même côté : si les faces du premier tétraèdre sont déterminées par les triangles

$$a, b, c; a', b', c'; a'', b'', c''; a''', b''', c''';$$

celles du second le seront, par exemple, par les triangles

$$a', b'', c'''; a, b''', c''; a''', b, c'; a'', b', c;$$

et les faces opposées occupent le même rang dans les deux séries.

Ces tétraèdres jouissent de la propriété suivante :

Théorème. — *Dans un système de deux tétraèdres conjugués inscrits à une surface du 3^e ordre, les faces opposées se coupent suivant quatre droites situées dans un même plan.*

Commençons par prouver l'existence de ces deux tétraèdres : la démonstration du théorème en découlera pour ainsi dire d'elle-même.

Soient d'abord deux triangles tritangents n'ayant aucun côté commun : a, b, c ; a', b', c' . Comme leurs côtés doivent se couper deux à deux, supposons que a coupe a' : leur plan déterminera sur la surface une troisième droite d ; que b coupe c' : leur plan déterminera a'' ; que b' coupe c : leur plan déterminera a''' .

Aux deux premiers triangles nous pourrions joindre ceux-ci :

$$a, a', d; a''', b, c'; a'', b', c;$$

et comme a coupe b et c , que a' coupe b' et c' , il faut que d coupe a''' et a'' , ce qui nous donne un nouveau triangle $a''a'''d$.

Les six triangles précédents forment deux trièdres conjugués dont les faces respectives, que nous nommerons respectivement A, B, X et C', D', Y, seront :

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \text{A} & \text{B} & \text{X} \\ abc & a'b'c' & a''a'''d \end{array} \right. \text{ et } \left\{ \begin{array}{ccc} \text{C}' & \text{D}' & \text{Y} \\ a'''bc' & a''b'c & aa'd; \end{array} \right.$$

mais nous pouvons former de même deux nouveaux trièdres conjugués en partant des triangles a', b'', c''' et a, b''', c'' dont les côtés a et a' , b'' et c'' , b''' et c''' qui se coupent, déterminent des triangles tritangents dont les troisièmes côtés sont d , a'' , et a''' , comme on s'en assure en remarquant que les côtés des triangles a', b'', c''' et d, a'', a''' ou a, b''', c'' et d, a'', a''' doivent se couper deux à deux.

On pourrait, au reste, partir de l'un de ces derniers couples de triangles, et l'on arriverait au même système de trièdres conjugués :

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \text{A}' & \text{B}' & \text{X} \\ a'b''c''' & ab'''c'' & a''a'''d \end{array} \right. \text{ et } \left\{ \begin{array}{ccc} \text{C} & \text{D} & \text{Y} \\ a''b''c'' & a'''b'''c''' & aa'd. \end{array} \right.$$

On voit, par le tableau des faces respectives A, B, etc., de ces couples de trièdres conjugués, que si l'on considère A, B, C, D et A', B', C', D' comme les faces de deux tétraèdres,

ceux-ci seront conjugués suivant la définition précédente, et que les faces A et A' , etc., sont opposées l'une à l'autre; cette définition est donc justifiée.

Il s'agit enfin de démontrer que les faces opposées se coupent deux à deux suivant quatre droites situées dans un même plan.

Or, remarquons que chacune des 12 droites des deux tétraèdres en coupe 5 d'entre elles; ainsi, par exemple, que a coupe a' , b , c , b''' , c'' ; que b coupe a , c , a'' , c' , a''' , etc., et désignons les points d'intersection de deux de ces droites par les deux lettres qui représentent chacune d'entre elles.

Nous verrons alors que l'intersection des faces AA' passe par aa' , bb'' , cc''' ;

Que l'intersection BB' passe par aa' , $b'b''$, $c'c''$;

Et par suite, que ces deux droites ayant le point aa' commun, les 5 points précédents sont dans un même plan.

Démontrons que les intersections CC' et DD' sont aussi dans ce plan.

Or, elles passent toutes deux par deux de ces points :

CC' par bb'' et $c'c''$, DD' par $b'b''$, cc''' .

Le théorème est donc démontré.

Il est clair qu'en coupant la figure par un plan quelconque, on obtiendra l'extension du théorème de Pascal aux courbes planes du 3^e ordre; nous nous bornerons à l'énoncé, qui se comprendra aisément par ce qui précède :

Théorème. — *Dans un système de deux quadrilatères conjugués inscrits à une courbe plane du 3^e ordre, les couples de côtés opposés se rencontrent en quatre points situés en ligne droite.*

On pourrait rechercher dans les figures auxquelles se rapportent ces deux théorèmes quels sont les points et les lignes qui correspondent aux points de Steiner, par la découverte desquels ce géomètre illustre a complété le théorème de Pascal.

On pourrait rechercher également des extensions plus considérables de ce dernier théorème.

Mais, dans cette note, nous voulons nous borner au théorème fondamental.

Nous allons en établir le corrélatif pour les surfaces de la 3^e classe.

Ici, comme nous l'avons dit, nous déduirons simplement ce théorème du principe de dualité. Ce n'est pas à dire toutefois que ce principe y conduise immédiatement, ou du moins que l'application en soit simple, tant s'en faut; nous n'en voulons pour preuve que le silence gardé, à notre connaissance du moins, par les géomètres fameux que nous avons cités, sur les surfaces de la 3^e classe.

A la vérité, les théorèmes une fois établis, on voit avec quelle apparente simplicité on aurait pu les déduire du principe de dualité; mais si cette déduction était réellement simple, nul doute que nous n'en eussions au moins trouvé quelques résultats essentiels dans les travaux de Steiner ou de ses successeurs,

Quoi qu'il en soit, ce n'est que le principe de dualité dont nous ferons ici usage, réservant pour un prochain travail l'exposé de la méthode qui nous a conduit à ces propriétés.

En vertu de ce principe, aux 9 droites de la surface du 3^e ordre qui forment 3 à 3 les faces de deux trièdres conjugués, correspondent, sur la surface de la 3^e classe, 9 droites passant 3 à 3 par un même point, et qui sont les arêtes de deux systèmes de 3 trièdres, tels que chaque sommet d'un trièdre du premier système est le point de concours de 3 arêtes appartenant respectivement aux 3 trièdres du second système.

Afin de bien faire ressortir la dualité qui existe entre les surfaces du 3^e ordre et celles de la 3^e classe, nous nous permettrons de faire usage d'une dénomination nouvelle,

pour désigner un système de sommets tels que ceux que nous venons de considérer, et nous l'appellerons un *système de trigones conjugués*.

Dans les surfaces du 3^e ordre, nous avons eu un système de trièdres conjugués, tels que chaque face de l'un passe par trois droites appartenant respectivement aux trois faces de l'autre.

Dans les surfaces de la 3^e classe, nous avons de même un système de trigones conjugués, tels que chaque sommet de l'un est le point de concours de trois droites passant respectivement par les trois sommets de l'autre.

Si nous énonçons les propriétés corrélatives de celles que nous avons mentionnées, d'après Steiner, pour les surfaces de 3^e ordre, nous pourrions dire, relativement aux surfaces de la 3^e classe :

Chacune des 27 droites passe par le point de concours de 5 couples des autres, et forme avec celles-ci 5 sommets de trigones : les 27 droites, par leurs combinaisons entre elles, peuvent former 45 de ces sommets.

Si deux de ces sommets n'ont aucune droite commune, les 3 droites qui passent par chacun d'eux se couperont deux à deux en 3 points; et ces deux sommets suffiront pour déterminer un système de trigones conjugués.

Enfin, nommons *système de tétragones conjugués* un double système de 4 sommets tels que chaque sommet du premier système soit le point de concours de 3 droites passant respectivement par 3 sommets du second; et *sommets opposés* de ces deux tétragones ceux qui ne sont pas situés sur une même droite.

La justification de cette définition résulte de l'existence des systèmes corrélatifs de tétraèdres conjugués dans les surfaces du 3^e ordre, et le principe de dualité nous permettra de déduire immédiatement du théorème analogue à celui de Pascal, pour ces surfaces, le théorème analogue à celui de Brianchon, pour celles de la 3^e classe.

Théorème. — *Dans un système de deux tétragones conjugués circonscrits à une surface de la 3^e classe, les droites qui unissent deux à deux les sommets opposés concourent en un même point.*

Ce théorème renferme évidemment, comme cas particulier, le suivant, sur l'énoncé duquel nous croyons superflu d'insister après ce qui précède :

Théorème. — *Dans un système de deux tétragones conjugués circonscrits à une courbe plane de la 3^e classe, les droites qui unissent deux à deux les sommets opposés concourent en un même point.*

Telle est l'extension, aux courbes planes et aux surfaces du 3^e ordre et à celles de la 3^e classe, de ces théorèmes si fameux dans l'histoire de la géométrie.

Jusqu'aujourd'hui la seule extension que les géomètres semblent s'être proposée se bornait aux surfaces du 2^e degré : nous avons été au-delà, et nous pensons que personne ne contestera l'analogie évidente qui existe entre nos théorèmes et ceux de Pascal et de Brianchon ; nous apporterons, du reste, un jour, d'autres preuves, peut-être encore plus frappantes, à l'appui de cette analogie.

Mais s'il en est ainsi, on voit également que Dandelin avait découvert ces théorèmes pour les surfaces du 2^e degré ; et, quelque beaux que soient ceux qui ont été donnés par plusieurs géomètres modernes, par MM. Chasles et P. Serret entre autres, comme correspondant, pour les surfaces du 2^e degré, aux théorèmes de Pascal et de Brianchon, nous croyons, en nous plaçant à un point de vue absolu, devoir contester cette analogie, et devoir revendiquer pour Dandelin l'honneur de l'avoir trouvée.

Ces théorèmes, qui se sont étendus successivement des coniques aux surfaces du 2^e degré, puis aux courbes planes (1)

(1) Nous croyons utile de dire ici que nous avons découvert cette extension en juin 1869, comme le constate un pli cacheté déposé à l'Académie le 10 juillet de la même année ; tandis que c'est depuis quelques mois seulement que nous avons réussi à appliquer cette extension aux surfaces..

et aux surfaces du 3^e ordre et à celles de la 3^e classe, sont-ils susceptibles d'une extension plus considérable encore?

Nous en sommes convaincu, et nous pourrions dès à présent indiquer en partie cette extension.

Des géomètres d'un grand mérite ont, du reste, dirigé leurs recherches dans cette voie, et sont déjà arrivés à de beaux résultats; puissent ceux que nous venons d'exposer brièvement contribuer quelque peu à établir les principes généraux, non de cette géométrie qui se borne à la théorie des coniques et des surfaces du 2^e degré et qui a pris de nos jours des développements trop considérables peut-être, mais d'une science plus vaste, qui n'hésite pas à aborder les courbes et les surfaces en général, et qui constitue en définitive la vraie géométrie.

