SUR LE CALCUL

DE

LA DENSITÉ MOYENNE DE LA TERRE,

D'APRÈS

LES OBSERVATIONS D'AIRY,

Par M. F. FOLIE,

CORRESPONDANT DE L'ACADÉMIE ROYALE DE BELGIQUE.

professeur à l'Université de Liège

Extrait des *Bulletins de l'Académie royale de Belgique*,
2me série, t. XXXIII, nº 5; mai 1872.

Bruxelles, impr. de F. Hayez.

SUR LE CALCUL DE LA DENSITÉ MOYENNE DE LA TERRE, D'APRÈS LES OBSERVATIONS D'AIRY (*).

On peut ranger en deux classes bien distinctes les procédés d'expérience au moyen desquels les géomètres ont cherché à déterminer la densité moyenne de la terre : ceux dont le résultat est indépendant de la connaissance de la densité superficielle, et ceux, au contraire, qui ne permettent de calculer la densité moyenne qu'en fonction de la densité superficielle.

Si l'on suppose une égale précision aux observations de

(*) *Account of Pendulum Experiments undertaken in the Harton Colliery, for the purpose of determining the Mean Density of the Earth*, by G. B. Airy, Esq., Astronomer Royal. (Philos. Trans. 1856.)

l'une et de l'autre classe, ce sont naturellement celles de la première classe qui fourniront le résultat le plus sûr.

La valeur de la densité moyenne, obtenue par la première méthode, celle de la balance de torsion, est, d'après les expériences de Cavendish, 5,448; d'après celles de Baily, 5,660; d'après les dernières expériences de Reich, 5,576.

La valeur obtenue par l'un des procédés de la seconde classe est :

4,713 d'après la déviation du fil à plomb près du mont Scheballien, mesurée par Maskelyne, et par Hutton et Playfair;

4,837, déduite des oscillations d'un pendule observées sur le mont Cenis par Carlini et à Bordeaux par Biot;

6,566 enfin, déduite par Airy de ses expériences sur le pendule à la surface et au fond de la mine de Harton.

Ce dernier chiffre s'écarte considérablement, comme on le voit, de tous les précédents; il est même d'une unité environ plus fort que le chiffre le plus exact obtenu par le moyen de la balance de torsion.

Et cependant les expériences ingénieuses imaginées par Airy, et faites sous sa direction, ont été excessivement nombreuses, et ont fourni des résultats d'une concordance admirable, de sorte qu'il n'est pas permis de douter de leur extrême précision. En outre, la méthode de l'astronome anglais est incontestablement la plus sûre entre toutes celles qui exigent la connaissance de la densité superficielle. Enfin, il a déterminé avec le plus grand soin cette densité dans toute la profondeur de la mine, et il a de plus calculé la faible influence exercée par les irrégularités du sol autour du point d'observation.

Tout conspire donc à faire regarder la valeur de la densité moyenne, fournie par cette méthode, comme devant

être très-exacte, à moins qu'il ne se soit glissé quelque imperfection dans la manière dont Airy a soumis au calcul le résultat de ses observations.

L'écart considérable qui existe entre le chiffre d'Airy et ceux que Baily et Reich ont déduits d'expériences également très-précises ne peut pas s'expliquer autrement, à moins qu'on ne dénie toute rigueur à ces dernières.

Mon attention a été appelée sur ce point, il y a longtemps déjà, par un savant confrère et ami, M. le professeur Dewalque; nous avons débattu souvent ensemble cette grave question, et discuté en détail le remarquable travail d'Airy. Enfin, après de mûres réflexions, nous avons conclu que le calcul pourrait se faire avec un peu plus d'exactitude peut-être, et j'ai résolu de l'entreprendre dans les limites qui me sont imposées par le sujet même.

En partant donc de toutes les données d'Airy, et en négligeant, comme lui, l'influence de l'ellipticité et de la rotation de la terre sur la pesanteur (*), j'arrive en effet au chiffre 6,439, qui est de 0,127 plus faible que celui d'Airy, mais cependant de 0,862 encore plus fort que celui qu'a donné la balance de torsion.

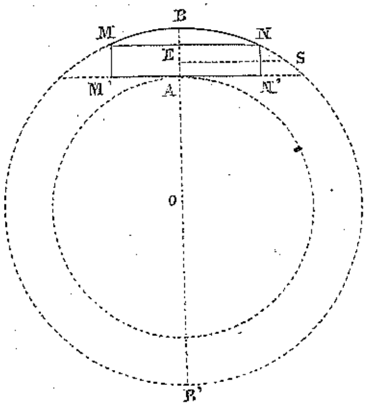
Avant d'aborder le calcul, je vais montrer la modification que j'ai cru devoir apporter à celui d'Airy.

Les observations du pendule donnent le rapport des intensités de la pesanteur aux points A et B.

Or, ce rapport dépend non-seulement des distances de ces deux points au centre de la terre, mais encore des

(*) Cette influence n'apporte qu'une correction d'une unité sur le troisième chiffre décimal du nombre qui représente la densité moyenne.

attractions que la couche sphérique d'épaisseur AB exerce sur ces deux points. Or, Airy suppose que la densité de cette couche est uniforme, ou, si l'on veut, que sa densité moyenne est égale à celle qu'il a déterminée dans la mine. Mais si cette dernière densité (2,5) est supérieure à la densité moyenne de la couche, il y aura de ce chef une correction à apporter à la recherche de l'action de cette couche, telle qu'elle a été faite par Airy.



Je me propose de calculer cette action en la décomposant en deux parties : celle du volume AM'MBNN' que j'appellerai V_1, auquel je suppose un rayon AM' égal à 3 milles anglais (*), et la densité (2,5) déterminée par Airy; et celle de la portion opposée AM'MB'NN' de la couche, que j'appellerai V_0, et à laquelle je supposerai une densité égale à la densité superficielle moyenne de la terre.

J'indiquerai en terminant une méthode qui serait encore un peu plus rigoureuse, et dont l'application, si l'on possédait les données suffisantes, conduirait peut-être à un résultat assez différent de celui que j'ai énoncé.

(*) C'est dans ce rayon, au delà duquel les irrégularités superficielles n'ont qu'une influence insensible, qu'Airy a déterminé la correction qui provient de ces irrégularités; et c'est parce que je dois tenir compte de cette correction que j'ai décomposé la couche sphérique de cette manière.

Il s'agit donc d'abord de calculer les attractions exercées par V_1 sur les points A et B : celles-ci, à leur tour, je les décompose en deux parties :

I. Attraction exercée par la calotte sphérique MBN sur A et B.

II. Attraction exercée par le cylindre MM'NN' sur A et B.

L'attraction exercée par V_1 sur chacun des points A et B étant connue, en la retranchant de l'attraction exercée sur l'un de ces points par une couche sphérique de même densité, on aura évidemment l'attraction exercée sur ce point par le volume opposé V_0.

Soit c l'épaisseur très-faible de la couche supposée homogène; δ sa densité moyenne, à laquelle nous attribuerons, dans chaque cas, la valeur convenable; son attraction sur A sera nulle, et sur B elle sera $4\pi c\delta(1-2r)$, si l'on fait le coefficient de l'attraction égal à l'unité (v. p. 14).

L'attraction exercée par le volume V_1 sur le point A sera, comme nous le verrons, de la forme

$$-2\pi c\delta(1-\Delta_1);$$

et l'attraction exercée par le volume opposé V_0 sera par suite

$$2\pi c\delta(1-\Delta_1).$$

Mais pour le volume V_1 nous devons faire $\delta=\delta_1$, et pour le volume V_0, $\delta=\delta_0$.

De sorte que l'attraction exercée par la couche sphérique sur le point A sera

$$A=-2\pi\delta_1 c(1-\Delta_1)+2\pi\delta_0 c(1-\Delta_1)=-2\pi\delta_1 c(1-\Delta_1)(1-\sigma),$$

si nous désignons par σ le rapport $\frac{\delta_0}{\delta_1}$ des densités des deux parties de la couche.

Nous trouverons de même pour l'attraction exercée par le volume V_1 sur le point B :

$$2\pi\delta_1 c\,(1 - \Delta_2);$$

et pour l'attraction exercée sur ce même point par le volume V_0 :

$$4\pi\delta_0 c\,(1 - 2r) - 2\pi\delta_0 c\,(1 - \Delta_2) = 2\pi\delta_0 c\,(1 + \Delta_2 - 4r).$$

De sorte que l'attraction exercée par la couche sphérique sur le point B sera la somme des expressions précédentes, ou

$$B = 2\pi\delta_1 c\,[1 + \sigma - \Delta_2(1 - \sigma) - 4r\sigma].$$

Pour avoir l'action exercée sur le point B, non par la couche rigoureusement sphérique, mais par la couche réelle, qui se compose du volume V_1 avec ses irrégularités superficielles, et du volume V_0 que nous pouvons, avec Airy, supposer sphérique, nous aurons à ajouter à l'expression précédente la correction K relative aux inégalités superficielles; et nous obtiendrons ainsi, pour l'attraction exercée par la couche réelle sur le point B (*) :

$$B_1 = B + K.$$

Airy ayant supposé $\sigma = 1$, il en résulte que pour lui l'action de la couche sur A est nulle; de sorte qu'il s'est borné au calcul de l'attraction de cette couche sur B, qui est, pour $\sigma = 1$, si l'on néglige la quantité très-faible r :

$$4\pi\delta_1 c + K;$$

(*) Nous croyons pouvoir négliger l'influence que les irrégularités superficielles exercent sur le point A.

ou, si l'on veut, au calcul de la différence des actions de la couche sur les points A et B.

Nous croyons, au contraire, devoir calculer séparément l'action de cette couche sur chacun de ces deux points; et en l'ajoutant à celle que le noyau intérieur exerce sur chacun d'eux, nous aurons l'action totale exercée par la terre sur le point A et sur le point B.

Certainement on serait tenté, au premier abord, de croire que l'attraction de la couche sphérique sur le point A est tellement insignifiante qu'elle ne peut exercer aucune influence sur la valeur de la densité moyenne, et cependant il n'en est pas ainsi, comme nous allons le voir.

CALCUL DES ATTRACTIONS.

Notations. $OA = R$; $AB = c$; $BE = e = \frac{c}{n}$; $AE = d = c\,\frac{n-1}{n}$; $\frac{c}{2R} = r$;

z, hauteur d'un point de la couche au-dessus du plan tangent en A.

ρ, distance de la projection de ce point au point A.

θ, son azimuth.

Expression de l'attraction d'un élément. Nous pourrons, à cause de la symétrie de la figure autour de l'axe BB', prendre dans chaque cas pour élément un cylindre de rayon ρ, de hauteur dz, et d'une densité constante δ, situé à une hauteur z au-dessus du point A.

La composante verticale de l'attraction exercée sur le point A par une portion infiniment petite de ce cylindre comprise entre les rayons ρ et $\rho + d\rho$ et les azimuths θ et $\theta + d\theta$ est égale à

$$\delta\,\frac{d\theta\rho d\rho z dz}{(\rho^2 + z^2)^{3/2}};$$

et par suite la composante verticale de l'attraction de l'anneau d'épaisseur $d\rho$ sera

$$2\pi\delta\rho d\rho\,\frac{zdz}{(\rho^2+z^2)^{3/2}}\,;$$

et celle de l'attraction du cylindre élémentaire sur le point A :

$$2\pi\delta zdz\int_0^{\rho}\frac{\rho d\rho}{(\rho^2+2^2)^{3/2}}=2\pi\delta dz\left(1-\frac{z}{\sqrt{\rho^2+z^2}}\right)\quad .\ .\ 1).$$

L'attraction de ce cylindre sur le point B s'obtiendra en changeant simplement z en $c-z$; elle sera donc :

$$-2\pi\delta dz\left[1-\frac{c-z}{\sqrt{\rho^2+(c-z)^2}}\right]\quad .\ .\ .\ 2).$$

Il ne nous reste qu'à intégrer ces deux expressions entre les limites convenables, pour obtenir les attractions cherchées.

Nous pourrons, dans ce calcul, négliger, à partir de la seconde, les puissances de r, qui est égal à 0,00003 environ dans le cas qui nous occupe.

Attraction de la calotte MBN *sur* A.

Nous obtiendrons cette attraction en intégrant l'expression 1) entre les limites d et c, ce qui nous donnera :

$$2\pi\delta\left[c-d-\int_d^c\frac{zdz}{\sqrt{\rho^2+z^2}}\right]=2\pi\delta\,[e-\mathrm{J}].$$

Pour évaluer l'intégrale J, nous devons exprimer ρ en

fonction de z; or, par une double expression du carré de la corde BS on obtient :

$$\rho^2+(c-z)^2=2\mathrm{R}\,(c-z)$$

d'où :

$$\rho^2+z^2=2\,(\mathrm{R}-c)\,(c-z),$$

en négligeant c^2, ou r^2, comme il est convenu; nous aurons donc

$$\mathrm{J}=\int_d^c\frac{zdz}{\sqrt{2(\mathrm{R}-c)(c-z)}}=\frac{1}{\sqrt{2(\mathrm{R}-c)}}\int_0^e\frac{(c-u)du}{\sqrt{u}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2(\mathrm{R}-c)}}\left\{2c\sqrt{u}-\frac{2}{3}u\sqrt{u}\right\}_0^e=\frac{2\sqrt{e}}{\sqrt{2(\mathrm{R}-c)}}\left(c-\frac{1}{3}e\right)\quad (*).$$

L'attraction de la calotte sur A sera donc :

$$2\pi\delta e\left\{1-\frac{2\sqrt{e}}{\sqrt{2\,(\mathrm{R}-c)}}\left(\frac{c}{e}-\frac{1}{3}\right)\right\}\quad .\ .\ (1^{\circ}).$$

(*) Si l'on voulait calculer J rigoureusement, c'est-à-dire sans négliger c^2, comme nous l'avons fait, on trouverait

$$\mathrm{J}=2c(1+r)\sqrt{r}\left\{\sqrt{\frac{1}{n}+r\,(1+2r)}\left[1+\frac{2}{3}r(1-r)-\frac{1}{3n}\right]-\sqrt{r(1+2r)}\left[1+\frac{2}{3}r\,(1-r)\right]\right\},$$

ou, en négligeant les termes en r^2 :

$$\mathrm{J}=2c(1+r)\sqrt{r}\left\{\sqrt{\frac{1}{n}+r}\left[1+\frac{2}{3}r-\frac{1}{3n}\right]-\sqrt{r}\left(1+\frac{2}{3}r\right)\right\}.$$

Mais l'introduction de l'une ou l'autre de ces expressions, qui sont d'un calcul numérique beaucoup plus compliqué que celle du texte, n'apporterait aucune modification dans les quatre premiers chiffres décimaux de la valeur de la densité moyenne.

Nous croyons donc devoir nous en tenir à la formule donnée dans le texte.

Attraction de la calotte MBN *sur* B.

Nous l'obtiendrons en intégrant l'expression 2) entre les mêmes limites, d et c, de z, ce qui donne :

$$-2\pi\delta\left[e-\int_d^c \frac{(c-z)\,dz}{\sqrt{\rho^2+(c-z)^2}}\right]=-2\pi\delta(e-\mathrm{J}').$$

Remplaçant ρ^2 par sa valeur donnée plus haut, nous aurons :

$$\mathrm{J}'=\int_d^c \frac{(c-z)dz}{\sqrt{2\mathrm{R}(c-z)}}=\frac{1}{\sqrt{2\mathrm{R}}}\int_0^e \frac{u\,du}{\sqrt{u}}=\frac{1}{\sqrt{2\mathrm{R}}}\,\frac{2}{5}\,e\sqrt{e}.$$

L'attraction de la calotte sur B sera donc :

$$-2\pi\delta e\left(1-\frac{2}{5}\sqrt{\frac{e}{2\mathrm{R}}}\right)\quad .\ .\ .\ .\quad (2^0)$$

Attraction du cylindre MM′N′N *sur* A. Nous la trouverons en intégrant l'expression 1) entre les limites o et d, ρ étant le rayon du cylindre, que nous représenterons par ρ_0; nous aurons ainsi :

$$2\pi\delta\int_o^d dz\left(1-\frac{z}{\sqrt{\rho_0^2+z^2}}\right)=2\pi\delta\left[d-\left(\sqrt{\rho_0^2+d^2}-\rho_0\right)\right].\quad (1^1)$$

Attraction du cylindre sur B. Celle-ci se trouvera de même par l'intégration de l'expression 2) entre les mêmes limites :

$$-2\pi\delta\int_o^d dz\left(1-\frac{c-z}{\sqrt{\rho_0^2+(c-z)^2}}\right)=-2\pi\delta\left[d-\left(\sqrt{\rho_0^2+c^2}-\sqrt{\rho_0^2+e^2}\right)\right](2^1).$$

La somme des expressions (1^0) et (1^1) nous donnera

l'attraction du cylindre et de la calotte, ou de V_1, *sur* A, qui sera égale à

$$2\pi\delta e\left\{1-\frac{2\sqrt{e}}{\sqrt{2(\mathrm{R}-c)}}\left(\frac{c}{e}-\frac{1}{5}\right)\right\}+2\pi\delta\left[d-\left(\sqrt{\rho_0^2+d^2}-\rho_0\right)\right]=$$

$$2\pi\delta c\left\{1-2\sqrt{\frac{r}{n}}\left(1-\frac{1}{3n}\right)(1+r)-\frac{1}{c}\left(\sqrt{\rho_0^2+d^2}-\rho_0\right)\right\}=$$

$$2\pi\delta c\,(1-\Delta_1),$$

en posant pour abréger

$$\Delta_1=2\sqrt{\frac{r}{n}}\left(1-\frac{1}{3n}\right)(1+r)+\frac{1}{c}\left(\sqrt{\rho_0^2+d^2}-\rho_0\right).$$

Comme l'action d'une couche sphérique de densité δ sur le point A est nulle, l'action du volume V_0 sur ce point sera égale et de signe contraire à celle du volume V_1 et par suite

l'attraction du volume V_0 *sur* A sera

$$-2\pi\delta c\,(1-\Delta_1).$$

Mais la densité du volume V_1 étant δ_1, et celle du volume V_0 étant δ_0, nous aurons à changer, dans les expressions de leurs actions respectives, δ en δ_1, pour V_1, et en δ_0, pour V_0; faisant alors la somme de ces actions, nous obtiendrons pour

l'attraction de la couche sphérique sur le point A :

$$\begin{aligned}\mathrm{A}&=2\pi\delta_1 c\,(1-\Delta_1)-2\pi\delta_0 c\,(1-\Delta_1)\\&=2\pi\delta_1 c\,(1-\Delta_1)(1-\sigma),\end{aligned}$$

en posant $\dfrac{\delta_0}{\delta_1}=\sigma$.

La somme des expressions (2°) et (2¹) nous donnera de même

l'attraction du cylindre et de la calotte, ou de V_1, *sur* B, qui sera égale à

$$-2\pi\delta e\left(1-\frac{2}{5}\sqrt{\frac{e}{2R}}\right)-2\pi\delta\left[d-\left(\sqrt{\rho_0^2+c^2}-\sqrt{\rho_0^2+e^2}\right)\right]=$$

$$-2\pi\delta c\left\{1-\frac{2}{5n}\sqrt{\frac{r}{n}}-\frac{1}{c}\left(\sqrt{\rho_0^2+c^2}-\sqrt{\rho_0^2+e^2}\right)\right\}=$$

$$-2\pi\delta c(1-\Delta_2),$$

en posant pour abréger

$$\Delta_2=\frac{2}{3n}\sqrt{\frac{r}{n}}+\frac{1}{c}\left(\sqrt{\rho_0^2+c^2}-\sqrt{\rho_0^2+e^2}\right).$$

Comme l'action d'une couche sphérique de densité δ sur le point B est

$$-\frac{4\pi R^2\delta c(1+2r)}{(R+c)^2}=-4\pi\delta c\frac{1+2r}{1+4r}=-4\pi\delta c(1-2r),$$

(le signe — provenant de ce que nous avons compté comme positives les attractions dirigées vers le haut)

l'action du volume V_0 *sur ce point* sera égale à

$$-4\pi\delta c(1-2r)+2\pi\delta c(1-\Delta_2)=-2\pi\delta c(1+\Delta_2-4r).$$

Changeant, comme plus haut, δ en δ_1, dans l'action du volume V_1, et en δ_0 dans celle du volume V_0, et ajoutant alors ces deux actions, nous aurons pour

l'attraction de la couche sphérique sur B :

$$B=-2\pi\delta_1 c(1-\Delta_2)-2\pi\delta_0 c(1+\Delta_2-4r)=$$
$$=-2\pi\delta_1 c[1+\sigma-\Delta_2(1-\sigma)-4r\sigma].$$

En appelant K la correction due aux inégalités superficielles au point B, nous aurons pour

l'attraction de la couche réelle sur B :

$$B_1=B+K.$$

Nous avons maintenant à effectuer le calcul numérique des valeurs de A et de B.

CALCUL NUMÉRIQUE.

Données. Les valeurs suivantes ont été rapportées par Airy à l'épaisseur de la couche prise pour unité (l. c., p. 336 et 337) : $c=1$; $R=16621,7$; $\rho_0=12$.

Il nous reste encore à connaître les densités δ_1 et δ_0 des deux parties de la couche sphérique.

Pour δ_1, nous devons prendre la valeur 2,50 trouvée par Airy, quoiqu'elle n'ait été déterminée qu'aux environs immédiats du puits dans lequel il opérait, et qu'il ne soit pas certain que la densité moyenne δ_1 de la portion de couche V_1 de 3 milles anglais de rayon, soit exactement la même.

Pour δ_0, qui est la densité superficielle moyenne du globe terrestre, nous adopterons le chiffre 1,4, trouvé en admettant que les mers occupent une surface environ 3 fois plus considérable que celle des continents, et que la densité superficielle de ceux-ci est 2,5.

Nous aurons donc :

$$\delta_1=2,5.\quad \sigma=\frac{1,4}{2,5}=0,56.\quad 1-\sigma=0,44.$$

Au moyen de toutes ces données, nous aurons à calculer :

$$A=2\pi\delta_1 c\,(1-\Delta_1)\,(1-\sigma)=2\pi U_1.$$

$$B=-2\pi\delta_1 c\,[1+\sigma-\Delta_2\,(1-\sigma)]=-2\pi U_2.$$

$$\Delta_1=2\sqrt{\frac{r}{n}}\left(1-\frac{1}{5n}\right)(1+r)+\frac{1}{c}\left(\sqrt{\rho_0^2+d^2}-\rho_0\right)=\Delta_1'+\Delta_1''.$$

$$\Delta_2=\frac{2}{5n}\sqrt{\frac{r}{n}}+\frac{1}{c}\left(\sqrt{\rho_0^2+c^2}-\sqrt{\rho_0^2+e^2}\right)=\Delta_2'+\Delta_2''.$$

Calcul de n.

$$\frac{1}{n}=\frac{e}{c}=e=R-\sqrt{R^2-\rho_0^2}=R\left\{1-\left(1-\frac{\rho_0^2}{R^2}\right)^{1/2}\right\}=\frac{1}{2}\frac{\rho_0^2}{R}.$$

$$\text{D'où}\quad \frac{1}{n}=0.004331688.\quad n=230,85692.$$

$$\frac{n-1}{n}=0.995668512.\quad \left(\frac{n-1}{n}\right)^2=0.9913568.$$

$$\frac{1}{5n}=0.001443896.\quad 1-\frac{1}{5n}=0.9985561.$$

Calcul de $\sqrt{\frac{r}{n}}$.

Comme $r=\frac{c}{2R}=\frac{1}{33245,4}$, nous aurons :

$$\sqrt{\frac{r}{n}}=0.000360974.$$

Calcul de Δ_1.

$$1^\circ\quad \Delta_1'=2\sqrt{\frac{r}{n}}\left(1-\frac{1}{5n}\right)(1+r)=0.000720927.$$

$$2^\circ\quad \Delta_1''=\frac{1}{c}\left(\sqrt{\rho_0^2+d^2}-\rho_0\right)=0.041235683.$$

$$\text{d'où}\quad \Delta_1=0.041956610\,(*).$$

Calcul de U_1.

$$U_1=\delta_1 c(1-\Delta_1)(1-\sigma)=(1-\Delta_1)\times 1,1=1,05384773.$$

Calcul de Δ_2.

$$1^\circ\quad \Delta_2'=\frac{2}{5n}\sqrt{\frac{r}{n}}=0,0000010412.$$

$$2^\circ\quad \Delta_2''=\frac{1}{c}\left(\sqrt{\rho_0^2+c^2}-\sqrt{\rho_0^2+e^2}\right)=0.0415937972.$$

$$\text{d'où}\quad \Delta_2=0.04159484.$$

Calcul de U_2.

$$U_2=\delta_1 c\,[1+\sigma-\Delta_2(1-\sigma)-4r\sigma]$$
$$=3,9-0,0457543-0,0001684=3,8540773.$$

Connaissant les valeurs de U_1 et de U_2, nous aurons celles de

$$A=2\pi U_1\quad\text{et de}\quad B=2\pi U_2;$$

mais il est plus simple de ne pas effectuer les multiplications, à cause des réductions qui auront lieu dans la suite du calcul.

(*) La valeur de Δ_1, calculée d'après la première formule donnée plus haut (p. 397) en note, serait : 0,04189893, et d'après la seconde : 0,04188957; et celle de U_1 : 1,05391115 ou 1,0539215.

Et la substitution de ces valeurs dans la formule qui donne la densité moyenne donnerait au lieu de 6,438854 (v. plus bas, p. 19) les nombres fort peu différents 6,43892 ou 6,43896.

CALCUL DE LA DENSITÉ MOYENNE DE LA TERRE.

Avant de substituer les valeurs de A et de B, dans la formule qui donne le rapport des intensités de la pesanteur aux points A et B, nous avons à ajouter à cette dernière, la correction due aux irrégularités superficielles au-dessus de la calotte considérée, et nous obtiendrons $B_1 = B + K$; cette correction, calculée avec la plus grande exactitude par Airy, s'élève à + 0,111998 (le signe + provenant de ce que nous comptons les attractions dirigées vers le haut comme positives).

Nous pouvons maintenant déterminer l'intensité de la pesanteur en chacun des points A et B.

Si nous désignons par D la densité moyenne de la terre, l'attraction qu'elle exerce sur le point A sera

$$G_A = -\frac{4}{3}\pi R D + A;$$

et l'attraction qu'elle exerce sur le point B :

$$G_B = -\frac{4}{3}\frac{\pi R^3 D}{(R+c)^2} + B_1$$
$$= -\frac{4}{3}\pi R D(1-4r) + B + K.$$

Or, les observations d'Airy lui ont donné (l. c., p. 338) :

$$\frac{G_A}{G_B} = 1{,}00005185.$$

Nous aurons donc en introduisant dans ce rapport les expressions précédentes de G_A et de G_B, et en remplaçant

immédiatement A par $2\pi U_1$ et B par $2\pi U_2$:

$$1{,}00005185 = \frac{-\frac{4}{3}\pi R D + 2\pi U_1}{-\frac{4}{3}\pi R D(1-4r) - 2\pi U_2 + K}.$$

Divisant les deux termes par 2π, remplaçant, pour abréger $\frac{2}{3}$ RD par X, et changeant les signes, nous trouverons :

$$1{,}00005185 = \frac{X - U_1}{X(1-4r) + U_2 - \frac{K}{2\pi}}$$

Substituant enfin à r, U_1, U_2 et K, leurs valeurs données précédemment, nous obtiendrons l'équation suivante :

$$1{,}00005185 = \frac{X - 1{,}05384773}{X(1 - 0{,}000120325) + 3{,}8362524};$$

d'où nous tirerons :

$$X - 1{,}05384773 = X.\ 1{,}00005185\,(1 - 0{,}000120325) + 3{,}8364515;$$

et de là :

$$X\,\{1 - 1{,}00005185\,(1 - 0{,}000120325)\} = 4{,}8902990;$$

d'où enfin :

$$X = \frac{4{,}8902990}{0.00006854}$$

Et comme nous avons posé $X = \frac{2}{3}$ RD, nous en déduirons :

$$\frac{2}{3} D = 4{,}292556\ ; \quad \text{d'où } D = 6{,}438834,$$

ou, en nous bornant à trois décimales,

$$D = 6{,}439$$

pour la densité moyenne de la terre.

La valeur donnée par Airy est

$$D = 6{,}566$$

avec une erreur probable de $\pm 0{,}0182$ (voir l. c., p. 342).

Cette dernière valeur est donc trop forte de 0,127, étant admises toutes les données d'Airy.

Est-ce la dernière correction qu'il faille y apporter?

Comme nous l'avons dit plus haut, δ_1, dans notre calcul, ne représente pas la densité moyenne au puits même, mais dans un rayon de trois milles anglais autour de ce puits; de sorte que δ_1 pourrait différer de 2,5 (*).

Ensuite, le calcul serait certainement plus exact encore si l'on connaissait la densité moyenne de la couche dans un rayon plus considérable. Enfin, il reste à vérifier l'exactitude de la valeur 1,4 que nous avons attribuée à la densité superficielle moyenne de la terre.

Ce sont là des points essentiels qu'il appartient aux géologues de décider : alors seulement les géomètres pourront conclure si la valeur 6,439 que nous avons déduite des observations d'Airy, pour la densité moyenne de la terre, doit être modifiée.

(*) Je ferai remarquer, en outre, que le calcul ne présenterait guère plus de difficultés, si la densité de la calotte était différente de celle du cylindre auquel elle est superposée; et que la valeur uniforme 2,5 que j'attribue à la densité de toute cette partie V_1 de la couche, m'est imposée par l'ignorance où je suis de la constitution géologique de cette masse, ignorance qui m'oblige à admettre la valeur moyenne déterminée par Airy sur la profondeur BA.

Nous allons, pour terminer, rechercher quelle est l'influence que pourrait exercer sur le résultat une erreur commise dans la détermination de la densité moyenne de chacune des parties de la couche considérée; et nous verrons qu'il est fort difficile d'avoir une grande confiance dans l'exactitude de la valeur obtenue.

Cette difficulté tient à quatre causes :

1° La profondeur relativement assez faible de la mine;

2° Le rayon, assez faible également, de la calotte dont Airy a déterminé les inégalités superficielles;

3° et 4° Les erreurs dont sont affectées les densités moyennes des deux parties de la couche.

La première cause ne pourrait être écartée; la seconde bien, mais au prix d'un grand travail géodésique.

Nous n'examinerons ici que l'influence des deux dernières causes, que nous pouvons analyser sans sortir du cercle des opérations d'Airy.

Reprenons la valeur de X (ou $\frac{2}{3}$ RD) trouvée plus haut (p. 405), en remplaçant σ par sa valeur $\frac{\delta_0}{\delta_1}$, et en représentant par f le rapport $\frac{G_A}{G_B}$ trouvé par Airy :

$$X = \frac{(1-\Delta_1)(\delta_1-\delta_0)+f\left[(1-\Delta_2)\delta_1+(1+\Delta_2)\delta_0-4r\delta_0-\frac{K}{2\pi}\right]}{1-f(1-4r)}.$$

Désignons par ΔX_0 la variation de X correspondante à une variation $\Delta\delta_0$ de δ_0;

et par ΔX_1 celle qui correspond à une variation $\Delta\delta_1$ de δ_1; nous trouverons

$$\Delta X_0 = \Delta\delta_0 \frac{f(1+\Delta_2-4r)-(1-\Delta_1)}{1-f(1-4r)}; \quad \Delta X_1 = \Delta\delta_1 \frac{1-\Delta_1+f(1-\Delta_2)}{1-f(1-4r)}$$

Pour une erreur absolue $\Delta\partial_0$ ou $\Delta\partial_1$ commise sur ∂_0 ou ∂_1, nous aurons donc une erreur relative $\frac{\Delta X_0}{X}$ ou $\frac{\Delta X_1}{X}$ commise sur X; et comme nous avons trouvé

$$X=\frac{4{,}8903}{1-f(1-4r)};\quad \Delta_1=0{,}041957;\quad \Delta_2=0{,}041595;$$

nous en déduirons, f étant égal à 1,00005185 :

$$f(1+\Delta_2-4r)-(1-\Delta_1)=0.083593;\ 1-\Delta_1+f(1-\Delta_2)=1{,}9165.$$

Les valeurs des erreurs relatives seront par suite :

$$\frac{\Delta X_0}{X}=0{,}017\,\Delta\partial_0;\ \text{et}\ \frac{\Delta X_1}{X}=0{,}392\,\Delta\partial_1\ .$$

Pour que la seconde soit du même ordre que la première, il faut donc que l'erreur commise dans l'évaluation de ∂_1 soit à peu près 23 fois moindre que l'erreur commise dans l'évaluation de ∂_0.

Si, par exemple, ∂_0 est en erreur de 0,1 en valeur absolue, X ou D sera en erreur des 0,0017 de sa valeur; c'est-à-dire que D sera affecté, de ce chef, d'une erreur absolue de 0,011 environ ;

Et si ∂_1 est en erreur de 0,005 seulement en valeur absolue, X ou D sera en erreur des 0,392 de sa valeur; c'est-à-dire que D sera affecté, de ce chef, d'une erreur absolue de 0,0126 environ.

Or, dans l'état actuel des connaissances géologiques, on n'est peut-être pas encore à même, mais on le sera sans doute bientôt, de déterminer la densité superficielle moyenne de la terre à 0,1 près; peut-on déterminer ∂_1, quelque soin qu'on y apporte, à 0,005 près, dans une zone

de l'étendue de celle que nous avons considérée, c'est plus douteux; et si même on y arrive, on voit qu'il est peu probable que la densité moyenne de la terre, déduite des expériences d'Airy, et en tenant compte de toutes les modifications que nous avons indiquées précédemment dans le calcul de cette densité, puisse être déterminée à moins de 0,02 près.