Note sur la Théorie de la roue Poncelet, par M. F. Folie, docteur en sciences physiques et mathématiques, professeur à l'école industrielle de Liége.

§ 1. Lorsque l'illustre inventeur de cette roue écrivit les mémoires qui étaient destinés à la faire connaître, préoccupé surtout d'en montrer les avantages d'une manière claire et simple, il négligea certaines circonstances qui devaient conduire à des calculs trop compliqués peut-être pour le but qu'il voulait atteindre.

Ceux qui ont repris après lui la théorie de cette roue ont généralement adopté celle qu'il avait donnée; et si quelques savants ont étudié d'une manière plus complète la théorie générale des roues hydrauliques, ils n'ont cependant pas eu égard, dans celle de la roue Poncelet, aux circonstances que ce savant a négligées, et dont les plus essentielles sont les deux suivantes :

Il n'a pas été tenu compte, dans le calcul de la hauteur à laquelle l'eau monte sur les aubes, du mouvement de rotation de celles-ci; ce qui fait que cette hauteur est en général évaluée beaucoup trop faible, et que les dimensions mêmes que conseille M. Morin, quoique bien supérieures, devraient dans certains cas être encore augmentées, comme nous le verrons.

En outre, on a omis de dire que pour que la roue Poncelet rende le maximum d'effet utile, il faut que l'eau ait quitté les aubes au moment où l'extrémité de celles-ci atteint la verticale qui passe par l'axe; sans quoi l'eau, en s'élevant avec la roue, contrarierait le mouvement de celle-ci.

Nous avons trouvé ces deux circonstances mentionnées pour la première fois dans les manuscrits de Brasseur, et nous nous plaisons à revendiquer pour lui l'honneur de les avoir signalées. Comme les notes qu'il a laissées ne renferment aucun calcul relatif à ces deux points, nous avons résolu de les traiter.

Suivant l'exemple des maîtres qui se sont occupés de la théorie des roues hydrauliques, nous éviterons toute complication de calcul; et pour cela, nous admettrons que le mouvement de la roue est uniforme et la résistance constante; nous négligerons tous les frottements ainsi que la résistance de l'air; nous supposerons que les aubes sont tangentes à la roue, et que l'eau y arrive sans choc; enfin nous n'étudierons que l'action d'une seule molécule d'eau.

On verra, par les équations auxquelles nous arriverons, qu'elles n'offriraient plus d'intérêt pratique si on les compliquait davantage, ce qui arriverait nécessairement si l'on voulait traiter la théorie d'une manière plus générale.

Au reste, les expériences entreprises sur la roue Poncelet ont donné des résultats si concordants avec ceux de la théorie ordinaire, qu'il est permis de supposer que la théorie plus complète que nous allons exposer serait également sanctionnée par des expériences que l'on ferait dans le but d'en vérifier les résultats, comme elle l'est déjà dans la pratique, ainsi qu'on le verra, pour les cas habituels; et peut-être ces nouvelles expériences contribueraient-elles à augmenter encore le rendement déjà si considérable de cette roue.

§ 2. Désignons par V la vitesse d'arrivée de l'eau; par v celle de la roue; par H la hauteur à laquelle est due la vitesse V; par α l'angle que fait avec la verticale le rayon

mené au point où la molécule d'eau rencontre la roue; par H_1 la hauteur de chute comptée jusqu'au point le plus bas de la roue; de sorte que $H = H_1 - R \sin v\,\alpha$; par R le rayon extérieur, par r le rayon intérieur qu'il faut donner aux couronnes pour que l'eau arrive au fond de celles-ci avec une vitesse relative nulle.

Nous pourrons admettre que l'eau monte sur les aubes à une hauteur $R \cos \alpha - r$, et qu'elle y descend d'une hauteur $R - r$, si elle les quitte au point le plus bas de la roue.

Désignons enfin par T_1 et T_2 respectivement les travaux effectués par la pression normale que l'eau exerce sur les aubes, pendant son ascension et pendant sa descente.

Les forces vives initiales et finales de la masse m d'eau sont :

pour l'ascension : $\frac{1}{2} m V^2$ et $\frac{1}{2} m \left(v \frac{r}{R}\right)^2$;

» la descente : $\frac{1}{2} m \left(v \frac{r}{R}\right)^2$ et $\frac{1}{2} m (V - 2v)^2$.

Le principe des forces vives nous donnera donc :

$$\left.\begin{aligned} &(1).\quad \frac{1}{2} mV^2 - \frac{1}{2} m \left(v \frac{r}{R}\right)^2 = mg(R\cos\alpha - r) + T_1 \\ &(2).\quad \frac{1}{2} m \left(v \frac{r}{R}\right)^2 - \frac{1}{2} m (V - 2v)^2 = -mg(R - r) + T_2 \end{aligned}\right\}\text{d'où :}$$

$$(3).\quad T = T_1 + T_2 = \frac{1}{2} mV^2 - \frac{1}{2} m (V - 2v)^2 + mgR(1 - \cos\alpha).$$

Or, comme $V^2 = 2gH$, et que $H_1 = H + R(1 - \cos\alpha)$, nous pourrons écrire :

$$T = mgH_1 - \frac{1}{2} m (V - 2v)^2;$$

et en prenant $v = \frac{1}{2}$ V, nous voyons que le travail utile sera égal au travail absolu.

Mais ce résultat suppose, comme on le voit, que l'eau quitte les aubes au point le plus bas; sans quoi le terme $-mg(R-r)$ de la seconde équation deviendrait $-mgh$, $h < R - r$, et le travail utile diminuerait (*).

Ce point important n'a pas été observé dans la construction de ces roues, comme on peut le voir par les dessins à l'échelle exécutés par M. Poncelet pour son mémoire, ou par celui que M. Rankine a donné, dans son traité des moteurs, d'une roue construite par M. Fairbairn.

Mais il est une autre conséquence que l'on tire de cette équation et qui n'a pas encore été signalée : *c'est qu'une roue à aubes courbes peut produire son maximum d'effet même quand on ne prend pas l'eau à son point le plus bas* (**).

Le seul inconvénient qui puisse résulter de cette disposition est une pression un peu plus considérable sur les coussinets; mais il serait bien compensé, croyons-nous, par les avantages qu'offrirait cette disposition nouvelle, au point de vue du rendement.

§ 3. Nous allons faire voir maintenant que nos équations permettent de déterminer la largeur des couronnes, et que le résultat concorde fort bien avec celui que la pratique a fait adopter; mais que de plus, en combinant l'équation résultante avec la condition que la roue puisse admettre un volume d'eau m fois plus grand que la dépense normale, nous obtiendrons le rayon de la roue en

(*) Voir la note ajoutée à la fin du travail.

(**) A la vérité, M. Poncelet a déjà imaginé d'employer sa roue comme roue de côté dans le cas de fortes crues, mais sans attacher d'importance théorique à cette disposition.

fonction de m, de la hauteur de chute, et de la levée e de la vanne.

Ces deux déterminations n'ont pas encore été faites à priori.

Dans le but de comparer les résultats que nous obtiendrons aux nombres qui ont été adoptés d'après les travaux de MM. Poncelet et Morin, nous supposerons que l'on prenne l'eau au point le plus bas, de sorte que l'angle α sera très-petit, et que nous pourrons négliger $1 - \cos\alpha$; ce qui offrira en outre l'avantage de simplifier un peu les calculs.

Les équations (1), (2) et (3) vont nous permettre d'abord de terminer le rapport $\frac{r}{R}$ des rayons pour le cas de la vitesse $v = \frac{1}{2}$ V qui correspond au maximum de l'effet utile.

Comme la hauteur à laquelle l'eau monte sur les aubes est un peu plus faible que celle dont elle descend, mais que, d'un autre côté, son mouvement est retardé dans le premier cas, et accéléré dans le second, par la composante centrifuge de la vitesse circulaire de la roue, à laquelle elle participe, nous pourrons admettre que la durée de l'ascension est égale à celle de la descente; or, le mouvement de la roue étant supposé uniforme, et la résistance constante, les travaux produits pendant ces deux intervalles de temps seront égaux; nous aurons par suite, en vertu de l'équation (3), en y faisant $V = 2v$:

$$T_1 = \frac{1}{2}T = \frac{1}{4}mV^2 + \frac{1}{2}mgR(1-\cos\alpha) = mv^2 + \frac{1}{2}mgR(1-\cos\alpha).$$

Et en substituant cette valeur dans (1) :

$$mv^2 + \frac{1}{2}mgR(1-\cos\alpha) = 2mv^2 - \frac{1}{2}m\left(v\frac{r}{R}\right)^2 - mg(R\cos\alpha - r).$$

Réduisant, et posant $\frac{r}{R} = x$:

$$(4).\qquad x^2 - \frac{2gR}{v^2}x = 2 - \frac{gR}{v^2}(1 + \cos\alpha).$$

Cette équation permet de déterminer x ou r en fonction de v et de R.

En y faisant, comme nous l'avons dit plus haut, $\cos\alpha = 1$, nous pourrons l'écrire :

$$(5).\qquad x^2 + \frac{2gR}{v^2}(1 - x) = 2.$$

Introduisons maintenant la condition que la roue puisse admettre par seconde un volume d'eau égal à m fois la dépense; en appelant c le coëfficient de celle-ci, elle sera cLe, L désignant la largeur de l'orifice, e sa hauteur. Si nous supposons la même largeur à la roue, de sorte qu'en pratique celle-ci offrira une capacité plus grande, ce qui ne nuira pas, nous aurons pour le volume décrit en une seconde par la section des couronnes : $\frac{1}{2}$ RL $(1 - x^2)$; égalant ce volume à m fois la dépense, et réduisant :

$$(6).\qquad R(1 - x^2) = 4mce.$$

Avant d'éliminer x entre (5) et (6), donnons à ces équations une forme plus simple.

Faisons dans (5) : $v^2 = \frac{1}{2}gH$, et dans (6) : $4mce = \varepsilon$; elles deviendront :

$$(7).\qquad x^2 + 4\frac{R}{H}(1 - x) = 2.$$

$$(8).\qquad R(1 - x^2) = \varepsilon.$$

Or l'équation (7) peut s'écrire :

$$1 - x^2 - 4\frac{R}{H}(1 - x) + 1 = o,$$

ou bien

$$(1 - x)\left\{1 + x - 4\frac{R}{H}\right\} + 1 = o.$$

Si nous multiplions cette dernière par $1 + x$, et que nous combinions le résultat avec l'équation (8), nous obtiendrons :

$$\frac{\varepsilon}{R}\left\{1 + x - 4\frac{R}{H}\right\} + 1 + x = o,\quad \text{d'où}$$

$$1 + x = \frac{4\varepsilon R}{H(R + \varepsilon)}.$$

Et par suite, en vertu de (8) :

$$1 - x = \frac{H(R + \varepsilon)}{4R^2}.$$

Enfin ajoutant ces deux dernières équations :

$$(9).\qquad 2 = \frac{4\varepsilon R}{H(R + \varepsilon)} + \frac{H(R + \varepsilon)}{4R^2}.$$

§ 4. Cette équation détermine R en fonction de H et de ε; mais comme elle est du 3^e^ degré, sa résolution offrirait peu d'intérêt pratique, à cause surtout des quantités m et e qui entrent dans ε, et auxquelles on peut donner différentes valeurs.

Il nous semble préférable de la discuter pour en déduire les limites entre lesquelles il convient de renfermer R dans les cas ordinaires.

Et d'abord, puisque les deux termes du second membre sont positifs, chacun d'eux doit être plus petit que 2.

Donc, en premier lieu :

$$H(R+\varepsilon) < 8R^2, \text{ ou } 8R^2 - HR - H\varepsilon > o,$$

relation qui sera satisfaite pour

$$R \geqq \frac{H}{8} + \varepsilon.$$

Nous verrons que cette condition est en général réalisée, et au delà.

Ensuite

$$4\varepsilon R < 2H(R+\varepsilon).$$

Si $H \geqq 2\varepsilon$, cette relation se vérifie d'elle-même.

Occupons-nous donc seulement du cas où $H < 2\varepsilon$; on en déduira alors :

$$(10) \ldots \quad R < \frac{H\varepsilon}{2\varepsilon - H}, \text{ ou } R < \frac{H}{2 - \frac{H}{\varepsilon}}$$

Recherchons quelle est la valeur minimum qu'il convient de donner à R.

Il est aisé de vérifier que si l'on fait, dans l'équation (9), $R = \frac{H}{2}$, on en déduit $R = \varepsilon$, et en vertu de (8) : $x = o$. Les couronnes devraient donc s'étendre jusqu'au centre, disposition irréalisable en pratique; donc il faut que l'on ait $R > \frac{H}{2}$.

Admettons maintenant que l'on prenne $R = H$, comme on le fait assez généralement dans la pratique.

L'équation (9) se réduira alors à :

$$2 = \frac{4\varepsilon}{H+\varepsilon} + \frac{1}{4} + \frac{\varepsilon}{4H}, \text{ ou } \frac{7}{4} = \frac{4\frac{\varepsilon}{H}}{1+\frac{\varepsilon}{H}} + \frac{1}{4}\frac{\varepsilon}{H}, \text{ ou}$$

$$7 = 10\frac{\varepsilon}{H} + \frac{\varepsilon^2}{H^2}, \text{ d'où}$$

$$\frac{\varepsilon}{H} = -5 + \sqrt{32} = 0{,}66; \text{ ou } \varepsilon = \frac{2}{3}H = 4\,mce; \text{ d'où}$$

$$6mce = H, \text{ et } m = \frac{H}{6ce}.$$

Pour que m soit > 2, condition qu'on cherche à réaliser habituellement, il faudra que $H \geqq 12\,ce$, c'est-à-dire que H soit au moins égal à 10 e, en prenant $c = 0{,}80$. Si nous donnons à e la valeur 0,25 conseillée par M. Morin, nous verrons que, pour pouvoir prendre le rayon égal à la hauteur de chute, il faut que celle-ci soit d'au moins $2^m{,}40$.

Si nous résolvons l'équation (7) dans cette même hypothèse de $R = H$, nous trouverons $x = 2 - \sqrt{2} = 0{,}6$ et par suite $r = 0{,}4$ R, valeur qui approche de très-près, comme l'on voit, de celle qu'adopte M. Morin dans les mêmes circonstances.

Mais la relation (10) peut nous obliger à donner à R une valeur plus petite; voyons dans quels cas cela aura lieu.

Il est clair que cette relation, supposant $H < 2\varepsilon$, ne nous imposera aucune limite si $H > 2\varepsilon$ (nous avons vu que $H = 2\varepsilon$ doit être rejeté comme donnant $x = o$) c'est-à-dire si $H > 8mce > 12{,}8\,e$, en prenant $m = 2$, $c = 0{,}8$; d'où

$$e < \frac{H}{12{,}8}.$$

Si donc e était égal ou supérieur à cette valeur, on devrait limiter R au moyen de la relation (10), qui donne, pour une levée de vanne de $0^m,25$, et pour $m = 2\frac{1}{2}$ et $c = 0,8$, d'où $\varepsilon = 2$, le tableau suivant :

H =	3,5;	3;	2,5;	2;	1,5;	1;	0,8;	0,5.
R <	14;	6;	3,5;	2;	1,2;	0,67;	0,5;	0,29.

On voit par là qu'en général on peut prendre $R = H$, dans le cas ordinaire des levées de vanne de $0^m,25$, excepté pour des hauteurs de chute inférieures à $2^m,50$; et en effet nous avons vu plus haut que pour prendre $R = H$, avec $e = 0,25$ et $m \gtreqless 2$, il fallait que $H \gtreqless 2^m,40$.

Pour les hauteurs de chute plus faibles, il conviendra de rester dans les limites fixées par le tableau précédent, pour que la roue puisse admettre une quantité double de la dépense normale, à moins que l'on ne prenne une levée de vanne inférieure à 0^m25.

Ainsi, par exemple, si avec une hauteur de chute de 1^m, on voulait donner à la roue 1^m de rayon, puisque nous avons trouvé plus haut que pour $R = H$ et $m > 2$, on doit avoir $H > 10\,e$, il faudrait limiter la levée de vanne à 0^m10.

Veut-on toutefois, pour une chute de cette hauteur, maintenir la levée de vanne à 0^m25, il faudra réduire le rayon à 0^m67 au maximum. Si donc dans l'équation (7) nous posons $R = \frac{2}{3}H$, nous trouverons :

$$x^2 + \frac{8}{5}(1 - x) = 2, \text{ ou } x^2 - \frac{8}{5}x = -\frac{2}{5}; \text{ d'où}$$

$$x = \frac{4 - \sqrt{10}}{5} = 0,18, \text{ et par suite } R - r = 0,72\,R.$$

On voit qu'alors la largeur des couronnes doit augmenter bien au delà même de la limite extrême posée par M. Morin.

C'est pourquoi il serait peut-être préférable de limiter la levée de vanne pour les petites chutes à 0^m10 ou 0^m15.

§ 5. Les valeurs que nous venons d'établir théoriquement se rapprochent beaucoup de celles qui ont été constamment adoptées dans la pratique par les bons constructeurs. Cela tient à ce que nous nous sommes placé dans l'hypothèse, qu'ils cherchent à réaliser autant que possible, que l'eau est prise au point le plus bas.

Nous allons voir, ce qui est du reste évident à priori, que cette hypothèse est inconciliable avec la condition fondamentale du maximum d'effet que nous avons posée au commencement, d'après Brasseur, à savoir que l'eau doit avoir quitté les aubes au moment où l'extrémité de celles-ci atteint le point le plus bas; et nous chercherons quel est l'angle au centre α correspondant à l'arc au-dessus duquel l'eau doit atteindre la roue pour que cette condition soit satisfaite.

Désignons par l la longueur de cet arc, de sorte que, α étant exprimé en degrés, on aura $l = \pi R \frac{\alpha}{180}$.

t étant la durée totale de l'ascension et de la chute de l'eau le long des aubes, la condition précédente sera exprimée par :

$$l = vt = \frac{1}{2}Vt = \frac{1}{2}\sqrt{2gH}\,.\,t\,.$$

Si, à cause de la composante centrifuge de la vitesse de la roue, la durée de l'ascension est un peu augmentée, celle de la chute sera un peu diminuée, de manière que la durée totale ne sera guère altérée si nous faisons abstraction de l'influence de cette composante.

Dans cette hypothèse, la durée de l'ascension sera (§ 2) :

$$t_1 = \sqrt{\frac{2(\mathrm{R}\cos\alpha - r)}{g}},$$

et celle de la chute :

$$t_2 = \sqrt{\frac{2(\mathrm{R} - r)}{g}}.$$

Faisant la somme, et la substituant à la place de t dans l'équation précédente :

$$\pi\mathrm{R}\frac{\alpha}{180} = \frac{1}{2}\sqrt{2g\mathrm{H}}\left\{\sqrt{\frac{2(\mathrm{R}\cos\alpha - r)}{g}} + \sqrt{\frac{2(\mathrm{R} - r)}{g}}\right\}, \text{ ou}$$

(11). $$\pi\mathrm{R}\frac{\alpha}{180} = \sqrt{\mathrm{H}(\mathrm{R}\cos\alpha - r)} + \sqrt{\mathrm{H}(\mathrm{R} - r)}\,.$$

Enfin, pour que α soit déterminé en fonctions de toutes quantités connues, il faudra encore substituer à H sa valeur

$$\mathrm{H} = \mathrm{H}_1 - \mathrm{R}(1 - \cos\alpha),$$

ce qui donnera :

(12). $$\pi\mathrm{R}\frac{\alpha}{180} = \sqrt{\mathrm{H}_1 - \mathrm{R}(1 \cos\alpha)}\left\{\sqrt{\mathrm{R}\cos\alpha - r} + \sqrt{\mathrm{R} - r}\right\}.$$

A la vérité les valeurs de R et r qu'il faudrait substituer dans cette équation devraient être tirées, non des relations simplifiées que nous avons obtenues en supposant $\cos\alpha = 1$, mais des relations complètes dans lesquelles entre $\cos\alpha$. On obtiendrait ainsi un système de trois équations, celle-ci (12) qui est transcendante, et celles qui correspondraient

à (7) et à (8), système qu'on ne pourrait résoudre que par voie d'approximations successives.

Aussi pensons-nous que la solution la plus simple consistera à supposer d'abord $\cos\alpha = 1$, ce qui nous donnera pour R et r les valeurs trouvées plus haut, puis à déterminer α par l'équation (11) dans laquelle H sera la chute totale.

Cette première valeur trouvée, on s'en servira pour déterminer R et r au moyen des relations complètes correspondantes à (7) et à (8), et l'on substituera ces valeurs dans l'équation (12); on obtiendra ainsi une seconde approximation à laquelle on pourra s'arrêter en général.

§ 6. Montrons par un exemple l'application de cette méthode.

Supposons que les formules précédentes nous aient conduit à prendre le rayon égal à la hauteur de chute dans l'hypothèse que l'eau est prise au point le plus bas.

L'équation (11) nous donnera en y faisant $\mathrm{R} = \mathrm{H}$ et par suite $r = 0{,}6\,\mathrm{H}$ (§ 4) :

$$\pi\frac{\alpha}{180} - \sqrt{\cos\alpha - 0{,}6} = \sqrt{0{,}4} = 0{,}65,$$

équation d'où l'on déduit pour une première approximation

$$\alpha_1 = 50°;$$

mais comme nous supposons le rayon égal à la hauteur totale de chute, nous aurons à faire : $\mathrm{R} = \mathrm{H}$, et comme $\mathrm{H} = \mathrm{H}_1 - \mathrm{R}$ sin v. α, en remplaçant H_1 par R nous trouverons

$$\mathrm{H} = \mathrm{R}\cos\alpha,\ \text{d'où}\ \frac{\mathrm{R}}{\mathrm{H}} = \frac{1}{\cos\alpha}\,.$$

En donnant à α la valeur $\alpha_1 = 50^\circ$, nous aurons $\frac{R}{H} = 1,56$, et en substituant cette valeur dans l'équation (7) nous obtiendrons

$$x^2 - 6,24\,x = -4,24, \text{ d'où } x = 0,77.$$

Appelons x_1 cette première valeur approchée.

Or la formule (12) devient, si l'on y fait $R = H_1$:

$$(13).\qquad \frac{\pi\alpha}{180} = \sqrt{\cos\alpha}\left(\sqrt{\cos\alpha - x} + \sqrt{1 - x}\right);$$

et l'on voit par là qu'on doit avoir $\cos\alpha > x$; comme nous avons trouvé $x_1 = 0,77$, il s'ensuit que α doit être plus petit que $39°40'$ dont le cosinus est égal à 0,77.

Si donc nous prenons $\alpha_2 = 39^\circ$, nous trouverons

$$\frac{R}{H} = \frac{1}{\cos\alpha_2} = 1,287;$$

et l'équation (7) nous donnera :

$$x_2 - 5,15\;x = -5,15;\ \text{d'où } x_2 = 0,71.$$

En substituant ces valeurs dans l'équation (13), le premier membre deviendra égal à 0,68, et le second à 0,705; comme celui-là augmente avec α tandis que celui-ci diminue, nous aurons à prendre $\alpha_3 > 39^\circ$.

Soit $\alpha_3 = 39°10'$; x_3 restera égal à 0,71 aux millièmes près; et la substitution dans l'équation (13) donnera pour le premier membre 0,684 et pour le second 0,699.

Cette approximation est plus que suffisante pour la pratique.

Enfin, la substitution de $x_3 = 0,71$ dans l'équation (8) montre que si l'on prend le rayon égal à la hauteur totale de chute, celle-ci doit être égale ou supérieure à 12 e.

Si cette condition est remplie, on voit qu'en prenant le rayon égal à la hauteur de chute, l'on pourra se contenter de donner aux couronnes une largeur égale aux 0,3 du rayon environ; et que l'eau devra rencontrer la roue à 39° environ du point le plus bas, pour qu'elle puisse s'être déversée avant que l'aube ait atteint ce point, et produire son maximum d'effet.

Sans doute, en n'étudiant que l'action d'une seule molécule d'eau, nous avons négligé celle que les molécules suivantes exercent sur elle; et par conséquent en pratique, il sera prudent d'augmenter la largeur des couronnes; mais pour cette même raison, l'eau, montant plus haut, restera plus longtemps sur les aubes, et l'angle α pourra devoir être plus grand en pratique que la valeur même que nous a donnée le calcul.

Nous ne serions nullement surpris si une roue, établie dans les conditions que nous venons de déterminer, donnait un rendement notablement supérieur aux meilleurs rendements qu'on ait obtenus jusqu'aujourd'hui.

NOTE.

L'un des honorables commissaires chargés d'examiner ce travail a exprimé, dans son rapport, le désir fort juste de nous voir entrer dans quelques détails relativement à deux faits, qui ne sont pas suffisamment éclaircis dans les pages précédentes. C'est avec le plus grand plaisir que nous satisfaisons à ce vœu, et nous remercions le savant rapporteur d'avoir bien voulu nous fournir l'occasion de nous expliquer sur ces deux points.

Nous reprendrons nos deux équations fondamentales sous une forme plus générale, et nous en déduirons les principes énoncés au § 2. Ensuite nous calculerons, d'une manière rigoureuse, la vitesse relative qui entre dans ces formules.

En conservant les notations du § 2, désignons, en outre, par $R' - r$ la hauteur dont l'eau descend sur les aubes, et par V' sa vitesse relative au point où elle les quitte; de sorte que sa vitesse absolue sera $V' - v$.

Les équations (1), (2) et (3) deviennent alors :

$$(1)\quad \frac{1}{2}mV^2 - \frac{1}{2}m\left(v\frac{r}{R}\right) = mg\,(R\cos\alpha - r) + T_1.$$

$$(2).\quad \frac{1}{2}m\left(v\frac{r}{R}\right)^2 - \frac{1}{2}m\,(V' - v)^2 = -\,mg\,(R' - r) + T_2.$$

$$(3).\quad T = T_1 + T_2 = \frac{1}{2}mV^2 - \frac{1}{2}m\,(v' - v)^2 + mg\,(R' - R\cos\alpha).$$

$$= mg\,[H + R\,(1 - \cos\alpha) - (R - R')] - \frac{1}{2}m\,(V' - v)^2$$

$$= mg\,H_1 - mg\,(R - R') - \frac{1}{2}m\,(V' - v)^2.$$

Les deux quantités $R - R'$ et $(V' - v)$ étant essentiellement positives, on voit que le maximum d'effet utile aura lieu si l'on prend à la fois :

$$1^\circ \quad R' = R, \qquad \text{et } 2^\circ \quad V' = v,$$

et que ce maximum sera égal au travail absolu, comme il a été dit au § 2.

Pour déterminer V', supposons tous les points de l'aube animés d'une vitesse v, égale à celle de la circonférence de la roue, et de sens contraire, ce qui n'altère en rien les mouvements relatifs; nous pourrons appliquer à ceux-ci le principe des forces vives. La vitesse relative de l'eau à l'entrée est $V - v$, à la sortie V'; et la pesanteur ayant effectué un travail négatif $-\,mg\,(R\cos\alpha - r)$, et un travail positif $mg\,(R - r)$, nous aurons :

$$V'^2 - (V - v)^2 = gR\,(1 - \cos\alpha).$$

La valeur de V' différera peu de $V - v$ si l'angle α est assez petit; et c'est pour éviter toute complication de calcul, comme nous l'avons dit au § 2, et arriver à des formules d'une application facile, que nous avons remplacé immédiatement V' par $V - v$, à l'exemple de Poncelet.