V. — *Nouvelles Tables usuelles des Logarithmes des nombres naturels et des lignes trigonométriques et Tables inverses, en deux feuilles, accompagnées d'une introduction renfermant un précis de Trigonométrie pure, ainsi que la disposition et l'usage de ces tables,*

PAR

F. FOLIE,

DOCTEUR EN SCIENCES PHYSIQUES ET MATHÉMATIQUES, RÉPÉTITEUR A L'ÉCOLE DES MINES, PROFESSEUR A L'ÉCOLE INDUSTRIELLE DE LIÉGE.

AVANT-PROPOS.

L'idée première des tables que nous avons l'honneur de présenter à la Société royale des Sciences appartient à l'illustre W. Struve qui les fit imprimer pour les astronomes de Pulkova et en fit don aux observatoires de l'Allemagne avec lesquels il était en relation.

C'est dans l'un de ceux-ci que l'on a eu l'obligeance de nous les communiquer, et nous avons pu apprécier les nombreux services qu'elles rendent aux astronomes dans leurs calculs préparatoires.

On comprend aisément que Struve n'ait pas étendu sa table aux lignes trigonométriques; l'approximation la plus grossière en effet ne tolère pas des erreurs supérieures à quelques secondes dans les angles observés en astronomie; les moindres tables dont on puisse se servir pour cet objet, même dans les calculs de première approximation, sont donc les tables à 5 décimales de Lalande, que l'on emploie du reste très-fréquemment.

Le but que nous nous efforçons de remplir est tout différent; nous voudrions vulgariser l'application des logarithmes à tous les calculs de l'ingénieur, de l'architecte et de l'arpenteur, et montrer les immenses avantages que présente l'emploi des tables de Struve.

Comme dans la pratique la connaissance des angles à une demi-minute près est généralement suffisante, nous avons pu construire des tables analogues pour les lignes trigonométriques, et renfermer en deux feuilles tous les logarithmes que l'on doit chercher aujourd'hui dans un volume toujours lent et incommode à manier.

Avant d'entrer dans le détail de la disposition et de l'usage de ces tables, nous croyons utile de rappeler brièvement les principales formules employées dans la résolution des triangles.

Nous croyons avoir observé que la plupart de ceux qui ne s'adonnent pas à l'étude des mathématiques supérieures oublient souvent, alors qu'ils en pourraient retirer des fruits, les principes essentiels de la trigonométrie et le calcul des logarithmes, avec lesquels ils ont été familiarisés dans les colléges.

Ce n'est pas cependant faute de voir appliquer ces méthodes très-fréquemment dans toute la série de leurs études; mais soit qu'elles leur aient été présentées dans les éléments comme hérissées de difficultés (et nombre d'auteurs tombent dans ce travers), soit qu'il leur répugne de se servir de tables dont on ne leur a rendu l'emploi ni assez facile ni assez familier, ils en perdent bientôt l'habitude. Cette habitude, nous voudrions la donner à tous ceux qui connaissent les quatre premiers livres de la géométrie, et la théorie arithmétique ou même simplement les propriétés essentielles des logarithmes; nous voudrions aussi leur montrer les avantages de l'emploi si aisé de nos tables sur celui de la règle à calcul que l'on devrait réserver, nous semble-t-il, aux opérations exécutées sur le terrain.

On nous permettra d'adresser ici nos remerciements aux astronomes à qui nous devons et la connaissance des tables de Struve, et le peu d'habitude que nous avons pu acquérir des calculs trigonométriques; en premier lieu au célèbre directeur de l'observatoire de Bonn, Mr Argelander, qui a mis à notre disposition, avec une générosité et une affabilité exquises, ses excellentes leçons et ses beaux instruments; ensuite à MM. Schönfeld et Krüger qui dirigent aujourd'hui, le premier, l'observatoire de Mannheim, le second celui de Helsingfors, et qui se sont souvent distraits de leurs travaux les plus importants pour nous aider de leurs savants conseils.

Précis de trigonométrie pure.

Nous ne nous occuperons, dans notre précis, que de trigonométrie pure; c'est-à-dire que nous n'étudierons pas le moins du monde les fonctions circulaires ou lignes trigonométriques envisagées dans le cercle; il nous semble naturel cependant, quoique nous ne les considérions absolument que comme des rapports entre de certains côtés d'un triangle, de leur conserver les dénominations universellement adoptées de sinus, cosinus, tangente et cotangente, les seules dont nous fassions usage.

Résolution des triangles.

Un triangle renferme trois côtés que nous désignerons toujours par a, b, c, et trois angles respectivement opposés à ces côtés : A opposé à a, B à b, C à c. La relation connue : $A + B + C = 180° = \pi$, permet de trouver le troisième angle si l'on connaît les deux autres; en réalité donc la détermination complète du triangle revient à celle des cinq quantités a, b, c, A, B ; et nous verrons, comme la géométrie le prouve du reste, que la connaissance de trois de ces quantités permet, en général, de déterminer les deux autres.

Si le triangle est rectangle, en nommant A l'angle droit, il ne restera à connaître que les quatre quantités a, b, c, B ou C pour la détermination complète desquelles deux quelconques d'entre elles suffiront.

Résolution des triangles rectangles.

Nous commencerons par ce dernier cas comme le plus simple, et nous allons rechercher les relations qui existent entre les quantités a, b, c, B, C ; à cet effet, posons d'abord quelques définitions destinées à abréger le discours. (*)

(*) On nous demandera peut-être si nos définitions correspondent identiquement à celles qui sont généralement adoptées ; il est clair qu'en fait il en est ainsi : mais c'est une chose dont nous n'avons pas à nous préoccuper. En effet, le rapport d'un côté à l'hypothénuse ne dépendant que de l'angle opposé est une

Nous appellerons sinus d'un angle le rapport du côté opposé à l'hypothénuse :

$$(1) \qquad \sin B = \frac{b}{a}. \quad \sin C = \frac{c}{a}.$$

Le cosinus d'un angle est le rapport du côté adjacent à l'hypothénuse :

$$(2) \qquad \cos B = \frac{c}{a}. \quad \cos C = \frac{b}{a}.$$

La tangente d'un angle est le rapport du côté opposé au côté adjacent de l'angle droit :

$$(3) \qquad \operatorname{tg} B = \frac{b}{c}. \quad \operatorname{tg} C = \frac{c}{b}.$$

La cotangente d'un angle est le rapport du côté de l'angle droit adjacent au côté opposé :

$$(4) \qquad \operatorname{cotg} B = \frac{c}{b}. \quad \operatorname{cotg} C = \frac{b}{c}.$$

De ces quatre définitions, nous allons déduire quelques relations très-importantes.

Les formules 1) et 2) élevées au carré et ajoutées donnent :

$$\sin^2 B + \cos^2 B' = \frac{b^2 + c^2}{a^2} = 1, \text{ puisque } b^2 + c^2 = a^2.$$

Donc : (5) $\sin^2 B + \cos^2 B = 1.$

De même pour l'angle C, quels que soient du reste B et C.

Divisées l'une par l'autre ces mêmes formules (1) et (2) conduisent à :

$$\frac{\sin B}{\cos B} = \frac{b}{a} : \frac{c}{a} = \frac{b}{c}; \text{ or } 3): \operatorname{tg} B = \frac{b}{c}; \text{ donc:}$$

$$(6) \qquad \operatorname{tg} B = \frac{\sin B}{\cos B}. \text{ De même : } \operatorname{tg} C = \frac{\sin C}{\cos C}.$$

certaine fonction de cet angle, que nous aurions pu nommer fonction S, mais à laquelle nous avons conservé la dénomination de sinus pour éviter des notations nouvelles ; et la rigueur exige seulement que nous restions fidèle à notre définition.

On en déduit encore par la division inverse :

$$\frac{\cos B}{\sin B} = \frac{c}{a} : \frac{b}{a} = \frac{c}{b}\text{; or 4) : } \operatorname{cotg} B = \frac{c}{b}\text{; donc :}$$

$$(7) \qquad : \qquad \operatorname{cotg} B = \frac{\cos B}{\sin B}. \quad \text{De même : } \operatorname{cotg} C = \frac{\cos C}{\sin C}.$$

Par la multiplication des formules (3) et (4) ou (6) et (7) on arrive à :

$$\operatorname{tg} B \operatorname{cotg} B = \frac{b}{c} \times \frac{c}{b} = 1\text{ ; donc :}$$

$$(8) \qquad \operatorname{tg} B \operatorname{cotg} B = 1. \ \operatorname{cotg} B = \frac{1}{\operatorname{tg} B}. \text{ De même de C.}$$

Si nous comparons les valeurs de $\frac{c}{a}$ et celles de $\frac{c}{b}$ tirées respectivement des formules (1) et (2) ou (3) et (4) nous verrons que : $\frac{c}{a} = \sin C = \cos B$, et que : $\frac{c}{b} = \operatorname{tg} C = \operatorname{cotg} B$; et remarquant que C est le complément de B et réciproquement, nous en conclurons :

(9) { Le cosinus d'un angle est égal au sinus de son complément ; la cotangente d'un angle est égale à la tangente de son complément ; ou les deux propositions réciproques.

Les formules que nous venons d'établir suffisent à la résolution des triangles rectangles.

Nous allons aborder les quatre cas qui peuvent se présenter, en réservant les applications numériques jusqu'après l'exposition des tables.

1er Cas. On donne l'hypothénuse a et un angle B. L'angle C est donc connu ; et les formules (1) et (2) déterminent les côtés b et c :

$$b = a \sin B. \quad c = a \cos B.$$

2e Cas. On donne un côté b de l'angle droit et un angle.

Les deux angles B et C sont encore connus, et le 2d côté c ainsi que l'hypothénuse a seront donnés par les formules :

$$c = b \text{ cotg } B = \frac{b}{\text{tg } B} \cdot \quad a = \frac{\quad}{\sin B} \cdot$$

3ᵉ Cas. On donne l'hypothénuse a et un côté b de l'angle droit.

Nous cherchons d'abord un angle par la formule (1) $\sin B = \frac{b}{a}$.

Quant au côté c, on peut le trouver soit par la formule connue

$$c = \sqrt{(a^2 - b^2)} = \sqrt{(a + b)\,(a - b)}$$

soit, ce qui est plus expéditif, par

(2) $$c = a \cos B,$$

puisque l'angle B est maintenant connu.

4ᵉ Cas. On donne les deux côtés b et c de l'angle droit. Il suffirait de déterminer un angle, puisque l'hypothénuse $a = \sqrt{b^2 + c^2}$; mais ce calcul est très-long à effectuer; ici encore, nous chercherons d'abord l'angle B par :

(3) $$\text{tg } B = \frac{b}{c};$$

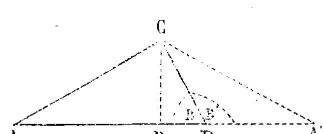
puis l'hypothénuse a par (1) :

$$a = \frac{b}{\sin B}.$$

Quant à l'aire du triangle, elle se déterminera dans tous les cas par la formule très-simple : $T = \frac{1}{2}\,bc$.

Résolution des triangles quelconques.

Avant d'entrer dans l'examen des quatre cas renfermés dans le problème général, établissons, comme pour les triangles rectangles, les formules dont nous aurons à faire usage.



Considérons d'abord le triangle acutangle ABC dans lequel, outre les conventions déjà faites, nous ferons constamment la hauteur $CD = h$; et les deux segments de la base respectivement égaux AD à s, DB à t.

Dans les triangles rectangles ACD et BCD, en vertu de la formule (1), nous pouvons écrire :

$$h = b \sin A. \quad h = a \sin B.$$

D'où : $b \sin A = a \sin B$; ou $\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b}$. En prenant AC pour base, nous trouverions de même

$$c \sin A = a \sin C \text{ ; ou : } \frac{\sin A}{a} = \frac{\sin C}{c}.$$

et de la comparaison de ces deux formules :

$$(10) \qquad \frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}.$$

c'est-à-dire : les sinus des angles sont proportionnels aux côtés opposés. Reste à démontrer que cette formule s'applique également aux triangles obtusangles.

Considérons en effet le triangle A'BC, et nommons a', b', c' ses côtés, A' B', C' ses angles.

Comme précédemment, les deux triangles BCD et A'CD nous fourniront par les formules (1) les relations $h = b' \sin A'$. $h = a' \sin B'$; et si nous convenons maintenant de poser (*)

$$(10) \text{ bis. } \sin B' = \sin B, \text{ ou: } \sin(180^\circ - B) = \sin(\pi - B) = \sin B;$$

c'est-à-dire de regarder le sinus d'un angle obtus comme étant le sinus de son supplément, la dernière formule deviendra $h = a' \sin B'$, et, comparée à la précédente, donnera :

$$b' \sin A' = a' \sin B'.$$

En prenant b' pour base on aurait de même :

$$c' \sin A' = a' \sin C';$$

(*) En vertu de nos définitions, il n'existe pas de sinus ou de cosinus d'un angle obtus. Ce n'est donc que pour la symétrie des formules que nous écrirons sin B' qu'on doit toujours traduire par sin B ; plus bas, la même raison de symétrie nous fera écrire — cos B' au lieu de cos B ; et pour rester fidèle à nos définitions, nous devrons toujours lire la 2de quantité au lieu de la 1re. Tel est le sens précis de nos conventions.

et de ces deux relations :

$$\frac{\sin A'}{a'} = \frac{\sin B'}{b'} = \frac{\sin C'}{c'}; \qquad \text{c. q. f. d.}$$

Fig. I. Le même triangle ABC nous conduit à une autre relation très-simple déduite des formules (2).

Celles-ci, appliquées aux deux triangles ACD et BCD, donnent en effet :

$$s = b \cos A. \quad t = a \cos B.$$

Mais $c = s + t$; donc :

$$(11) \qquad c = a \cos B + b \cos A.$$

Pour étendre cette formule au cas où le côté c serait adjacent à un angle obtus, reprenons le triangle précédent A'BC et posons $A'D = s'$.

Les formules 2, nous donneront dans les triangles A'CE

$$s' = b' \cos A' ;$$

et comme $t = a' \cos B$ (vu que a' n'est autre chose que a), et que $c' = s' - t$, il s'en suit :

$$c' = b' \cos A' - a' \cos B.$$

Convenons actuellement de faire : (*)

$$(11) \text{ bis: } \cos B' = -\cos B, \text{ou} : \cos(180^\circ - B) = \cos(\pi - B) = -\cos B,$$

ou de regarder le cosinus d'un angle obtus comme étant le cosinus de son supplément pris en signe contraire, cette formule deviendra

$$c' = b' \cos A' + a' \cos B', \qquad \text{c. q. f. d.}$$

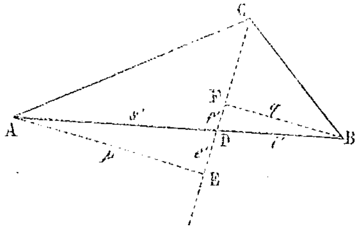


Fig. II. Une autre séparation du triangle en deux triangles rectangles va nous faire connaître des relations nouvelles.

Traçons la bissectrice CD de l'angle C et abaissons sur cette droite les perpendiculaires $AE = p$. $BF = q$; posons $CE = e$, $CF = f$.

(*) Voir la note précédente.

Par le moyen des formules 1) et 2) les triangles ACE, BCF donnent :

$$p=b\sin\frac{1}{2}C.\quad e=b\cos\frac{1}{2}C.\quad q=a\sin\frac{1}{2}C.\quad f=a\cos\frac{1}{2}C.$$

De même en posant dans les triangles ADE, BDF, AD$=s'$, DE$=e'$; DB$=t'$, DF$=f'$, nous aurons :

$$p=s'\sin D.\quad e'=s'\cos D.\quad f'=t'\cos D.\quad q=t'\sin D.$$

Remarquons que l'angle D de ces triangles se trouve dans le triangle DBC par la formule :

$$D=180^\circ-B-\frac{1}{2}C.$$

dans ADC par la propriété de l'angle extérieur :

$$D=A+\frac{1}{2}C$$

d'où ajoutant :

$$2\,D=180^\circ+A-B \quad \text{ou} \quad \left\{\begin{array}{l} D=90^\circ+\dfrac{A-B}{2} \\ D=90^\circ-\dfrac{B-A}{2} \end{array}\right.$$

Au moyen des remarques 9) nous pourrons mettre dans les formules ci-dessus, au lieu de cos D et de sin D, les valeurs respectives $\sin\frac{B-A}{2}$ et $\cos\frac{B-A}{2}$, et ces formules se transformeront en :

$$p=s'\cos\frac{B-A}{2}.\quad e'=s'\sin\frac{B-A}{2}.\quad f'=t'\sin\frac{B-A}{2}.\quad q=t'\cos\frac{B-A}{2}.$$

Or d'un côté

$$EF=e'+f'=(s'+t')\sin\frac{A-B}{2}=c\sin\frac{B-A}{2}.$$

D'un autre :

$$EF=e-f=(b-a)\cos\frac{1}{2}C.$$

De même :

$$p+q=(s'+t')\cos\frac{B-A}{2}=c\cos\frac{B-A}{2}.$$

Et :

$$p+q=(b+a)\sin\frac{1}{2}C.$$

Comparant ces formules deux à deux :

$$(12)\qquad \begin{aligned} c\sin\frac{B-A}{2}&=(b-a)\cos\frac{1}{2}C.\\ c\cos\frac{B-A}{2}&=(b+a)\sin\frac{1}{2}C.\end{aligned}$$

Divisant ces deux dernières, membre à membre :

$$(13)\qquad \operatorname{tg}\frac{1}{2}(B-A)=\frac{b-a}{b-a}\operatorname{cotg}\frac{1}{2}C.$$

Si $a > b$, d'où $A > B$, nous écririons de même :

$$(13)\qquad \operatorname{tg}\frac{1}{2}(A-B)=\frac{a-b}{a+b}\operatorname{cotg}\frac{1}{2}C.$$

Rem. Cette démonstration est générale parce que tous les angles dont nous nous sommes servis sont toujours aigus, quels que soient du reste les angles A, B, C du triangle ; en outre l'angle $\frac{1}{2}(B-A)$ ou $\frac{1}{2}(A-B)$ selon que $B>A$ ou $A>B$ est toujours aigu ; car si l'on avait $\frac{1}{2}(B-A)>\frac{\pi}{2}$ ou $B-A>\pi$, il en résulterait $B>\pi+A$ ce qui est absurde, puisque $A+B+C=\pi$.

Un théorème de géométrie traduit en langage algébrique, telle sera notre dernière formule ; mais pour la transformer de la manière la plus propre au calcul, nous devrons invoquer une formule nouvelle que nous chercherons tout d'abord.

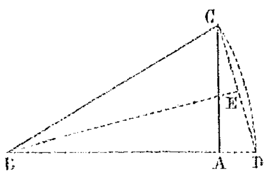


Fig. III. Soit tracé avec l'hypothénuse BC du triangle ABC pour rayon un arc de cercle rencontrant en D le prolongement du côté BA ; tirons CD et BE perpendiculaire à cette ligne ; BE sera la bissectrice de l'angle B.

Comme $BD = BC = a$, et que $c = a\cos B$, il s'ensuit :

$$AD = a - a\cos B = a(1 - \cos B).$$

D'ailleurs dans le triangle ACD :

$AD = CD \sin \frac{1}{2}B$, puisque les angles ACD et EBD sont égaux comme ayant leurs côtés perpendiculaires entre eux. Ou bien

$$AD = 2ED.\sin \frac{1}{2}B.$$

Enfin le triangle BED nous donne

$$ED = BD \sin \frac{1}{2} B = a \sin \frac{1}{2} B \text{ ; d'où}$$

$$AD = 2a.\sin^2 \frac{1}{2}B.$$

Comparant à la 1re valeur de AD et divisant par a.

$$1 - \cos B = 2 \sin^2 \frac{1}{2}B.$$

Ou $$\cos B = 1 - 2 \sin^2 \frac{1}{2} B.$$

$$1 + \cos B = 2 - 2\sin^2 \frac{1}{2} B = 2\left(1 - \sin^2 \frac{1}{2} B\right) = 2\cos^2 \frac{1}{2} B, \text{ par } 5).$$

Nous pouvons donc écrire les deux formules :

$$1 - \cos B = 2 \sin^2 \frac{1}{2} B.$$

(14) $$1 + \cos B = 2\cos^2 \frac{1}{2} B.$$

Reste à faire voir qu'elles sont vraies également dans le cas de l'angle obtus.

En nous rappelant les remarques 9) et 11 bis) et faisant $B' = 180° - B = \pi - B$; d'où $\frac{B'}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{B}{2}$, nous verrons que :

$$1+\cos B'=1-\cos B;\ \cos\frac{1}{2}B'=\sin\frac{1}{2}B.$$

$$1-\cos B'=1+\cos B\ ;\ \sin\frac{1}{2}B'=\cos\frac{1}{2}B.$$

et les valeurs substituées dans les formules 14) rendent identiquement les mêmes formules pour le cas de l'angle obtus B', c.q.f.d.

Ceci posé, nous savons par la géométrie que : le carré d'un côté quelconque d'un triangle est à la somme des carrés des deux autres moins ou plus le double produit d'un de ces côtés par la projection du 2^d sur le premier : moins si l'angle opposé au côté cherché est aigu, plus s'il est obtus.

Ce théorème, énoncé algébriquement, s'écrira :

Pour ABC (fig. 1.) $b^2=a^2+c^2-2ct=a^2+c^2-2ca\cos B$, ou pour A'BC : $b'^2=a'^2+c'^2+2c't=a'^2+c'^2+2c'a'\cos B$ $=a'^2+c'^2-2c'a'\cos B'$, en vertu de 11 *bis*) de sorte qu'en général, quel que soit l'angle B, nous aurons la formule :

$$b^2=a^2+c^2-2ac\cos B.$$ De même

$$(15)\qquad \begin{aligned} a^2 &= c+b^2-2bc\cos A.\\ c^2 &= a^2+b^2-2ab\cos C.\end{aligned}$$

De la 1^re de ces formules nous déduisons :

$$\operatorname{Cos} B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac},$$

à laquelle nous allons appliquer la transformation annoncée par les formules 14).

$$1+\cos B=1+\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\frac{2ac+a^2+c^2-b^2}{2ac}=$$

$$\frac{(a+c)^2-b^2}{2ac}=\frac{\left\{(a+c)+b\right\}\left\{(a+c)-b\right\}}{2ac}$$

$$1-\cos B=1-\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=1+\frac{b^2-a^2-c^2}{2ac}=\frac{2ac+b^2-a^2-c^2}{2ac}$$

$$=\frac{b^2-(a^2+c^2-2ac)}{2ac}=\frac{b^2-(a-c)^2}{2ac}=$$

$$\frac{\{b+(a-c)\}\{b-(a-c)\}}{2ac}=\frac{(b+a-c)(b-a+c)}{2ac}.$$

Posant pour plus de simplicité :

$$a+b+c=2p. \text{ d'où } a+b-c=2p-2c=2(p-c)$$

$$a-b+c=2(p-b)\,;\; b+c-a=2(p-a),$$

Il en résultera les transformations :

$$1+\cos B=\frac{2p.\,2(p-b)}{2ac}.\; 1-\cos B=\frac{2(p-c)\,2(p-a)}{2ac}$$

et par les formules 14), en supprimant les facteurs 2 :

$$(15) \text{ bis : } \operatorname{Cos}^2\frac{1}{2}B=\frac{p(p-b)}{ac}.\quad \sin^2\frac{1}{2}B=\frac{(p-a)(p-c)}{ac}$$

$$\text{De même } \cos^2\frac{1}{2}A=\frac{p(p-a)}{bc}.\operatorname{Sin}^2\frac{1}{2}A=\frac{(p-b)(p-c)}{bc}.$$

$$\operatorname{Cos}^2\frac{1}{2}C=\frac{p(p-c)}{ab}.\quad \operatorname{Sin}^2\frac{1}{2}C=\frac{(p-a)(p-b)}{ab}$$

Divisant membre à membre et par couple, et se rappelant que

par 6):

$$tg\,\frac{1}{2}B=\frac{\sin\frac{1}{2}B}{\cos\frac{1}{2}B}, \text{ etc.,}$$

on trouve :

$$tg^2\frac{1}{2}B=\frac{(p-a)(p-c)}{p\quad(p-b)}, \text{ etc.}$$

Extrayant enfin la racine carrée des 2 membres : (*)

$$tg\,\frac{1}{2}\,B = \sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{p\,(p-b)}}$$

$$(16) \qquad tg\,\frac{1}{2}\,A = \sqrt{\frac{(p-b)\,(p-c)}{p\,(p-a)}}$$

$$g\,\frac{1}{2}\,A = \sqrt{\frac{(p-a)\,(p-b)}{p\,(p-c)}}$$

Une dernière formule qui est souvent d'une grande utilité est celle de l'aire du triangle exprimée au moyen des quantités données.

Quel qu'il soit, son aire T (fig. 1) est donnée par

Pour ABC : $$T = \frac{1}{2}\,c\,h = \frac{1}{2}\,c\,b\,\sin A = \frac{1}{2}\,c\,a\,\sin B$$

Pour A′BC : $$T' = \frac{1}{2}\,c'h = \frac{1}{2}\,c'\,b'\,\sin A' = \frac{1}{2}\,c'\,a'\,\sin B = \frac{1}{2}\,c'\,a'\,\sin B'$$

par la remarque 10 bis.

De même on trouverait :

$$T = \frac{1}{2}\,a\,b\,\sin C. \quad T' = \frac{1}{2}\,a'\,b'\,\sin C'.$$

En général donc :

$$(17) \qquad T = \frac{1}{2}\,b\,c\,\sin A = \frac{1}{2}\,a\,c\,\sin B = \frac{1}{2}\,a\,b\,\sin C, \text{ ou :}$$

(*) Comme chacun des angles A, B, C est $< \pi$, $\frac{1}{2}$ A, $\frac{1}{2}$ B, $\frac{1}{2}$ C seront $< \frac{\pi}{2}$; les premiers membres sont donc toujours positifs ; les seconds par suite aussi.

l'aire d'un triangle est égale à la moitié du produit de deux côtés adjacents par le sinus de l'angle compris.

Pour arriver à une expression indépendante des angles, multiplions entre elles les formules (14) :

$$(1+\cos B)\ (1-\cos B)=4\sin^2\frac{1}{2}B\cos^2\frac{1}{2}B\ ;\ \text{ou :}$$

$$1-\cos^2 B=4\sin^2\frac{1}{2}B\cos^2\frac{1}{2}B\ ;\ \text{ou par 5)}$$

$$\sin^2 B=4\sin^2\frac{1}{2}B\cos^2\frac{1}{2}B\ ;$$

Extrayant la racine carrée des deux membres : (*)

$$\text{Sin } B=2\sin\frac{1}{2}B\cos\frac{1}{2}B.$$

Et si l'on substitue cette valeur dans 17) on a :

$$T=\frac{1}{2}ac\times 2\sin\frac{1}{2}B\cos\frac{1}{2}B=ac\sin\frac{1}{2}B\cos\frac{1}{2}B$$

Par 15 bis) : $$T=ac\sqrt{\frac{p(p-b)}{ac}}\cdot\sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{ac}},$$

ou enfin :

$$T=\sqrt{p\ (p-a)\ (p-b)\ (p-c)}, \tag{18}$$

expression donnée généralement dans les traités de géométrie.

C'est au moyen des formules que nous venons d'établir, et spécialement de 10), 11), 12), 13) et 16) que nous allons résoudre un triangle dans les quatre cas suivants :

1er cas. On donne deux angles et un côté a.

On connait donc les trois angles A, B, C ; et les côtés b et c seront donnés par 10)

(*) Comme $\sin B$, $\sin\frac{1}{2}B$ et $\cos\frac{1}{2}B$ sont positifs quel que soit B, il n'y a pas lieu à employer le double signe.

$$b = a\frac{\sin B}{\sin A}, \quad c = a\frac{\sin C}{\sin A}.$$

L'aire par 17) $T = \frac{1}{2} bc \sin A = \frac{1}{2} a^2 \frac{\sin B \sin C}{\sin A}$.

2e cas. On donne deux côtés a et b et l'angle compris C. De la connaissance de C l'on déduit celle de :

$$A + B = \pi - C, \text{ et de } \frac{A+B}{2} = \frac{\pi - C}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{C}{2}.$$

Soit $a > b$. Par 13) : $tg \frac{1}{2}(A-B) = \frac{a-b}{a+b} tg \frac{A+B}{2}$.

Cette formule donnera $\frac{1}{2}(A - B)$, et comme $\frac{A+B}{2}$ est déjà connu, on aura A et B.

Quant au 3e côté c il se calculera par

12) $$c = (a+b)\frac{\cos\frac{1}{2}(A+B)}{\cos\frac{1}{2}(A-B)}; \text{ ou par}$$

11) $c = a \cos B + b \cos A$, formule moins avantageuse, et l'aire par 17)

$$T = \frac{1}{2} ab \sin C. \ (*)$$

3me Cas. On donne deux côtés a et b et un angle A opposé à l'un d'eux.

(*) Si l'on voulait n'employer dans le calcul de l'aire que les quantités dont on s'est déjà servi précédemment, on ferait usage de la formule suivante, que nous donnons sans la démontrer parce qu'elle sort de notre cadre, mais qu'un lecteur un peu exercé trouvera aisément :

$$T = \frac{(a+b)(a-b)}{4}\left\{\sin^2\frac{A+B}{2}\cot g\frac{A-B}{2} - \cos^2\frac{A+B}{2}\, tg\frac{A-B}{2}\right\}$$

Par 1) : $$\sin B = \frac{b}{a} \sin A,$$

ce qui fait connaître l'angle B et par suite C.

Le troisième côté se trouvera par :

10) $$c = a \frac{\sin C}{\sin A}$$ ou par :

11) $$c = a \cos B + b \cos A.$$

La 1re de ces formules est préférable sous le rapport de la rapidité du calcul.

L'aire est donnée par 17) : $T = \frac{1}{2} ab \sin C.$

Ce cas présente une discussion analogue à celle du même problème en géométrie.

1° Si $b \sin A > a$, on aura $\sin B > 1$, ce qui est absurde par 5) ; et le problème est impossible.

2° Si $b \sin A = a$, on voit aisément par 1) que le triangle sera rectangle et que son hypothénuse est b, c'est-à-dire que l'angle B est droit. — De là résulte $\sin \frac{\pi}{2} = 1$; et par 5) $\cos \frac{\pi}{2} = 0$.

3° Si $b \sin A < a$, on pourra tout aussi bien prendre pour l'angle B l'angle obtus que nous appellerons B′ que l'angle aigu ; mais pour que cet angle B′ convienne comme B lui-même, il faut que l'angle B soit $>$ A ; alors en effet $B' = \pi - B < \pi - A$; donc $A + B' < \pi$, ce qui permet l'existence de l'angle C.

Or, $B > A$ exige aussi que $b > a$; donc, si l'on a en même temps

$$b \sin A < a \text{ et } b > a,$$

les angles B et B′ conviennent tous les deux ; d'où deux angles $C = \pi - (A + B) \cdot C' = \pi - (A + B') = \pi - (A + \pi - B) = B - A$, et par suite deux côtés C et C′ ; c'est-à-dire deux triangles différents mais renfermant les mêmes données a, b et A. Si au contraire, tandis que $b \sin A < a$ l'on a $b < a$, la seconde valeur B′ ne peut pas convenir ; car alors :

$B < a$. $B' = \pi - B > \pi - A$; d'où $A + B' > \pi$, ce qui ne peut convenir à aucun triangle. (*)

4me Cas. On donne les trois côtés a, b, c.

Les trois angles sont fournis par les formules 16) :

$$tg\frac{1}{2}A = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}$$

$$tg\frac{1}{2}B = \sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{p(p-b)}}$$

$$tg\frac{1}{2}C = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{p(p-c)}}$$

et l'aire par la formule 18)

$$T = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

Nous bornons ici notre précis de trigonométrie ; les questions que nous avons résolues sont en effet les seules qui se rencontrent généralement dans les applications.

Le lecteur qui possède bien ces 18 formules comprendra du reste aisément celles que donnent les auteurs dans les problèmes plus spéciaux que nous n'avons pas examinés.

Après avoir exposé la disposition des tables, nous en montrerons les usages dans la résolution numérique des triangles.

Des logarithmes en général.

Nous appellerons avec Serret (**) logarithme d'un nombre un autre nombre calculé de telle sorte que :

Le logarithme du produit de deux nombres soit égal à la somme des logarithmes de ces deux nombres.

(*) Nous ne nous occupons pas du cas où $b > a$ et $A = 90°$ parce qu'il rentre dans celui du triangle rectangle.

(**) Voir ses Éléments d'Arithmétique.

Ainsi, si a et b désignent deux nombres, $l.a$ et $l.b$ leurs logarithmes, on a par définition :

$$l.\ (a \cdot b) = l.a + l.b.$$

De là résulte tout d'abord : 1° Que le logarithme de 1 est O ; car faisant $b=1$:

$$l.(a \times 1) = l.a + l.1 \ ; \text{ d'où } l.1 = 0.$$

2° Que le logarithme de l'inverse d'un nombre est égal au logarithme de ce nombre pris en signe contraire.

Car si nous faisons $b=\frac{1}{a}$; d'où $a \cdot b = 1$, la formule capitale devient :

$$l.1 = l.a + l.\frac{1}{a} \ ; \text{ et comme } l.1 = 0 : \ l.a + l.\frac{1}{a} = 0 \ ;$$

$$\text{d'où } l.\frac{1}{a} = -l.a.$$

3° Que le logarithme d'un quotient est égal à la différence des logarithmes des deux termes.

$$\text{Car } l.\frac{a}{b} = l.\left(a \times \frac{1}{b}\right) = l.a + l.\frac{1}{b} = l.a - l.b.$$

4° Que le logarithme du produit de plusieurs nombres est égal à la somme des logarithmes de ces nombres.

Car $l.\ (abcd\ldots) = l.\ (abc \times d\ldots) = l.abc + l.d = l.\ (ab \times c) + l.d = l.(ab) + l.c + l.d = l.a + l.b + l.c + l.d$, etc.

D'où résulte comme corollaire :

$$l.\ \frac{a.b.c\ldots}{m.n.p\ldots} = l.\ a + l.\ b + l.\ c + -(l.\ m + l.\ n + l.\ p + \cdots)$$

5° Que le logarithme de la puissance n^{me} d'un nombre est égal à n fois le logarithme de ce nombre.

Car $$a^n = a.a.a. \ \ldots. \text{ répété } n \text{ fois.}$$

D'où $$l.\ (a^n) = l.\ a + l.\ a + l.\ a + \cdots \text{ répété } n \text{ fois.}$$

$$l.\ (a^n) = n \times l.\ a.$$

6° Que le logarithme de la racine n^{me} d'un nombre est égal à $\frac{1}{n}$ fois le logarithme de ce nombre. Car faisant $a^n=b$, d'où $a=\sqrt[n]{b}$, la formule précédente devient :

$$\text{l. } b=n\times \text{l.}\sqrt[n]{b}\text{; d'où l.}\sqrt[n]{b}=\frac{1}{n}\times \text{l. } b.$$

REMARQUE GÉNÉRALE. On voit par ce qui précède que l'on peut trouver le logarithme d'une expression qui ne renferme que des produits, quotients, puissances et racines, sans aucun signe plus ou moins, au moyen des logarithmes de tous les nombres qui entrent dans l'expression.

$$\text{Ex. l. }\left(\frac{\sqrt[3]{\frac{a^2b}{c}}\times\sqrt[5]{\frac{f}{e}}}{\sqrt[2]{\frac{a^3b}{c^3}}\times\sqrt[4]{\frac{f}{e^3}}}\right)=$$

$$\text{l. }\sqrt[3]{\frac{a^2b}{c}}+\text{l. }\sqrt[5]{\frac{f}{e}}-\text{l. }\sqrt[2]{\frac{a^3b}{c^3}}-\text{l. }\sqrt[4]{\frac{f}{e^3}}=$$

$$\frac{1}{3}\text{l. }\frac{a^2b}{c}+\frac{1}{5}\text{l. }\frac{f}{e}-\frac{1}{2}\text{l. }\frac{a^3b}{c^3}-\frac{1}{4}\text{l. }\frac{f}{e^3}=$$

$$\frac{1}{3}(\text{l. }a^2+\text{l. }b-lc)+\frac{1}{5}(\text{l. }f-\text{l. }e)-\frac{1}{2}(\text{l. }a^3+\text{l. }b-\text{l. }c^3)$$

$$-\frac{1}{4}(\text{l. }f-\text{l. }e^3)=$$

$$\frac{1}{3}(2\text{l. }a+\text{l. }b-\text{l.}c)+\frac{1}{5}(\text{l. }f-\text{l. }e)-\frac{1}{2}(3\text{ l. }a+\text{l. }b-3\text{ l. }c)$$

$$-\frac{1}{4}(\text{l. }f-3\text{ l. }e).$$

Mais dès que l'expression renferme le signe $+$ ou $-$, elle n'est plus *calculable par logarithmes;* ainsi on ne peut pas trouver le logarithme de $a+b$, si l'on ne connaît que ceux de a et de b; de même de $a-b$; ainsi encore on ne peut pas trouver $\mathrm{l.}\sqrt{a^2+b^2}$, connaissant $\mathrm{l.}\ a$ et $\mathrm{l.}\ b$; tandis que, en mettant a^2-b^2 sous la forme $(a+b)(a-b) = s.d$, pour abréger ; $(a+b=s,\ a-b=d)$; on aura $\mathrm{l.}\sqrt{a^2-b^2} =$

$$\mathrm{l.}\sqrt{s.\,d} = \frac{1}{2}(\mathrm{l.}\ s + \mathrm{l.}\ d)$$; mais on voit qu'il faut connaître directement $\mathrm{l.}\ s = \mathrm{l.}\ (a+b)$ et $\mathrm{l.}\ d = \mathrm{l.}\ (a-b)$, et qu'il ne sert à rien de connaître $\mathrm{l.}\ a$ et $\mathrm{l.}\ b$.

Ces exemples suffiront pour faire comprendre toutes les applications.

Construction des tables des logarithmes des nombres naturels.

Pour faire comprendre la possibilité de la construction d'une table renfermant les logarithmes de tous les nombres entiers depuis 1 jusqu'à 10000 par exemple, table qui permettra de calculer les logarithmes des fractions au moyen des règles exposées plus haut, nous allons montrer qu'en prenant un nombre arbitraire pour logarithme d'un premier nombre tout-à-fait quelconque pourvu qu'il ne soit pas 1, il nous sera possible de calculer les logarithmes de tous les autres.

Faisons donc arbitrairement $\mathrm{l.}\ 10 = 1$;
d'où résulte déjà $\mathrm{l.}100=2$, $\mathrm{l.}1000=3$, $\mathrm{l.}10000=4$.

Ainsi que $\mathrm{l.}\ 0{,}1 = -1$; $\mathrm{l.}0{,}01 = -2$; $\mathrm{l.}0{,}001 = -3$, etc.

Posons maintenant 10 égal à une puissance considérable de t ; ainsi $10=t^n$, et choisissons n de sorte qu'il soit égal à une puissance de 2 ; soit $n=2^{16}$; t qui est $\sqrt[n]{10} = 1{,}000035$ pourra donc à la rigueur se calculer par l'extraction successive de 16 racines carrées, c'est-à-dire en extrayant : 1° la racine de 10 ; 2° la racine de celle-ci; 3° la racine de cette seconde, et ainsi de suite.

Concevons actuellement qu'on forme toutes les puissances successives de t depuis la 2^{me} jusqu'à la $(n-1)^{me}$; t^n étant égal à 10, cette suite de puissances nous fournira une échelle de n nombres compris entre 1 et 10 et différant entre eux de moins de 0,00035 de sorte que les nombres naturels 2, 3,....9 se trouveront dans cette échelle à moins de 0,00035 près.

Appliquons maintenant à ces nombres les propriétés des logarithmes ; puisque $t=\sqrt[n]{10}$ nous aurons :

$$\mathrm{l}.\ t = \frac{1}{n}\ \mathrm{l}.\ 10 = \frac{1}{n};\ \text{par suite :}$$

$\mathrm{l}.\ t^2 = 2\mathrm{l}.t = \frac{2}{n}$; $\mathrm{l}.t^3 = \frac{3}{n}$, et ainsi de suite ; et en nommant t^{a_2} le nombre qui s'approche le plus de 2, t^{a_3} celui qui s'approche le plus de 3 etc., nous aurons à 0,00002 près :

$$\mathrm{l}.\ 2 = \mathrm{l}.\ t^{a_2} = \frac{a_2}{n}.\ \mathrm{l}.\ 3 = \frac{a_3}{n} \dots \mathrm{l}.\ 7 = \frac{a_7}{n} \dots$$

On conçoit de la même manière la possibilité de calculer les logarithmes des nombres compris entre 10 et 100, entre 100 et 1000, entre 1000 et 10000.

On comprend aussi qu'on peut atteindre ainsi telle approximation que l'on voudra, et obtenir par exemple 4, 5, 6, 7 décimales exactes ou davantage à chaque logarithme d'un nombre naturel.

Enfin il est aisé de voir que si l'on prenait toute l'échelle des nombres :

$1;\ \ t;\ t^2;\ \ t^3;\dots\ t^n$ et leurs logarithmes :

$0;\ \mathrm{l}.\ t;\ 2\,\mathrm{l}.\ t; 3\,\mathrm{l}.\ t;\dots n\,\mathrm{l}.\ t,$

on pourrait choisir parmi ceux-ci des nombres qui ne diffèrent de 0,001 ; 0,002 ; 0,003 .... 0,010 ; 0,011 ; 0,012....... que d'une fraction aussi petite que l'on voudra ; et en prenant les nombres correspondants de la 1re suite, on aura avec autant de décimales exactes qu'on voudra, les nombres qui ont pour logarithmes

0,001 ; 0,002 ... 0,010 ; 0,011, ...,

0,100; 0,101; 0,102,....; 0,110; 0,200.... 0,300...., 0,900...., 0,999.

C'est cette dernière table, que nous appellerons table inverse de logarithmes, dont nous devons l'idée à Struve ; nous en ferons voir les avantages en parlant de l'emploi des logarithmes.

Rem. Lorsqu'on jette un coup d'œil sur les tables, une remarque essentielle se présente immédiatement à l'esprit : c'est que si l'on considère une série de nombres successifs et leurs logarithmes, la différence entre l'un de ceux-ci et le suivant est sensiblement la même dans cette série ; d'où l'on conclut que les logarithmes croissent à peu près proportionnellement aux nombres ; et réciproquement dans la table inverse.

Nous ferons un très-grand usage de cette remarque.

Disposition et usage des tables des logarithmes des nombres naturels et des tables inverses.

Nous dirons d'abord un mot des petites tables à 5 et à 7 décimales ; la disposition en est très-primitive ; elle consiste à disposer tous les nombres depuis 1 jusqu'à 10000 dans des colonnes, et leurs logarithmes à côté d'eux dans une 2de colonne ; dans une 3^{me} enfin se trouvent les différences entre deux logarithmes consécutifs.

Ces tables renferment toutes deux une foule de chiffres superflus, comme nous le prouverons en parlant de la 2^{me} disposition : en premier lieu les pages qui renferment les nombres de 1 à 1000 ; (mais ce mal n'en serait plus un avec une meilleure disposition) ; en second lieu les caractéristiques, toujours inutiles, et les premières décimales qui le sont souvent et qui ôtent à la table la netteté nécessaire.

Ces défauts toutefois sont peu importants dans la table à 5 décimales de J. de Lalande ; mais ce que nous ne pouvons concevoir, c'est qu'un calculateur, qui aurait dû être un tant soit peu familier avec les logarithmes, se soit avisé de publier ces tables étendues, comme le dit le titre, à 7 décimales, c'est-à-dire de transcrire, en employant une disposition déplorable, les excellentes tables de Callet (*) ; ce qui nous semble aussi impardonnable, c'est qu'on se

(*) On voudra bien nous pardonner ces réflexions faites dans l'intérêt de tous ceux qui se servent du calcul ; nous les justifierons en quelques mots.

En effet, pourquoi 7 décimales ? Evidemment pour obtenir une approximation plus grande.

serve souvent de ces *tables étendues à 7 décimales* dans les établissements moyens.

Comparons donc sous ce rapport les tables de Lalande aux *tables étendues*, puis aux tables de Callet.

Soit par exemple à multiplier

$$3130{,}83 \times 3430{,}74 = n.$$

$$\text{l. } 3130 = 3.4955443\ ;\ d = 1388. \quad 3.49554\ ;\ d = 14.$$

$$\text{l. } 3430 = 3.5352941\ ;\ d = 1266. \quad 3.53529\ ;\ d = 13.$$

Pour calculer les logarithmes des nombres proposés, personne n'aura le courage, pour ne pas dire la naïveté de multiplier 1388 par 83 et 1266 par 74 ; autant et mieux vaudrait faire la multiplication directe des nombres donnés.

On multipliera donc 74×13 et 84×14 en forçant les chiffres, ce qui donne 962 et 1162 à ajouter respectivement aux deux logarithmes à 7 décimales.

Pour ceux à 5 on se bornera à 7×13 et 8×14 ce qui donne 9 et 11 à ajouter, mais les deux résultats étant trop faibles chacun, on ajoutera 9 à l'un et 12 à l'autre, ce qui donnera :

$$\begin{array}{lcll} \text{l. } 3130.83 & : & 3.4956605 & .\ 3.49566 \\ \text{l. } 3430.74 & : & 3.5353903 & .\ 3.53538 \\ \hline \text{l. } n & & 7.0310508 & \quad 7.03104 \end{array}$$

Cherchons n. On trouve :

$$\text{l. } 1074\ :\ 3.03\underset{465}{\overset{508}{10043}}.d = 4042. \quad 3.031\underset{4}{\overset{4}{000}}.d = 40.$$

différences calculées :

$$\text{à } 1074 \text{ il faut donc ajouter } \frac{465}{4042} = 0{,}125,$$

division encore compliquée ; tandis que, d'après les tables à 5 décimales, il faut ajouter $\frac{4}{40} = 0.1$.

Les tables à 7 décimales donnent donc le produit :

10741250 puisque la caractéristique est 7.

Celles à 5 donnent 10741000.

Par les tables de Callet on trouve

l. 3130,8 = 3.4956553. Les parties proportionnelles donnent :

$$\begin{array}{ll} & +\quad 42 \\ \text{l. } 3130.83 & \overline{3.4956595} \end{array}$$

donc :

Nous ne parlerons pas de la disposition des tables de Callet qui se reproduit du reste presque identiquement dans celles de Struve.

Dans toutes les deux on supprime la caractéristique, c'est-à-dire le chiffre placé avant la virgule dans le logarithme d'un nombre ; en effet les logarithmes de 8,64 ; 86,4 ; 864 ; 8640..... ont tous pour partie décimale 9365 et pour caractéristiques respectives 0, 1, 2, 3, etc., puisque chacun est 10 fois plus grand que le précédent ; il en sera de même, comme nous verrons, des fractions 0,864 ; 0,0864 ; etc. dont les logarithmes ont aussi pour partie décimale 9365.

Dans toutes les deux encore les nombres sont disposés en deux colonnes, l'une verticale, l'autre horizontale ; celle-ci ne porte que les chiffres 0,1,...9, que l'on doit supposer écrits à la suite du nombre placé dans la table verticale ; cette réunion forme le nombre

l. 3430,7	=3.5353827	
	+ 51	Ajoutant :
l. 3430,74	=3.5353878	
l. n	=7.0310473	Ensuite :
l. 10741	 47	
différence :	26.	

Les parties proportionnelles donnent :

pour	24,24	. . .	0.06
	1,62		0.003
	0.16		0.0003
pour	26.02		0.0633 ; de sorte que

n = 10741063,3

Calculé directement :

n = 10741063,7142.

..........0,4142

La différence entre le nombre exact et le nombre calculé par les tables de Callet est donc de 0,4142 ou de 4 unités sur le 9me chiffre.

Les tables à 7 décimales produisent au contraire une erreur de 186, ou de près de 2 unités sur le 6me chiffre.

Celles de Lalande enfin une erreur de 63, ou de 0,6 sur le 6me chiffre.

Ces résultats sont concluants.

Et c'est pour arriver à une erreur 3 fois plus grande que celle que produisent les petites tables de Lalande, où toutes les différences se calculent de tête, que l'on va employer ces *tables étendues à 7 décimales* qui conduisent à des calculs souvent plus longs que l'opération directe ! Vraiment, on a peine à le croire !

Proscrivons donc l'usage de ces dernières tables. Servons-nous de celles de Lalande quand nous n'aurons besoin que de 5 chiffres exacts ; et dans les cas qui exigent une exactitude plus grande, employons les tables de Callet.

dont le logarithme se trouve, comme dans la table de Pythagore, à l'intersection des lignes horizontale et verticale conduites par chacune des deux parties du nombre.

C'est ainsi qu'on trouvera le log. de :

8	à l'inters. des lignes menées par	80 et 0	: 9031
806	. . . .	80 et 6	: 9063
86	. . . .	86 et 0	: 9345
864	. . . .	86 et 4	: 9365

La caractéristique du 1^{er} sera 0, du 3^{me} 1, du 2^{d} et du 4^{me} 2.

Quant aux tables inverses, la disposition en est la même, si ce n'est que les deux colonnes qui renfermaient le nombre renferment cette fois le logarithme, et que le nombre correspondant à ce logarithme se trouve ici à l'intersection des deux lignes menées par les chiffres dont la réunion forme ce logarithme.

Veut-on savoir p. ex. quel est le nombre qui a pour log.

005,	il se trouve à l'inters. des lignes menées par	00 et 5	: 1012
050,	. . . .	05 et 0	: 1122
500,	. . . .	50 et 0	: 3162
540,	. . . .	54 et 0	: 3467
547,	. . . .	54 et 7	: 3524

La caractéristique manque naturellement dans les logarithmes précédents ; et c'est d'après elle, quand elle sera donnée, qu'on placera la virgule ou les zéros nécessaires dans les nombres correspondants. Mais si l'on a un nombre de plus de 3 chiffres, ou un logarithme qui en ait davantage après la caractéristique, comment trouver le logarithme du 1^{er}, le nombre correspondant au 2^{d} ?

1^{r} Ex. Trouvez le log. de 3,1416.

La table donne : $1.3{,}14 = 0.4969; d = 14$.

En vertu de la remarque (R) nous aurons donc pour 0,16 une différence $0{,}16 \times 14 = 2{,}2$; d'où : $1.\pi = 1.3{,}1416 = 0.49712$, qui n'est en défaut que de 3 unités sur le dernier chiffre.

2^{me} Ex. Trouvez le nombre qui a pour log. 0.49715.

La table donne pour le nombre correspondant à

$$497 : 3141 \qquad d = 7.$$

En vertu de la remarque (R), pour 0,15 nous aurons la différence : $0,15 \times 7 = 1,0$ à ajouter à 3141 ce qui donne le nombre 3,1420, vu que la caractéristique est 0.

Ce nombre n'est en excès que de 4 unités sur la 4^{me} décimale ; il aurait dû être $\pi = 3,1416$.

Voyons maintenant comment on trouve le log. d'une fraction proprement dite, et commençons par les fractions décimales.

Nous avons déjà vu que tous les nombres entiers ou fractionnaires composés des mêmes chiffres, tels que :

$$8640 \ ; \ 864 ; \ 86,4 ; \ 8,64 ;$$

ont la même partie décimale 9365 à leurs logarithmes, et pour caractéristiques respectives

$$3 \ , \quad 2, \quad 1, \quad 0 \ .$$

$$\text{Or :} \quad 0,864 = \frac{8,64}{10} \ ; \ 0,0864 = \frac{8.64}{100} \ ; \ 0,00864 = \frac{8.64}{1000}$$

donc :
$$\text{l}.0,864 = 0.9365 - \text{l}.10 = 0.9365 - 1$$
$$\text{l}.0,0864 = 0.9365 - \text{l}.100 = 0.9365 - 2$$
$$\text{l}.0,00864 = 0.9365 - \text{l}.1000 = 0,9365 - 3 \ , \text{ etc.}$$

Pour éviter des nombres négatifs, nous ajouterons 10 à tous ces logarithmes et nous écrirons :

$$\text{l}.0,864 = 9,9365 \ ; \ \text{l}.0,0864 = 8,9365 \ ; \ \text{l}.0,00864 = 7,9365 \ ; \text{ etc.}$$

Ces logarithmes sont à la vérité trop forts de 10 ; d'où résulte que les nombres correspondants sont devenus 10,000,000,000 (nombre dont le logarithme est 10) ou 10 milliards de fois trop grands ; et comme une semblable erreur s'apercevrait à l'instant même dans le résultat, il est inutile de s'en préoccuper.

Quand donc la caractéristique d'un logarithme sera

4 le nombre correspondant aura pour plus hautes unités des dizaines de mille ;
3 . . . . unités de mille ;
2 . . . . centaines ;
1 . . . . dizaines ;
0 . . . . unités simples ;

9 . . . . dizièmes ;
8 . . . . centièmes ;
7 . . . . millièmes, etc.

à moins qu'on n'opère sur des nombres tout-à-fait considérables, auquel cas la caractéristique

7 indiquerait des dizaines de millions ;
6 . . . . millions ;
5 . . . . centaines de mille, etc.

Nous procédons de la même manière dans le calcul des logarithmes des fractions proprement dites.

Ex. $$\mathrm{l.}\frac{2}{3} = \mathrm{l.}2 - \mathrm{l.}3 = 0.3010 - 0{,}4771.$$

Comme cette quantité serait négative, nous écrirons :

$$\mathrm{l.}\frac{2}{3} = 0.3010 + 10 - 0.4771 = 0.3010 + 9.5229 = 9.8239,$$

résultat qu'on sait être trop fort de 10.

Or soustraire un logarithme de 10, s'appelle prendre le complément de ce logarithme ; et cette opération se fait comme on voit en ôtant de 10 le dernier chiffre significatif, et de 9 tous les chiffres placés à sa gauche ; chaque fois donc qu'on aura à retrancher un logarithme d'un autre, on ajoutera à celui-ci le complément du premier ; *et remarquez qu'on ne doit pas pour cela écrire le complément, mais le logarithme lui-même; et lire de tête son complément, opération excessivement simple et qui ne demande que très-peu d'habitude.*

Ex. $$\mathrm{l.}\frac{2}{3} = \left\{\begin{array}{l} \mathrm{l.}2 = 0.3010 \\ -\mathrm{l.}3 = 0.4771 - \end{array}\right.$$
$$\mathrm{l.}\frac{2}{3} = 9.8239$$

On lit

9 et 0 donne 9
2 et 1 donne 3
2 et 0 donne 2

5 et 3 donne 8
9 et 0 donne 9

Ex. Calculer : $x=\sqrt{\dfrac{97,4\times 511,4}{1461,1\times 852,3}}$

$$1.x=\frac{1}{2}\left\{1.97,4+1.511,4-1.1461,1-1.852,3\right\}$$

$$\begin{array}{r}
1.\ 97,4=1.9886 \\
1.\ 511,4=2.70876 \\
1.1461,1=3.16472— \\
1.\ 852,3=2.93055— \\
\hline
18.60209 \\
1.x=9.301045.
\end{array}$$

On indique par un signe les deux logarithmes dont on doit prendre le complément et l'on dit :

5 et 8, 13 et 6, 19.
1 et 4, 5 et 2, 7 et 7, 14 et 6, 20.
2 et 9, 11 et 5, 16 et 8, 24 et 8, 32.
3 et 6, 9 et 3, 12 et 8, 20.
2 et 8, 10 et 7, 17 et 9, 26.
2 et 7, 9 et 6, 15 et 2, 17 et 1, 18 ;

prenant la moitié du résultat, on obtient

$1.x \quad =9.301045$, évidemment trop fort de 10.

d'où $x=0,2002$ au moyen de la table inverse.

Nous n'avons plus qu'une remarque à faire relativement à l'emploi des compléments ; c'est qu'on doit toujours veiller à ce que le résultat final, s'il est trop fort, le soit au moins de 10, (ou de 20) ; si dans l'exemple précédent on n'avait eu qu'un chiffre au dénominateur, la somme aurait été trop forte de 10 seulement, et dans ce cas il aurait fallu l'augmenter encore de 10 pour qu'en prenant la moitié, le résultat final fût trop fort, non de 5, mais de 10 ;

ainsi encore, si au lieu d'une racine carrée dans l'exemple même on avait eu une racine cubique ou quatrième, la somme n'étant trop forte que de 20, il aurait fallu l'augmenter, dans le 1[er] cas, de 10, dans le 2[d] de 20, afin que le résultat final fût trop fort de 10.

Nous aurons l'occasion d'appliquer tous ces principes dans les exemples numériques que nous proposerons sur la résolution des triangles.

Construction d'une table de logarithmes des sinus et tangentes des angles. (*)

Par les relations connues 5), 6), 7) et 19), on voit qu'il n'est nécessaire que de calculer directement les sinus des angles de 0° à 45°; car les sinus donnent les cosinus par (5), et ces deux-ci fournissent les tangentes et cotangentes par 6) et 7).

Quant aux angles compris entre 45° et 90°, il est superflu de s'en occuper, puisque :

$$(19)\quad \left\{ \begin{array}{l} \sin(45^\circ+a)=\cos(45^\circ-a),\quad \cos(45^\circ+a)=\sin(45^\circ-a), \\ \operatorname{tg}(45^\circ+a)=\operatorname{cotg}(45^\circ-a). \end{array} \right.$$

Soit proposé de trouver les valeurs des sinus de minute en minute de 0° à 45°.

Partageons l'arc de 90° en un nombre de parties égales supérieures à 2700 ; chaque division a sera plus petite que 2 minutes, et l'on pourra calculer les cordes des arcs a, $2a$, $3a$, $4a$, $5a$, etc. jusqu'à 90° ; tous ces arcs différeront entre eux de a, c'est-à-dire de moins de 2 minutes.

Fig. IV.

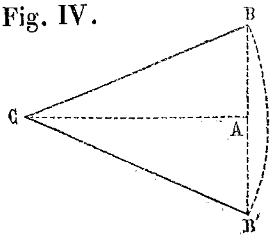


Fig. IV. Or, si nous considérons une corde quelconque BB' et son apothème CA, nous aurons deux triangles dans chacun desquels $\sin B = \frac{c}{a}$; et comme l'angle B est la moitié de l'angle BCB', le côté c la moitié de la corde et le côté a le rayon du cercle qu'on peut faire égal à l'unité, il s'ensuit que :

(*) Il suffit évidemment que nous établissions ici la possibilité de la construction d'une pareille table.

Le sinus d'un angle est la moitié de la corde qui sous-tend un angle double dans un cercle de rayon=1.

En prenant les moitiés des cordes précédemment calculées, nous aurons donc les sinus des angles $\frac{1}{2}a$, a, $\frac{3}{2}a$, $2a$, $\frac{5}{2}a\ldots$, c'est-à-dire d'angles qui croissent à peine de minute en minute.

On aurait pû obtenir des intervalles plus petits, et par suite les sinus d'angles aussi approchants que l'on voudrait de $1'$, $2'$, $3'$, $4'$, etc.

Des sinus on déduit les cosinus et l'on prend ensuite les logarithmes des valeurs numériques obtenues ; comme ce sont toutes fractions, on leur donne pour caractéristiques 6, 7, 8, 9 ; enfin on a :

l. tg= l. sin— l. cos ; si la caractéristique est <10 on la laissera ; si elle est égale ou plus forte, on supprimera la dizaine qui est de trop.

Disposition de ces tables.

Nous ne nous occuperons plus de la disposition des petites tables, qui ne présente aucune particularité sur celle des logarithmes des nombres.

Toutes les tables au reste, quelle qu'en soit la disposition, ont ceci de commun qu'elles ne vont que jusqu'à 45^0 en vertu des formules (19) ; mais comme par ces mêmes formules les sin., cos., et tg. de 45^0+a sont les mêmes que les cos., sin., et cotg. de $45^0—a$, et vice-versa, on a imaginé une disposition qui permet de lire tous les arcs depuis 0^0 jusqu'à 90^0 : nous la développerons pour les tables nouvelles que nous publions aujourd'hui.

En haut de la page se lisent :

Log. sin., Log. tg., Log. cos., et au-dessus de chaque colonne :

$0'$, $10'$, $20'$, $30'$, $40'$, $50'$.

Au bas de la page :

Log. cos., Log. cotang., Log. cos., et en-dessous de chaque colonne :

$60'$, $50'$, $40'$, $30'$, $20'$, $10'$.

A gauche on lit tous les nombres de degrés de 0° à 45°, à droite de 44° à 89°.

Les nombres de droite répondent aux noms et aux chiffres supérieurs, ceux de gauche aux inférieurs.

Dans les dernières colonnes, la plupart des logarithmes n'ont que deux chiffres : c'est quand les deux précédents sont les mêmes que ceux du logarithme supérieur dans la même colonne.

Nous avons supprimé partout la caractéristique parce qu'elle est constamment 9, sauf les exceptions suivantes dans les log. des sin. et tang., exceptions que l'on ne rencontrera du reste presque jamais dans la pratique, à cause de la petitesse des angles auxquels elles sont relatives.

Les logarithmes des sinus et des tangentes de

$$0°10', \ 0°20', \ 0°30' \text{ ont pour caractéristique } 7 ;$$

Ceux des sinus et des tangentes des arcs compris entre 0°30', et 5°50' ont pour caractéristique 8.

Nous avons eu soin de placer un astérisque devant les logarithmes des sinus et tangente de 5°50' pour indiquer au lecteur le point précis où commence la caractéristique 9 ; les précédentes sont donc 8, sauf les trois premières qui sont 7, et qui ne se présenteront certainement jamais dans un calcul.

Enfin la dernière ligne des log. tang. a 0 pour caractéristique.

Quelques exemples vont éclaircir ce qui précède.

Trouvez l. sin 32°40'.

On cherche 32° à gauche ; 40' au-dessus dans les colonnes des log. sin. ; à l'intersection des colonnes horizontale et verticale se trouve 7322 ;

Donc l. sin 32°40' = 9,7322.

Trouvez l. cos 32°40'.

On cherche 32° à gauche ; 40' au-dessus dans les colonnes des log. cos ; et l'on trouve à l'intersection le nombre 9252 ; donc :

$$\text{l. cos } 32°40' = 9,9252.$$

De même on trouvera :

$$\text{l. tg. } 32°40' = 9,8070.$$

Quant à l. cotg 32°40′, comme on sait que :

$$\text{Cotg } a = \frac{1}{\text{tg}a}, \text{ d'où l. cotg } a = -\text{ l. tg } a, \text{ on aura :}$$

$$\text{l. cotg } 32°40' = -\text{ l. tg } 32°40' = -9{,}8070,$$

et l'on se servira du complément sans l'écrire toutefois.

Trouvez l. sin 78°20′; l. cos 78°20′; l. cotg 78°20′ ; l. tg 78°20′.

On cherchera dans chaque cas 78° à droite, 20′ en-dessous dans les colonnes respectives, et l'on trouvera :

L. sin 78°20′ = 9,9909 quoique la table ne donne que 09 ; mais les deux chiffres supérieurs dans la même colonne sont 99 et l'on sait que la caractéristique est toujours 9.

$$\text{l. cos } 78°20' = 9{,}3058.$$

$$\text{l. cotg } 78°20' = 9{,}3149.$$

Quant à l. tg 78°20′, comme tg $a = \frac{1}{\text{cotg}\, a}$, on aura : l. tg 78°20′ = —9,3149, dont on se servira en employant son complément. (*)

Trouvez l. sin 60°.

Comme 0′ ne se trouve pas en-dessous, il faudra chercher l. sin 59°60′ = 9,9375.

Il nous reste encore à exposer la disposition que nous avons donnée aux tables inverses.

Ici nous avons éprouvé des difficultés sérieuses ; il était impossible en effet de supprimer la caractéristique, et en voulant faire rentrer dans notre table tous les logarithmes des sinus et tangentes depuis la caractéristique 7 jusqu'à la caractéristique 0, nous étions obligé à dresser une multitude de tables, et nous n'atteignions plus notre but.

Force nous a donc été de nous borner aux logarithmes des sinus et tangentes qui ont 9 pour caractéristique ; et cette restriction ne présente aucun inconvénient dans la pratique, puisqu'elle ne laisse de côté que les angles inférieurs à 5°50′, comme nous l'avons déjà montré.

(*) On doit bien retenir que l. tg (45°+a) = —l. cotg(45°+a).
et que l. cotg(45°—a) = —l. tg (45°—a).

S'il arrivait que l'on rencontrât un logarithme correspondant à un angle aussi petit, il faudrait chercher cet angle dans la table directe.

La table inverse est divisée en deux parties, celle de gauche pour les sinus, celle de droite pour les tangentes. Chacune d'elles renferme 10 colonnes verticales comme dans la table inverse des logarithmes des nombres naturels de Struve ; à gauche, comme dans cette même table, figurent les deux premiers chiffres du logarithme donné, le 3^{me} étant inscrit au-dessus de chaque colonne.

Enfin, les chiffres inscrits dans les colonnes indiquant des minutes et secondes, tandis que le nombre de degrés correspondant se lit également à gauche, sur la même ligne horizontale. Les minutes sont données par les deux premiers chiffres, et le troisième indique des dizaines de secondes ; il eût été inutile de pousser jusqu'aux secondes simples, et cette prétendue exactitude n'eût du reste été qu'illusoire ; nous nous sommes donc arrêté aux dizaines de secondes, et nous avons partout supprimé le dernier zéro, ce qui nous a permis de restreindre les dimensions de la table.

Afin du reste d'éviter toute erreur, les chiffres qui indiquent les minutes et celui qui donne les dizaines de secondes sont en caractères différents.

Il peut arriver toutefois que le nombre de degrés soit plus considérable que celui qui se trouve sur la même ligne horizontale : dans ce cas, un signe (*) placé au-dessus du nombre de minutes et secondes indiquera qu'il faut augmenter le chiffre des degrés d'une unité ; deux signes (**), qu'il faut l'augmenter de deux unités.

Quand, d'une ligne à la suivante, le nombre de degrés varie davantage, comme, dans la table des sinus, au-delà de 65°, nous avons inscrit deux nombres de degrés sur la même ligne horizontale, l'un à gauche, l'autre à droite.

Pour les premiers nombres de la colonne (sans signe (*)) le nombre correspondant de degrés est celui même qui est inscrit à gauche ; pour ceux qui suivent avec un (*) ou deux signes (**), on augmentera ce nombre d'un ou deux degrés ; pour ceux qui viennent après sans signe (*), on lira le nombre de degrés placé à droite ; enfin on lira un ou deux degrés de plus que le nombre pour ceux que l'on trouvera encore à la suite des autres avec un (*) ou deux signes (**).

Pour la ligne horizontale inférieure, cette disposition même devenant trop compliquée, nous avons placé en-dessous de chaque nombre de minutes et de secondes, le nombre de degrés correspondant.

Hâtons-nous de donner quelques exemples de tous les cas qui peuvent se présenter.

Soit $$\text{l.sin}A=9{,}004.$$

On cherche 00 à gauche, 4 au-dessus, et l'on trouve à l'intersection des lignes qui passent par ces chiffres : 47_3 ; à gauche se lit 5^0 : donc $A=5^\circ 47'30''$.

Soit $$\text{l.sin}A=9{,}287.$$

A l'intersection des lignes menées par 28 et 7 on trouve $^*10_0$ et à gauche 10° ; à cause du signe (*) on prend 11° ;

Donc $$A=11^\circ 10'0''.$$

Si l'on donne pour l.sinA les valeurs suivantes :

$$9{,}983 \cdot 9{,}985 \cdot 9{,}988 \cdot 9{,}989 \cdot 9{,}992,$$

les angles A correspondants seront :

$$74^\circ 4'20''.\ 75^\circ 1'40''.\ 76^\circ 35'30''.\ 77^\circ 9'30''.\ 79^\circ 2'10''.$$

Lorsque l'on aura un log.cosin., on cherchera l'angle correspondant comme si c'était un log.sin., et l'on en prendra le complément.

Soit $\text{l.cos}A=9{,}983=\text{l.sin}A' : A'=74^\circ 4'20''.\ A=15^\circ 55'40''.$

Quand un log.tang. a pour caractéristique 9, la recherche de l'angle ne représente aucune difficulté ; en voici deux exemples :

Soit $\text{l.tg}A=9{,}800.\quad A=32^\circ 15'0''.$

$=9{,}895.\quad A=38^\circ 0'40''.$

Si la caractéristique est 0, on procède comme suit :

Soit $\text{l.tg}A=0{,}107$; on en conclut : $\text{l.cotg}A=9{,}983$,

et l'on est ramené au cas suivant.

Quand on donne un log cotg. avec la caractéristique 9, on cherche l'angle comme si c'était un log.tang. et l'on en prend le complément.

Soit $l.\text{cotg}A = 9{,}983 = l.\text{tg}A'$. $A' = 38^\circ 0' 40''$. $A = 51^\circ 59' 20''$.

Si la caractéristique est 0, le procédé est plus simple :

Soit $l.\text{cotg}.A = 0{,}107$; d'où $l.\text{tg}A = 9{,}893$. $A = 38^\circ 0' 40''$.

Nous ne nous arrêterons pas ici à donner des exemples de l'emploi des différences qui est fort aisé, et qui se présentera naturellement dans la résolution numérique des triangles.

N.-B. La disposition la mieux appropriée à l'emploi de ces tables consiste à les coller dos à dos sur une feuille de carton. C'est dans cette vue que nous avons placé une partie de la table inverse des lignes trigonométriques à la suite de la table directe, de manière que les deux feuilles dont se composent ces tables soient de même dimension.

Résolution numérique des triangles. (*)

Triangles rectangles. 1[er] Cas. $a = 589.25$. $B = 67^\circ 23'$. (**)

Formules : $b = a\sin B$. $c = a\cos B$.

$$l.b = l.a + l.\sin B. \quad l.c = l.a + l.\cos B.$$

$$\begin{array}{r} l.a = 2.77030 \\ l.\cos B = 9.58500 \\ l.\sin B = 9.96525 \\ \hline l.c = 2.35530 \quad . \quad c = 226.65 \\ l.b = 2.73555 \quad . \quad b = 543.96 \end{array}$$

2[me] Cas. $b = 543.96$. $B = 67^\circ 23'$.

Formules : $c = b\,\text{cotg}B$. $a = \dfrac{b}{\sin B}$.

(*) Nos exemples sont ceux de Serret, bornés à l'approximation que comportent nos tables. On voudra bien comparer nos types de calcul, sous le rapport de la simplicité, à ceux de cet auteur qui est à nos yeux le plus recommandable.

Nous sommes bien convaincu qu'il connaît beaucoup mieux que nous les artifices que nous employons ; mais nous aurions voulu les voir exposés dans son excellent traité de trigonométrie.

(**) Exemple traité par Serret :

$$a = 5892{,}51. \quad B = 67^\circ 22' 48'',48$$
$$b = 5439{,}24.$$

$$\mathrm{l}.c = \mathrm{l}.b + \mathrm{l.cotgB}. \quad \mathrm{l}.a = \mathrm{l}.b - \mathrm{l.sinB}.$$

$\mathrm{l}.b = 2.73557$ recherché de nouveau directement.
$\mathrm{l.sinB} = 9{,}96525$
$\mathrm{l.cotgB} = 9.61962$

$\mathrm{l}.c = 2.35519$ $c = 226{,}59.$
$\mathrm{l}.a = 2{,}77032$ $a = 589{,}32.$

En comparant ces chiffres aux précédents, on voit que l'accumulation des erreurs ne va guère au-delà d'une demi-unité sur le 4^{me} chiffre, résultat auquel on n'aurait peut-être pas osé s'attendre.

3^{me} Cas. $a = 589.25 \cdot b = 534.96.$

Formules : $\mathrm{sinB} = \dfrac{b}{a} \cdot c = a\mathrm{cosB}.$

$$\mathrm{l.sinB} = \mathrm{l}.b - \mathrm{l}.a. \quad \mathrm{l}.c = \mathrm{l}.a + \mathrm{l.cosB}.$$

$\mathrm{l}.b = 2{,}73557$
$\mathrm{l}.a = 2{,}77030-$

$\mathrm{l.sinB} = 9.96527$ $B = 67^\circ 23' 28''.$
$\mathrm{l.cosB} = 9.58490$ d'où ajoutant $\mathrm{l}.a$:

$\mathrm{l}.c = 2.3552$ $c = 226.60.$

4^{me} Cas $b = 543{,}96$ $c = 226.60.$

Formules : $\mathrm{tgB} = \dfrac{b}{c} \cdot a = \dfrac{b}{\mathrm{sinB}}.$

$$\mathrm{l.tgB} = \mathrm{l}.b - \mathrm{l}.c \quad \mathrm{l}.a = \mathrm{l}.b - \mathrm{l.sinB}.$$

$\mathrm{l}.b = 2.73557$
$\mathrm{l}.c = 2{,}35554-$ recherché directement.

$\mathrm{l.tg\,B} = 0.38003$; $\mathrm{l.tgB'} = 9.61997$. $B' = 22^\circ 37'$. $B = 67^\circ 23'$.
$\mathrm{l.sinB} = 9.96525-$ aj^{t}. $\mathrm{l}.b$:

$\mathrm{l}.a = 2.77032.$ $a = 589.25.$

Certes, on ne peut pas exiger plus d'exactitude.

Triangles quelconques. 1er cas. $A=81°47'$. $B=38°13'$. $a=701,22$.

Donc $A+B=120°$. $C=60°$.

Formules : $b=a\dfrac{\sin B}{\sin A}$. $c=a\dfrac{\sin C}{\sin A}$. $2T=bc\sin A$.

$$\text{l}.b=\text{l}.a+\text{l}.\sin B-\text{l}.\sin A\ ;\ \text{l}.c=\text{l}.a+\text{l}.\sin C-\text{l}.\sin A.$$

$$\text{l}.2T=\text{l}.b+\text{l}.c+\text{l}.\sin A.$$

$\text{l}.a=2.84583$
$\text{l}.\sin B=9.79148$
$\text{l}.\sin C=9.9375$.
$\text{l}.\sin A=9.99554-$.

$\text{l}.b=2.64176$. $b=438.26$.
$\text{l}.c=2.78778$ $c=613.49$.
Ajoutant avec $\text{l}.\sin A$:

$\text{l}.2T=5.42508$. $2T=266148,6$. $T=133074,5$.

2me Cas. $a=424,1$. $b=371,09$. $C=21°47'$.

d'où : $\dfrac{C}{2}=10°53',5$. $\dfrac{A+B}{2}=79°6',5$.

Formules : $\text{tg}\,\dfrac{1}{2}(A-B)=\dfrac{a-b}{a+b}\,\text{tg}\,\dfrac{A+B}{2}$.

$$c=(a+b)\ \frac{\cos\frac{1}{2}(A+B)}{\cos\frac{1}{2}(A-B)}.$$

$$\text{l}.\text{tg}\frac{A-B}{2}=\text{l}.(a-b)-\text{l}.(a+b)+\text{l}.\text{tg}\frac{A+B}{2}$$

$$\text{l}.c=\text{l}.(a+b)+\text{l}.\cos\frac{A+B}{2}-\text{l}.\cos\frac{A-B}{2}$$

(*) Exemple traité par Serret :
$A=81°47'12'',5$. $B=38°12'47'',5$. $C=60°$.
$a=7012,24$.
$b=4382,65$. $c=6135,71$.

$$a-b=53,01.\ a+b=795,18.$$

$$
\begin{array}{ll}
\text{l.}(a-b)=1.72438 & \\
\text{l.}(a+b)=2.90049- & * \\
\text{l.tg}\dfrac{A+B}{2}=9.28428- & \\
\text{l.cos}\dfrac{A+B}{2}=9.27631 & * \\
\hline
\text{l.tg}\dfrac{A-B}{2}=9.53961 & \dfrac{A-B}{2}=19°6',25 \\
\text{l.cos}\dfrac{A-B}{2}=9.97539- & A=98°12',75 \\
 & B=60°\ 0',25 \\
\hline
\text{l.}c=2.20141 & c=159,02.
\end{array}
$$

Nous indiquerons seulement la manière de calculer l'aire du triangle par la formule :

$$T=\frac{(a+b)(a-b)}{4}\left\{\sin^2\frac{A+B}{2}\ \text{cotg}\frac{A-B}{2}-\cos^2\frac{A+B}{2}\ \text{tg}\frac{A-B}{2}\right\}$$

Outre les logarithmes précédents il faut encore chercher

$\text{l.sin}\dfrac{A+B}{2}$. Posant alors : $T=T'-T''$ on aura :

$$\text{l.}T''=\text{l.}(a+b)+\text{l.}(a-b)+2\ \text{l.sin}\frac{A+B}{2}+\text{l.cotg}\frac{A-B}{2}-\text{l.}4.$$

$$\text{l.}T''=\text{l.}(a+b)+\text{l.}(a-b)+2\ \text{l.cos}\frac{A+B}{2}+\text{l.tg}\frac{A-B}{2}-\text{l.}\ 4.$$

Si l'on voulait effectuer le calcul, il faudrait avoir soin d'écrire les nouveaux logarithmes nécessaires en-dessous des précédents, afin de n'écrire inutilement aucun chiffre.

3^{me} Cas. $a=219{,}91$. $b=251{,}33$. $A=27°47'\frac{3}{4}$ (*)

Formules : $\sin B=\frac{b}{a}\sin A$. $c=a\frac{\sin C}{\sin A}$. $2T=ab\sin C$.

$l.\sin B=l.b-l.a+l.\sin A$, $l.c=l.a-l.\sin A+l.\sin C$.

$l.2T=l.a+l.b+l.\sin C$.

$l.b=2.40026$

$l.a=2{,}34222-$

$l.\sin A=9.66866$ $A=27°47''45''$.

$l.\sin B=9.72670$. $B_1=32°12'20''$. $B_2=147°47'40''$. d'où

$l.\sin C_1=9.93750$. $A+B_1=60°0'5''$.

$l.\sin C_2=8.88563$ $C_1=120°$(moins $5''$ que nous devons négliger).

$l.c_1=2.61106$ $C_2=B_1-A=4°24'35''$.

$l.c_2=1.55919$ $c_2=483.6$ $c_1=36{,}237$.

$l.2T_1=4.67998$ $2T_1=47857{,}8$. $2T_2=4247.1$.

$l.2T_2=3.62811$ $T_1=23928{,}9$ $T_2=2123{,}55$.

Les quantités B_1, C_1, c_1, et T_1 répondent à la 1re solution ; B_2, C_2, c_2 et T_2 à la 2de.

4^{me} Cas. $a=608.8$; $b=1363.7$; $c=949.7$. (**)

Formules : $$tg\frac{1}{2}A=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}$$

$$tg\frac{1}{2}B=\sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{p(p-b)}}$$

(*) Exemple traité par Serret :

$A=27°47'44'',77$. $a=2199{,}12$. $b=2513{,}28$

1re Solution. $B=32°12'25'',23$. $C=120°0'0''$. $c=4084{,}08$.

2^{e} Solution. $B=147°47'44'',77$. $C=4°24'30'',46$. $C=362{,}493$.

(**) Exemple traité par Serret (1re édition).

$a=608{,}775$. $b=1363{,}656$. $c=949{,}689$.

$\frac{1}{2}A=11°18'35''.75$. $\frac{1}{2}B=60°15'18'',40$. $\frac{1}{2}C=18°26'5'',85$.

$$tg\frac{1}{2}C=\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{p(p-c)}}$$

$$T=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

$$l.tg\frac{1}{2}A=\frac{1}{2}[l.(p-b)+l.(p-c)-l.(p-a)-l.p].$$

$$l.tg\frac{1}{2}B=\frac{1}{2}[l.(p-a)+l.(p-c)-l.(p-b)-l.p].$$

$$l.tg\frac{1}{2}C=\frac{1}{2}[l.(p-a)+l.(p-b)-l.(p-c)-l.p].$$

$$l.T=\frac{1}{2}[l.(p-a)+l.(p-b)+l.(p-c)+l.p].$$

On trouve : $a+b+c=2p=2922,2$; d'où :

$p=1461,1$. $p-a=852,3$. $p-b=97,4$. $p-c=511.4$.

$l.p = 3.16472-$
$l.(p-a)=2.93055$
$l.(p-b)=1.98860$
$l.(p-c)=2.70876$

Nous ne mettons de signe — qu'au premier de ces logarithmes, parce que seul il est toujours négatif excepté dans le calcul de l'aire.

$2\,l.tg\frac{1}{2}A=18.60209$

$2\,l.tg\frac{1}{2}B\ \ 20,48599$

$2\,l.tg\frac{1}{2}C=19,04567$

$2\,l.T=10,79263$

$l.tg\frac{1}{2}A=9.301045$. $\frac{1}{2}A=11^\circ19'10''$

$l.tg\frac{1}{2}B=0.242993$. $\frac{1}{2}B=60^\circ15'10''$ (par $\frac{1}{2}B'=29^\circ44'50''$)

$l.tg\frac{1}{2}C=9.522835$. $\frac{1}{2}C=18^\circ25'55''$

$l.T=5.396315$ $\frac{1}{2}(A+B+C)=90^\circ0'15''$; 15″ d'erreur totale ;

$T=249089$. 30″ sur les trois angles du triangle.

Il ne sera peut-être pas hors de propos de rappeler ici les principes qui nous servent constamment de règle dans tous les calculs logarithmiques, et dont un lecteur attentif aura déjà vu l'application dans tous les exemples que nous avons traités.

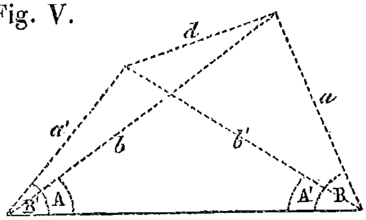
Le premier de ces principes est *de ne jamais écrire un logarithme qu'une seule fois, quel que soit le nombre des quantités qu'il sert à déterminer*.

Le second, sans lequel le premier serait souvent inapplicable, consiste à *toujours écrire le logarithme lui-même, et jamais son complément, n'eût-on même besoin que de celui-ci*. Outre les avantages déjà énumérés, cette méthode procure celui de pouvoir écrire beaucoup plus vite le logarithme et le vérifier bien plus aisément.

Nous mentionnerons encore un artifice bien connu des calculateurs et destiné à appliquer le premier principe dans le cas où l'on a un grand nombre d'observations faites toutes dans un même but ; cet artifice peut être utile dans la topographie, quoique ses applications les plus fréquentes se rencontrent dans l'astronomie et la géodésie.

Supposons, pour fixer les idées par un exemple simple, qu'une base étant *exactement* connue, on veuille trouver la distance de deux points visibles des deux extrémités de cette base.

Fig. V.



On pourra mesurer (fig. V) les angles A, A′, B, B′, et répéter l'observation 20 fois. (*)

Pour déterminer la distance cherchée au moyen de ces observations, on commencera par calculer les cotés a, b, a', b', au moyen des formules connues :

$$a=c\frac{\sin A}{\sin(A+B)}\,\cdot\quad b=c\frac{\sin B}{\sin(A+B)}\cdot$$

$$a'=c\frac{\sin A'}{\sin(A'+B')}\,\cdot\quad b'=c\frac{\sin B'}{\sin(A'+B')}\,\cdot$$

(*) On pourra, si on le préfère, supposer qu'on veuille, au moyen de la base AB et des angles que l'on mesurera, déterminer 20 distances différentes entre des points visibles de ses deux extrémités ; la disposition du calcul restera identiquement la même.

On voit que le côté c se reproduit quatre fois pour chaque observation, donc en tout 80 fois ; il faut cependant n'écrire qu'une fois son logarithme ; pour cela on l'écrira tout au bas d'une feuille volante, et on le fera glisser successivement aux 80 pl aces qu'il doit occuper.

De même, il ne faut écrire qu'une fois pour chaque observation $\sin(A+B)$ et $\sin(A'+B')$.

Voici donc le type du calcul dans lequel nous représentons par des points les logarithmes à écrire, tandis que le 1r se trouve sur une feuille volante.

	1re Obs.	2me Obs.	3me Obs.	4me Obs.	
l.c					
l.sin(A+B)	......	......	......	......	
l.sinA	......	......	......	......	etc.
l.sinB	......	......	......	......	
l.a	......	......	......	......	
l.b	......	......	......	......	

On obtient de même l.a' et l.b'.

Actuellement la distance d peut se déterminer à la fois dans deux triangles différents dont on connaît deux côtés et l'angle compris, ce qui fournira une vérification.

Le troisième principe est *de ne jamais rendre une formule calculable par logarithmes au moyen de l'introduction d'une quantité auxiliaire, lorsque cette quantité n'est pas utile à connaître dans la suite du calcul.*

Ainsi quand on voudra se servir de la formule : $c=a\cos B+b\cos A$, au lieu de chercher à la rendre calculable par logarithmes en posant :

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=n, \text{ d'où l.}n \text{ et :}$$

$$c=n(\sin A\cos B+\sin B\cos B)= n\sin(A+B),$$

ce qui force à chercher trois logarithmes, savoir :

$$\mathrm{l}.a,\ \mathrm{l.sinA}\ \text{ et } \mathrm{l.sin(A+B)},$$

on conçoit que si l'on a obtenu d'avance ou si l'on doit employer plus tard l.cosA et l.cosB, il sera plus simple de calculer séparément les deux nombres $a\cos B$ et $b\cos A$ et d'en faire la somme.

De même si l'on veut déterminer l'angle A donné par

$$\mathrm{tgA} = \frac{a\sin B}{1+a\cos B},$$

nous montrerons à l'évidence que le procédé le plus simple pour rendre cette formule *calculable par logarithmes* est toujours plus long et moins exact que le procédé direct.

Recherchons d'abord les formules les plus simples de transformation, et pour cela distinguons deux cas, $a<1$, $a>1$.

1° $a<1$. On pourra poser $a\cos B = \cos C$; d'où :

$$\mathrm{l.cosC} = \mathrm{l}.a + \mathrm{l.cosB}\ ;\ \text{ce qui donne l'angle C,}$$

mais entaché d'une erreur inévitable.

Ensuite, comme $1+\cos C = 2\cos^2\frac{1}{2}C$, on aura :

$$\mathrm{l.tgA} = \mathrm{l}.a + \mathrm{l.sinB} - \mathrm{l.2} - 2\,\mathrm{l.}\cos\frac{1}{2}C\ ;$$

on doit donc chercher $\frac{1}{2}C$, puis $\cos\frac{1}{2}C$ et le doubler, enfin l.2;

en tout donc 5 logarithmes à chercher pour obtenir l.tg.A, outre que l'un d'eux est à doubler ; et de plus, l'on emploie un angle fautif C.

2° $a>1$. On fera : $\mathrm{tgA} = \dfrac{\sin B}{\frac{1}{a}+\cos B}$ et l'on posera $\dfrac{1}{a} = \cos C$;

$\mathrm{l.cosC} = -\,\mathrm{l}.a$; ce qui donne l'angle C, fautif comme précédemment ;

puis, comme : $\cos C + \cos B = 2\cos\dfrac{C+B}{2}\cos\dfrac{C-B}{2}$, il faudra chercher

$\frac{C+B}{2}$, $\frac{C-B}{2}$, $l.\cos\frac{C+B}{2}$, $l.\cos\frac{C-B}{2}$, et l.2, pour obtenir :

$$l.\mathrm{tg}A = l.\sin B - l.2 - l.\cos\frac{C+B}{2} - l.\cos\frac{C-B}{2}.$$

Comme dans le 1[r] cas, un angle fautif, 5 logarithmes à chercher, et en outre calculer $\frac{C+B}{2}$, $\frac{C-B}{2}$.

Dans le procédé direct au contraire, on commence par chercher par logarithmes le nombre $1+a\cos B$, quel que soit a ; ce nombre sera entaché d'erreur, mais entre le calcul d'un nombre et celui d'un angle, avec toute l'exactitude dont chacun est susceptible, il n'y a pas à hésiter ; le premier est de beaucoup le plus simple ; on peut même, pensons-nous, affirmer en général que l'erreur sera moins considérable ; sous ce rapport donc, l'avantage reste déjà au procédé direct.

Achevons le calcul ; on cherchera le logarithme du nombre $1+a\cos B$, logarithme plus aisé à trouver encore que celui d'un sinus ou cosinus, et l'on aura :

$$l.\mathrm{tg}A = l.a + l.\sin B - l.(1+a\cos B).$$

Type du calcul :

$$\begin{array}{ll}
l.\sin B & \\
l.\cos B & \\
\underline{l.a} & \\
l.a\cos B\,; & \text{d'où : } \left\{\begin{array}{l} a\cos B. \\ 1+a\cos B. \end{array}\right. \\
\underline{l.(1+a\cos B)} & \\
l.\mathrm{tg}A. &
\end{array}$$

En tout donc 4 logarithmes à chercher ; aucune opération intermédiaire à effectuer, car ajouter une unité à un nombre ne peut pas s'appeler une opération ; enfin pas d'angle auxiliaire à déterminer.

La supériorité de ce procédé est donc hors de doute ; et remarquez que nous avons cependant omis de parler de la difficulté que présente quelquefois la transformation analytique d'une expression que l'on veut rendre *calculable par logarithmes*.

Cette transformation n'est réellement avantageuse que dans le cas où elle n'exigerait pas l'emploi de logarithmes nouveaux dont le procédé direct aurait besoin.

Un des exemples les plus remarquables de ce cas se rencontre précisément dans le problème que nous venons de traiter et dont la fin de la solution n'a été qu'indiquée parce que notre intention était d'y revenir dans cette discussion.

Le lecteur se rappelle que le calcul de la distance de deux points inaccessibles s'est trouvé ramené à la détermination du 3^{me} côté d'un triangle dont on connaît l'angle opposé et les deux autres côtés ; mais ces deux côtés sont donnés par leurs logarithmes, et pour employer la solution ordinaire, il faudrait chercher les nombres correspondants (cause d'erreur) a et b, puis les logarithmes de $a+b$ et $a-b$ (nouvelle cause d'erreur). Pour éviter ce passage du logarithme au nombre, Gauss a rendu l'expression $\frac{a-b}{a+b}$ calculable par logarithmes en la remplaçant par $\frac{1-\frac{b}{a}}{1+\frac{b}{a}}$ et posant $\frac{b}{a}=\text{tg}.p$, ce qui donne $\frac{a-b}{a+b}=\frac{1-\text{tg}.p}{1+\text{tg}.p}=\text{tg}(45^\circ-p)$.

Or, $\text{l}.\text{tg}.p=\text{l}.b-\text{l}.a$. de sorte qu'il est inutile de chercher les nombres a et b.

En reprenant la formule connue :

$\text{tg}\frac{\text{A}-\text{B}}{2}=\frac{a-b}{a+b}\text{tg}\frac{\text{A}+\text{B}}{2}=\text{tg}(45^\circ-p)\text{tg}\frac{\text{A}+\text{B}}{2}$, on pourra déterminer tous les angles du triangle et par suite la distance cherchée.

Nous croyons inutile de donner le type du calcul ; et nous nous serions bien gardé d'entrer dans ces détails, si notre but n'était de réconcilier avec le calcul par logarithmes ceux qui en redoutent les complications imaginaires.

Le lecteur habitué à se servir des petites tables à 7 décimales et à obtenir une approximation à peine supérieure à celles que fournissent les nôtres, à moins d'effectuer, pour les différences, des calculs réellement rebutants, s'étonnera sans doute de l'exactitude des résultats que nous venons d'obtenir.

Et cependant, nous pouvons hautement affirmer que nous avons opéré consciencieusement, sans jamais forcer la décimale dans un sens qui eût pu nous être favorable, comme le lecteur s'en convaincra du reste s'il veut prendre la peine de vérifier nos calculs.

Il eût été trop long de les publier en entier, et c'eût été même donner une fausse idée de la manière dont ils doivent s'effectuer : car en général, dans l'emploi de nos tables, les différences peuvent et doivent être calculées de tête ; et nous pouvons assurer, par notre propre expérience, que ce procédé n'exige pas une longue habitude.

Les détails numériques dans lesquels nous sommes entré auront suffi, nous l'espérons, pour convaincre le lecteur des immenses avantages que procurent ces tables, avantages que nous pouvons résumer en ces trois points.

Exactitude suffisante des résultats. (*)

Simplicité et brièveté des opérations.

Enfin, n'avoir à manier que deux feuilles de papier sur lesquelles se lisent immédiatement le logarithme et le nombre, au lieu de devoir feuilleter une à une les pages d'un volume, et de perdre à cette opération fastidieuse près de la moitié du temps nécessaire pour arriver au résultat !

Si l'on compare enfin ces tables à la règle à calcul, qu'on a raison d'introduire dans l'enseignement parce qu'elle ne pourrait être remplacée sur le terrain, il est hors de doute que celle-ci conduit moins rapidement au résultat, le donne d'une manière moins exacte, et surtout est beaucoup plus restreinte dans ses applications.

Nous osons donc espérer que tous ceux qui ont à cœur la diffusion des méthodes simples et expéditives de calcul s'efforceront de propager l'emploi de ces tables, et nous nous estimerons heureux

(*) A peine $\frac{1}{2}$ unité d'erreur sur le 4^me chiffre dans les nombres et $\frac{1}{2}$ minute sur les angles, dans le résultat final.

d'avoir pu contribuer à cette œuvre en les publiant ; mais le mérite des services qu'elles rendront doit revenir tout entier à leur véritable inventeur, au plus grand des astronomes contemporains. (*)

(*) A la suite de ses *tables de logarithmes a cinq décimales pour les nombres et les lignes trigonométriques, Paris, Gavthier-Villars*, Monsienr Houël a donné des tables à quatre décimales analogues à celles de Struve, mais sans citer l'auteur de cette disposition ; peut-être n'a-t-il pas eu connaissance de ces dernières qui ne sont du reste répandues que dans les observatoires de la Russie et de l'Allemagne. Comme elles sont de beaucoup antérieures à celles de M. Houël, c'est en faveur de Struve que nous revendiquons la priorité de l'idée, jusqu'à preuve du contraire.

Quant à l'extension de cette même idée aux tables des logarithmes des lignes trigonométriques nous ne pensons pas qu'elle ait été réalisée jusqu'aujourd'hui.