THÉORIE

DES

MOUVEMENTS DIURNE, ANNUEL ET SÉCULAIRE

DE

L'AXE DU MONDE

PAR

F. FOLIE,

MEMBRE DE L'ACADÉMIE ROYALE DE BELGIQUE.

D. O. M. S.

(Présenté à la Classe des sciences dans la séance du 4 août 1883.)

PRÉFACE.

I. Le présent travail a son origine dans quelques circonstances d'un caractère intime, que je compte révéler un jour en quelques pages portant la même épigraphe que celles-ci.

Ces circonstances m'avaient amené tout d'abord à rechercher si la fluidité intérieure du globe pouvait occasionner une nutation diurne.

Hopkins, le seul auteur qui, à ma connaissance, se soit occupé de cette question, l'avait résolue négativement.

En la reprenant *ab ovo,* je suis arrivé à la conclusion que la nutation diurne pouvait être sensible, dans cette hypothèse, et je me suis empressé de soumettre cette conclusion à une première vérification expérimentale.

Il résulte de mes formules que la nutation diurne est la plus forte en déclinaison, pour les étoiles dont l'ascension droite est 6^h ou 18^h;

En ascension droite, pour les étoiles qui sont situées vers 0^h ou 12^h.

J'ai donc fait relever, dans les meilleurs catalogues, les positions de plusieurs centaines d'étoiles, et les ai fait réduire à la même époque; j'ai pris ensuite les plus grands écarts entre les positions assignées à une même étoile par ces différents catalogues, et j'ai constaté que ces écarts étaient, de tout point, conformes au résultat théorique que je viens d'exposer.

Je crois avoir de même élucidé les écarts signalés par Auwers (*Berl. Jahrb. f. 1884*) entre les quatre éphémérides astronomiques (Berlin, Greenwich, Paris, Washington), et interprété ce *quelque chose de systématique* que l'astronome de Berlin avait trouvé dans ces écarts (*).

L'existence de la nutation diurne était dès lors, pour moi, chose certaine;

(*) La théorie de la nutation diurne, suivie des discussions dont je viens de parler, fait l'objet d'un travail qui a été présenté à l'Institut (Académie des sciences de Paris) le 24 juillet 1882.

et je pouvais essayer d'appliquer mes formules à des séries d'observations très précises, en vue de déterminer la constante de cette nutation.

J'ai choisi dans ce but les observations que W. Struve a faites dans le premier vertical, et dont il a déduit la constante de l'aberration.

Les premiers résultats auxquels est arrivé le Dr de Ball. qui a bien voulu se charger, à ma prière, du laborieux calcul de mes formules, sont assez concordants pour me permettre de considérer comme certain que la nutation diurne existe, et comme probable que sa constante approche de $0''.1$ (*).

Or, si l'on remarque que la nutation diurne en déclinaison peut, dans des circonstances favorables, être égale à dix ou douze fois la valeur de cette constante, on voit que cette nutation ne doit pas être négligée, et que son influence sera très considérable en ascension droite pour les circompolaires.

Lorsque la constante en sera bien déterminée, je chercherai à déduire de ma théorie la limite de l'épaisseur de la croûte solide du globe.

II. On m'eût, avec raison, accusé d'incurie, si je n'avais appliqué, à la recherche de la précession et de la nutation annuelle, le procédé d'intégration fort simple dont étaient issues mes formules relatives à la nutation diurne.

Les résultats assez neufs auxquels j'ai été conduit m'ont engagé à exposer cette théorie, en ne la fondant que sur les premières notions de la dynamique et de l'astronomie, et en ne me servant d'aucune formule que je n'eusse démontrée au préalable.

Un jeune homme, quelque peu initié à ces deux sciences, peut donc suivre ma théorie, sans recourir à aucune autre source.

Est-il besoin d'ajouter que mes formules, relatives à la longitude et au rayon vecteur de la Lune, sur lesquelles repose tout le développement du calcul, concordent avec celles de Delaunay, plus exactes que celles de Poisson?

Une indication, qui sera plus utile, est la suivante.

J'ai dû, pour rester conséquent, laisser de côté les termes provenant des

(*) Voici les valeurs, toutes positives, déduites, pour cette constante, des observations de W. Struve :

de β Cass. $0''.068$; δ Cass. $0''.099$; υ U. maj. $0''.047$; 2 Drac. $0''.031$;
b Drac. $0''.028$; c Drac. $0''.05$; Pi. XIX$^{\text{h}}$371. $0''.113$. (*A. N.*, n° 2542.)

inégalités de la Lune, et ceux qui ont leur source dans les inégalités du sphéroïde terrestre, parce que j'aurais dû les emprunter à des théories étrangères à mon travail.

Mais je me propose de publier ultérieurement les formules de la nutation, augmentées de ces différents termes, dont ma méthode permet de tenir très aisément compte.

Les astronomes seront surpris, sans doute, des différences assez sensibles qui existent entre mes formules et celles de mes prédécesseurs (*). Aussi ne sera-t-il pas hors de propos d'en signaler ici les principales.

Celles-ci sont au nombre de deux.

En premier lieu, je n'ai pas, comme ces géomètres, le coefficient unique $\frac{2C - A - B}{C}$ dans tous les termes de la précession et de la nutation, mais, au contraire, des coefficients différents (**), qui permettraient, si les constantes de ces deux mouvements étaient très exactement connues, de déterminer séparément les rapports $\frac{A}{C}$ et $\frac{B}{C}$, et qui permettent, dans tous les cas, de vérifier si ces deux constantes concordent entre elles. Il résulte, entre autres conclusions, de la comparaison à laquelle je me suis livré, que la constante de la nutation de Peters concorde avec la constante de la précession de Bessel, mieux que celle de Struve (***).

En second lieu, j'ai démontré qu'en se servant des formules de Peters, et des longitudes *vraies* de la Lune, les astronomes commettent des erreurs; et qu'il est bien préférable de faire usage des formules qui renferment les longitudes moyennes des deux astres : d'abord, le nombre des termes en est beaucoup moins grand que dans les formules en longitudes vraies; ensuite

(*) Quelques différences proviennent évidemment de ce que j'ai négligé les inégalités de la Lune et celles du sphéroïde terrestre. Mais tel n'est pas le cas pour les différences que je signale ci-dessous.

(**) La méthode d'intégration de Laplace, dont la nôtre n'est qu'un pâle reflet, lui eût donné également des coefficients différents, s'il n'avait négligé, dans le résultat, les termes très petits qui sont renfermés dans les expressions primitives de ces coefficients. « *Dans ce cas*, dit-il, *on peut négliger* i *relativement à* n, *et l'on a, à fort peu près* : $\frac{d\theta}{dt} = \frac{A+B-2C}{2nC} k' \sin(it + \varepsilon)$. » (*Méc. cél.*, liv. V, art. 4.) A cause de la grande rigueur que la précision des observations et la perfection des théories imposent aujourd'hui, nous avons cru ne pas devoir suivre, en ce point, l'exemple de l'incomparable géomètre.

(***) Il n'en résulte pas que cette dernière soit inexacte, mais bien plutôt que la constante de Peters est trop faible.

les premières ne renferment absolument aucun terme dépendant des périgées du Soleil et de la Lune (*), tandis que la conversion des longitudes moyennes en longitudes vraies introduit de ces termes. La présence n'en a pas encore été signalée; ils sont, à la vérité, très faibles, quoique très importants au point de vue théorique; et leur ensemble peut n'être pas sans influence sur le résultat final.

Poisson avait jugé qu'on pouvait substituer, sans erreur, les longitudes vraies aux longitudes moyennes.

Le premier astronome qui ait songé à effectuer la transformation des unes dans les autres est Peters; mais il n'a opéré la transformation que dans les termes relatifs au Soleil seulement, et il a omis les termes dépendants du périgée.

De là les erreurs commises en faisant usage de ces formules, lorsqu'on y substitue, ce que font beaucoup d'astronomes, les longitudes vraies de la Lune à ses longitudes moyennes. C'est ainsi que les termes en ☾ + Γ′ ont des coefficients à peu près égaux, *mais de signes contraires,* suivant qu'on fait usage des formules en longitudes moyennes ou en longitudes vraies, et que la signification de la constante de la nutation n'est pas la même dans l'un ou l'autre cas.

Ces erreurs peuvent être évitées, il est vrai, par l'emploi du *Berl. Jahrb.*, des *Tab. Pulc.*, ou de la *Connaissance des Temps* (à partir de 1884 pour cette dernière); ces ouvrages permettent d'effectuer, en longitudes moyennes, le calcul des termes qui dépendent de la Lune. Il nous paraît utile qu'on calcule de même ceux qui dépendent du Soleil.

Nous proposons donc aux astronomes de faire usage, à l'avenir, des formules qui renferment les longitudes moyennes du Soleil et de la Lune, et nous espérons que les différents annuaires astronomiques consacreront quelques pages au calcul de ces quantités, pour tous les jours de l'année.

Le présent fascicule contient la théorie du mouvement diurne et du mouvement annuel de l'axe du monde.

Les mouvements séculaires de cet axe feront l'objet d'un prochain travail.

(*) Abstraction faite de ceux qui peuvent provenir des inégalités du sphéroïde terrestre.

THÉORIE

DES

MOUVEMENTS DIURNE, ANNUEL ET SÉCULAIRE

DE

L'AXE DU MONDE.

LIVRE I.

DE LA NUTATION DIURNE.

CHAPITRE I.

Formules de la nutation diurne rapportée à l'équateur.

1. Le problème de la nutation diurne peut être abordé d'une manière beaucoup plus aisée que celui de la précession et de la nutation annuelle. Tandis que dans ce dernier, en effet, il n'est permis de considérer comme fixes ni le plan de l'écliptique, ni, bien moins encore, celui de l'équateur, on peut, dans le premier, rapporter les coordonnées des astres à l'un ou l'autre de ces plans considéré comme fixe. La position de chacun d'eux sera alors celle qu'il occupe, au jour donné et à l'instant pris pour l'origine, en vertu de la précession et de la nutation annuelle; et, la période de la nutation diurne étant de six heures seulement, il sera permis de considérer les mouvements des astres, soit en longitude et latitude, soit en ascension droite et déclinaison, comme uniformes pendant cette durée.

L'idée de considérer comme fixe le plan de l'équateur, quoique la plus simple, ne nous est cependant pas venue la première. Ce n'est qu'après avoir traité d'une manière générale le problème de la nutation, comme nous le ferons dans un autre chapitre, que nous avons été amené, pour éviter les complications des formules que nous avions obtenues, à rapporter les mouvements diurnes de l'équateur à la position initiale de ce plan lui-même. Les formules qui expriment ces mouvements arrivent ainsi, pensons-nous, au plus grand degré de simplicité qu'elles puissent atteindre. Elles sont toutefois beaucoup plus laborieuses à calculer que toutes les autres formules relatives à la position apparente des étoiles.

Afin d'éviter de plus grandes complications, tout à fait superflues du reste, nous y regarderons les distances du Soleil et de la Lune à la Terre comme constantes.

2. Considérons la Terre à un instant quelconque t; rapportons ses points à ses trois axes principaux x, y, z; nommons A, B, C ses moments d'inertie autour de ces axes, rangés par ordre de grandeur; D_0 la distance de son centre au centre du Soleil; x_0, y_0, z_0 les coordonnées de ce dernier point rapporté aux mêmes axes.

Tout en considérant les moments A, B, C comme inégaux, nous pouvons admettre, quant à l'action des astres attirants, que la Terre est un ellipsoïde de révolution autour de l'axe des z.

Ses méridiens auront alors pour équation :

$$r = a(1 - \varkappa)(1 + \varkappa \sin^2 \chi),$$

$\varkappa$ désignant l'aplatissement, et χ l'angle du rayon r avec l'axe de révolution; et l'on trouvera aisément que les couples provenant de l'attraction du Soleil, dont nous nous occuperons en premier lieu, seront, dans les trois plans principaux

$$Q = 3M \frac{y_0 z_0}{D_0^5} \int (y^2 - z^2)\, dm; \quad P = 3M \frac{x_0 z_0}{D_0^5} \int (z^2 - x^2)\, dm; \quad R = 3M \frac{x_0 y_0}{D_0^5} \int (x^2 - y^2)\, dm,$$

M désignant la masse du Soleil; ou bien

$$3M \frac{y_0 z_0}{D_0^5} (C - B); \quad -3M \frac{x_0 z_0}{D_0^5} (C - A); \quad 3M \frac{x_0 y_0}{D_0^5} (B - A).$$

Si nous représentons par m_1 le moyen mouvement de la Terre autour du Soleil, nous pourrons écrire m_1^2 au lieu de $\frac{M}{D_0^3}$ dans les expressions précédentes; et, si l'on pose

$$C - B = b, \quad C - A = a, \quad B - A = d,$$

les trois couples auront pour expression

$$Q = 3m_1^2 b \frac{y_0 z_0}{D_0^2}, \quad P = -3m_1^2 a \frac{x_0 z_0}{D_0^2}, \quad R = 3m_1^2 d \frac{x_0 y_0}{D_0^2},$$

que nous écrirons, en vue d'obtenir une plus grande uniformité de signes dans les équations (1),

$$Q = -bnq, \quad P = anp, \quad R = -dnr,$$

en faisant

$$p = -3\frac{m_1^2}{n}\frac{x_0 z_0}{D_0^2}, \quad q = -3\frac{m_1^2}{n}\frac{y_0 z_0}{D_0^2}, \quad r = -3\frac{m_1^2}{n}\frac{x_0 y_0}{D_0^2}.$$

Or, l, m, n étant les vitesses angulaires de la Terre autour de ses axes principaux, on sait que les équations qui les donnent sont :

$$\begin{aligned} A dl + bmndt &= Qdt \\ B dm - alndt &= Pdt \\ C dn + dmldt &= Rdt; \end{aligned}$$

ou

$$(1) \quad . \quad . \quad . \quad \frac{dl}{dt} = -\frac{b}{A} n(m+q); \quad \frac{dm}{dt} = \frac{a}{B} n(l+p); \quad \frac{dn}{dt} = -\frac{d}{C}(lm + nr).$$

3. Avant de procéder à leur intégration, nous avons à présenter une observation très importante.

La nutation diurne, comme on le verra, et comme Laplace l'a, du reste, affirmé, ne peut exister qu'à la condition que les moments A et B diffèrent entre eux d'une quantité appréciable.

Or il semble résulter des données actuelles de la géodésie et de la géographie physique, que cette différence est réellement insensible, si les moments A et B sont relatifs au sphéroïde terrestre tout entier. Elle peut ne pas l'être, au contraire, si ces moments se rapportent à l'écorce solide seule, et si celle-ci est assez mince.

Mais les équations (1) sont tout aussi bien applicables au mouvement de cette écorce qu'à celui du globe entier.

Considérons à part le mouvement de l'écorce solide et celui du noyau fluide.

L'axe de la première pourra être soumis à une nutation diurne, qui le fera osciller autour de l'axe du second, dont la nutation diurne pourra être considérée comme insensible.

Comme les oscillations du premier de ces axes seront excessivement petites, et comme de plus, le moment d'inertie de l'écorce, supposée assez mince, sera notablement plus faible que celui du noyau fluide, l'axe du mouvement de rotation résultant de celui de l'écorce et de celui du noyau, ou l'axe de rotation du globe tout entier, pourra être regardé comme soustrait à l'influence de la nutation diurne.

En d'autres termes, la vitesse n autour de l'axe de rotation sera la même pour l'écorce que pour la Terre tout entière.

Or pour celle-ci, les équations (1) donnent $dn = 0$, à cause de l'excessive petitesse du rapport $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{C}}$ (*).

Nous pouvons donc admettre que n est une constante dans ces mêmes équations, appliquées au mouvement de l'écorce solide.

4. Nous aurons d'abord à substituer, dans ces équations, aux quantités

$$p = -3\frac{m_1^2}{n}\frac{x_0 z_0}{\mathrm{D}_0^2} \quad \text{et} \quad q = -3\frac{m_1^2}{n}\frac{y_0 z_0}{\mathrm{D}_0^2},$$

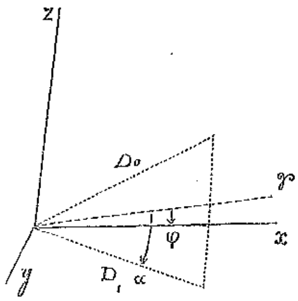
leurs expressions en coordonnées sphériques.

(*) Si la vitesse de rotation de la Terre n'est pas absolument constante, il résulte du moins des recherches de Laplace et de Poisson, que ses variations sont absolument insensibles. [*Méc. cél.*, livre V, n° 8, et *Mém. sur le mouvement de la Terre autour de son centre de gravité* (MÉM. DE L'INSTITUT, t. VII, pp. 239-240.)]

Désignons par φ l'angle que l'axe des x fait avec la ligne des équinoxes, compté dans le sens du mouvement de rotation de la Terre.

Le plan des xy étant celui de l'équateur, l'angle formé par la droite D_0 avec ce plan sera la déclinaison δ du Soleil, et celui que fait sa projection D_1 avec la ligne des équinoxes sera l'ascension droite α de cet astre.

Fig. 1.



Comme les angles α et φ se comptent dans le même sens, la différence de ces deux angles, ou l'angle de D_1 avec x, sera égal à $\alpha - \varphi$. Cela posé, nous aurons

$$(2) \qquad \frac{z_0}{D_0} = \sin\delta; \qquad \frac{y_0}{D_0} = \cos\delta \sin(\alpha-\varphi); \qquad \frac{x_0}{D_0} = \cos\delta\cos(\alpha-\varphi);$$

et par suite

$$(3) \quad \ldots \quad p = -\frac{3}{2}\frac{m_1^2}{n}\sin 2\delta\cos(\alpha-\varphi); \quad q = -\frac{3}{2}\frac{m_1^2}{n}\sin 2\delta \sin(\alpha-\varphi);$$

ou bien, en faisant

$$(4) \quad \ldots\ldots\ldots \quad -\frac{3}{4}\frac{m_1^2}{n} = h:$$

$$(5) \quad p = h\left[\sin(\alpha+2\delta-\varphi) - \sin(\alpha-2\delta-\varphi)\right]; \quad q = h\left[\cos(\alpha-2\delta-\varphi) - \cos(\alpha+2\delta-\varphi)\right].$$

5. La méthode de la variation des constantes arbitraires, appliquée aux deux premières des équations (1), donnera pour l une expression de la forme,

$$(6) \quad \ldots \quad l = \alpha_1 \sin(n_1 t + \beta_1) + \Phi' + H_1 \sin(\alpha + 2\delta - \varphi) + H_2 \sin(\alpha - 2\delta - \varphi),$$

dans laquelle α_1 et β_1 sont les deux constantes arbitraires; n_1 une quantité déterminée par $n_1^2 = \frac{ab}{AB}n^2 = \iota^2 n^2$, en faisant $\frac{ab}{AB} = \iota^2$; H_1, H_2 des constantes à déterminer; Φ une fonction de φ également à déterminer, et dont Φ' et Φ'' désignent les deux premières dérivées prises par rapport au temps.

Pour trouver ces quantités, substituons l'expression précédente de l dans la deuxième équation (1)

$$\frac{dm}{dt} = \frac{a}{B}n(l+p);$$

intégrons ensuite cette équation, et portons, dans la première, la valeur trouvée pour m; il viendra d'abord :

$$\frac{dm}{dt}=\frac{a}{\mathrm{B}}n\left\{\alpha_1\sin(n_1t+\beta_1)+\Phi'+(\mathrm{H}_1+h)\sin(\alpha+2\delta-\varphi)+(\mathrm{H}_2-h)\sin(\alpha-2\delta-\varphi)\right\}.$$

Intégrons sans ajouter de constante, puisque nous avons les deux arbitraires voulues; et désignons par a_1 et d_1 les mouvements du Soleil en ascension droite et en déclinaison pendant l'unité de temps, nous aurons :

$$(7)\quad m=\frac{a}{\mathrm{B}}n\left\{-\frac{\alpha_1}{n_1}\cos(n_1t+\beta_1)+\Phi-\frac{\mathrm{H}_1+h}{a_1+2d_1-n}\cos(\alpha+2\delta-\varphi)-\frac{\mathrm{H}_2-h}{a_1-2d_1-n}\cos(\alpha-2\delta-\varphi)\right\}.$$

Portons cette expression, ainsi que celle de $\frac{dl}{dt}$, dans l'équation

$$\frac{dl}{dt}=-\frac{b}{\mathrm{A}}n(m+q),$$

celle-ci deviendra :

$$\begin{aligned}&\alpha_1n_1\cos(n_1t+\beta_1)+\Phi''+\mathrm{H}_1(a_1+2d_1-n)\cos(\alpha+2\delta-\varphi)+\mathrm{H}_2(a_1-2d_1-n)\cos(\alpha-2\delta-\varphi)=\\&-\frac{ab}{\mathrm{AB}}n^2\left\{-\frac{\alpha_1}{n_1}\cos(n_1t+\beta_1)+\Phi-\frac{\mathrm{H}_1+h}{a_1+2d_1-n}\cos(\alpha+2\delta-\varphi)-\frac{\mathrm{H}_2-h}{a_1-2d_1-n}\cos(\alpha-2\delta-\varphi)\right\}\\&-\frac{b}{\mathrm{A}}nh\left[\cos(\alpha-2\delta-\varphi)-\cos(\alpha+2\delta-\varphi)\right].\end{aligned}$$

L'identification des deux membres donne

1° $\Phi''+i^2n^2\Phi=0$, d'où $\Phi=\sin i\varphi$, sans constante, par la même raison que plus haut;

2° $$\mathrm{H}_1(a_1+2d_1-n)=\frac{ab}{\mathrm{AB}}n^2\frac{\mathrm{H}_1+h}{a_1+2d_1-n}+\frac{b}{\mathrm{A}}nh;$$

3° $$\mathrm{H}_2(a_1-2d_1-n)=\frac{ab}{\mathrm{AB}}n^2\frac{\mathrm{H}_2-h}{a_1-2d_1-n}-\frac{b}{\mathrm{A}}nh.$$

Ces dernières égalités s'écriront plus simplement, si l'on fait

$$(8)\quad\ldots\quad\frac{a_1}{n}=a_2,\quad\frac{d_1}{n}=d_2;\quad a_2+2d_2-1=s_2,\quad a_2-2d_2-1=r_2:$$

$$\mathrm{H}_1\left(s_2^2-\frac{ab}{\mathrm{AB}}\right)=\frac{b}{\mathrm{A}}h\left(s_2+\frac{a}{\mathrm{B}}\right);\quad \mathrm{H}_2\left(r_2^2-\frac{ab}{\mathrm{AB}}\right)=-\frac{b}{\mathrm{A}}h\left(r_2+\frac{a}{\mathrm{B}}\right);$$

$$(\mathrm{H}_1+h)\left(s_2^2-\frac{ab}{\mathrm{AB}}\right)=hs_2\left(s_2+\frac{b}{\mathrm{A}}\right);\quad (\mathrm{H}_2-h)\left(r_2^2-\frac{ab}{\mathrm{AB}}\right)=-hr_2\left(r_2+\frac{b}{\mathrm{A}}\right).$$

Comme a diffère, dans tous les cas, fort peu de b, nous ne commettrons pas d'erreur sensible, et nous simplifierons considérablement nos coefficients, en remplaçant, dans les premiers membres des égalités précédentes, $\frac{ab}{\mathrm{AB}}$ par $\frac{b^2}{\mathrm{A}^2}$; nous trouverons ainsi :

$$\left(\frac{\mathrm{H}_1+h}{s_2}\right)\left(s_2-\frac{b}{\mathrm{A}}\right)=h;\quad \left(\frac{\mathrm{H}_2-h}{r_2}\right)\left(r_2-\frac{b}{\mathrm{A}}\right)=-h;\quad \mathrm{H}_1\left(s_2-\frac{b}{\mathrm{A}}\right)=\frac{b}{\mathrm{A}}h;\quad \mathrm{H}_2\left(r_2-\frac{b}{\mathrm{A}}\right)=-\frac{b}{\mathrm{A}}h.$$

Les expressions (6) et (7) de l et de m deviennent par là, si nous laissons de côté les termes à longue période, puisque nous ne nous occupons ici que de la nutation diurne :

$$(9)\quad \ldots\ldots\quad l=\frac{b}{\mathrm{A}}h\left\{\frac{\sin(\alpha+2\delta-\varphi)}{s_2-\frac{b}{\mathrm{A}}}-\frac{\sin(\alpha-2\delta-\varphi)}{r_2-\frac{b}{\mathrm{A}}}\right\}.$$

$$(10)\quad \ldots\quad m=-\frac{a}{\mathrm{B}}h\left\{\frac{\cos(\alpha+2\delta-\varphi)}{s_2-\frac{b}{\mathrm{A}}}-\frac{\cos(\alpha-2\delta-\varphi)}{r_2-\frac{b}{\mathrm{A}}}\right\}.$$

6. Désignons maintenant par $\frac{d\omega}{dt}$ et $\frac{d\psi}{dt}$ les variations de l'obliquité de l'écliptique et de la ligne équinoxiale qui sont dues au déplacement diurne du plan de l'équateur ; il ne nous restera, pour obtenir ces quantités, qu'à substituer les expressions précédentes dans les équations connues (*)

$$(11)\quad \ldots\ldots\quad \frac{d\omega}{dt}=-l\cos\varphi+m\sin\varphi;\quad -\sin\omega\frac{d\psi}{dt}=l\sin\varphi+m\cos\varphi,$$

(*) Il est bon de remarquer ici que nous avons compté tous les angles dans le sens direct, tandis que Laplace et Poisson ont pris l'angle ψ en sens inverse. C'est de là que provient le signe — dans le premier membre de l'équation en $\frac{d\psi}{dt}$.

en négligeant, dans le résultat, les termes indépendants de φ, puisqu'ils ne se rapportent pas à la nutation diurne.

Il viendra ainsi, après avoir posé

$$(12) \quad \frac{a}{B} = \frac{b+c}{A}:$$

$$(13) \quad \begin{cases} \dfrac{d\omega}{dt} = \dfrac{c}{A}\dfrac{h}{2}\left\{\dfrac{\sin(\alpha+2\delta-2\varphi)}{s_2-\dfrac{b}{A}} - \dfrac{\sin(\alpha-2\delta-2\varphi)}{r_2-\dfrac{b}{A}}\right\}, \\ \sin\omega\dfrac{d\psi}{dt} = \dfrac{c}{A}\dfrac{h}{2}\left\{\dfrac{\cos(\alpha+2\delta-2\varphi)}{s_2-\dfrac{b}{A}} - \dfrac{\cos(\alpha-2\delta-2\varphi)}{r_2-\dfrac{b}{A}}\right\}. \end{cases}$$

7. La petitesse de la variation de ω permet de considérer cette quantité comme constante dans $\sin\omega\frac{d\psi}{dt}$; c'est ce que nous ferons dans l'intégration.

Nous appellerons $\Delta\omega$ et $\Delta\psi$ les variations qui se sont produites depuis $t=0$ jusque $t=t$; α_0, δ_0, φ_0 les valeurs initiales de α, δ, φ; α_m, δ_m, φ_m leurs valeurs moyennes entre 0 et t. L'intégration entre ces limites donnera, si l'on pose

$$(14) \quad \frac{c}{A}\frac{h}{n} = K,$$

et si l'on écrit simplement t au lieu de $\varphi - \varphi_0 = nt$, ce qui revient à estimer t en arc :

$$(15) \quad \begin{cases} \dfrac{\Delta\omega}{K} = \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{s_2-\dfrac{b}{A}}\dfrac{\cos(\alpha_0+2\delta_0-2\varphi_0)-\cos(\alpha+2\delta-2\varphi)}{s_2-1} - \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{r_2-\dfrac{b}{A}}\dfrac{\cos(\alpha_0-2\delta_0-2\varphi_0)-\cos(\alpha-2\delta-2\varphi)}{r_2-1} \\ \quad = \dfrac{1}{s_2-\dfrac{b}{A}}\sin(\alpha_m+2\delta_m-2\varphi_m)\dfrac{\sin\frac{1}{2}(1-s_2)t}{1-s_2} - \dfrac{1}{r_2-\dfrac{b}{A}}\sin(\alpha_m-2\delta_m-2\varphi_m)\dfrac{\sin\frac{1}{2}(1-r_2)t}{1-r_2}. \\ \sin\omega\dfrac{\Delta\psi}{K} = \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{s_2-\dfrac{b}{A}}\dfrac{\sin(\alpha+2\delta-2\varphi)-\sin(\alpha_0+2\delta_0-2\varphi_0)}{s_2-1} - \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{r_2-\dfrac{b}{A}}\dfrac{\sin(\alpha-2\delta-2\varphi)-\sin(\alpha_0-2\delta_0-2\varphi_0)}{r_2-1} \\ \quad = \dfrac{1}{s_2-\dfrac{b}{A}}\cos(\alpha_m+2\delta_m-2\varphi_m)\dfrac{\sin\frac{1}{2}(1-s_2)t}{1-s_2} - \dfrac{1}{r_2-\dfrac{b}{A}}\cos(\alpha_m-2\delta_m-2\varphi_m)\dfrac{\sin\frac{1}{2}(1-r_2)t}{1-r_2}. \end{cases}$$

Si l'on fait

$$(16) \quad \ldots\ldots\ldots \quad \alpha_m + 2\delta_m = S_m, \quad \alpha_m - 2\delta_m = R_m,$$

ces formules s'écrivent :

$$(17) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\Delta\omega}{K} &= \frac{1}{s_2 - \frac{b}{A}} \sin(S_m - 2\varphi_m) \frac{\sin\frac{1}{2}(1-s_2)t}{1-s_2} - \frac{1}{r_2 - \frac{b}{A}} \sin(R_m - 2\varphi_m) \frac{\sin\frac{1}{2}(1-r_2)t}{1-r_2}. \\ \sin\omega \frac{\Delta\psi}{K} &= \frac{1}{s_2 - \frac{b}{A}} \cos(S_m - 2\varphi_m) \frac{\sin\frac{1}{2}(1-s_2)t}{1-s_2} - \frac{1}{r_2 - \frac{b}{A}} \cos(R_m - 2\varphi_m) \frac{\sin\frac{1}{2}(1-r_2)t}{1-r_2}. \end{aligned} \right.$$

8. Pour connaître les variations apparentes du lieu d'un astre, produites par le mouvement diurne de l'axe du monde, que nous venons de calculer, nous aurons à substituer les valeurs de $\Delta\omega$ et $\Delta\psi$ dans les formules :

$$(18) \quad \Delta\delta = \sin\alpha\Delta\omega + \cos\alpha\sin\omega\Delta\psi; \quad \Delta\alpha = \cos\alpha\Delta\psi + \operatorname{tg}\delta(\sin\alpha\sin\omega\Delta\psi - \cos\alpha\Delta\omega),$$

où α et δ sont l'ascension droite et la déclinaison de l'astre, $\Delta\alpha$ et $\Delta\delta$ les variations apparentes de ces coordonnées dues au mouvement de l'axe du monde.

On trouvera ainsi :

$$(19) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\Delta\delta}{K} &= \frac{1}{s_2 - \frac{b}{A}} \cos(S_m - 2\varphi_m - \alpha) \frac{\sin\frac{1}{2}(1-s_2)t}{1-s_2} - \frac{1}{r_2 - \frac{b}{A}} \cos(R_m - 2\varphi_m - \alpha) \frac{\sin\frac{1}{2}(1-r_2)t}{1-r_2}. \\ \frac{\Delta\alpha}{K} &= \frac{\cos\alpha}{\sin\omega} \left\{ \frac{1}{s_2 - \frac{b}{A}} \cos(S_m - 2\varphi_m) \frac{\sin\frac{1}{2}(1-s_2)t}{1-s_2} - \frac{1}{r_2 - \frac{b}{A}} \cos(R_m - 2\varphi_m) \frac{\sin\frac{1}{2}(1-r_2)t}{1-r_2} \right. \\ &\quad + \operatorname{tg}\delta \left\{ -\frac{1}{s_2 - \frac{b}{A}} \sin(S_m - 2\varphi_m - \alpha) \frac{\sin\frac{1}{2}(1-s_2)t}{1-s_2} + \frac{1}{r_2 - \frac{b}{A}} \sin(R_m - 2\varphi_m - \alpha) \frac{\sin\frac{1}{2}(1-r_2)t}{1-r_2} \right\}. \end{aligned} \right.$$

9. Ces formules sont relatives à l'action du Soleil.

Mais il est évident que les mêmes calculs peuvent s'appliquer à l'action de la Lune, et que celle-ci donnera lieu à des formules absolument identiques aux précédentes, à cette seule différence près, que tous les termes devront être multipliés par le rapport f des actions de la Lune et du Soleil.

Si donc nous accentuons les quantités qui se rapportent au premier de ces corps, les variations diurnes apparentes d'un astre, en ascension droite et en déclinaison, produites par les actions combinées du Soleil et de la Lune, auront pour expression complète :

$$(20)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{\Delta\delta}{\mathrm{K}} = {} & \frac{1}{s_2-\frac{b}{\mathrm{A}}}\cos(\mathrm{S}_m-2\varphi_m-\alpha)\frac{\sin\frac{1}{2}(1-s_2)t}{1-s_2} + f\frac{1}{s'_2-\frac{b}{\mathrm{A}}}\cos(\mathrm{S}'_m-2\varphi_m-\alpha)\frac{\sin\frac{1}{2}(1-s'_2)t}{1-s'_2} \\ & -\frac{1}{r_2-\frac{b}{\mathrm{A}}}\cos(\mathrm{R}_m-2\varphi_m-\alpha)\frac{\sin\frac{1}{2}(1-r_2)t}{1-r_2} - f\frac{1}{r'_2-\frac{b}{\mathrm{A}}}\cos(\mathrm{R}'_m-2\varphi_m-\alpha)\frac{\sin\frac{1}{2}(1-r'_2)t}{1-r'_2}. \end{aligned}\right.$$

$$(20\,bis)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{\Delta\alpha}{\mathrm{K}} = {} & \frac{\cos\alpha}{\sin\omega}\left\{\frac{1}{s_2-\frac{b}{\mathrm{A}}}\cos(\mathrm{S}_m-2\varphi_m)\frac{\sin\frac{1}{2}(1-s_2)t}{1-s_2} + f\frac{1}{s'_2-\frac{b}{\mathrm{A}}}\cos(\mathrm{S}'_m-2\varphi_m)\frac{\sin\frac{1}{2}(1-s'_2)t}{1-s'_2}\right. \\ & \left. -\frac{1}{r_2-\frac{b}{\mathrm{A}}}\cos(\mathrm{R}_m-2\varphi_m)\frac{\sin\frac{1}{2}(1-r_2)t}{1-r_2} + f\frac{1}{r'_2-\frac{b}{\mathrm{A}}}\cos(\mathrm{R}'_m-2\varphi_m)\frac{\sin\frac{1}{2}(1-r'_2)t}{1-r'_2}\right\} \\ & -\operatorname{tg}\delta\left\{\frac{1}{s_2-\frac{b}{\mathrm{A}}}\sin(\mathrm{S}_m-2\varphi_m-\alpha)\frac{\sin\frac{1}{2}(1-s_2)t}{1-s_2} + f\frac{1}{s'_2-\frac{b}{\mathrm{A}}}\sin(\mathrm{S}'_m-2\varphi_m-\alpha)\frac{\sin\frac{1}{2}(1-s'_2)t}{1-s'_2}\right. \\ & \left. -\frac{1}{r_2-\frac{b}{\mathrm{A}}}\sin(\mathrm{R}_m-2\varphi_m-\alpha)\frac{\sin\frac{1}{2}(1-r_2)t}{1-r_2} + f\frac{1}{r'_2-\frac{b}{\mathrm{A}}}\sin(\mathrm{R}'_m-2\varphi_m-\alpha)\frac{\sin\frac{1}{2}(1-r'_2)t}{1-r'_2}\right\}. \end{aligned}\right.$$

L'action des planètes sur les mouvements diurnes apparents des astres se déterminerait absolument de la même manière que celle de la Lune. Mais la constante K de la nutation diurne est tellement faible, et surtout la valeur de f l'est tellement aussi pour toutes les planètes, que les actions de celles-ci peuvent être négligées sans aucune erreur.

Nous pouvons donc considérer les deux formules qui précèdent comme donnant les expressions complètes des mouvements diurnes apparents des astres en ascension droite et en déclinaison.

10. Les formules (20), recherchées en vue de faciliter le calcul numérique de la nutation diurne, sont peu propres à montrer quelles sont les positions des astres attirants dans lesquelles cette nutation est la plus grande ou la plus petite. Nous en développerons d'autres mieux appropriées à ce but.

Elles donnent lieu, toutefois, à une remarque importante : c'est que la nutation diurne en déclinaison sera la plus grande pour les étoiles dont l'ascension droite est de 6^h ou 18^h, ou qu'elle sera plus grande pour les étoiles comprises entre 3^h et 9^h ou entre 15^h et 21^h que pour les autres étoiles; tandis que l'inverse aura lieu pour la variation diurne en ascension droite, au moins quant aux étoiles dont la déclinaison est assez forte, et pour lesquelles le terme en $\operatorname{tg}\delta$ est prédominant.

$\Delta\delta$ en effet se compose de termes de la forme $a \cos(x - t - \alpha) \sin t$, dans lesquels a et t sont des quantités à fort peu près constantes pour une même étoile observée au méridien, tandis que x est une variable dépendant de l'heure de l'observation et de la position des astres attirants.

Si l'on prend un grand nombre d'observations, cette variable passera par toutes les valeurs, et la moyenne des résultats donnera pour le maximum de $\Delta\delta$, correspondant à $t = \frac{\pi}{2}$, des couples de termes de la forme

$$a\left[\sin(x-\alpha) + \sin(-x-\alpha)\right] = -2a \sin\alpha \cos x.$$

C'est donc pour les étoiles dont l'ascension droite est de 6^h ou 18^h que les variations en déclinaison seront les plus grandes.

$\Delta\alpha$ au contraire, pour les étoiles dont la déclinaison est assez forte, dépendra surtout des termes multipliés par $\operatorname{tg}\delta$, lesquels, pris deux à deux, sont, pour $t = \frac{\pi}{2}$, de la forme

$$a\left[\cos(x-\alpha) + \cos(-x-\alpha)\right] = 2a \cos\alpha \cos x.$$

Les plus grandes variations en ascension droite auront donc lieu pour les étoiles dont la déclinaison est très forte, et dont l'ascension droite est égale à 0^h ou à 12^h.

Or, si l'on admet un assez grand degré de précision dans les observations des différents astronomes, il est clair que les discordances entre leurs déterminations devront affecter surtout les positions des étoiles dont la nutation diurne est la plus grande.

Si celle-ci existe, les discordances devront donc se présenter surtout :

En déclinaison, pour les étoiles dont l'ascension droite est voisine de 6^h ou de 18^h;

En ascension droite, pour celles qui sont voisines de 0^h ou de 12^h, pour autant que leur déclinaison ne soit pas trop faible.

Nous avons trouvé ces résultats confirmés par les valeurs que les différents astronomes ont attribuées aux coordonnées d'un très grand nombre d'étoiles.

Cette circonstance, et les écarts énormes qui existent entre les ascensions droites trouvées, pour une même étoile, à des dates différentes, par les observateurs les plus éminents, écarts qui, pour certaines circompolaires, ne s'élèvent pas à moins de trois ou quatre secondes de temps, nous ont confirmé tout d'abord dans notre foi à l'existence de la nutation diurne.

11. Cherchons l'équation du cône décrit pendant un jour par l'axe de la Terre autour de sa position moyenne.

Celle-ci est naturellement celle de l'axe de l'équateur moyen au jour donné, c'est-à-dire de l'axe soumis à la nutation annuelle, mais supposé soustrait à la nutation diurne.

Or, en rapportant les points de la Terre à ses trois axes principaux, l'axe de l'équateur moyen étant pris pour axe des z, nous avons trouvé, pour les composantes de la vitesse angulaire de la Terre, autour des axes des x et des y, les expressions (9) et (10) de l et de m, qui peuvent s'écrire, en posant

$$\frac{b}{\mathrm{A}}h = b_1;\quad \frac{a}{\mathrm{B}}h = a_1;\quad \frac{1}{s_2 - \frac{b}{\mathrm{A}}} = s_3;\quad \frac{1}{r_2 - \frac{b}{\mathrm{A}}} = r_3;\quad \alpha + 2\delta = \mathrm{S};\quad \alpha - 2\delta = \mathrm{R}:$$

$$l = b_1\left[s_3 \sin(\mathrm{S} - \varphi) - r_3 \sin(\mathrm{R} - \varphi)\right]$$
$$m = -a_1\left[s_3 \cos(\mathrm{S} - \varphi) - r_3 \cos(\mathrm{R} - \varphi)\right],$$

ou bien

$$l = b_1\left[(s_3 \sin \mathrm{S} - r_3 \sin \mathrm{R}) \cos\varphi - (s_3 \cos \mathrm{S} - r_3 \cos \mathrm{R}) \sin\varphi\right]$$
$$m = -a_1\left[(s_3 \cos \mathrm{S} - r_3 \cos \mathrm{R}) \cos\varphi + (s_3 \sin \mathrm{S} - r_3 \sin \mathrm{R}) \sin\varphi\right];$$

ou, en faisant

$$s_3 \sin S - r_3 \sin R = \sigma; \quad s_3 \cos S - r_3 \cos R = \varkappa :$$

$$l = b_1 (\sigma \cos\varphi - \varkappa \sin\varphi); \quad m = - a_1 (\varkappa \cos\varphi + \sigma \sin\varphi).$$

Ces formules se rapportent à l'action du Soleil seulement.

La Lune donnera lieu à des formules analogues, qui se déduiront des précédentes en y accentuant simplement toutes les quantités à l'exception de φ, b'_1 et a'_1 représentant respectivement $\frac{b}{A} h'$ et $\frac{a}{B} h'$, et h' étant égal à hf.

Si nous faisons alors

$$\sigma + f\sigma' = \sigma'', \quad \varkappa + f\varkappa' = \varkappa'',$$

les expressions complètes de l et m deviendront

$$\frac{l}{b_1} = \sigma'' \cos\varphi - \varkappa'' \sin\varphi; \quad \frac{m}{a_1} = -(\varkappa'' \cos\varphi + \sigma'' \sin\varphi),$$

d'où l'on tire :

$$\frac{l^2}{b_1^2} + \frac{m^2}{a_1^2} = \sigma''^2 + \varkappa''^2.$$

On a, de plus, $n =$ constante.

Or, si x, y, z désignent les coordonnées d'un point quelconque de l'axe instantané de rotation, on a

$$x : y : z = l : m : n;$$

par où l'équation précédente devient

$$\frac{x^2}{b_1^2} + \frac{y^2}{a_1^2} = \frac{\sigma''^2 + \varkappa''^2}{n^2} z^2,$$

équation du cône du second degré qui serait décrit, pendant un jour, par l'axe de rotation de la Terre, autour de sa position moyenne, si la position du Soleil et de la Lune restait invariable pendant la durée du jour.

Comme il n'en est pas ainsi, ce n'est donc pas un cône du second degré que décrit pendant un jour l'axe de la terre, mais un cône dont l'équation serait tout à fait inabordable, vu l'impossibilité matérielle d'éliminer t entre les expressions de l et m, si l'on admettait même que les coordonnées du Soleil et de la Lune varient pendant un jour proportionnellement au temps.

Nous bornerons donc nos recherches sur ce sujet au résultat que nous venons de signaler, à savoir que, si le Soleil et la Lune restaient fixes pendant un jour, le cône décrit par l'axe de la Terre, en vertu de la nutation diurne, serait un cône du second degré.

Les expressions précédentes de $\frac{l}{b_1}$, $\frac{m}{a_1}$ montrent également que la période entière de la nutation diurne serait, dans cette même hypothèse, d'un jour sidéral exactement; mais, à cause des variations du Soleil et de la Lune en ascension droite et en déclinaison, la durée de cette période est elle-même variable. Elle ne s'écartera toutefois que très peu de celle du jour sidéral, comme on peut le voir par les formules (20), dont chacun des termes renferme comme facteurs des quantités de la forme $\sin \frac{1}{2}(1 - s_2)t$ etc., qui ne différeront jamais bien sensiblement de $\sin t$.

12. Il est aisé également de trouver les variations diurnes apparentes des étoiles en ascension droite et en déclinaison par rapport à leur lieu moyen apparent non corrigé de la nutation annuelle.

Si l'on désigne, à un instant quelconque t, par x, y, z et X, Y, Z, les coordonnées d'un astre rapportées à l'équateur vrai et à l'équateur moyen, l'axe X passant par l'équinoxe moyen du jour donné; par $\Delta\omega$ l'angle de ces deux plans, par χ l'angle de leur intersection avec l'axe des X, et par φ celui de l'axe des x avec cette intersection, on aura d'abord, par les formules de transformation des coordonnées :

$$x = \cos\Delta\omega \sin\varphi\,(\mathrm{Y}\cos\chi - \mathrm{X}\sin\chi) + \cos\varphi\,(\mathrm{X}\cos\chi + \mathrm{Y}\sin\chi) - \mathrm{Z}\sin\Delta\omega\sin\varphi$$
$$y = \cos\Delta\omega \cos\varphi\,(\mathrm{Y}\cos\chi - \mathrm{X}\sin\chi) - \sin\varphi\,(\mathrm{X}\cos\chi + \mathrm{Y}\sin\chi) - \mathrm{Z}\sin\Delta\omega\cos\varphi$$
$$z = \sin\Delta\omega\,(\mathrm{Y}\cos\chi - \mathrm{X}\sin\chi) + \mathrm{Z}\cos\Delta\omega.$$

Or

$$\mathrm{X} = \mathrm{D}\cos\delta\cos\alpha,\quad \mathrm{Y} = \mathrm{D}\cos\delta\sin\alpha,\quad \mathrm{Z} = \mathrm{D}\sin\delta;$$

x, y, z se trouvent par des formules analogues dans lesquelles δ et α sont remplacées respectivement par $\delta + \Delta\delta$ et $\alpha + \Delta\alpha - \chi'$.

Si l'on néglige la deuxième puissance de $\Delta\omega$, $\Delta\alpha$, $\Delta\delta$, on aura simplement $\chi' = \varphi + \chi$, et les formules précédentes s'écriront en posant pour abréger $\alpha - \chi = \alpha_1$:

$$\begin{aligned}
&\cos(\delta + \Delta\delta)\cos(\alpha_1 - \varphi + \Delta\alpha) = \cos\delta\cos(\alpha_1 - \varphi) - \Delta\omega\sin\delta\sin\varphi\\
&\cos(\delta + \Delta\delta)\sin(\alpha_1 - \varphi + \Delta\alpha) = \cos\delta\sin(\alpha_1 - \varphi) - \Delta\omega\sin\delta\cos\varphi\\
&\sin(\delta + \Delta\delta) = \sin\delta + \Delta\omega\cos\delta\sin\alpha_1;
\end{aligned}$$

d'où l'on tire aisément :

$$\begin{aligned}
\Delta\delta &= \Delta\omega\sin(\alpha - \chi),\\
\Delta\alpha &= -\Delta\omega\,\mathrm{tg}\,\delta\cos(\alpha - \chi).
\end{aligned}$$

Ces formules montrent, beaucoup plus simplement encore que la discussion de l'article 10, que les variations diurnes sont les plus fortes en ascension droite pour les étoiles situées par 0^h ou par 12^h, et en déclinaison pour celles qui sont situées par 6^h ou par 18^h.

Elles ne peuvent servir, malgré leur simplicité, à déterminer les mouvements diurnes apparents des astres, à cause de l'ignorance dans laquelle nous sommes quant à la valeur de l'angle χ que l'intersection de l'équateur vrai et de l'équateur moyen fait, à un instant donné, avec la ligne des équinoxes.

Cet angle ne pourra être connu que quand la constante de la nutation diurne aura été très exactement déterminée par l'observation.

13. Voyons maintenant quel sera le procédé le plus propre à la détermination de cette constante.

Comme nous venons de l'observer, les coefficients $\frac{1}{2}(1 - s_2)$, etc., des formules (20) sont assez peu différents de l'unité, et, par conséquent, les facteurs de la forme $\frac{\sin\frac{1}{2}(1 - s_2)t}{\frac{1}{2}(1 - s_2)}$ sont tous peu différents de $\sin t$. On peut donc dire, sans commettre d'erreur sensible, que cette dernière quantité multiplie tous les termes de la nutation diurne. Celle-ci aura donc une période de 24^h environ, et c'est après des intervalles de 6^h qu'elle passera par son maximum.

Mais comme la courbe de ces variations est une sinussoïde, il n'est pas possible d'assigner, d'après ces formules, au lieu de l'astre, une position moyenne autour de laquelle il oscille dans son mouvement diurne apparent.

Force sera donc de prendre comme position moyenne celle qui correspond à un instant du jour qui soit fixe, et qui soit le même pour toute la Terre.

Le choix le plus rationnel est évidemment celui qui donne $\varphi = 0$ en même temps que $t = 0$, c'est-à-dire à l'instant où l'astre arrive à cette position moyenne conventionnelle.

Appelons premier méridien celui qui passe par l'axe des x.

Comme φ est l'angle que cet axe fait, dans le sens du mouvement de rotation de la Terre, avec la ligne équinoxiale, φ, réduit en temps, sera l'heure sidérale du premier méridien.

A cette heure φ correspond l'heure sidérale $\varphi + L = T$, pour un lieu d'observation dont la longitude orientale est L par rapport au premier méridien. Cette heure, étant celle de l'observation, est celle pour laquelle sont valables les expressions de $\Delta\delta$ et de $\Delta\alpha$ données ci-dessus; et comme, dans l'hypothèse où la position moyenne des astres est celle qu'ils occupent à 0^h (temps du premier méridien), $2\varphi_m$ est égale à φ, on aura $2\varphi_m = T - L$. Quant à t ou $\varphi - \varphi_0$, il sera aussi égal à $T - L$.

Ce procédé rationnel ne peut toutefois être utilement employé que si l'on connaît la longitude L du lieu d'observation par rapport au premier méridien. Il serait incommode dans le cas où l'on voudrait la calculer, à cause des produits de sinus dans lesquels entrerait L.

Pour ce cas, l'on devra déterminer d'une autre manière l'heure φ_0 du premier méridien, pour laquelle l'astre a sa position moyenne conventionnelle, φ étant l'heure de l'observation à laquelle correspondent $\Delta\delta$ et $\Delta\alpha$.

Or, en général, on a

$$\varphi = T - L, \quad \varphi_0 = T_0 - L,$$

d'où

$$t = \varphi - \varphi_0 = T - T_0,$$

et

$$2\varphi_m = \varphi + \varphi_0 = T + T_0 - 2L.$$

Il suffit donc de se donner arbitrairement l'heure T_0 du lieu d'observation, à partir de laquelle on veut calculer l'effet de la nutation diurne, pour que l'inconnue L n'entre plus à la fois dans les deux facteurs du produit.

On peut même profiter de cette arbitraire pour faire en sorte que cet effet soit un maximum; on n'aura, pour cela, qu'à prendre $T - T_0 = 6^h$; et c'est ce moyen qui sera le plus propre à assurer une détermination précise de L, c'est-à-dire de la position du premier méridien, en même temps que de la constante K de la nutation diurne.

Quel que soit, du reste, de ces deux procédés, celui que l'on voudra employer, il est clair que, vu la petitesse à laquelle on doit s'attendre pour cette constante, et malgré le soin que l'on prendra de ne faire usage que des observations les plus précises, on devra, pour éliminer de celles-ci les erreurs accidentelles, recourir à un nombre d'observations assez considérable, et les traiter par la méthode des moindres carrés.

14. Mais le problème présente beaucoup plus de complication encore que ne le font supposer les formules (20).

Il est évident, en effet, que l'ignorance de la nutation diurne peut avoir été la cause de certaines erreurs dans la détermination des constantes de la précession, de la nutation et de l'aberration (*); dans cette dernière surtout, à cause du nombre assez petit d'étoiles dont W. Struve s'est servi pour la déterminer, et peut-être aussi dans la détermination du mouvement propre des étoiles.

Il faudrait donc, à la rigueur, introduire dans les formules les corrections à appliquer à chacune de ces constantes, et, en outre, la parallaxe annuelle de l'étoile et sa nutation diurne, pour traiter le problème d'une manière complète.

Comme nous ne nous occuperons, toutefois, dans ce travail, que d'observations portant sur un assez petit nombre d'années, et que, dans ce cas, la correction de la constante de la précession et du mouvement propre sera probablement tout à fait insignifiante, nous ne tiendrons compte que des corrections des autres constantes, ainsi que de la parallaxe annuelle.

(*) Des considérations théoriques, exposées dans la suite de ce travail, démontrent que la valeur de cette constante, déterminée par Bessel, concorde mieux que celle de Struve avec la constante de la nutation de Peters.

Si nous représentons par e_δ et e_α les écarts qui existent entre la position apparente observée et la position apparente, calculée à l'aide de la position moyenne assignée à l'étoile et des constantes de Struve et Peters pour l'aberration et la nutation annuelle ; par $\Delta\delta$ et $\Delta\alpha$ les écarts entre cette position moyenne et la position moyenne conventionnelle définie ci-dessus ; par $\Delta\nu$ et Δa les corrections à appliquer aux constantes de la nutation annuelle et de l'aberration, nous aurons à écrire :

$$(21) \quad \left\{ \begin{aligned} e_\delta &= \Delta\delta + \Delta\nu \cdot \mathrm{N}_\delta + \Delta a \cdot \mathrm{A}_\delta + \mathrm{K} \cdot \mathrm{J}_\delta + \varpi \cdot \Pi_\delta, \\ e_\alpha &= \Delta\alpha + \Delta\nu \cdot \mathrm{N}_\alpha + \Delta a \cdot \mathrm{A}_\alpha + \mathrm{K} \cdot \mathrm{J}_\alpha + \varpi \cdot \Pi_\alpha, \end{aligned} \right.$$

formules dans lesquelles nous représentons pour abréger par N, A, J, Π avec les indices α ou δ, l'ensemble des termes de la nutation annuelle, de l'aberration, de la nutation diurne et de la parallaxe annuelle, en ascension droite ou en déclinaison.

Vu la petitesse probable de la correction $\Delta\nu$, on pourra se borner à la multiplier par les premiers termes seulement de la nutation annuelle. Quant aux termes qui multiplient les autres constantes, aucun ne peut, en général, être négligé.

Ceux de la nutation annuelle, par lesquels il faudra multiplier $\Delta\nu$, seront, comme on sait :

$$(22) \quad \left\{ \begin{aligned} \mathrm{N}_\delta &= \sin\alpha\,\Delta\omega + \sin\omega\cos\alpha\Delta\psi, \\ \mathrm{N}_\alpha &= (\cos\omega + \sin\omega\sin\alpha\,\mathrm{tg}\,\delta)\Delta\psi - \cos\alpha\,\mathrm{tg}\,\delta\Delta\omega, \end{aligned} \right.$$

et l'on pourra se borner, pour $\Delta\omega$ et $\Delta\psi$, au premier, ou, tout au plus, au deux premiers termes, savoir :

$$(22\,bis) \quad \left\{ \begin{aligned} \Delta\omega &= \cos\Omega + [8.77600]\cos 2\odot, \\ \Delta\psi &= -2\cot 2\omega\sin\Omega - [9.15887]\sin 2\odot. \end{aligned} \right.$$

Les termes de l'aberration, auxquels il est permis de s'arrêter, peuvent s'écrire

$$(23) \quad \left\{ \begin{aligned} \mathrm{A}_\delta &= -\sin\delta\sin(\odot-\alpha) - 2\sin\frac{\omega}{2}\left\{\cos\left(\delta \mp \frac{\omega}{2}\right) \mp \varkappa\sin\frac{\omega}{2}\sin\delta\right\}\cos\odot, \\ \mathrm{A}_\alpha &= -\sec\delta\left\{\cos(\odot-\alpha) - 2\sin^2\frac{\omega}{2}\cos\alpha\cos\odot\right\}. \end{aligned} \right.$$

Dans la première de ces expressions on a fait $\sin\alpha = \pm(1-\varkappa)$, de sorte que les signes supérieurs conviennent aux étoiles comprises entre 0^h et 12^h, les signes inférieurs aux étoiles comprises entre 12^h et 24^h.

Les termes de la parallaxe annuelle se déduisent simplement de ceux de l'aberration en changeant, dans ces derniers, $\odot$ en $\odot + \frac{\pi}{2}$. Il vient ainsi

$$(24)\quad \left\{\begin{aligned} \Pi_\delta &= -\sin\delta\cos(\odot-\alpha) + 2\sin\frac{\omega}{2}\left\{\cos\left(\delta \mp \frac{\omega}{2}\right) \mp \varkappa\sin\frac{\omega}{2}\sin\delta\right\}\sin\odot,\\ \Pi_\alpha &= \sec\delta\left\{\sin(\odot-\alpha) - 2\sin^2\frac{\omega}{2}\cos\alpha\sin\odot\right\}. \end{aligned}\right.$$

Nous avons enfin à nous occuper des termes J de la nutation diurne, qui sont donnés par les seconds membres des formules (20).

Comme ces seconds membres renferment encore une inconnue, la longitude du lieu d'observation par rapport au premier méridien, nous avons une dernière transformation à leur faire subir.

15. Nous admettrons, dans ce qui suit, que cette longitude a été déterminée approximativement par le second procédé indiqué à l'article 10, et qu'il ne s'agit plus ici que de calculer la correction ΔL qu'il y aura lieu d'apporter à cette détermination.

Tous les termes des formules (20) sont de la forme du premier d'entre eux, c'est-à-dire, en laissant de côté les coefficients :

$$\cos(S_m - 2\varphi_m - \alpha)\frac{\sin\frac{1}{2}(1-s_2)t}{1-s_2}.$$

Si l'on y remplace $2\varphi_m$, ainsi que t, par $T - L - \Delta L$ (art. 13), puis $S_m - T + L + \alpha$ par S_1, $T - L$ par T_1, et $\frac{1}{2}(1-s_2)$ par $1-\sigma$, ce terme deviendra, abstraction faite du facteur $\frac{1}{2}$:

$$\cos(S_1 + \Delta L)\frac{\sin(1-\sigma)(T_1 - \Delta L)}{1-\sigma},$$

et se réduira, si ΔL est assez petit, à

$$\cos S_1 \frac{\sin(1-\sigma)T_1}{1-\sigma} - \Delta L \left\{ \sin S_1 \frac{\sin(1-\sigma)\tau_1}{1-\sigma} + \cos S_1 \cos(1-\sigma)T_1 \right\} =$$
$$\cos S_1 \frac{\sin(1-\sigma)T_1}{1-\sigma} - \frac{\Delta L}{1-\sigma} \left\{ \cos\left[S_1 - (1-\sigma)T_1\right] - \sigma \cos S_1 \cos(1-\sigma)T_1 \right\}.$$

Le dernier terme de la parenthèse pourra très généralement être négligé, dans les expressions relatives au Soleil surtout. Nous le conserverons toutefois dans les formules ; on jugera immédiatement, dans l'application, s'il est négligeable.

En traitant de la même manière chacune des expressions des formules (20), on obtient, pour les termes de la nutation diurne :

$$(25) \quad \ldots \quad \left\{ \begin{aligned} J_\delta = {} & \frac{1}{2s} \cos S_1 \frac{\sin(1-\sigma)T_1}{1-\sigma} + f \frac{1}{2s'} \cos S'_1 \frac{\sin(1-\sigma')T_1}{1-\sigma'} \\ & - \frac{1}{2r} \cos R_1 \frac{\sin(1-\rho)T_1}{1-\rho} - f \frac{1}{2r'} \cos R'_1 \frac{\sin(1-\rho')T_1}{1-\rho'} \end{aligned} \right.$$

$$- \Delta L \left\{ \begin{aligned} & \frac{1}{2s(1-\sigma)} \left\{ \cos\left[S_1 - (1-\sigma)T_1\right] - \sigma \cos S_1 \cos(1-\sigma)T_1 \right\} \\ + & \frac{f}{2s'(1-\sigma')} \left\{ \cos\left[S'_1 - (1-\sigma')T_1\right] - \sigma' \cos S'_1 \cos(1-\sigma')T_1 \right\} \\ - & \frac{1}{2r(1-\rho)} \left\{ \cos\left[R_1 - (1-\rho)T_1\right] - \rho \cos R_1 \cos(1-\rho)T_1 \right\} \\ - & \frac{f}{2r'(1-\rho)} \left\{ \cos\left[R'_1 - (1-\rho')T_1\right] - \rho' \cos R'_1 \cos(1-\rho')T_1 \right\} \end{aligned} \right\}.$$

$$(25\,bis) \left\{ \begin{aligned} J_\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\omega} & \left\{ \frac{1}{2s} \cos(S_1+\alpha) \frac{\sin(1-\sigma)T_1}{1-\sigma} + f \frac{1}{2s'} \cos(S'_1+\alpha) \frac{\sin(1-\sigma')T_1}{1-\sigma'} \right. \\ & \left. - \frac{1}{2r} \cos(R_1+\alpha) \frac{\sin(1-\rho)T_1}{1-\rho} - f \frac{1}{2r'} \cos(R'_1+\alpha) \frac{\sin(1-\rho')T_1}{1-\rho'} \right\} \\ - \operatorname{tg}\delta & \left\{ \frac{1}{2s} \sin S_1 \frac{\sin(1-\sigma)T_1}{1-\sigma} + f \frac{1}{2s'} \sin S'_1 \frac{\sin(1-\sigma')T_1}{1-\sigma'} \right. \\ & \left. - \frac{1}{2r} \sin R_1 \frac{\sin(1-\rho)T_1}{1-\rho} - f \frac{1}{2r'} \sin R'_1 \frac{\sin(1-\rho')T_1}{1-\rho'} \right\} \end{aligned} \right.$$

$$
-\Delta L \left\{
\begin{aligned}
&\frac{\cos\alpha}{\sin\omega}\left[\frac{1}{2s(1-\sigma)}\left\{\cos\left[S_1-(1-\sigma)T_1+\alpha\right]-\sigma\cos(S_1+\alpha)\cos(1-\sigma)T_1\right\}\right.\\
&\qquad+\frac{f}{2s'(1-\sigma')}\left\{\cos\left[S'_1-(1-\sigma')T_1+\alpha\right]-\sigma'\cos(S'_1+\alpha)\cos(1-\sigma')T_1\right\}\\
&\qquad-\frac{1}{2r(1-\rho)}\left\{\cos\left[R_1-(1-\rho)T_1+\alpha\right]-\rho\cos(R_1+\alpha)\cos(1-\rho)T_1\right\}\\
&\qquad\left.-\frac{f}{2r'(1-\rho')}\left\{\cos\left[R'_1-(1-\rho')T_1+\alpha\right]-\rho'\cos(R'_1+\alpha)\cos(1-\rho')T_1\right\}\right]\\
&-\operatorname{tg}\delta\left[\frac{1}{2s(1-\sigma)}\left\{\sin\left[S_1-(1-\sigma)\tau_1\right]-\sigma\sin S_1\cos(1-\sigma)\tau_1\right\}\right.\\
&\qquad+\frac{f}{2s'(1-\sigma')}\left\{\sin\left[S'_1-(1-\sigma_1)\tau_1\right]-\sigma'\sin S'_1\cos(1-\sigma')\tau_1\right\}\\
&\qquad-\frac{1}{2r(1-\rho)}\left\{\sin\left[R_1-(1-\rho)\tau_1\right]-\rho\sin R_1\cos(1-\rho)\tau_1\right\}\\
&\qquad\left.-\frac{f}{2r'(1-\rho')}\left\{\sin\left[R'_1-(1-\rho')\tau_1\right]-\rho'\sin R'_1\cos(1-\rho')\tau_1\right\}\right]
\end{aligned}
\right|
$$

On a fait, pour abréger, dans ces formules (25) :

$$
(26)\quad \left\{
\begin{aligned}
&s=s_2-\frac{b}{A}=a_2+2d_2-1-\frac{b}{A};\ \sigma=\frac{1}{2}a_2+d_2;\ r=r_2-\frac{b}{A}=a_2-2d_2-1-\frac{b}{A};\ \rho=\frac{1}{2}a_2-d_2;\\
&T_1=T-L;\ S_1=S_m-T+L+\alpha=\alpha_m+2\delta_m-T+L+\alpha;\ R_1=\alpha_m-2\delta_m-T+L+\alpha.
\end{aligned}
\right.
$$

On a vu que α_m et δ_m représentent l'ascension droite et la déclinaison moyenne du Soleil entre l'instant où il est 0^h au premier méridien et l'instant de l'observation ; a_2 et d_2 les mouvements du Soleil, en ascension droite et en déclinaison, à ce même instant moyen, rapportés au mouvement diurne pris pour unité.

Pour la Lune, il suffit d'accentuer toutes les lettres qui sont relatives au Soleil.

L est la longitude orientale du lieu d'observation par rapport au premier méridien, ΔL la correction à y apporter, T l'heure sidérale de l'observation ; si celle-ci est faite dans le méridien, ou bien, pour une étoile zénithale, dans le premier vertical, tant à l'Est qu'à l'Ouest, on pourra prendre $T=\alpha$, et dans ces deux cas les expressions de S_1 et de T_1 se réduisent à

$$
(26\,bis) \quad \ldots\ldots \quad S_1=\alpha_m+2\delta_m+L,\quad R_1=\alpha_m-2\delta_m+L.
$$

16. Pour résumer enfin les formules qui permettront de calculer les constantes K et ϖ de la nutation diurne et de la parallaxe annuelle, ainsi que les corrections $\Delta\nu$, Δa, ΔL à apporter aux constantes de la nutation annuelle ou de l'aberration et à la longitude approximative du lieu de l'observation, nous séparerons en deux groupes les termes précédents en J; le premier groupe J' se composera des termes indépendants de ΔL, le second des termes qui ont ΔL pour facteur; en sorte que

$$J = J' + J''\Delta L, \tag{27}$$

qu'il s'agisse de l'ascension droite ou de la déclinaison.

Si nous faisons, de plus,

$$K\Delta L = l, \tag{28}$$

les formules (21) deviennent

$$\left\{\begin{aligned} e_\delta &= \Delta\delta + \Delta\nu \cdot N_\delta + \Delta a \cdot A_\delta + K \cdot J'_\delta + l \cdot J''_\delta + \varpi \cdot \Pi_\delta. \\ e_\alpha &= \Delta\alpha + \Delta\nu \cdot N_\alpha + \Delta a \cdot A_\alpha + K \cdot J'_\alpha + l \cdot J''_\alpha + \varpi \cdot \Pi_\alpha. \end{aligned}\right. \tag{29}$$

Chacune de ces formules renferme six inconnues, qui peuvent toutes, à l'exception peut-être de $\Delta\delta$ et $\Delta\alpha$, être considérées comme étant certainement inférieures à $0''.1$; elles se prêtent donc l'une et l'autre, de la manière la plus simple, à l'emploi de la méthode des moindres carrés.

Les expressions de N, A, Π, J', et J'' sont données dans les formules (22) à (26).

CHAPITRE II.

Formules de la nutation diurne rapportée à l'écliptique.

17. De même que nous avons rapporté la nutation diurne à la position actuelle du plan de l'équateur, considérée comme fixe, de même nous allons la rapporter à celle de l'écliptique.

Nous négligerons, pendant la durée du jour, la précession des équinoxes, et, à plus forte raison, la variation d'obliquité de l'écliptique. De plus, nous pourrons, à cause de la faiblesse de la nutation diurne, considérer les orbites du Soleil et de la Lune comme circulaires, celle du premier de ces astres comme coïncidant avec l'écliptique, celle du second comme faisant avec ce plan un angle constant.

Pour le Soleil nous aurons donc :

$$\sin\delta = \sin\omega \sin\odot;\quad \cos\delta\cos\alpha = \cos\odot;\quad \cos\delta\sin\alpha = \cos\omega\sin\odot.$$

Si nous faisons

$$(30)\qquad -\frac{3}{2}\frac{m_1^2}{n}\sin\omega = 2h\sin\omega = h_1,$$

les formules (3) deviendront par là :

$$(31)\qquad \left\{\begin{aligned} p &= h_1\left\{\cos\omega\sin\varphi + \cos^2\frac{\omega}{2}\sin(2\odot-\varphi) + \sin^2\frac{\omega}{2}\sin(2\odot+\varphi)\right\} \\ q &= h_1\left\{\cos\omega\cos\varphi - \cos^2\frac{\omega}{2}\cos(2\odot-\varphi) + \sin^2\frac{\omega}{2}\cos(2\odot+\varphi)\right\}. \end{aligned}\right.$$

18. Nous poserons, comme à l'article 5, mais en laissant immédiatement de côté les termes qui ne renferment pas φ :

$$l = \Phi' + \Pi_1\sin(2\odot-\varphi) + \Pi_2\sin(2\odot+\varphi),$$

et nous substituerons cette expression dans l'équation

$$\frac{dm}{dt} = \frac{a}{B}n(l+p),$$

il viendra :

$$\frac{dm}{dt}=\frac{a}{B}n\left\{\Phi' + h_1\cos\omega\sin\varphi + \left(H_1 + h_1\cos^2\frac{\omega}{2}\right)\sin(2\odot-\varphi) + \left(H_2 + h_1\sin^2\frac{\omega}{2}\right)\sin(2\odot+\varphi)\right\};$$

$$m=\frac{a}{B}n\left\{\Phi - \frac{h_1}{n}\cos\omega\cos\varphi - \frac{H_1 + h_1\cos^2\frac{\omega}{2}}{2m_1-n}\cos(2\odot-\varphi) - \frac{H_2 + h_1\sin^2\frac{\omega}{2}}{2m_1+n}\cos(2\odot+\varphi)\right\}.$$

Portant cette valeur et celle de q dans l'équation

$$\frac{dl}{dt}=-\frac{b}{A}n(m+q),$$

on aura :

$$\Phi'' + H_1(2m_1-n)\cos(2\odot-\varphi) + H_2(2m_1+n)\cos(2\odot+\varphi) =$$

$$-\frac{ab}{AB}n^2\left\{\Phi - \frac{h_1}{n}\cos\omega\cos\varphi - \frac{H_1 + h_1\cos^2\frac{\omega}{2}}{2m_1-n}\cos(2\odot-\varphi) - \frac{H_2 + h_1\sin^2\frac{\omega}{2}}{2m_1+n}\cos(2\odot+\varphi)\right\}$$

$$-\frac{b}{A}nh_1\left\{\cos\omega\cos\varphi - \cos^2\frac{\omega}{2}\cos(2\odot-\varphi) + \sin^2\frac{\omega}{2}\cos(2\odot+\varphi)\right\}.$$

L'identification des deux membres donne, en premier lieu :

$$\Phi'' + i^2n^2\left(\Phi - \frac{h_1}{n}\cos\omega\cos\varphi\right) + \frac{b}{A}nh_1\cos\omega\cos\varphi = 0,$$

d'où l'on tire, en intégrant :

$$\Phi = \frac{1}{n}\frac{b}{A}\frac{1-\frac{a}{B}}{1-\frac{ab}{AB}}h_1\cos\omega\cos\varphi + \sin i\varphi,$$

$$\Phi' = -\frac{b}{A}\frac{1-\frac{a}{B}}{1-\frac{ab}{AB}}h_1\cos\omega\sin\varphi + m\cos i\varphi;$$

en second lieu :

$$H_1(2m_1-n) = \frac{b}{A}nh_1\cos^2\frac{\omega}{2} + \frac{ab}{AB}n^2\frac{H_1 + h_1\cos^2\frac{\omega}{2}}{2m_1-n},$$

$$H_2(2m_1+n) = -\frac{b}{A}nh_1\sin^2\frac{\omega}{2} + \frac{ab}{AB}n^2\frac{H_2 + h_1\sin^2\frac{\omega}{2}}{2m_1+n};$$

ou bien, si l'on fait $\frac{m_1}{n} = m_2$:

$$H_1\left[(1-2m_2)^2 - \frac{ab}{AB}\right] = -\frac{b}{A} h_1 \cos^2\frac{\omega}{2}\left(1 - 2m_2 - \frac{a}{B}\right),$$
$$H_2\left[(1+2m_2)^2 - \frac{ab}{AB}\right] = -\frac{b}{A} h_1 \sin^2\frac{\omega}{2}\left(1 + 2m_2 - \frac{a}{B}\right);$$

ce qui donnera, comme à l'article 5, en remplaçant $\frac{ab}{AB}$ par $\frac{a^2}{B^2}$:

$$H_1 = -\frac{b}{A} h_1 \frac{\cos^2\frac{\omega}{2}}{1 - 2m_2 + \frac{a}{B}}, \qquad H_2 = -\frac{b}{A} h_1 \frac{\sin^2\frac{\omega}{2}}{1 + 2m_2 + \frac{a}{B}};$$

$$\frac{H_1 + h_1\cos^2\frac{\omega}{2}}{1 - 2m_2} = h_1 \frac{\cos^2\frac{\omega}{2}}{1 - 2m_2 + \frac{a}{B}}; \qquad \frac{H_2 + h_1\sin^2\frac{\omega}{2}}{1 + 2m_2} = h_1 \frac{\sin^2\frac{\omega}{2}}{1 + 2m_2 + \frac{a}{B}}.$$

On aura ainsi, en laissant de côté les termes en $\iota\varphi$, qui sont à longue période :

$$(32)\quad \begin{cases} -\frac{1}{h_1}\frac{A}{b}\, l = \dfrac{1 - \frac{a}{B}}{1 - \frac{ab}{AB}} \cos\omega \sin\varphi + \dfrac{\cos^2\frac{\omega}{2}}{1 - 2m_2 + \frac{a}{B}} \sin(2\odot - \varphi) + \dfrac{\sin^2\frac{\omega}{2}}{1 + 2m_2 + \frac{a}{B}} \sin(2\odot + \varphi) \\[2ex] -\frac{1}{h_1}\frac{B}{a}\, m = \dfrac{1 - \frac{b}{A}}{1 - \frac{ab}{AB}} \cos\omega \cos\varphi - \dfrac{\cos^2\frac{\omega}{2}}{1 - 2m_2 + \frac{a}{B}} \cos(2\odot - \varphi) + \dfrac{\sin^2\frac{\omega}{2}}{1 + 2m_2 + \frac{a}{B}} \cos(2\odot + \varphi). \end{cases}$$

19. Ces expressions, substituées dans les équations (11), donnent d'abord

$$(33)\quad \begin{cases} \frac{1}{h_1}\frac{A}{c}\frac{d\omega}{dt} = -\frac{1}{2}\dfrac{\cos\omega\sin 2\varphi}{1 - \frac{ab}{AB}} - \dfrac{\cos^2\frac{\omega}{2}}{2\left(1 - 2m_2 + \frac{a}{B}\right)} \sin 2(\odot - \varphi) + \dfrac{\sin^2\frac{\omega}{2}}{2\left(1 + 2m_2 + \frac{a}{B}\right)} \sin 2(\odot + \varphi), \\[2ex] -\frac{1}{h_1}\frac{A}{c}\sin\omega\frac{d\psi}{dt} = -\frac{1}{2}\dfrac{\cos\omega\cos 2\varphi}{1 - \frac{ab}{AB}} + \dfrac{\cos^2\frac{\omega}{2}}{2\left(1 - 2m_2 + \frac{a}{B}\right)} \cos 2(\odot - \varphi) - \dfrac{\sin^2\frac{\omega}{2}}{2\left(1 + 2m_2 + \frac{a}{B}\right)} \cos 2(\odot + \varphi). \end{cases}$$

Intégrons comme au n° 27, en posant

$$(34) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad K \sin \omega = K_1$$

voir (4), (14) et (30), il viendra :

$$(35)\left\{\begin{aligned}
\frac{\Delta\omega}{K_1} = &-\frac{\cos\omega \sin 2\varphi_m}{1-\frac{ab}{AB}}\sin t - \frac{\cos^2\frac{\omega}{2}}{1-2m_2+\frac{a}{B}}\sin 2(\odot_m - \varphi_m)\frac{\sin(1-m_2)t}{1-m_2}\\
&+\frac{\sin^2\frac{\omega}{2}}{1+2m_2+\frac{a}{B}}\sin 2(\odot_m+\varphi_m)\frac{\sin(1+m_2)t}{1+m_2}\\
-\sin\omega\frac{\Delta\psi}{K_1} = &-\frac{\cos\omega\cos 2\varphi_m}{1-\frac{ab}{AB}}\sin t + \frac{\cos^2\frac{\omega}{2}}{1-2m_2+\frac{a}{B}}\cos 2(\odot_m-\varphi_m)\frac{\sin(1-m_2)t}{1-m_2}\\
&-\frac{\sin^2\frac{\omega}{2}}{1+2m_2+\frac{a}{B}}\cos 2(\odot_m+\varphi_m)\frac{\sin(1+m_2)t}{1+m_2};
\end{aligned}\right.$$

ou, si nous faisons, pour simplifier,

$$(36) \quad \ldots\ldots\ldots \quad \frac{\cos^2\frac{\omega}{2}}{1-2m_2+\frac{a}{B}} = c_1, \quad \frac{\sin^2\frac{\omega}{2}}{1+2m_2+\frac{a}{B}} = s_1 :$$

$$(37)\left\{\begin{aligned}
\frac{\Delta\omega}{K_1} &= -\frac{\cos\omega\sin 2\varphi_m}{1-\frac{ab}{AB}}\sin t - c_1\sin 2(\odot_m-\varphi_m)\frac{\sin(1-m_2)t}{1-m_2} + s_1\sin 2(\odot_m+\varphi_m)\frac{\sin(1+m_2)t}{1+m_2}\\
-\sin\omega\frac{\Delta\psi}{K_1} &= -\frac{\cos\omega\cos 2\varphi_m}{1-\frac{ab}{AB}}\sin t + c_1\cos 2(\odot_m-\varphi_m)\frac{\sin(1-m_2)t}{1-m_2} - s_1\cos 2(\odot_m+\varphi_m)\frac{\sin(1+m_2)t}{1+m_2}.
\end{aligned}\right.$$

20. Quant à la Lune, nous regarderons comme constante l'inclinaison de son orbite sur l'écliptique, et nous nous arrêterons à la première puissance de cette inclinaison. S'il était nécessaire, dans le calcul de la nutation diurne, de tenir compte de la seconde puissance pour des étoiles très voisines du pôle, on pourrait recourir aux formules complètes que nous donnerons dans la théorie de la nutation annuelle; mais, en pratique, c'est toujours de l'expression de la nutation diurne en fonction des ascensions droites et déclinaisons du Soleil et de la Lune que l'on fera usage.

Or, on a, en appelant β la latitude de la Lune, $☾$ sa longitude, $☊$ celle du nœud, i la tangente de l'inclinaison de l'orbite sur l'écliptique :

$$\sin\delta = \cos\omega \sin\beta + \sin\omega \cos\beta \sin ☾$$
$$\cos\delta \sin\alpha = -\sin\omega \sin\beta + \cos\omega \cos\beta \sin ☾$$
$$\cos\delta \cos\alpha = \cos\beta \cos ☾; \quad \operatorname{tg}\beta = i \sin(☾ - ☊).$$

Nous prendrons cette dernière expression comme étant celle de $\sin\beta$, et nous ferons $\cos\beta = 1$.

Cela étant, on tirera des formules (3) en accentuant le coefficient h pour le rapporter à la Lune :

$$\frac{p}{4h'} = \cos\varphi \cos ☾ \left[i \cos\omega \sin(☾ - ☊) + \sin\omega \sin ☾\right]$$
$$+ \sin\varphi \left[\tfrac{1}{2} \sin 2\omega \sin^2 ☾ + i \cos 2\omega \sin ☾ \sin(☾ - ☊)\right].$$

Et, si l'on développe ces expressions, on trouvera aisément

$$(58) \quad \frac{p}{h' \cos\omega} = K_1 \cos\varphi - K_2 \sin\varphi + K_3 \cos(2☾ - \varphi) + K_4 \cos(2☾ + \varphi) + K_5 \sin(2☾ - \varphi) + K_6 \sin(2☾ + \varphi);$$

d'où l'on déduira, en changeant φ en $\varphi + \frac{\pi}{2}$:

$$(58\,bis) \quad \frac{q}{h' \cos\omega} = -K_1 \sin\varphi - K_2 \cos\varphi + K_3 \sin(2☾ - \varphi) - K_4 \sin(2☾ + \varphi) - K_5 \cos(2☾ - \varphi) + K_6 \cos(2☾ + \varphi),$$

formules dans lesquelles

$$(59) \begin{cases} K_1 = -2i \sin ☊; \quad K_2 = -2 \sin\omega (1 + 2i \cos ☊ \cot 2\omega); \\ K_3 = -i \sin ☊ \left(1 + \dfrac{\cos 2\omega}{\cos\omega}\right); \quad K_4 = -i \sin ☊ \left(1 - \dfrac{\cos 2\omega}{\cos\omega}\right); \\ K_5 = \sin\omega (\sec\omega + 1) + i \cos ☊ \left(1 + \dfrac{\cos 2\omega}{\cos\omega}\right); \quad K_6 = \sin\omega (\sec\omega - 1) + i \cos ☊ \left(1 - \dfrac{\cos 2\omega}{\cos\omega}\right). \end{cases}$$

21. La forme des expressions de p et de q nous conduit naturellement à poser :

$$(40)\quad l = \Phi' + H_1 \sin(2\mathbb{C} - \varphi) + H_2 \sin(2\mathbb{C} + \varphi) + H_3 \cos(2\mathbb{C} - \varphi) + H_4 \cos(2\mathbb{C} + \varphi);$$

d'où nous tirerons, en écrivant h_2 au lieu de $h' \cos \omega$:

$$(41)\quad \left\{ \begin{aligned} \frac{1}{n}\frac{dm}{dt} = \frac{a}{B}(l+p) = \frac{a}{B} \Big\{ \Phi' + h_2 (K_1 \cos\varphi - K_2 \sin\varphi) + (H_1 + h_2 K_5) \sin(2\mathbb{C} - \varphi) \\ + (H_2 + h_2 K_6) \sin(2\mathbb{C} + \varphi) + (H_3 + h_2 K_3) \cos(2\mathbb{C} - \varphi) + (H_4 + h_2 K_4) \cos(2\mathbb{C} + \varphi) \Big\}; \end{aligned} \right.$$

et, en intégrant :

$$(42)\quad \left\{ \begin{aligned} m = \frac{a}{B} \Big\{ n\Phi + h_2 (K_1 \sin\varphi + K_2 \cos\varphi) + \frac{H_1 + h_2 K_5}{1 - 2m_2'} \cos(2\mathbb{C} - \varphi) \\ - \frac{H_2 + h_2 K_6}{1 + 2m_2'} \cos(2\mathbb{C} + \varphi) - \frac{H_3 + h_2 K_3}{1 - 2m_2'} \sin(2\mathbb{C} - \varphi) + \frac{H_4 + h_2 K_4}{1 + 2m_2'} \sin(2\mathbb{C} + \varphi) \Big\}. \end{aligned} \right.$$

Portons cette valeur, ainsi que celle de q et de $\frac{dl}{dt}$, dans l'équation :

$$\frac{dl}{dt} = -\frac{b}{A} n (m + q),$$

et identifions les deux membres, il viendra d'abord :

$$\Phi'' = -i^2 n^2 \Phi + \frac{b}{A}\left(1 - \frac{a}{B}\right) n h_2 (K_1 \sin\varphi + K_2 \cos\varphi),$$

d'où l'on tire, en laissant de côté les termes en $\iota\varphi$:

$$\Phi = -\frac{b}{A} \frac{1 - \frac{a}{B}}{1 - \frac{ab}{AB}} \frac{h_2}{n} (K_1 \sin\varphi + K_2 \cos\varphi)$$

$$\Phi' = -\frac{b}{A} \frac{1 - \frac{a}{B}}{1 - \frac{ab}{AB}} h_2 (K_1 \cos\varphi - K_2 \sin\varphi).$$

Ensuite :

$$H_1\left[(1-2m_2')^2-\frac{ab}{AB}\right]=-\frac{b}{A}h_2K_5\left(1-2m_2'-\frac{a}{B}\right).$$

$$H_2\left[(1+2m_2')^2-\frac{ab}{AB}\right]=-\frac{b}{A}h_2K_6\left(1+2m_2'-\frac{a}{B}\right).$$

$$H_3\left[(1-2m_2')^2-\frac{ab}{AB}\right]=-\frac{b}{A}h_2K_3\left(1-2m_2'-\frac{a}{B}\right).$$

$$H_4\left[(1+2m_2')^2-\frac{ab}{AB}\right]=-\frac{b}{A}h_2K_4\left(1+2m_2'-\frac{a}{B}\right).$$

On déduit de là, comme plus haut (art. 5) :

$$H_1=-\frac{b}{A}h_2\frac{K_5}{1-2m_2'+\frac{a}{B}};\qquad \frac{H_1+h_2K_5}{1-2m_2'}=h_2\frac{K_5}{1-2m_2'+\frac{a}{B}}.$$

$$H_2=-\frac{b}{A}h_2\frac{K_6}{1+2m_2'+\frac{a}{B}};\qquad \frac{H_2+h_2K_6}{1+2m_2'}=h_2\frac{K_6}{1+2m_2'+\frac{a}{B}}.$$

$$H_3=-\frac{b}{A}h_2\frac{K_3}{1-2m_2'+\frac{a}{B}},\qquad \frac{H_3+h_2K_3}{1-2m_2'}=h_2\frac{K_3}{1-2m_2'+\frac{a}{B}}.$$

$$H_4=-\frac{b}{A}h_2\frac{K_4}{1+2m_2'+\frac{a}{B}};\qquad \frac{H_4+h_2K_4}{1+2m_2'}=h_2\frac{K_4}{1+2m_2'+\frac{a}{B}}.$$

Les expressions de l et de m deviennent ainsi :

$$(43)\left\{\begin{aligned}
-\frac{1}{h_2}\frac{A}{b}l=&\frac{1-\frac{a}{B}}{1-\frac{ab}{AB}}(K_1\cos\varphi-K_2\sin\varphi)+\frac{K_5}{1-2m_2'+\frac{a}{B}}\sin(2\text{☾}-\varphi)+\frac{K_6}{1+2m_2'+\frac{a}{B}}\sin(2\text{☾}+\varphi)\\
&+\frac{K_3}{1-2m_2'+\frac{a}{B}}\cos(2\text{☾}-\varphi)+\frac{K_4}{1+2m_2'+\frac{a}{B}}\cos(2\text{☾}+\varphi).\\
\frac{1}{h_2}\frac{B}{a}m=&\frac{1-\frac{b}{A}}{1-\frac{ab}{AB}}(K_1\sin\varphi+K_2\cos\varphi)+\frac{K_5}{1-2m_2'+\frac{a}{B}}\cos(2\text{☾}-\varphi)-\frac{K_6}{1+2m_2'+\frac{a}{B}}\cos(2\text{☾}+\varphi)\\
&-\frac{K_3}{1-2m_2'+\frac{a}{B}}\sin(2\text{☾}-\varphi)+\frac{K_4}{1+2m_2'+\frac{a}{B}}\sin(2\text{☾}+\varphi).
\end{aligned}\right.$$

22. Leur substitution dans les formules (11) donne, si l'on ne conserve que les termes de la nutation diurne :

$$\frac{1}{h_2}\frac{A}{c}\frac{d\omega}{dt}=\sin\varphi\left\{\frac{K_1\sin\varphi+K_2\cos\varphi}{1-\frac{ab}{AB}}+\frac{K_5}{1-2m_2'+\frac{a}{B}}\cos(2\mathbb{C}-\varphi)-\frac{K_6}{1+2m_2'+\frac{a}{B}}\cos(2\mathbb{C}+\varphi)\right.$$

$$\left.-\frac{K_3}{1-2m_2'+\frac{a}{B}}\sin(2\mathbb{C}-\varphi)+\frac{K_4}{1+2m_2'+\frac{a}{B}}\sin(2\mathbb{C}+\varphi)\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\frac{K_2\sin 2\varphi-K_1\cos 2\varphi}{1-\frac{ab}{AB}}-\frac{K_5\sin 2(\mathbb{C}-\varphi)+K_3\cos 2(\mathbb{C}-\varphi)}{2\left(1-2m_2'+\frac{a}{B}\right)}+\frac{K_6\sin 2(\mathbb{C}+\varphi)-K_4\cos 2(\mathbb{C}+\varphi)}{2\left(1+2m_2'+\frac{a}{B}\right)}.$$

$$-\frac{1}{h_2}\frac{A}{c}\sin\omega\frac{d\psi}{dt}=\cos\varphi\left\{\frac{K_1\sin\varphi+K_2\cos\varphi}{1-\frac{ab}{AB}}+\frac{K_5}{1-2m_2'+\frac{a}{B}}\cos(2\mathbb{C}-\varphi)-\frac{K_6}{1+2m_2'+\frac{a}{B}}\cos(2\mathbb{C}+\varphi)\right.$$

$$\left.-\frac{K_3}{1-2m_2'+\frac{a}{B}}\sin(2\mathbb{C}-\varphi)+\frac{K_4}{1+2m_2'+\frac{a}{B}}\sin(2\mathbb{C}+\varphi)\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\frac{K_2\cos 2\varphi+K_1\sin 2\varphi}{1-\frac{ab}{AB}}+\frac{K_5\cos 2(\mathbb{C}-\varphi)-K_3\sin 2(\mathbb{C}-\varphi)}{2\left(1-2m_2'+\frac{a}{B}\right)}-\frac{K_6\cos 2(\mathbb{C}+\varphi)-K_4\sin 2(\mathbb{C}+\varphi)}{2\left(1+2m_2'+\frac{a}{B}\right)}.$$

23. Intégrant entre les limites 0 et t, comme à l'article 7, nous trouverons, en écrivant simplement t au lieu de nt, ce qui revient à supposer le temps converti en arc :

$$\frac{2n}{h_2}\frac{A}{c}\Delta\omega=\frac{K_2\sin 2\varphi_m-K_1\cos 2\varphi_m}{1-\frac{ab}{AB}}\sin t-\frac{K_5\sin 2(\mathbb{C}_m-\varphi_m)+K_3\cos 2(\mathbb{C}_m-\varphi_m)}{1-2m_2'+\frac{a}{B}}\frac{\sin(1-m_2')t}{1-m_2'}$$

$$+\frac{K_6\sin 2(\mathbb{C}_m+\varphi_m)-K_4\cos 2(\mathbb{C}_m+\varphi_m)}{1+2m_2'+\frac{a}{B}}\frac{\sin(1+m_2')t}{1+m_2'},$$

$$-\frac{2n}{h_2}\frac{A}{c}\sin\omega\Delta\psi=\frac{K_2\cos 2\varphi_m+K_1\sin 2\varphi_m}{1-\frac{ab}{AB}}+\frac{K_5\cos 2(\mathbb{C}_m-\varphi_m)-K_3\sin 2(\mathbb{C}_m-\varphi_m)}{1-2m_2'+\frac{a}{B}}\frac{\sin(1-m_2')t}{1-m_2'}$$

$$-\frac{K_6\cos 2(\mathbb{C}_m+\varphi_m)-K_4\sin 2(\mathbb{C}_m+\varphi_m)}{1+2m_2'+\frac{a}{B}}\frac{\sin(1+m_2')t}{1+m_2'}.$$

24. Il s'agit enfin de remplacer les coefficients k par leurs valeurs (38). Dans cette opération, nous rangerons en dernière ligne tous les termes qui ont i pour facteur, et, en posant :

$$(44) \quad \ldots \quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{\cos^2\frac{\omega}{2}}{1-2m_2'+\frac{a}{B}} = c_1', \qquad \frac{\sin^2\frac{\omega}{2}}{1+2m_2'+\frac{a}{B}} = s_1' \\ &\frac{1}{2}\cot\omega\,\frac{1+\frac{\cos 2\omega}{\cos\omega}}{1-2m_2'+\frac{a}{B}} = c_2', \qquad \frac{1}{2}\cot\omega\,\frac{1-\frac{\cos 2\omega}{\cos\omega}}{1+2m_2'+\frac{a}{B}} = s_2' \end{aligned} \right.$$

nous trouverons :

$$(45) \left\{ \begin{aligned} &\frac{1}{f}\frac{\Delta\omega}{K_1} = -\frac{\cos\omega\sin 2\varphi_m}{1-\frac{ab}{AB}}\sin t - c_1'\sin 2(☾_m-\varphi_m)\frac{\sin(1-m_2')t}{1-m_2'} + s_1'\sin 2(☾_m+\varphi_m)\frac{\sin(1+m_2')t}{1+m_2'} \\ &+ i\left\{\frac{\cos\omega\sin☊\cos 2\varphi_m - \cos 2\omega\cos☊\sin 2\varphi_m}{\left(1-\frac{ab}{AB}\right)\sin\omega} - c_2'\sin(2☾_m-2\varphi_m-☊) + s_2'\sin(2☾_m+2\varphi_m+☊)\right\}. \\ &-\frac{1}{f}\sin\omega\frac{\Delta\psi}{K_1} = -\frac{\cos\omega\cos 2\varphi_m}{1-\frac{ab}{AB}}\sin t + c_1'\cos 2(☾_m-\varphi_m)\frac{\sin(1-m_2')t}{1-m_2'} - s_1'\cos 2(☾_m+\varphi_m)\frac{\sin(1+m_2')t}{1+m_2'} \\ &+ i\left\{-\frac{\cos\omega\sin☊\sin 2\varphi_m + \cos 2\omega\cos☊\cos 2\varphi_m}{\left(1-\frac{ab}{AB}\right)\sin\omega} + c_2'\cos(2☾_m-2\varphi_m-☊) - s_2'\cos(2☾_m+2\varphi_m-☊)\right\}. \end{aligned} \right.$$

25. Réunissant les actions du Soleil et de la Lune (37) et (45), on obtiendra enfin :

$$(46) \left\{ \begin{aligned} \frac{\Delta\omega}{K_1} = &-(1+f)\frac{\cos\omega\sin 2\varphi_m}{1-\frac{ab}{AB}}\sin t - c_1\sin 2(\odot_m-\varphi_m)\frac{\sin(1-m_2)t}{1-m_2} - fc_1'\sin 2(☾_m-\varphi_m)\frac{\sin(1-m_2')t}{1-m_2'} \\ &+ s_1\sin 2(\odot_m+\varphi_m)\frac{\sin(1+m_2)t}{1+m_2} + fs_1'\sin 2(☾_m+\varphi_m)\frac{\sin(1+m_2')t}{1+m_2'} \end{aligned} \right.$$

$$
(46)\left\{
\begin{aligned}
&+fi\left\{\frac{\cos\omega\sin\Omega\cos 2\varphi_m-\cos 2\omega\cos\Omega\sin 2\varphi_m}{\left(1-\dfrac{ab}{\mathrm{AB}}\right)\sin\omega}-c_2'\sin(2\mathbb{C}_m-2\varphi_m-\Omega)\frac{\sin(1-m_2')t}{1-m_2'}\right.\\
&\qquad\qquad\left.+s_2'\sin(2\mathbb{C}_m+2\varphi_m-\Omega)\frac{\sin(1+m_2')t}{1+m_2'}\right\}.\\
&-\sin\omega\frac{\Delta\psi}{\mathrm{K}_1}=-(1+f)\frac{\cos\omega\cos 2\varphi_m}{1-\dfrac{ab}{\mathrm{AB}}}\sin t+c_1\cos 2(\odot_m-\varphi_m)\frac{\sin(1-m_2)t}{1-m_2}\\
&+fc_1'\cos 2(\mathbb{C}_m-\varphi_m)\frac{\sin(1-m_2')t}{1-m_2'}-s_1\cos 2(\odot_m+\varphi_m)\frac{\sin(1+m_2)t}{1+m_2}-fs_1'\cos 2(\mathbb{C}_m+\varphi_m)\frac{\sin(1+m_2')t}{1+m_2'}\\
&+fi\left\{\frac{-\cos\omega\sin\Omega\sin 2\varphi_m+\cos 2\omega\cos\Omega\cos 2\varphi_m}{\left(1-\dfrac{ab}{\mathrm{AB}}\right)\sin\omega}+c_2'\cos(2\mathbb{C}_m-2\varphi_m-\Omega)\frac{\sin(1-m_2')t}{1-m_2'}\right.\\
&\qquad\qquad\left.-s_2'\cos(2\mathbb{C}_m+2\varphi_m-\Omega)\frac{\sin(1+m_2')t}{1+m_2'}\right\}.
\end{aligned}\right.
$$

26. Il peut être intéressant, au point de vue des observations destinées à vérifier l'existence et à déterminer le coefficient de la nutation diurne, de rechercher quelles sont les positions des deux astres pour lesquelles celle-ci est la plus grande ou la plus petite, en ascension droite ou en déclinaison.

Nous n'aurons pour cela qu'à substituer les expressions précédentes dans les équations (18), ce qui donnera :

$$
(47)\left\{
\begin{aligned}
&\frac{\Delta\delta}{\mathrm{K}_1}=\frac{1+f}{1-\dfrac{ab}{\mathrm{AB}}}\cos\omega\cos(2\varphi_m+\alpha)\sin t-c_1\cos(2\odot_m-2\varphi_m-\alpha)\frac{\sin(1-m_2)t}{1-m_2}\\
&\qquad\qquad-fc_1'\cos(2\mathbb{C}_m-2\varphi_m-\alpha)\frac{\sin(1-m_2')t}{1-m_2'}\\
&+s_1\cos(2\odot_m+2\varphi_m-\alpha)\frac{\sin(1+m_2)t}{1+m_2}+fs_1'\cos(2\mathbb{C}_m+2\varphi_m-\alpha)\frac{\sin(1+m_2')t}{1+m_2'}\\
&+fi\left\{\frac{\cos\omega\sin\Omega\sin(2\varphi_m+\alpha)+\cos 2\omega\cos\Omega\cos(2\varphi_m+\alpha)}{\left(1-\dfrac{ab}{\mathrm{AB}}\right)\sin\omega}-c_2'\cos(2\mathbb{C}_m-2\varphi_m-\Omega-\alpha)\frac{\sin(1-m_2')t}{1-m_2'}\right.\\
&\qquad\qquad\left.+s_2'\cos(2\mathbb{C}_m+2\varphi_m-\Omega-\alpha)\frac{\sin(1+m_2')t}{1+m_2'}\right\}.
\end{aligned}\right.
$$

$$(48)\quad \left\{\begin{aligned}
\frac{\Delta\alpha}{K_1} = \operatorname{tg}\delta \Bigg\{ & \frac{1+f}{1-\frac{ab}{AB}} \cos\omega \sin(2\varphi_m+\alpha)\sin t + c_1 \sin(2\odot_m - 2\varphi_m - \alpha)\frac{\sin(1-m_2)t}{1-m_2} \\
& + fc'_1 \sin(2☾_m - 2\varphi_m - \alpha)\frac{\sin(1-m'_2)t}{1-m'_2} \\
& - s_1 \sin(2\odot_m + 2\varphi_m - \alpha)\frac{\sin(1+m_2)t}{1+m_2} - fs'_1 \sin(2☾_m + 2\varphi_m - \alpha)\frac{\sin(1+m'_2)t}{1+m'_2} \\
& + fi\Bigg[-\frac{\cos\omega\sin\Omega\cos(2\varphi_m+\alpha) - \cos2\omega\cos\Omega\sin(2\varphi_m+\alpha)}{\left(1-\frac{ab}{AB}\right)\sin\omega} \\
& + c'_2 \sin(2☾_m - 2\varphi_m - \Omega - \alpha)\frac{\sin(1-m'_2)t}{1-m'_2} - s'_2 \sin(2☾_m + 2\varphi_m - \Omega - \alpha)\frac{\sin(1+m'_2)t}{1+m'_2}\Bigg]\Bigg\} \\
& + \cos\alpha\,\frac{\Delta\psi}{K_1}.
\end{aligned}\right.$$

Dans ce dernier terme, il faudra remplacer $\frac{\Delta\psi}{K_1}$ par sa valeur précédente.

27. La périodicité que nous avons constatée précédemment dans la nutation diurne, article 13, se retrouve dans ces dernières formules. On en déduirait également avec facilité les conséquences trouvées à l'article 10, quant à l'influence de l'ascension droite sur les variations diurnes des coordonnées des astres; nous ne reviendrons donc pas sur ces points.

Afin de pouvoir discuter plus aisément les formules (47) et (48), au point de vue de l'influence exercée par la position du Soleil et de la Lune sur la nutation diurne, il sera nécessaire d'y introduire quelques simplifications, qui en altéreront un peu, il est vrai, l'exactitude, mais offriront le grand avantage de donner à ces formules une expression excessivement simple, et très propre, par cela même, à une vérification expérimentale.

Dans ce but, nous négligerons $\frac{ab}{AB}$, m_2 et m'_2 vis-à-vis de l'unité; nous ne considérerons que l'effet maximum, répondant à $t=\frac{\pi}{2}$; et comme, en prenant l'origine du temps à 0^h sidérale du premier méridien, nous avons $2\varphi_m = t$, il viendra, pour le maximum, en faisant abstraction, pour le moment, de l'inclinaison de l'orbite lunaire à l'écliptique :

$$(49)\qquad \frac{\Delta\delta}{K_1} = -(1+f)\cos\omega\sin\alpha - (c_1+s_1)\sin(2\odot - \alpha) - f(c'_1+s'_1)\sin(2☾ - \alpha).$$

$$(50)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{\Delta\alpha}{K_1} &= \operatorname{tg}\delta\,\{(1+f)\cos\omega\cos\alpha-(c_1+s_1)\cos(2☉-\alpha)-f(c_1'+s_1')\cos(2☾-\alpha)\}\\ &-\frac{\cos\alpha}{\sin\omega}\{(c_1+s_1)\sin 2☉+f(c_1'+s_1')\sin 2☾\}.\end{aligned}\right.$$

On voit, par ces formules, que la plus grande nutation diurne se présentera :

1° *En déclinaison :* lorsque les longitudes du Soleil et de la Lune seront de 45° (ou 225°) ou bien de 135° (ou 215°) supérieures à l'ascension droite de l'étoile, et surtout, dans le premier cas, pour les étoiles dont l'ascension droite approche de 6^h, dans le second, pour celles qui sont situées vers 18^h.

2° *En ascension droite,* au contraire :

a) Si la déclinaison de l'étoile est assez forte, lorsque les longitudes du Soleil et de la Lune seront égales à l'ascension droite de l'étoile (+ 0° ou + 180°), ou lorsqu'elles en différeront de 90°, et surtout, dans le premier cas, pour les étoiles dont l'ascension droite approche de 12^h, dans le second, pour celles qui sont situées vers 0^h;

b) Si la déclinaison de l'étoile est très faible, lorsque les longitudes du Soleil et de la Lune seront de 45°, et surtout encore pour les étoiles situées vers 0^h ou vers 12^h;

c) Si la déclinaison de l'étoile est moyenne, la discussion de la formule ne pourra pas conduire à un résultat assez général et assez simple. Le lecteur trouvera aisément ce résultat pour une étoile donnée.

28. L'influence du nœud de la Lune, que nous avons négligée dans cette discussion, ne modifiera qu'assez faiblement les conclusions qui précèdent.

Dans la nutation diurne en déclinaison, cette influence sera exprimée, pour $t=\frac{\pi}{2}$, par

$$(51)\quad .\ .\ fi\left\{\frac{\cos\omega\sin\Omega\cos\alpha-\cos 2\omega\cos\Omega\sin\alpha}{\sin\omega}-(c_1'+s_1')\sin(2☾-\Omega-\alpha)\right\},$$

dont le dernier terme a le même signe que le terme correspondant, indépendant de i, en $\sin(2☾-\alpha)$.

Comme il est égal à $(1 + i\cos\Omega)\sin(2☾ - \alpha) - i\sin\Omega\cos(2☾ - \alpha)$, il s'ensuit qu'aux époques où la Lune exercera sa plus grande influence en déclinaison, celle-ci sera la plus forte lorsque la longitude du nœud sera nulle.

L'expression complète de $\Delta\delta$ sera alors, pour $t = \frac{\pi}{2}$ (49) et (51) :

$$(52)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{\Delta\delta}{K_1} = &- \{(1+f)\cos\omega + if\cos 2\omega\}\sin\alpha - (c_1 + s_1)\sin(2\odot - \alpha)\\ &- f\{(c_1' + s_1' + i(c_2' + s_2')\}\sin(2☾ - \alpha),\end{aligned}\right.$$

expression dont tous les termes s'ajoutent pour les époques qui ne s'éloignent pas fort du maximum, auquel correspondent, nous venons de le voir, $2\odot - \alpha = 2☾ - \alpha = \frac{\pi}{2}$.

En ascension droite, l'influence du nœud est exprimée, pour $t = \frac{\pi}{2}$, par :

$$(53)\quad \left\{\begin{aligned} &fi\Big\{\operatorname{tg}\delta\left[\frac{\cos\omega\sin\Omega\sin\alpha + \cos 2\omega\cos\Omega\cos\alpha}{\sin\omega} + (c_2' + s_2')\cos(2☾ - \Omega - \alpha)\right]\\ &\quad + \frac{\cos\alpha}{\sin\omega}\left[\cot\omega\sin\Omega - (c_2' + s_2')\sin(2☾ - \Omega)\right]\Big\},\end{aligned}\right.$$

et l'on voit qu'à l'époque où la Lune exerce sa plus grande action en ascension droite, c'est encore quand la longitude du nœud sera nulle que cette influence sera le plus sensible.

L'expression complète de $\Delta\alpha$ sera alors, pour $t = \frac{\pi}{2}$, (50) et (53) :

$$(54)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{\Delta\alpha}{K_1} = \operatorname{tg}\delta\Big\{&\left[(1+f)\cos\omega + if\frac{\cos 2\omega}{\sin\omega}\right]\cos\alpha + (c_1+s_1)\cos(2\odot - \alpha) + f\left[c_1' + s_1' + i(c_2' + s_2')\right]\cos(2☾ - \alpha)\Big\}\\ &+ \frac{\cos\alpha}{\sin\omega}\{(c_1 + s_1)\sin 2\odot + f\left[c_1' + s_1' + i(c_2' + s_2')\right]\sin 2☾\}.\end{aligned}\right.$$

29. La discussion précédente suffit pour mettre en lumière deux points très importants relativement à la détermination de la position absolue des étoiles, et à la vérification de l'existence de la nutation diurne : c'est que celle-ci est, en déclinaison, la plus grande pour $\sin(2\odot - \alpha) = \sin(2☾ - \alpha) = 1$, nulle pour $\alpha = 0$, $\odot = ☾ = 0$ ou π; en ascension droite, au contraire, la plus grande pour $\cos(2\odot - \alpha) = \cos(2☾ - \alpha) = 1$, au moins pour les étoiles d'assez forte déclinaison ; nulle pour $\alpha = \frac{\pi}{2}$, et $\odot = ☾ = 0$ ou π.

LIVRE II.

DE LA PRÉCESSION ET DE LA NUTATION ANNUELLES.

CHAPITRE I.

Procédé d'intégration.

30. Le procédé d'intégration qui vient de nous donner l'expression de la nutation diurne peut être appliqué, sans modification essentielle, au calcul de la précession et de la nutation annuelles, si l'on admet, comme nous le ferons, que la vitesse angulaire de la Terre, autour de son axe, est constante. Toutefois, à raison du grand nombre de termes dont nous aurons à tenir compte, il conviendra d'introduire, dans ce procédé, une simplification assez importante.

Nous commencerons par le développer d'une manière générale.

Après que les coordonnées de l'astre attirant auront été rapportées à un système d'axes absolument fixes, nous verrons que la quantité p (art. 2) se mettra sous la forme :

$$p = \Sigma u \sin(vt \pm \varphi),$$

u et v désignant des constantes connues dans le cas, considéré ici, où l'on fait abstraction des variations séculaires; et que la quantité q se déduira de la précédente par le simple changement de φ en $\varphi + \frac{\pi}{2}$. Cette circonstance, au surplus, peut être prévue; car l'axe des y étant à 90° de distance de l'axe des x, dans le sens direct, et celui-ci faisant, dans le même sens, l'angle φ avec l'intersection des plans xy et XY, l'angle que l'axe des y fait avec cette ligne sera $\varphi + \frac{\pi}{2}$. Et comme q se tire de p par le changement de x en y, on l'en tirera de même en changeant φ en $\varphi + \frac{\pi}{2}$.

Après la substitution des expressions de p et q dans les équations

$$(1) \quad \ldots \ldots \quad \frac{dl}{dt} = -\frac{b}{A} n(m+q); \quad \frac{dm}{dt} = \frac{a}{B} n(l+p),$$

nous aurons à intégrer celles-ci.

Or, $p_1, p_2, \ldots, q_1, q_2, \ldots$ désignant chacun des termes dont les sommes composent les expressions de p et q; $l_1, l_2, \ldots, m_1, m_2, \ldots$ les valeurs de l, m qui leur correspondent séparément, il est évident que, si l'on satisfait à chacune des équations

$$\frac{dl_1}{dt} = -\frac{b}{A} n(m_1 + q_1), \quad \frac{dm_1}{dt} = \frac{a}{B} n(l_1 + p_1),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

on trouvera, en en faisant la somme,

$$\Sigma \frac{dl_1}{dt} = -\frac{b}{A} n\left[\Sigma(m_1) + q\right], \quad \Sigma \frac{dm_1}{dt} = \frac{a}{B} n\left[\Sigma(l_1) + p\right];$$

et, en comparant aux équations (1),

$$l = \Sigma l_1, \quad m = \Sigma m_1.$$

31. Envisageons donc séparément chacun des termes

$$(55) \quad \ldots \ldots \quad p_1 = u_1 \sin(v_1 t \pm \varphi), \quad q_1 = \pm u_1 \cos(v_1 t \pm \varphi)$$

et supprimons les indices 1.

Nous commencerons par le cas particulier où $v = 0$, et où le terme correspondant de p et de q se réduit à

$$(56) \quad \ldots \ldots \quad p = u_0 \sin \varphi, \quad q = u_0 \cos \varphi.$$

Nous poserons, dans ce cas, comme à l'article 5 :

$$(57) \quad \ldots \ldots \quad l = \alpha_1 \sin(n_1 t + \beta_1) + \Phi' + H_0 \sin \varphi,$$

n_1 étant comme ci-dessus égal à ιn, et ι^2 à $\frac{ab}{AB}$; et nous aurons :

$$\frac{dm}{dt} = \frac{a}{B} n \left\{ \alpha_1 \sin(n_1 t + \beta_1) + \Phi' + (H_0 + u_0) \sin\varphi \right\},$$

d'où, en intégrant :

$$(58) \quad \ldots \quad m = -\frac{a}{B} n \left\{ \frac{\alpha_1}{n_1} \cos(n_1 t + \beta_1) - \Phi + \frac{u_0 + H_0}{n} \cos\varphi \right\}.$$

Portant cette expression, ainsi que celle de $\frac{dl}{dt}$, dans la première équation (1), et identifiant les deux membres, on trouve d'abord :

$$\Phi'' + n^2\iota^2\Phi + n\cos\varphi \left[H_0\left(1 - \frac{ab}{AB}\right) + \frac{b}{A} u_0 \left(1 - \frac{a}{B}\right) \right] = 0;$$

d'où, en intégrant,

$$\Phi = \cos\iota\varphi + \frac{1}{n} \frac{H_0\left(1 - \frac{ab}{AB}\right) + \frac{b}{A} u_0 \left(1 - \frac{a}{B}\right)}{1 - \frac{ab}{AB}} \cos\varphi,$$

et

$$\Phi' = -\iota n \sin\iota\varphi - \frac{H_0\left(1 - \frac{ab}{AB}\right) + \frac{b}{A} u_0 \left(1 - \frac{a}{B}\right)}{1 - \frac{ab}{AB}} \sin\varphi.$$

Les expressions de l et de m deviennent par là :

$$(59) \quad \ldots \quad \left\{ \begin{aligned} l &= \alpha_1 \sin(n_1 t + \beta_1) - \iota n \sin\iota\varphi - \frac{b}{A} u_0 \frac{1 - \frac{a}{B}}{1 - \frac{ab}{AB}} \sin\varphi \\ m &= -\frac{a}{B} n \left\{ \frac{\alpha_1}{n_1} \cos(n_1 t + \beta_1) - \cos\iota\varphi + \frac{1 - \frac{b}{A}}{1 - \frac{ab}{AB}} \frac{u_0}{n} \cos\varphi \right\}, \end{aligned} \right.$$

ou, si nous laissons de côté les termes relatifs aux variations séculaires :

$$(60) \quad \ldots \quad \left\{ l = -\frac{b}{A} u_0 \frac{1-\frac{a}{B}}{1-\frac{ab}{AB}} \sin \varphi; \quad m = -\frac{a}{B} u_0 \frac{1-\frac{b}{A}}{1-\frac{ab}{AB}} \cos \varphi. \right.$$

Au moyen des formules (11), on obtient alors, en appelant θ l'inclinaison du plan de l'équateur xy sur le plan fixe XY, et en faisant abstraction de la nutation diurne :

$$(61) \quad \ldots \quad \left\{ \frac{d\theta}{dt} = 0. \quad \sin \theta \frac{d\psi}{dt} = \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{a}{B}+\frac{b}{A}\right) - \frac{ab}{AB}}{1-\frac{ab}{AB}} u_0. \right.$$

La première équation donne

$$\theta = \text{constante} = \theta_0;$$

et la seconde

$$(62) \quad \ldots \quad \sin \theta_0 \Delta\psi = \frac{\mu - \varpi}{1 - \varpi} u_0 \, t,$$

en faisant

$$(63) \quad \ldots \quad \mu = \frac{1}{2}\left(\frac{a}{B} + \frac{b}{A}\right), \quad \varpi = \frac{ab}{AB}$$

et en appelant $\Delta\psi$ la variation de l'angle ψ depuis l'instant initial jusqu'à l'instant t.

32. Dans le cas général, dont nous allons nous occuper maintenant, nous ne reviendrons plus sur les termes $\alpha_1 \sin(n_1 t + \beta_1)$ et Φ.

La forme des expressions (55) de p et q, que nous écrirons

$$(64) \quad \ldots \quad p = u \sin (v_2 \pm 1)\varphi, \quad q = \pm u \cos (v_2 \pm 1)\varphi,$$

en faisant $v = nv_2$, nous conduira donc à poser simplement :

$$l = \mathrm{H} \sin (v_2 \pm 1)\varphi;$$

d'où :

$$\frac{dm}{dt} = \frac{a}{\mathrm{B}} n(\mathrm{H} + u) \sin (v_2 \pm 1)\varphi,$$

et, en intégrant,

$$m = -\frac{a}{\mathrm{B}} \cdot \frac{\mathrm{H} + u}{v_2 \pm 1} \cos (v_2 \pm 1)\varphi.$$

Substituant dans la première des équations (1), on trouve, en laissant de côté le facteur $\cos(v_2 \pm 1)\varphi$:

$$\mathrm{H}(v_2 \pm 1) = \frac{ab}{\mathrm{AB}} \cdot \frac{\mathrm{H} + u}{v_2 \pm 1} \mp \frac{b}{\mathrm{A}} u;$$

d'où :

$$\mathrm{H} = \mp \frac{b}{\mathrm{A}} \frac{u}{v_2 \pm \left(1 + \frac{a}{\mathrm{B}}\right) + \mathrm{Q}}$$

et

$$\frac{a}{\mathrm{B}} \cdot \frac{\mathrm{H} + u}{v_2 \pm 1} = u \frac{\frac{a}{\mathrm{B}} \pm \mathrm{Q}}{v_2 \pm \left(1 + \frac{a}{\mathrm{B}}\right) + \mathrm{Q}},$$

Q représentant, suivant le cas, l'un ou l'autre des produits

$$(65) \quad \ldots\ldots\ldots \quad \frac{c}{\mathrm{A}} \frac{a}{\mathrm{B}} \frac{1}{v_2 \pm \left(1 - \frac{a}{\mathrm{B}}\right)}.$$

Nous trouverons ainsi, pour les valeurs de l, m, correspondantes à chacune des expressions (55) ou (64) de p et q :

$$(66) \quad l = \mp \frac{b}{\mathrm{A}} \frac{u}{v_2 \pm \left(1 + \frac{a}{\mathrm{B}}\right) + \mathrm{Q}} \sin(vt \pm \varphi); \quad m = -\left(\frac{a}{\mathrm{B}} \pm \mathrm{Q}\right) \frac{u}{v_2 \pm \left(1 + \frac{a}{\mathrm{B}}\right) + \mathrm{Q}} \cos(vt \pm \varphi).$$

33. Au moyen des formules (11) on obtient alors, en faisant abstraction de la nutation diurne, et remplaçant Q par sa valeur (65) :

$$(67)\qquad \frac{d\theta}{dt} = u\,\frac{\dfrac{b}{A}+\dfrac{1}{2}\dfrac{c}{A}\left(1+\dfrac{a}{B}\,\dfrac{1}{1\pm v_2-\dfrac{a}{B}}\right)}{1\pm v_2+\dfrac{a}{B}\left(1+\dfrac{c}{A}\,\dfrac{1}{1\pm v_2-\dfrac{a}{B}}\right)}\sin vt = u\,\frac{\mu\,(1\pm v_2)-\varpi}{(1\pm v_2)^2-\varpi}\sin vt.$$

Quant à la valeur de $\sin\theta\frac{d\psi}{dt}$, on la trouvera en changeant simplement dans l'expression précédente $\sin vt$ en $\cos vt$.

34. Si l'on intègre l'équation (67), on trouve :

$$(68)\qquad \left\{\begin{aligned} &\Delta\theta = -\frac{u}{v}\,\frac{\mu(1\pm v_2)-\varpi}{(1\pm v_2)^2-\varpi}\cos vt;\\ &\text{et de même :}\\ &\sin\theta\Delta\psi = \frac{u}{v}\,\frac{\mu(1\pm v_2)-\varpi}{(1\pm v_2)^2-\varpi}\sin vt,\end{aligned}\right.$$

en admettant que les variations de θ sont assez faibles pour que θ puisse être considéré comme une constante dans $\sin\theta\frac{d\psi}{dt}$, fait que nous trouverons vérifié, en effet, dans l'expression numérique de ces variations.

Nous verrons également, par ces expressions numériques, que la différence entre $\frac{a}{B}$ et $\frac{b}{A}$, pour la Terre entière, est une quantité excessivement faible; et, dans la plupart des termes de $\Delta\theta$ et de $\Delta\psi$, nous pourrons, en conséquence, considérer ces quantités comme égales; alors $\frac{a}{B}=\frac{b}{A}=\mu$, et les formules (68) deviennent :

$$(69)\qquad \left\{\begin{aligned} &\Delta\theta = -\frac{u}{v}\,\frac{\mu}{1\pm v_2+\mu}\cos vt.\\ &\sin\theta\Delta\psi = \frac{u}{v}\,\frac{\mu}{1\pm v_2+\mu}\sin vt.\end{aligned}\right.$$

CHAPITRE II.

Établissement des formules auxiliaires.

35. Afin de ne pas entraver plus tard la marche des développements, nous indiquerons maintenant quelles sont les formules auxiliaires dont il sera fait usage.

Toutes ces formules, au surplus, sont données dans la plupart des ouvrages qui traitent la question du mouvement de rotation de la Terre.

Nous les rechercherons néanmoins, afin que le lecteur soit à même de suivre notre théorie sans recourir à aucune source étrangère.

L'expression de p est, comme nous l'avons vu (art. 2) :

$$p = -3\frac{\mathrm{M}}{\mathrm{D}^3}\frac{xz}{\mathrm{D}^2};$$

nous l'écrirons :

$$-3\frac{\mathrm{M}}{a^3}\frac{xz}{\mathrm{D}^2}\left(\frac{a}{\mathrm{D}}\right)^3 \text{ ou } -3\frac{m_1^2}{n}\frac{xz}{\mathrm{D}^2}\left(\frac{a}{\mathrm{D}}\right)^3,$$

s'il s'agit du Soleil, et

$$-3\frac{\mathrm{M}'}{a'^3}\frac{xz}{\mathrm{D}'^2}\left(\frac{a'}{\mathrm{D}'}\right)^3 \text{ ou } -3f\frac{m_1^2}{n}\frac{xz}{\mathrm{D}'^2}\left(\frac{a'}{\mathrm{D}'}\right)^3,$$

s'il s'agit de la Lune; M, D, a et M$'$, D$'$, a' désignant respectivement, dans l'un et l'autre cas : la masse de l'astre attirant, sa distance à la Terre et le demi-grand axe de son orbite, f le rapport des actions de la Lune et du Soleil, m_1 le moyen mouvement de celui-ci; ou enfin :

$$(70) \quad \ldots\ldots\ldots \quad p = h\frac{xz}{\mathrm{D}^2}\left(\frac{a}{\mathrm{D}}\right)^3, \quad h = -3\frac{m_1^2}{n}$$

expression relative au Soleil, et dans laquelle nous n'aurons qu'à accentuer les quantités h, a, D pour les rapporter à la Lune, h' étant égal à fh.

36. Nous ne nous occuperons, dans le développement des calculs, que de ce dernier astre, duquel il sera facile de passer au premier, en rendant simplement nulle l'inclinaison de son orbite sur l'écliptique; et nous supprimerons les accents dans ce développement, en prévenant le lecteur qu'il veuille bien les supposer implicitement compris dans h, a, D, et dans les différentes coordonnées de la Lune.

Les coordonnées x, y, z étant relatives aux axes principaux de la Terre, il faudra commencer par les rapporter à des axes absolument fixes X, Y, Z.

On fera passer l'axe des X par l'équinoxe d'une époque déterminée, et l'on prendra pour plan des XY l'écliptique de cette même époque, l'axe Z étant dirigé au nord de ce plan.

Désignons par θ l'angle de l'équateur xy avec l'écliptique fixe XY; par ψ l'angle que fait l'intersection de ces deux plans avec l'axe des X, compté dans le sens direct; et par φ l'angle que l'axe principal x fait avec cette intersection, compté dans le même sens, c'est-à-dire dans le sens du mouvement de rotation de la Terre.

Les formules connues de la transformation des coordonnées donnent les expressions suivantes (*) :

$$(71)\qquad \left\{\begin{array}{l} x = \cos\theta\sin\varphi(\mathrm{Y}\cos\psi - \mathrm{X}\sin\psi) + \cos\varphi(\mathrm{X}\cos\psi + \mathrm{Y}\sin\psi) - \mathrm{Z}\sin\theta\sin\varphi. \\ z = \sin\theta(\mathrm{Y}\cos\psi - \mathrm{X}\sin\psi) + \mathrm{Z}\cos\theta. \end{array}\right.$$

Les coordonnées X, Y, Z s'exprimeront simplement en coordonnées sphériques, rapportées à l'écliptique et à l'équinoxe fixes, au moyen des formules connues :

$$(72)\quad \ldots\ldots\quad \frac{\mathrm{Z}}{\mathrm{D}} = \sin\beta;\quad \frac{\mathrm{Y}}{\mathrm{D}} = \cos\beta\sin\lambda;\quad \frac{\mathrm{X}}{\mathrm{D}} = \cos\beta\cos\lambda$$

dans lesquelles β et λ désignent la latitude et la longitude de l'astre, rapportées à ce plan et à ce point.

(*) Ces formules diffèrent de celles de Laplace et de Poisson, par le signe de l'angle ψ, que nous avons compté comme l'angle φ dans le sens direct, tandis que ces géomètres l'ont compté en sens contraire.

37. Ces coordonnées doivent être exprimées ensuite en fonction de la longitude vraie de l'astre.

La latitude β s'exprimera d'abord en fonction de la longitude λ de l'astre, de celle Ω de son nœud sur l'écliptique fixe, et de l'inclinaison i de son orbite sur ce plan, par la formule :

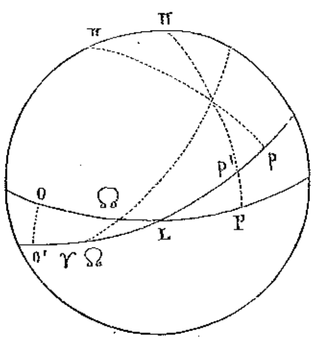
$$\operatorname{tg}\beta = i\sin(\lambda - \Omega). \tag{73}$$

De même on aurait, en désignant par de petites lettres les mêmes quantités rapportées à l'écliptique et à l'équinoxe vrais :

$$\operatorname{tg}\beta = i\sin(\lambda - \Omega). \tag{73 bis}$$

Soient maintenant Π et π les pôles de l'écliptique fixe et de l'écliptique vraie, ε leur inclinaison mutuelle, Λ la longitude du nœud de l'écliptique vraie sur l'écliptique fixe, β_0 la partie de β comprise entre ces deux plans. Vu l'extrême petitesse de ε nous pourrons poser :

Fig. 2.



$$\beta = \beta + \beta_0,$$

et même :

$$\operatorname{tg}\beta = \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\beta_0.$$

On tirera de là, en négligeant la quatrième puissance de i, le carré de ε et le produit εi^2 :

$$(74)\quad \left\{\begin{aligned}
\operatorname{tg}\beta &= i\sin(\lambda - \Omega) + \varepsilon\sin(\lambda - \Lambda)\\
\sin\beta &= i\left(1 - \frac{3}{8}i^2\right)\sin(\lambda - \Omega) + \frac{i^3}{8}\sin 3(\lambda - \Omega) + \varepsilon\sin(\lambda - \Lambda)\\
\cos\beta &= 1 - \frac{i^2}{4} + \frac{i^2}{4}\cos 2(\lambda - \Omega) + \frac{1}{2}i\varepsilon\left\{\cos(2\lambda - \Omega - \Lambda) - \cos(\Omega - \Lambda)\right\}.
\end{aligned}\right.$$

38. Pour exprimer λ en fonction de λ, nous considérerons dans la figure ci-jointe LP comme égal à Lp', vu l'extrême petitesse de ε. Par suite :

$$Lp - LP = pp' = \operatorname{tg}\beta\cot p'$$

en prenant pp' égal à son sinus. Mais

$$\cot p' = \sin \beta_0 \cot (\lambda - \Lambda),$$

ou, sans erreur sensible,

$$= \operatorname{tg} \beta_0 \cot (\lambda - \Lambda) = \varepsilon \cos (\lambda - \Lambda);$$

d'où enfin, puisque nous avons représenté par ψ l'angle compris entre l'équinoxe vrai et l'équinoxe fixe, angle qui n'est autre que le mouvement de l'équinoxe depuis l'instant initial jusqu'à l'instant actuel :

$$\begin{aligned}\lambda - \lambda = \mathrm{OP} - \Upsilon p &= \mathrm{OL} + \mathrm{LP} - (\mathrm{O'L} - \mathrm{O'}\Upsilon + \mathrm{L}p) = \mathrm{LP} + \mathrm{O'}\Upsilon - \mathrm{L}p \\ &= \psi - \varepsilon \operatorname{tg} \beta \cos (\lambda - \Lambda),\end{aligned}$$

où l'on peut écrire $\lambda - \Lambda$ au lieu de $\lambda - \Lambda$.

On déduit de là, à l'aide de la formule (73^{bis}) :

$$\begin{aligned}\sin (\lambda - \psi \pm \varphi) &= \sin (\lambda \pm \varphi) - \varepsilon \operatorname{tg} \beta \cos (\lambda - \Lambda) \cos (\lambda \pm \varphi) \\ &= \sin (\lambda \pm \varphi) - \frac{1}{4} \varepsilon i \left\{ \begin{array}{l} \quad \sin (5\lambda - \Omega - \Lambda \pm \varphi) - \sin (\lambda + \Omega - \Lambda \pm \varphi) \\ + \sin (\ \lambda - \Omega + \Lambda \pm \varphi) + \sin (\lambda - \Omega - \Lambda \pm \varphi) \end{array} \right\}. \\ \cos (\lambda - \psi \pm \varphi) &= \cos (\lambda \pm \varphi) + \varepsilon \operatorname{tg} \beta \cos (\lambda - \Lambda) \sin (\lambda \pm \varphi) \\ &= \cos (\lambda \pm \varphi) - \frac{1}{4} \varepsilon i \left\{ \begin{array}{l} \quad \cos (5\lambda - \Omega - \Lambda \pm \varphi) - \cos (\lambda + \Omega - \Lambda \pm \varphi) \\ + \cos (\ \lambda - \Omega + \Lambda \pm \varphi) - \cos (\lambda - \Omega - \Lambda \mp \varphi) \end{array} \right\}.\end{aligned}$$

Afin d'abréger l'écriture, nous mettrons ces deux expressions sous la forme :

$$(75) \quad . \ . \ . \ . \quad \left\{ \begin{array}{l} \sin (\lambda - \psi \pm \varphi) = \sin (\lambda \pm \varphi) - \frac{1}{4} \varepsilon i \, \Sigma \sin (\mu\lambda + \mu') \\ \cos (\lambda - \psi \pm \varphi) = \cos (\lambda \pm \varphi) - \frac{1}{4} \varepsilon i \, \Sigma \cos (\mu\lambda + \mu') \end{array} \right.$$

dans laquelle $\mu\lambda + \mu'$ est l'expression symbolique de chacun des angles :

$$+ (5\lambda - \Omega - \Lambda \pm \varphi), \ - (\lambda + \Omega - \Lambda \pm \varphi), \ + (\lambda - \Omega + \Lambda \pm \varphi), \ - (- \lambda + \Omega + \Lambda \pm \varphi),$$

les sinus et cosinus de ces angles ayant, dans les sommes Σ, les signes mêmes dont nous avons fait précéder les angles.

39. Il restera enfin à exprimer la longitude vraie λ en fonction du temps.

Comme nous négligerons, avec la plupart des géomètres, les inégalités de la Lune autres que l'équation du centre, inégalités dont il sera du reste aisé de tenir compte, nous pourrons lui appliquer les formules du mouvement elliptique dans son plan.

En appelant v son anomalie vraie, ainsi comptée, m_1 son moyen mouvement, l'équation de l'orbite donne :

$$\frac{D}{a} = \frac{1 - e^2}{1 + e \cos v},$$

et le principe des aires :

$$\frac{D^2}{a^2}\frac{dv}{dt} = m_1 \sqrt{1 - e^2};$$

d'où l'on tire, en s'arrêtant à la troisième puissance de l'excentricité (*) :

$$m_1 dt = (1 - e^2)^{\frac{3}{2}}[1 + e \cos v]^{-2} dv = \left(1 - 2e \cos v + \frac{3}{2} e^2 \cos 2v - e^3 \cos 3v\right) dv.$$

Intégrant, et désignant par μ_1 la constante, on a :

$$m_1 t + \mu_1 = v - 2e \sin v + \frac{3}{4} e^2 \sin 2v - \frac{e^3}{3} \sin 3v.$$

Le premier membre peut se remplacer par $☾ - \Gamma$, la longitude moyenne de la Lune étant représentée par ☾, et celle du périgée par Γ.

On déduit alors de là, au moyen de la formule de Lagrange :

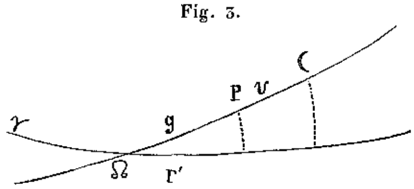
$$(76) \qquad v = ☾ - \Gamma + \left(2e - \frac{e^3}{4}\right) \sin (☾ - \Gamma) + \frac{5}{4} e^2 \sin 2(☾ - \Gamma) + \frac{13}{12} e^3 \sin 3(☾ - \Gamma).$$

40. Il nous faut encore trouver la relation entre v et la longitude vraie λ, afin de pouvoir exprimer celle-ci en fonction de ☾ ou du temps.

(*) Voir la note de l'article 43.

Or, si g désigne la distance du périgée de la Lune au nœud, dans son orbite, ι l'angle de celle-ci avec l'écliptique vraie, angle dont la tangente est i, ☊ la longitude du nœud, on a :

Fig. 3.



$$\operatorname{tg}(\lambda - \text{☊}) = \cos\iota \operatorname{tg}(v + g),$$

d'où l'on tire

$$\begin{aligned}\lambda - \text{☊} &= v + g - \tfrac{1}{4} i^2 \sin 2(v+g) + \cdots \\ &= v + g - \tfrac{1}{4} i^2 \sin 2(\lambda - \text{☊})\end{aligned}$$

ou

$$(77) \quad \ldots\ldots\ldots \quad \lambda = v + \Gamma - \tfrac{1}{4} i^2 \sin 2(\lambda - \text{☊}),$$

aux quantités du quatrième ordre près.

De même, si Γ' désigne la longitude du périgée lunaire :

$$\operatorname{tg}(\Gamma' - \text{☊}) = \cos\iota \operatorname{tg} g,$$

d'où

$$g = \Gamma' - \text{☊} + \frac{i^2}{4} \sin 2(\Gamma' - \text{☊}) + \cdots$$

et

$$(77\,bis) \quad \ldots\ldots\ldots \quad \Gamma = \Gamma' + \frac{i^2}{4} \sin 2(\Gamma' - \text{☊}).$$

Si l'on porte la valeur (76) dans l'expression précédente de λ, il vient

$$\lambda = \text{☾} + \left(2e - \frac{e^3}{4}\right) \sin(\text{☾} - \Gamma) + \cdots - \frac{1}{4} i^2 \sin 2(\lambda - \text{☊});$$

et enfin :

$$(78) \quad \left\{\begin{aligned} \lambda = \text{☾} &+ \left(2e - \frac{e^3}{4}\right) \sin(\text{☾} - \Gamma) + \frac{5}{4} e^2 \sin 2(\text{☾} - \Gamma) + \frac{13}{12} e^3 \sin 3(\text{☾} - \Gamma) \\ &- \frac{i^2}{4} \sin 2(\text{☾} - \text{☊}) + \frac{1}{2} e i^2 \{\sin(\text{☾} + \Gamma - 2\text{☊}) - \sin(3\text{☾} - \Gamma - 2\text{☊})\}. \end{aligned}\right.$$

On tire de là, en retournant la série :

$$(78\,bis) \left\{\begin{aligned} \text{☾} = \lambda &- 2e \sin(\lambda - \Gamma) + \frac{3}{4} e^2 \sin 2(\lambda - \Gamma) + \frac{1}{3} e^3 \sin 3(\lambda - \Gamma) + \frac{i^2}{4} \sin 2(\lambda - \text{☊}) \\ &- \frac{1}{4} e i^2 \{\sin(3\lambda - \Gamma - 2\text{☊}) + \sin(\lambda + \Gamma - 2\text{☊})\}. \end{aligned}\right.$$

41. De l'expression de λ nous allons tirer celle de $\sin(l\lambda + \mathrm{L})$, qui nous sera fort utile.

En nous bornant aux cubes de l'excentricité et de l'inclinaison de l'orbite, nous trouverons :

$$
(79)\left\{\begin{aligned}
\sin(l\lambda + \mathrm{L}) &= (1 - l^2e^2)\sin(l\text{☾} + \mathrm{L}) \\
&\quad + \left[le - \left(\frac{1}{8}l + \frac{1}{2}l^3\right)e^3\right]\left\{\sin\left[(l+1)\text{☾} + \mathrm{L} - \Gamma\right] - \sin\left[(l-1)\text{☾} + \mathrm{L} + \Gamma\right]\right\} \\
&+ \left(\frac{5}{8}l + \frac{1}{2}l^2\right)e^2\sin\left[(l+2)\text{☾} + \mathrm{L} - 2\Gamma\right] - \left(\frac{5}{8}l - \frac{1}{2}l^2\right)e^2\sin\left[(l-2)\text{☾} + \mathrm{L} + 2\Gamma\right] \\
&- \frac{1}{8}li^2\sin\left[(l+2)\text{☾} + \mathrm{L} - 2\Omega\right] + \frac{1}{8}li^2\sin\left[(l-2)\text{☾} + \mathrm{L} + 2\Omega\right] \\
&+ \frac{1}{8}(l^2 + 2l)ei^2\sin\left[(l+1)\text{☾} + \mathrm{L} + \Gamma - 2\Omega\right] + \frac{1}{8}(l^2 - 2l)ei^2\sin\left[(l-1)\text{☾} + \mathrm{L} - \Gamma + 2\Omega\right] \\
&- \frac{1}{8}(l^2 + 2l)ei^2\sin\left[(l+3)\text{☾} + \mathrm{L} - \Gamma - 2\Omega\right] - \frac{1}{8}(l^2 - 2l)ei^2\sin\left[(l-3)\text{☾} + \mathrm{L} + \Gamma + 2\Omega\right] \\
&+ \left(\frac{13}{24}l + \frac{5}{8}l^2 + \frac{1}{6}l^3\right)e^3\sin\left[(l+3)\text{☾} + \mathrm{L} - 3\Gamma\right] - \left(\frac{13}{24}l - \frac{5}{8}l^2 + \frac{1}{6}l^3\right)e^3\sin\left[(l-3)\text{☾} + \mathrm{L} + 3\Gamma\right].
\end{aligned}\right.
$$

On obtiendrait un résultat absolument analogue pour le développement de $\cos(l\lambda + \mathrm{L})$; il suffirait de remplacer partout les sin. par des cos. dans la formule précédente.

42. Nous aurons besoin également de l'expression de

$$\left(\frac{a}{\mathrm{D}}\right)^3 = \left(\frac{1 + e\cos v}{1 - e^2}\right)^3 = 1 + \frac{9}{2}e^2 + 3e\left(1 + \frac{13}{4}e^2\right)\cos v + \frac{3}{2}e^2\cos 2v + \frac{e^3}{4}\cos 3v,$$

ce qui donne, à l'aide de la formule (77) :

$$
(80)\ \ldots\ \left\{\begin{aligned}
\left(\frac{a}{\mathrm{D}}\right)^3 &= 1 + \frac{9}{2}e^2 + 3e\left(1 + \frac{13}{4}e^2\right)\cos(\lambda - \Gamma) \\
&\quad + \frac{3}{2}e^2\cos 2(\lambda - \Gamma) + \frac{1}{4}e^3\cos 3(\lambda - \Gamma) \\
&\quad + \frac{3}{8}ei^2\left[\cos(3\lambda - \Gamma - 2\Omega) - \cos(\lambda + \Gamma - 2\Omega)\right].
\end{aligned}\right.
$$

43. Nous sommes en possession maintenant de toutes les formules nécessaires pour exprimer p en fonction du temps, et, par suite, pour intégrer les formules du mouvement de l'axe du monde.

Comme on l'a vu, nous avons conservé les termes dépendants du cube de l'excentricité; à la rigueur même, devrait-on tenir compte de la quatrième puissance de cette quantité, si elle multipliait des termes dépendants du périgée solaire exclusivement; mais ces termes se détruisent complètement (*). Dans les autres, on peut naturellement en faire abstraction.

De même ferons-nous abstraction des termes qui dépendent des multiples, supérieurs à 4, des longitudes des astres, comme étant tout à fait insensibles, vis-à-vis du moins des termes nouveaux que notre théorie introduira dans les formules de la nutation annuelle.

Il sera aisé au lecteur de restituer, non seulement tous les termes que nous omettrons, mais également, comme nous l'avons dit, ceux qui dépendent de l'évection, de la variation et des autres inégalités de la Lune. Il lui suffirait, pour celles-ci, de recourir aux formules complètes qui expriment la longitude de cet astre, son rayon vecteur et l'inclinaison de son orbite, en fonction du temps.

(*) L'importance de ce point affirmé par Laplace (*Méc. cél.*, livre V, art. 5) et par Serret (*Ann. Observ. de Paris*, t. V, p. 309) nous a engagé à le vérifier en détail. Or nous nous sommes assuré que les termes en $e^4 \sin(2\Gamma \pm \varphi)$ se détruisent en effet entièrement. Il en est de même des termes en $e^2 i^2 \sin(2\Gamma' \pm \varphi)$.

CHAPITRE III.

Formules différentielles de la précession et de la nutation annuelles.

44. Nous avons trouvé, article 2, en laissant de côté les accents qui indiquent qu'on a affaire à la Lune,

$$p = h\frac{xz}{D^2}\left(\frac{a}{D}\right)^3.$$

Commençons par calculer $\frac{xz}{D^2}$. Les formules (71) et (72) donnent

$$\frac{2x}{D} = \cos\beta\left[(1+c_1)\cos(\lambda-\psi-\varphi)+(1-c_1)\cos(\lambda-\psi+\varphi)\right] - 2\,s_1\sin\beta\sin\varphi.$$
$$\frac{z}{D} = s_1\cos\beta\sin(\lambda-\psi)+c_1\sin\beta;$$

ou, par la formule (75), en laissant de côté les termes en ε, qui sont relatifs aux variations séculaires :

$$(81)\quad\left\{\begin{aligned}
\frac{2x}{D} &= \left(1-\frac{i^2}{4}\right)\left[(1+c_1)\cos(\lambda-\varphi)+(1-c_1)\cos(\lambda+\varphi)\right]+is_1\left(1-\frac{3}{8}i^2\right)\left[\cos(\lambda-\Omega+\varphi)-\cos(\lambda-\Omega-\varphi)\right]\\
&+\frac{i^2}{8}\left\{(1+c_1)\left[\cos(3\lambda-2\Omega-\varphi)+\cos(\lambda-2\Omega+\varphi)\right]+(1-c_1)\left[\cos(3\lambda-2\Omega+\varphi)+\cos(\lambda-2\Omega-\varphi)\right]\right\}\\
&+\frac{i^3}{8}s_1\left[\cos(3\lambda-3\Omega+\varphi)-\cos(3\lambda-3\Omega-\varphi)\right].\\
\frac{z}{D} &= s_1\left(1-\frac{i^2}{4}\right)\sin\lambda+i\left(1-\frac{3}{8}i^2\right)c_1\sin(\lambda-\Omega)+\frac{i^2}{8}s_1\left[\sin(3\lambda-2\Omega)-\sin(\lambda-2\Omega)\right]+\frac{i^3}{8}c_1\sin 3(\lambda-\Omega).
\end{aligned}\right.$$

45. Le produit de ces deux expressions donnera :

$$(82)\quad\left\{\begin{aligned}
\frac{4xz}{D^2} &= s_2\left(1-\frac{3}{2}i^2\right)\sin\varphi+s_1\left(1-\frac{1}{2}i^2\right)\left[(1+c_1)\sin(2\lambda-\varphi)+(1-c_1)\sin(2\lambda+\varphi)\right]\\
&+i\left(1-\frac{3}{4}i^2\right)\left\{(c_1+c_2)\left[\sin(2\lambda-\Omega-\varphi)-\sin(\Omega-\varphi)\right]+(c_1-c_2)\left[\sin(2\lambda-\Omega+\varphi)-\sin(\Omega+\varphi)\right]\right\}\\
&-\frac{3}{4}s_2i^2\left[\sin(2\lambda-2\Omega-\varphi)-\sin(2\lambda-2\Omega+\varphi)\right]+s_1\frac{i^2}{4}\left[(1+c_1)\sin(2\Omega-\varphi)+(1-c_1)\sin(2\Omega+\varphi)\right]\\
&+\frac{1}{4}s_1i^2\left[(1+c_1)\sin(4\lambda-2\Omega-\varphi)+(1-c_1)\sin(4\lambda-2\Omega+\varphi)\right]\\
&+\frac{1}{4}i^3\left[(c_1+c_2)\sin(2\lambda-3\Omega+\varphi)+(c_1-c_2)\sin(2\lambda-3\Omega-\varphi)\right]\\
&+\frac{1}{4}i^3\left[(c_1+c_2)\sin(4\lambda-3\Omega-\varphi)+(c_1-c_2)\sin(4\lambda-3\Omega+\varphi)\right].
\end{aligned}\right.$$

46. Multipliant enfin cette expression par celle $\left(\frac{a}{\mathrm{D}}\right)^3$, donnée ci-dessus, on trouve, en écrivant en premier lieu les termes indépendants de la longitude de l'astre, à l'exception de ceux qui sont affectés des facteurs i^2e^2 ou e^4, puisqu'ils se détruiront dans la formule (84) (*) :

$$
\begin{aligned}
\frac{4p}{h} = \frac{4xz}{\mathrm{D}^2}\left(\frac{a}{\mathrm{D}}\right)^3 = {} & s_2\left(1+\frac{9}{2}e^2+\frac{21}{2}e^4-\frac{3}{2}i^2-\frac{27}{4}e^2i^2\right)\sin\varphi \\
& -i\left(1+\frac{9}{2}e^2+\frac{21}{2}e^4-\frac{5}{4}i^2-\frac{51}{16}e^2i^2\right)\left\{\begin{matrix}(c_1+c_2)\sin(\Omega-\varphi)\\+(c_1-c_2)\sin(\Omega+\varphi)\end{matrix}\right\} \\
& +\frac{1}{4}s_1i^2\left(1+\frac{15}{4}e^2-\frac{1}{4}i^2\right)\left\{\begin{matrix}(1+c_1)\sin(2\Omega-\varphi)\\+(1-c_1)\sin(2\Omega+\varphi)\end{matrix}\right\} \\
& +\frac{3}{4}e^2i\left(1+5e^2-\frac{1}{2}i^2\right)\left\{\begin{matrix}(c_1+c_2)\sin(2\Gamma-\Omega-\varphi)\\+(c_1-c_2)\sin(2\Gamma-\Omega+\varphi)\end{matrix}\right\} \\
& +\frac{5}{4}s_1e^2\left(1+3e^2-\frac{1}{2}i^2\right)\left\{\begin{matrix}(1+c_1)\sin(2\Gamma-\varphi)\\+(1-c_1)\sin(2\Gamma+\varphi)\end{matrix}\right\}+\frac{3}{16}s_1e^2i^2\left\{\begin{matrix}(1+c_1)\sin(4\Gamma-2\Omega-\varphi)\\+(1-c_1)\sin(4\Gamma-2\Omega+\varphi)\end{matrix}\right\} \\
& +\frac{5}{8}s_2e^2i^2\left\{\begin{matrix}\sin(2\Gamma-2\Omega+\varphi)\\-\sin(2\Gamma-2\Omega-\varphi)\end{matrix}\right\}+\frac{5}{16}e^2i^3\left\{\begin{matrix}(c_1+c_2)\sin(4\Gamma-3\Omega-\varphi)\\+(c_1-c_2)\sin(4\Gamma-3\Omega+\varphi)\end{matrix}\right\} \\
& +s_1\left(1+\frac{9}{2}e^2-\frac{1}{2}i^2\right)\left\{\begin{matrix}(1+c_1)\sin(2\lambda-\varphi)\\+(1-c_1)\sin(2\lambda+\varphi)\end{matrix}\right\}+\frac{5}{2}es_2\left(1+\frac{13}{4}e^2-\frac{5}{2}i^2\right)\left\{\begin{matrix}\sin(\lambda-\Gamma+\varphi)\\-\sin(\lambda-\Gamma-\varphi)\end{matrix}\right\} \\
& +\frac{3}{2}es_1\left(1+\frac{13}{4}e^2-\frac{1}{2}i^2\right)\left\{\begin{matrix}(1+c_1)\sin(\lambda+\Gamma-\varphi)\\+(1-c_1)\sin(\lambda+\Gamma+\varphi)\end{matrix}\right\} \\
& -\frac{1}{8}e^3s_1\left\{\begin{matrix}(1+c_1)\sin(\lambda-3\Gamma+\varphi)\\+(1-c_1)\sin(\lambda-3\Gamma-\varphi)\end{matrix}\right\}+\frac{5}{4}s_2e^2\left\{\begin{matrix}\sin(2\lambda-2\Gamma+\varphi)\\-\sin(2\lambda-2\Gamma-\varphi)\end{matrix}\right\} \\
& +\frac{1}{8}s_2e^3\left\{\begin{matrix}\sin(3\lambda-3\Gamma+\varphi)\\-\sin(3\lambda-3\Gamma-\varphi)\end{matrix}\right\}+\frac{5}{2}es_1\left(1+\frac{13}{4}e^2-\frac{1}{2}i^2\right)\left\{\begin{matrix}(1+c_1)\sin(3\lambda-\Gamma-\varphi)\\+(1-c_1)\sin(3\lambda-\Gamma+\varphi)\end{matrix}\right\} \\
& +\frac{3}{4}e^2s_1\left\{\begin{matrix}(1+c_1)\sin(4\lambda-2\Gamma-\varphi)\\+(1-c_1)\sin(4\lambda-2\Gamma+\varphi)\end{matrix}\right\}+i\left(1+\frac{9}{2}e^2-\frac{3}{4}i^2\right)\left\{\begin{matrix}(c_1+c_2)\sin(2\lambda-\Omega-\varphi)\\+(c_1-c_2)\sin(2\lambda-\Omega+\varphi)\end{matrix}\right\} \\
& -\frac{3}{4}s_2i^2\left\{\begin{matrix}\sin(2\lambda-2\Omega-\varphi)\\-\sin(2\lambda-2\Omega+\varphi)\end{matrix}\right\} \\
& +\frac{1}{4}s_1i^2\left\{\begin{matrix}(1+c_1)\sin(4\lambda-2\Omega-\varphi)\\+(1-c_1)\sin(4\lambda-2\Omega+\varphi)\end{matrix}\right\}+\frac{1}{4}i^3\left\{\begin{matrix}(c_1+c_2)[\sin(2\lambda-3\Omega+\varphi)+\sin(4\lambda-3\Omega-\varphi)]\\+(c_1-c_2)[\sin(2\lambda-3\Omega-\varphi)+\sin(4\lambda-3\Omega+\varphi)]\end{matrix}\right\} \\
& +\frac{3}{4}s_2ei^2\left\{\begin{matrix}\sin(\lambda+\Gamma-2\Omega+\varphi)\\-\sin(\lambda+\Gamma-2\Omega-\varphi)\end{matrix}\right\}-\frac{9}{16}s_1ei^2\left\{\begin{matrix}(1+c_1)\sin(\lambda-\Gamma-2\Omega+\varphi)\\+(1-c_1)\sin(\lambda-\Gamma-2\Omega-\varphi)\end{matrix}\right\} \\
& +\frac{3}{2}ei\left\{\begin{matrix}(c_1+c_2)[\sin(\lambda+\Gamma-\Omega-\varphi)-\sin(\lambda-\Gamma+\Omega-\varphi)+\sin(\lambda-\Gamma-\Omega+\varphi)]\\+(c_1-c_2)[\sin(\lambda+\Gamma-\Omega+\varphi)-\sin(\lambda-\Gamma+\Omega+\varphi)+\sin(\lambda-\Gamma-\Omega-\varphi)]\end{matrix}\right\}
\end{aligned}
\tag{83}
$$

(*) Voir la note précédente.

$$
\left|\begin{aligned}
&+\frac{3}{16}ei^2s_1\left\{\begin{array}{c}(1+c_1)\sin(\lambda+3\Gamma-2\Omega-\varphi)\\+(1-c_1)\sin(\lambda+3\Gamma-2\Omega+\varphi)\end{array}\right\}+\frac{3}{16}s_2ei^2\left\{\begin{array}{c}\sin(\lambda-3\Gamma+2\Omega+\varphi)\\-\sin(\lambda-3\Gamma+2\Omega-\varphi)\end{array}\right\}\\
&+\frac{3}{2}ei\left\{\begin{array}{c}(c_1+c_2)\sin(3\lambda-\Gamma-\Omega-\varphi)\\+(c_1-c_2)\sin(3\lambda-\Gamma-\Omega+\varphi)\end{array}\right\}\\
&-\frac{21}{16}s_2i^2e\left\{\begin{array}{c}\sin(3\lambda-\Gamma-2\Omega-\varphi)\\-\sin(3\lambda-\Gamma-2\Omega+\varphi)\end{array}\right\}+\frac{3}{16}s_1ei^2\left\{\begin{array}{c}(1+c_1)\sin(3\lambda-3\Gamma+2\Omega-\varphi)\\+(1-c_1)\sin(3\lambda-3\Gamma+2\Omega+\varphi)\end{array}\right\}\\
&+\frac{3}{4}e^2i\left\{\begin{array}{l}(c_1+c_2)\left[\begin{array}{c}\sin(2\lambda-2\Gamma-\Omega+\varphi)-\sin(2\lambda-2\Gamma+\Omega-\varphi)\\+\sin(4\lambda-2\Gamma-\Omega-\varphi)\end{array}\right]\\+(c_1-c_2)\left[\begin{array}{c}\sin(2\lambda-2\Gamma-\Omega-\varphi)-\sin(2\lambda-2\Gamma+\Omega+\varphi)\\+\sin(4\lambda-2\Gamma-\Omega+\varphi)\end{array}\right]\end{array}\right\}
\end{aligned}\right.
$$

47. Il reste enfin à remplacer la longitude vraie λ en fonction de la longitude moyenne $\mathbb{C}$ à l'aide de la formule (79); toutes réductions faites, on trouvera, en négligeant les termes qui dépendent de la longitude, lorsqu'ils ont i^2e, i^3, etc., comme facteur :

$$
(84)\left\{\begin{aligned}
\frac{4p}{h}&=s_2\left(1+\frac{3}{2}e^2+\frac{15}{8}e^4-\frac{3}{2}i^2-\frac{9}{4}e^2i^2+\frac{3}{2}i^4\right)\sin\varphi\\
&-i\left(1+\frac{3}{2}e^2-i^2\right)\left\{\begin{array}{c}(c_1+c_2)\sin(\Omega-\varphi)\\+(c_1-c_2)\sin(\Omega+\varphi)\end{array}\right\}\\
&+\frac{1}{2}i^2s_1\left(1-\frac{i^2+e^2}{2}\right)\left\{\begin{array}{c}(1+c_1)\sin(2\Omega-\varphi)\\+(1-c_1)\sin(2\Omega+\varphi)\end{array}\right\}\\
&+s_1\left(1-\frac{1}{2}i^2-\frac{5}{2}e^2\right)\left\{\begin{array}{c}(1+c_1)\sin(2\mathbb{C}-\varphi)\\+(1-c_1)\sin(2\mathbb{C}+\varphi)\end{array}\right\}\\
&+\frac{3}{2}s_2e\left(1+\frac{9}{8}e^2-\frac{3}{2}i^2\right)\left\{\begin{array}{c}\sin(\mathbb{C}-\Gamma+\varphi)\\-\sin(\mathbb{C}-\Gamma-\varphi)\end{array}\right\}\\
&-\frac{1}{2}s_1e\left(1-\frac{1}{8}e^2-\frac{1}{2}i^2\right)\left\{\begin{array}{c}(1+c_1)\sin(\mathbb{C}+\Gamma-\varphi)\\+(1-c_1)\sin(\mathbb{C}+\Gamma+\varphi)\end{array}\right\}+\frac{7}{2}s_1e\left(1-\frac{1}{2}i^2-\frac{123}{112}e^2\right)\left\{\begin{array}{c}(1+c_1)\sin(3\mathbb{C}-\Gamma-\varphi)\\+(1-c_1)\sin(3\mathbb{C}-\Gamma+\varphi)\end{array}\right\}\\
&+i\left(1-\frac{5}{2}e^2-\frac{5}{4}i^2\right)\left\{\begin{array}{c}(c_1+c_2)\sin(2\mathbb{C}-\Omega-\varphi)\\+(c_1-c_2)\sin(2\mathbb{C}-\Omega+\varphi)\end{array}\right\}-\frac{3}{4}s_2i^2\left(1-\frac{5}{2}e^2-i^2\right)\left\{\begin{array}{c}\sin(2\mathbb{C}-2\Omega-\varphi)\\-\sin(2\mathbb{C}-2\Omega+\varphi)\end{array}\right\}\\
&+\frac{1}{2}ei\left\{\begin{array}{l}(c_1+c_2)\left[-\sin(\mathbb{C}+\Gamma-\Omega-\varphi)-3\sin(\mathbb{C}-\Gamma+\Omega-\varphi)+3\sin(\mathbb{C}-\Gamma-\Omega+\varphi)+7\sin(3\mathbb{C}-\Gamma-\Omega-\varphi)\right]\\+(c_1-c_2)\left[-\sin(\mathbb{C}+\Gamma-\Omega+\varphi)-3\sin(\mathbb{C}-\Gamma+\Omega+\varphi)+3\sin(\mathbb{C}-\Gamma-\Omega-\varphi)+7\sin(3\mathbb{C}-\Gamma-\Omega+\varphi)\right]\end{array}\right\}\\
&+\frac{9}{4}s_2e^2\left[\sin(2\mathbb{C}-2\Gamma+\varphi)-\sin(2\mathbb{C}-2\Gamma-\varphi)\right]\\
&+4s_1i^2\left\{\begin{array}{c}(1+c_1)\left[\sin(4\mathbb{C}-3\Gamma-\varphi)\right]\\+(1-c_1)\left[\sin(4\mathbb{C}-3\Gamma+\varphi)\right]\end{array}\right\}.
\end{aligned}\right.
$$

Afin d'abréger l'écriture nous ferons :

$$(85)\quad \begin{cases} 1+\frac{3}{2}e^2+\frac{15}{8}e^4=1+\varkappa; \quad 1+\frac{3}{2}e'^2+\frac{15}{8}e'^4-\frac{3}{2}i^2-\frac{9}{4}e'^2i^2+\frac{3}{2}i^4=1-\varkappa'; \\ 1+\frac{3}{2}e'^2-i^2=1-\varkappa'', \end{cases}$$

et nous négligerons, vis-à-vis de l'unité, les quantités e^2, e'^2, i^2 dans tous les termes qui renferment la longitude des astres.

48. On a vu (art. 30-32) comment l'expression de q se déduit de celle de p, et comment de l'une et de l'autre se déduisent celles de $\frac{d\theta}{dt}$ et $\sin\theta\frac{d\psi}{dt}$. Mais, puisque les formules données dans les articles 33 et 34 nous permettent de passer directement à l'intégration, nous pourrons procéder à celle-ci, en ne faisant usage que de l'expression (84).

CHAPITRE IV.

Intégrations des équations du mouvement annuel de l'axe du monde.

49 Avant d'appliquer le procédé et les formules (62), (68), (69), exposés dans les articles 32-34, nous remarquerons, tout d'abord, que les deux termes de l'intégrale $\Delta\theta$, qui proviennent respectivement des termes en $\sin(vt + \varphi)$ et $\sin(vt - \varphi)$, sont de signes contraires, et à très peu de chose près égaux, si ces deux sinus ont le même coefficient.

Dans ce cas, nous pourrons donc négliger ces termes, puisque, du reste, le facteur qui multiplie $\sin(vt \pm \varphi)$ est lui-même déjà très faible dans chacun d'eux.

Il n'en est pas de même pour l'intégrale $\sin\theta_0\Delta\psi$.

Alors, si ω_1 et γ'_1 désignent les vitesses du nœud et du périgée lunaires, l'année julienne étant prise pour unité, γ_1 celle du périgée solaire, ω_2, γ'_2, γ_2 leurs rapports au mouvement diurne, et si l'on rétablit les accents dans toutes les quantités relatives à la Lune, on obtiendra les formules suivantes, dans lesquelles nous avons omis les termes dont le coefficient est inférieur à $0''.0001$:

$$(86)\quad \left\{\begin{aligned}
\Delta\theta = {} & \frac{3}{4}\frac{m_1^2}{n} f \left\{\begin{aligned}
& -\frac{i(1-\varkappa'')}{\omega_1}\left[(c_1+c_2)\frac{\mu(1-\omega_2)-\varpi}{(1-\omega_2)^2-\varpi}+(c_1-c_2)\frac{\mu(1+\omega_2)-\varpi}{(1+\omega_2)^2-\varpi}\right]\cos\Omega \\
& +\frac{1}{4}\frac{i^2\left(1-\dfrac{i^2+e'^2}{2}\right)s_1}{\omega_1}\left[(1+c_1)\frac{\mu(1-2\omega_2)-\varpi}{(1-2\omega_2)^2-\varpi}+(1-c_1)\frac{\mu(1+2\omega_2)-\varpi}{(1+2\omega_2)^2-\varpi}\right]\cos 2\Omega
\end{aligned}\right\} \\
& + \frac{3}{4}\frac{m_1^2}{n}\mu \left\{\begin{aligned}
& \frac{1}{2}\frac{s_1}{m_1}\left[\frac{1+c_1}{1-2m_2+\mu}+\frac{1-c_1}{1+2m_2+\mu}\right]\cos 2\odot \\
& -\frac{1}{2}\frac{es_1}{m_1+\gamma_1}\left[\frac{1+c_1}{1-m_2-\gamma_2+\mu}+\frac{1-c_1}{1+m_2+\gamma_2+\mu}\right]\cos(\odot+\Gamma) \\
& +\frac{7}{2}\frac{es_1}{3m_1-\gamma_1}\left[\frac{1+c_1}{1-3m_2+\gamma_2+\mu}+\frac{1-c_1}{1+3m_2-\gamma_2+\mu}\right]\cos(3\odot-\Gamma)
\end{aligned}\right\}
\end{aligned}\right.$$

$$
(86)\quad \left\{
\begin{aligned}
&+\frac{3}{4}\frac{m_1^2}{n}\mu f\left\{
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{s_1}{m_1'}\left[\frac{1+c_1}{1-2m_2'+\mu}+\frac{1-c_1}{1+2m_2'+\mu}\right]\cos 2\text{☾}\\
&-\frac{1}{2}\frac{e's_1}{m_1'+\gamma_1'}\left[\frac{1+c_1}{1-m_2'-\gamma_2'+\mu}+\frac{1-c_1}{1+m_2'+\gamma_2'+\mu}\right]\cos(\text{☾}+\Gamma')\\
&+\frac{7}{2}\frac{e's_1}{3m_1'-\gamma_1'}\left[\frac{1+c_1}{1-3m_2'+\gamma_2'+\mu}+\frac{1-c_1}{1+3m_2'-\gamma_2'+\mu}\right]\cos(3\text{☾}-\Gamma')\\
&+\frac{i}{2m_1'-\omega_1}\left[\frac{c_1+c_2}{1-2m_2'+\omega_2+\mu}+\frac{c_1-c_2}{1+2m_2'-\omega_2+\mu}\right]\cos(2\text{☾}-\text{☊})
\end{aligned}\right.\\
&+\frac{1}{2}e'i\left[\begin{aligned}
&-\left[\frac{c_1+c_2}{1-m_2'-\gamma_2'+\omega_2+\mu}+\frac{c_1-c_2}{1+m_2'+\gamma_2'-\omega_2+\mu}\right]\frac{\cos(\text{☾}+\Gamma'-\text{☊})}{m_1'+\gamma_1'-\omega_1}\\
&-5\left[\frac{c_1+c_2}{1-m_2'+\gamma_2'-\omega_2+\mu}+\frac{c_1-c_2}{1+m_2'-\gamma_2'+\omega_2+\mu}\right]\frac{\cos(\text{☾}-\Gamma'+\text{☊})}{m_1'-\gamma_1'+\omega_1}\\
&+5\left[\frac{c_1+c_2}{1+m_2'-\gamma_2'-\omega_2+\mu}+\frac{c_1-c_2}{1-m_2'+\gamma_2'+\omega_2+\mu}\right]\frac{\cos(\text{☾}-\Gamma'-\text{☊})}{m_1'-\gamma_1'-\omega_1}\\
&+7\left[\frac{c_1+c_2}{1-3m_2'+\gamma_2'+\omega_2+\mu}+\frac{c_1-c_2}{1+3m_2'-\gamma_2'-\omega_2+\mu}\right]\frac{\cos(3\text{☾}-\Gamma'-\text{☊})}{3m_1'-\gamma_1'-\omega_1}
\end{aligned}\right]\\
&+4e'^2s_1\left[\frac{1+c_1}{1-4m_1'+2\gamma_2'+\mu}+\frac{1-c_1}{1+4m_2'-2\gamma_2'+\mu}\right]\frac{\cos(4\text{☾}-2\Gamma')}{4m_1'-2\gamma_1'}
\end{aligned}\right.
$$

et

$$
(87)\quad \left\{
\begin{aligned}
&-\sin\theta_0\Delta\psi=\frac{3}{4}\frac{m_1^2}{n}s_2\left[(1+\varkappa)+f(1-\varkappa')\right]\frac{\mu-\varpi}{1-\varpi}\,t\\
&+\frac{5}{4}m_1^2 f\left\{
\begin{aligned}
&-\frac{i}{\omega_1}(1-\varkappa'')\left[(c_1+c_2)\frac{\mu(1-\omega_2)-\varpi}{(1-\omega_2)^2-\varpi}-(c_1-c_2)\frac{\mu(1+\omega_2)+\varpi}{(1+\omega_2)^2-\varpi}\right]\sin\text{☊}\\
&+\frac{1}{4}\frac{i^2s_1}{\omega_1}\left(1-\frac{i^2+e'^2}{2}\right)\left[(1+c_1)\frac{\mu(1-2\omega_2)-\varpi}{(1-2\omega_2)^2-\varpi}-(1-c_1)\frac{\mu(1+2\omega_2)-\varpi}{(1+2\omega_2)^2-\varpi}\right]\sin 2\text{☊}
\end{aligned}\right\}\\
&+\frac{3}{4}\frac{m_1^2}{n}\mu\left\{
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{s_1}{m_1}\left[\frac{1+c_1}{1-2m_2+\mu}+\frac{1-c_1}{1+2m_2+\mu}\right]\sin 2\odot\\
&-\frac{3}{2}\frac{es_2}{m_1-\gamma_1}\left[\frac{1}{1+m_2-\gamma_2+\mu}+\frac{1}{1-m_2+\gamma_2+\mu}\right]\sin(\odot-\Gamma)\\
&-\frac{1}{2}\frac{es_1}{m_1+\gamma_1}\left[\frac{1+c_1}{1-m_2-\gamma_2+\mu}-\frac{1-c_1}{1+m_2+\gamma_2+\mu}\right]\sin(\odot+\Gamma)\\
&+\frac{7}{2}\frac{es_1}{3m_1-\gamma_1}\left[\frac{1+c_1}{1-3m_2+\gamma_2+\mu}-\frac{1-c_1}{1+3m_2-\gamma_2+\mu}\right]\sin(3\odot-\Gamma)\\
&-\frac{9}{8}\frac{e^2s_2}{m_1-\gamma_1}\left[\frac{1}{1+2m_2-2\gamma_2+\mu}+\frac{1}{1-2m_2+2\gamma_2+\mu}\right]\sin 2(\odot-\Gamma)
\end{aligned}\right.
\end{aligned}\right.
$$

$$
(87)\quad
\left\{
\begin{aligned}
&+\frac{3}{4}\frac{m_1'^2}{n}\mu f\left\{
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{s_1}{m_1'}\left[\frac{1+c_1}{1-2m_2'+\mu}-\frac{1-c_1}{1+2m_2'+\mu}\right]\sin 2\text{☾}\\
&-\frac{3}{2}\frac{e's_2}{m_1'-\gamma_1'}\left[\frac{1}{1+m_2'-\gamma_2'+\mu}+\frac{1}{1-m_2'+\gamma_2'+\mu}\right]\sin(\text{☾}-\Gamma')\\
&-\frac{1}{2}\frac{e's_1}{m_1'+\gamma_1'}\left[\frac{1+c_1}{1-m_2'-\gamma_2'+\mu}-\frac{1-c_1}{1+m_2'+\gamma_2'+\mu}\right]\sin(\text{☾}+\Gamma')\\
&+\frac{7}{2}\frac{e's_1}{3m_1'-\gamma_1'}\left[\frac{1+c_1}{1-3m_2'+\gamma_2'+\mu}-\frac{1-c_1}{1+3m_2'-\gamma_2'+\mu}\right]\sin(3\text{☾}-\Gamma')\\
&-\frac{9}{8}\frac{e'^2s_2}{m_1'-\gamma_1'}\left[\frac{1}{1+2m_2'-2\gamma_2'+\mu}+\frac{1}{1-2m_2'+2\gamma_2'+\mu}\right]\sin 2(\text{☾}-\Gamma')
\end{aligned}
\right.\\
&+\frac{3}{4}\frac{m_1'^2}{n}\mu f\frac{i}{2m_1'-\omega_1}\left(1-\frac{3}{2}e'^2-\frac{3}{4}i^2\right)\left[\frac{c_1+c_2}{1-2m_2'+\omega_2+\mu}-\frac{c_1-c_2}{1+2m_2'-\omega_2+\mu}\right]\sin(2\text{☾}-\Omega)\\
&+\frac{3}{4}\frac{m_1^2}{n}\mu f i^2\left\{-\frac{3}{8}\frac{s_2}{m_1'-\omega_1}\left[\frac{1}{1-2m_2'+2\omega_2+\mu}+\frac{1}{1+2m_2'-2\omega_2+\mu}\right]\sin 2(\text{☾}-\Omega)\right\}\\
&+\frac{3}{4}\frac{m_1^2}{n}\mu f e' i\left\{
\begin{aligned}
&-\frac{1}{2}\frac{1}{m_1'+\gamma_1'-\omega_1}\left[\frac{c_1+c_2}{1-m_2'-\gamma_2'+\omega_2+\mu}-\frac{c_1-c_2}{1+m_2'+\gamma_2'-\omega_2+\mu}\right]\sin(\text{☾}+\Gamma'-\Omega)\\
&-\frac{3}{2}\frac{1}{m_1'-\gamma_1'+\omega_1}\left[\frac{c_1+c_2}{1-m_2'+\gamma_2'-\omega_2+\mu}-\frac{c_1-c_2}{1+m_2'-\gamma_2'+\omega_2+\mu}\right]\sin(\text{☾}-\Gamma'+\Omega)\\
&+\frac{3}{2}\frac{1}{m_1'-\gamma_1'-\omega_1}\left[\frac{c_1+c_2}{1-m_2'+\gamma_2'+\omega_2+\mu}-\frac{c_1-c_2}{1+m_2'-\gamma_2'-\omega_2+\mu}\right]\sin(\text{☾}-\Gamma'-\Omega)\\
&+\frac{7}{2}\frac{1}{3m_1'-\gamma_1'-\omega_1}\left[\frac{c_1+c_2}{1-3m_2'+\gamma_2'+\omega_2+\mu}-\frac{c_1-c_2}{1+3m_2'-\gamma_2'-\omega_2+\mu}\right]\sin(3\text{☾}-\Gamma'-\Omega)
\end{aligned}
\right.\\
&+3\frac{m_1^2}{n}\mu f\frac{e'^2s_1}{4m_1'-3\gamma_1'}\left[\frac{1+c_1}{1-4m_2'+2\gamma_2'+\mu}+\frac{1-c_1}{1+4m_2'-2\gamma_2'+\mu}\right]\sin(4\text{☾}-2\Gamma')
\end{aligned}
\right.
$$

50. Les deux formules précédentes se distinguent de celles des Géomètres (Laplace, Bessel, Poisson, suivi par Peters, Serret) en quelques points qui ne sont pas sans importance.

Occupons-nous d'abord de la comparaison des coefficients fondamentaux. Celui des Géomètres, $\frac{2C-A-B}{C}$, qui est symétrique en A et B, est commun à tous les termes de la précession et de la nutation.

Nos coefficients, à l'exception d'un seul, ne sont pas symétriques; ils ne sont pas non plus communs à tous les termes, à moins que l'on n'y néglige de petites quantités, dont il est indispensable de tenir compte en présence de la précision toujours croissante des observations astronomiques.

Le plus simple d'entre eux, seul, a la même forme que le précédent; c'est celui de la précession :

$$\frac{\mu - \varpi}{1 - \varpi} = \frac{1}{2}\,\frac{2C - A - B}{C}.$$

Celui de la nutation, au contraire, renfermant, avec des coefficients différents, les deux fractions

$$\frac{\mu(1 \pm \omega_2) - \varpi}{(1 \pm \omega_2)^2 - \varpi},$$

ne présente pas cette symétrie en A et B.

De là résulte une conséquence très importante.

La comparaison des valeurs numériques des coefficients de la précession et de la nutation, avec les expressions que leur donnent nos formules, permettrait, en effet, si ces valeurs numériques étaient connues avec une très grande précision, de déterminer les deux inconnues μ et ϖ, et, par suite, $\frac{A}{C}$ et $\frac{B}{C}$.

A la rigueur, une troisième valeur numérique serait nécessaire pour déterminer celle du coefficient f de l'action lunaire; mais le calcul que nous en avons fait, à l'aide de la comparaison précédente, et en nous servant successivement des valeurs de Bessel et de Struve pour la constante de la précession, nous a conduit à des quantités si peu différentes (2.1805_B, 2.1791_S) que la légère incertitude de ces déterminations ne pourra guère exercer d'influence sur celle de μ.

Or, il découlera à l'évidence, pensons-nous, des résultats auxquels nous serons conduit dans l'une et l'autre hypothèse, en partant de la constante de Peters, que, si la valeur de Bessel n'offre pas une précision tout à fait suffisante pour déterminer le produit $\varpi = \frac{ab}{AB} = \frac{(C-A)(C-B)}{AB}$, celle de Struve, par contre, fait trouver pour ce produit une valeur trop considérable.

Si donc la constante adoptée pour la nutation annuelle était exacte, comme les astronomes semblent l'admettre, nous serions obligé de conclure de notre comparaison, que la constante de la précession de Bessel est préférable à celle de Struve.

C'est de cette première que nous ferons usage dans le calcul de nos coefficients (*).

51. Démontrons d'abord le point capital que nous venons d'affirmer.

Les valeurs numériques que nous avons adoptées sont les suivantes, rapportées à 1800.0 :

$\theta_0 = 23^\circ 27' 54''.22$		
$\lg s_1 = 9.6000901.$	$\lg c_1 = 9.96251284.$	$\lg c_2 = 9.83435063.$
$e = 0.0167712.$	$e' = 0.054857.$	
$\lg e = 8.2245642.$	$\lg e' = 8.7394271.$	$\lg i = 8.954385114.$
$1 + \varkappa = 1.00042206.$	$1 - \varkappa' = 0.9923410.$	$1 - \varkappa'' = 0.9964327.$
log : 0.000183256.	9.996660935.	9.998447971.
$\lg n = 3.5619576.$	$\lg m_1 = 0.7981723.$	$\lg m'_1 = 1.9242642.$
$\lg - \omega_1 = 9.528366607$	$\lg \gamma_1 = 5.7473.$	$\lg \gamma'_1 = 9.8513704.$

52. Désignons par P, N, ω_1, ω_2 les valeurs *absolues* des constantes de la précession et de la nutation, de la vitesse du nœud et de son rapport au mouvement diurne.

Les formules (86) et (87) donnent alors :

$$
(88)\quad \left\{
\begin{aligned}
\mathrm{P} &= \frac{3}{2}\frac{m_1^2}{n}\left\{1 + \varkappa + f(1 - \varkappa')\right\} c_1 \frac{\mu - \varpi}{1 - \varpi};\\
\mathrm{N} &= \frac{5}{2}\frac{m_1^2}{n}\frac{if}{\omega_1}(1 - \varkappa'')\left\{\left(1 - \frac{c_2}{c_1}\omega_2\frac{1 + \varpi}{1 - \varpi}\right) c_1 \frac{\mu - \varpi}{1 - \varpi} + \frac{\omega_2 \varpi}{1 - \varpi}\left(c_2 - \omega_2 c_1 \frac{1 + \varpi}{1 - \varpi}\right)\right\}.
\end{aligned}
\right.
$$

Comme ω_2 est égal à 0.0001467 et ϖ à 0.00001 approximativement, nous pourrons, dans le calcul de f, négliger le terme en $\omega_2\varpi$.

(*) Ce n'est qu'à défaut d'une base plus sûre que nous avons adopté la constante de Peters et, par suite, celle de Bessel, qui concorde le mieux avec elle.

Nous partageons, sur l'exactitude de cette dernière, les doutes exprimés par des astronomes éminents. Quant à celle de Peters, il nous paraît certain qu'elle doit être augmentée peut-être de 0''.01 environ (voir p. 63).

Déjà M. le Prof. Nyrén a déduit des observations au premier vertical de Poulkowa une valeur supérieure à celle de Peters.

M. le Dr L. de Ball, en recherchant, d'après nos formules, la constante de la nutation

Alors la division des deux équations l'une par l'autre fait disparaître le facteur $\frac{\mu - \varpi}{1 - \varpi}$, et permet de déterminer f.

On trouve ainsi, en se servant successivement des constantes de Bessel et de Struve :

$$\lg f = \begin{matrix} 0.53856240 \\ 0.53828457 \end{matrix} \qquad f = \begin{matrix} 2.18055 & \text{Bessel.} \\ 2.17914 & \text{Struve.} \end{matrix}$$

53. Cela étant, les équations (88) deviennent, [log] désignant le nombre qui a pour logarithme log :

$$(89) \quad \ldots \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{2}{3} \mathrm{P} &= \frac{m_1^2}{n} \begin{Bmatrix} [0,50029502]_{\mathrm{B}} \\ [0.50010511]_{\mathrm{S}} \end{Bmatrix} c_1 \frac{\mu - \varpi}{1 - \varpi} \\ \frac{2}{3} \mathrm{N} &= \frac{m_1^2}{n} \begin{Bmatrix} [9.76300266]_{\mathrm{B}} \\ [9.76272485]_{\mathrm{S}} \end{Bmatrix} c_1 \frac{\mu - \varpi}{1 - \varpi} + \frac{m_1^2}{n} \begin{Bmatrix} [5.7637]_{\mathrm{B}} \\ [5.7654]_{\mathrm{S}} \end{Bmatrix} \frac{\varpi}{1 - \varpi}. \end{aligned} \right.$$

L'élimination du terme en $c_1 \frac{\mu - \varpi}{1 - \varpi}$ conduit à l'équation :

$$(90) \quad \ldots \quad \frac{2}{3} \begin{Bmatrix} -[1.46517142] + [1.46517194]_{\mathrm{B}} \\ -[1.46498127] + [1.46498205]_{\mathrm{S}} \end{Bmatrix} = \frac{m_1^2}{n} \begin{Bmatrix} [6.2640]_{\mathrm{B}} \\ [6\ 2635]_{\mathrm{S}} \end{Bmatrix} \frac{\varpi}{1 - \varpi},$$

dans laquelle les nombres P et N ont été exprimés en secondes.

On trouve ainsi, pour la valeur de $\frac{\varpi}{1 - \varpi}$, selon que l'on adopte la constante de Bessel ou celle de Struve :

$$\begin{aligned} 7''.596 &= 0.0000359 \quad \text{B.} \\ 10''.080 &= 0.0000525 \quad \text{S.} \end{aligned}$$

La première est probablement trois fois trop forte, mais la seconde l'est cinq fois environ.

Il ne semble donc pas douteux que la constante de Bessel ne soit, quoique

diurne, ainsi que la correction à apporter à la constante de Peters, est même arrivé à une valeur encore plus forte (voir *Astr. Nachr.*, nos 2542-2544).

Mais il faudrait des observations plus nombreuses que celles dont il a pu faire usage jusqu'à présent, pour établir, sur une base tout à fait solide, le calcul des constantes de la nutation annuelle et de la nutation diurne. (20 août 1883.)

un peu faible, préférable à celle de Struve, si l'on admet comme exacte la constante de la nutation de Peters (*).

54. Pour déterminer $\frac{\mu - \varpi}{1 - \varpi}$, mieux vaudrait, en présence de cette incertitude, ne se servir que de la seconde formule (89).

On pourrait commencer par y négliger le second terme, pour trouver une première valeur approchée de $\frac{\mu - \varpi}{1 - \varpi}$, et en déduire celle de μ, en admettant que $\varpi = \mu^2$; d'où $\frac{\mu - \varpi}{1 - \varpi} = \frac{1 + \mu}{\mu}$. Nous supposerons qu'on soit arrivé ainsi à $\varpi = 0.00001 = 2''$.

La seconde équation (89) donnera alors, en partant de la constante de Bessel :

$$\frac{2}{3}[0.9648769] = [7.9599025]\frac{\mu - \varpi}{1 - \varpi} + [3.7602]\varpi.$$

On voit que le dernier terme est tellement faible qu'il est impossible d'en tenir compte.

Il restera donc $\frac{\mu - \varpi}{1 - \varpi}$, ou, comme nous venons de l'admettre,

$$(91)\quad . \quad . \quad \frac{\mu}{1 + \mu} = \frac{2}{3}[3.0049744] = 674''.3 = 0.0032693; \quad \mu = 0.003280\,(^{**}).$$

55. Comme contrôle, nous pouvons déterminer théoriquement, au moyen de la valeur (91), que nous venons de trouver, en partant de la constante de la nutation annuelle, pour $\frac{\mu - \varpi}{1 - \varpi}$, la constante de la précession. La pre-

(*) J'ai calculé, d'après les formules (88), ce que devrait être la constante de la précession, pour la valeur suivante de la constante de la nutation annuelle : 9.23; et j'ai trouvé 50.39, valeur notablement plus forte que celle même de Struve.

La détermination de ces constantes et de celle de l'aberration devra, dans tous les cas, être soumise à une nouvelle investigation, dans laquelle il faudra tenir compte de la nutation diurne; mais on ne pourra utilement le faire que quand celle-ci sera connue avec une précision suffisante. (20 août 1883.)

(**) Il semble résulter des données actuelles sur la physique du globe que cette valeur est trop faible. Il en serait de même, par conséquent, des constantes de Bessel et de Peters.

mière formule (89) donnera, si l'on y remplace $\frac{\mu - \varpi}{1 - \varpi}$ par $\frac{2}{3}$ [3.0049744] :

$$\lg P = 1.7021692.$$

On voit combien cette valeur diffère peu de celle 1.7021688 que nous avons prise pour le logarithme de la constante de Bessel, en 1800. En nombres, la différence est seulement de $0''.00005$.

56. Afin de pouvoir comparer les coefficients des autres termes de nos formules, aux termes analogues de Peters, il sera utile que nous commencions par les réduire en nombres, comme l'a fait cet astronome pour les siens.

Dans cette réduction, outre les valeurs numériques données à l'article 51, nous emploierons celle que nous venons de trouver : $\mu = 0.003280$.

Les formules (86) et (87) s'écriront alors, pour 1800.0, tous les coefficients étant exprimés en secondes :

$$(92) \begin{cases} \Delta\theta = 9.2231 \cos \Omega - 0.0863 \cos 2\Omega + 0.0891 \cos 2☾_m + 0.0194 \cos (2☾_m - \Omega) \\ \quad + 0.0127 \cos (3☾_m - \Gamma') - 0.0050 \cos (☾_m + \Gamma') - 0.0032 \cos (☾_m - \Gamma' + \Omega) \\ \quad + 0.0030 \cos (☾_m - \Gamma' - \Omega) - 0.0010 \cos (☾_m + \Gamma' - \Omega) \\ \quad + 0.0026 \cos (3☾_m - \Gamma' - \Omega) + 0.0012 \cos (4☾_m - 2\Gamma') \\ \quad + 0.5521 \cos 2\odot_m - 0.0092 \cos (\odot_m + \Gamma) + 0.0217 \cos (3\odot_m - \Gamma). \end{cases}$$

$$(93) \begin{cases} \Delta\psi = -17.2421 \sin \Omega + 0.2083 \sin 2\Omega - 0.2217 \sin 2☾_m - 0.0583 \sin (2☾_m - \Omega) \\ \quad + 0.0687 \sin (☾_m - \Gamma') + 0.0027 \sin 2 (☾_m - \Gamma') + 0.0025 \sin 2 (☾_m - \Omega) \\ \quad - 0.0300 \sin (3☾_m - \Gamma') + 0.0107 \sin (☾_m + \Gamma') + 0.0061 \sin (☾_m - \Gamma' + \Omega) \\ \quad - 0.0060 \sin (☾_m - \Gamma' - \Omega) + 0.0020 \sin (☾_m + \Gamma' - \Omega) \\ \quad - 0.0052 \sin (3☾_m - \Gamma' - \Omega) - 0.0028 \sin (4☾_m - 2\Gamma') \\ \quad - 1.2726 \sin 2\odot_m + 0.0213 \sin (\odot_m + \Gamma) - 0.0520 \sin (3\odot_m - \Gamma) \\ \quad + 0.1275 \sin (\odot_m - \Gamma) + 0.0016 \sin 2 (\odot_m - \Gamma). \end{cases}$$

Les coefficients de Peters, écrits dans le même ordre, sont, pour $\Delta\theta$:

1) + 9.2231	2) — 0.0897	3) + 0.0886	4) + 0.0181
5) + 0.0113	6) — 0.0050	7) — 0.0031	
8) + 0.0030	9) — 0.0010		
13) + 0.5510	14) + 0.0093	15) + 0.0027	

et pour $\Delta\psi$:

1') — 17.2405	2') + 0.2075	3') — 0.2041	4') — 0.0339
5') + 0.0677	6') + 0.0028	7') + 0.0024	
8') — 0.0261	9') + 0.0115	10') + 0.0058	
11') + 0.0057	12') + 0.0020	13') 0	
14') — 1.2694	15') — 0.0215	16') — 0.0058	
17') + 0.1279	18') — 0.0005.		

Nous n'avons eu ni le loisir, ni le goût de rechercher à fond les causes des quelques divergences qui existent entre certains de nos coefficients et ceux de Peters (*).

Les observations suivantes pourront n'être pas dépourvues d'intérêt.

Nous ne comprenons pas l'omission, dans les formules de Peters, de nos termes 10 et 13', qui ne sont pas du tout insignifiants, non plus que le signe attribué dans ces formules, par inadvertance sans doute, au terme 11' (**).

Quant à la différence qui existe entre nos coefficients 14 et 15, 15' et 16' et ceux de Peters, elle n'est qu'apparente, comme nous allons le voir.

57. Nos formules (92) et (93) renferment les longitudes *moyennes* du Soleil et de la Lune, expressément indiquées par l'indice *m*.

Mais Peters a introduit dans les siennes la longitude *vraie* du Soleil.

Modifions en conséquence nos formules (86) et (87), dans lesquelles nous remplacerons les longitudes *moyennes* de la Lune et du Soleil, qui y sont représentées par ☾ et ⊙, en fonction de leurs longitudes *vraies*, au moyen de la formule (78^{bis}).

(*) Voir la préface.

(**) Le professeur Nyrén, qui a refait, sur des données nouvelles, les calculs de Peters, a réparé l'omission signalée ci-dessus. Mais l'erreur de signe, que nous avons relevée dans le terme 11', subsiste dans ses formules (voir *Mém. de l'Acad. des sciences de Saint-Pétersbourg*, t. XIX, 1872).

Après avoir réduit en nombres, nous obtiendrons ainsi, $\leftmoon$ et $\odot$ *désignant maintenant les longitudes* VRAIES de la Lune et du Soleil :

$$
(94)\left\{\begin{array}{ll}
 & \Delta\theta = 9.2231 \cos \Omega - 0.0865 \cos 2\Omega + 0.0893 \cos 2\leftmoon + 0.0196 \cos(2\leftmoon - \Omega) \\
\mathrm{II} & + 0.0028 \cos(3\leftmoon - \Gamma') + 0.0048 \cos(\leftmoon + \Gamma') - 0.0032 \cos(\leftmoon - \Gamma' + \Omega) \\
\mathrm{III} & + 0.0030 \cos(\leftmoon - \Gamma' - \Omega) + 0.0011 \cos(\leftmoon + \Gamma' - \Omega) \\
 & + 0.0004 \cos(3\leftmoon - \Gamma' - \Omega) + 0{,}0012 \cos(4\leftmoon - 2\Gamma') \\
\mathrm{IV} & + 0.00003 \cos(2\Gamma' - \Omega) + 0.00005 \cos 2\Gamma' \\
\mathrm{V} & + 0.5527 \cos 2\odot + 0.0093 \cos(\odot + \Gamma) + 0.0031 \cos(3\odot - \Gamma) \\
\mathrm{VI} & + 0.00004 \cos 2\Gamma.
\end{array}\right.
$$

$$
(95)\left\{\begin{array}{ll}
 & \Delta\psi = -17.2421 \sin \Omega + 0.2087 \sin 2\Omega - 0.2246 \sin 2\leftmoon - 0.0388 \sin(2\leftmoon - \Omega) \\
\mathrm{II}' & + 0.0689 \sin(\leftmoon - \Gamma') + 0.0027 \sin 2(\leftmoon - \Gamma') + 0.0025 \sin 2(\leftmoon - \Omega) \\
\mathrm{III}' & - 0.0033 \sin(3\leftmoon - \Gamma') - 0.0140 \sin(\leftmoon + \Gamma') + 0.0060 \sin(\leftmoon - \Gamma' + \Omega) \\
\mathrm{IV}' & - 0.0059 \sin(\leftmoon - \Gamma' - \Omega) - 0.0022 \sin(\leftmoon + \Gamma' - \Omega) \\
 & - 0.0008 \sin(3\leftmoon - \Gamma' - \Omega) - 0.0028 \sin(4\leftmoon - 2\Gamma') \\
\mathrm{V}' & - 0.00003 \sin(2\Gamma' - \Omega) - 0.00024 \sin 2\Gamma' \\
\mathrm{VI}' & - 1.2742 \sin 2\odot - 0.0216 \sin(\odot + \Gamma) - 0.0093 \sin(3\odot - \Gamma) \\
\mathrm{VII}' & + 0.1273 \sin(\odot - \Gamma) + 0.0015 \sin 2(\odot - \Gamma) \\
\mathrm{VIII}' & - 0.00009 \sin 2\Gamma.
\end{array}\right.
$$

Ces formules se distinguent des précédentes par les valeurs numériques et même par les signes de certains coefficients, mais surtout par l'introduction de termes nouveaux qui, vu leur signification théorique, ne sont nullement négligeables. Ces termes sont ceux des lignes IV et V′, et surtout VI et VIII′.

Le terme VIII′, variant avec une excessive lenteur, devrait rentrer dans la constante de la précession, qui deviendrait, dès lors, une variable, dans l'expression même de la précession lunisolaire annuelle!

C'est donc par un véritable abus, provenant de la négligence des Géomètres, que l'on continue en général à calculer les formules de la nutation au moyen des longitudes vraies des astres, formule (89), tandis que la formule (88), qui renferme les longitudes moyennes, est beaucoup plus simple à calculer, et ne contient surtout aucun terme dépendant *du périgée* *solaire*, et qui ferait varier la constante de la précession, ni même du périgée lunaire.

On nous pardonnera de nous exprimer, avec un peu trop de chaleur peut-être, sur ce point, dont nous ne croyons pas nous exagérer l'importance.

Notre excuse est d'abord : *Amicus Plato, magis amica veritas;* ensuite l'autorité de Gauss lui-même, sur la proposition de qui Encke avait introduit dans le *Berl. Jahrb.* les longitudes moyennes de la Lune (*).

Qu'on nous permette donc de formuler, en faveur des jeunes astronomes qui ont des réductions de circompolaires à calculer, le vœu qu'à l'avenir les formules de réduction soient exprimées en longitudes moyennes, et que celles-ci soient insérées, tant pour le Soleil que pour la Lune, en quelques pages des annuaires astronomiques!

58. Afin que le lecteur puisse vérifier plus aisément la formule (89) et s'assurer mieux encore de l'inconvénient de l'introduction des longitudes vraies, nous donnerons au complet la formule (86), y compris quelques termes qui, quoique négligeables, pourront se réduire avec des termes semblables lors de la conversion des longitudes moyennes en longitudes vraies, ainsi que la formule (86^{bis}), dans laquelle cette conversion est effectuée.

Les chiffres romains qui figurent dans cette dernière formule sont les coefficients complets des termes de la formule (86) vis-à-vis desquels ils sont placés.

(*) « Nach dem Wunsche des Herrn Gauss ist der Zusatz für die mittlere Länge des Mondes und ihre Bewegung gemacht worden. » (*Berl. Jahrb. für* 1841.)

Si l'on fait usage de l'*Annuaire de Berlin*, ou des *Tab. Pulc.*, ou bien encore de la *Conn. des Temps* à partir de 1884, on pourra calculer exactement, d'après les formules de Peters, les termes qui dépendent de la longitude de la Lune.

Ce que nous proposons donc, c'est que l'on calcule tous les termes de la nutation en longitudes moyennes, pour le Soleil comme pour la Lune, afin de n'être pas obligé de négliger certaines quantités qu'introduit la conversion en longitudes vraies, et dont il est impossible de tenir compte.

$$
\begin{aligned}
\Delta\theta = {} & \frac{3}{4}\frac{m_1^2}{n} f \Bigg\{ -i\left(\frac{1-\varkappa''}{\omega_1}\right)\left[(c_1+c_2)\frac{\mu(1-\omega_2)-\varpi}{(1-\omega_2)^2-\varpi}+(c_1-c_2)\frac{\mu(1+\omega_2)-\varpi}{(1+\omega_2)^2-\varpi}\right]\cos\Omega && \text{I} \\
& \qquad + \frac{1}{4}\frac{i^2(1-sc''^2)s_1}{\omega_1}\left[(1+c_1)\frac{\mu(1-2\omega_2)-\varpi}{(1-2\omega_2)^2-\varpi}+(1-c_1)\frac{\mu(1+2\omega_2)-\varpi}{(1+2\omega_2)^2-\varpi}\right]\cos 2\Omega \Bigg\} && \text{II} \\
& + \frac{3}{4}\frac{m_1^2}{n}\mu \Bigg\{ \frac{1}{2}\frac{s_1}{m_1}\left[\frac{1+c_1}{1-2m_2+\mu}+\frac{1-c_1}{1+2m_2+\mu}\right]\cos 2\odot_m && \text{III} \\
& \qquad - \frac{1}{2}\frac{es_1}{m_1+\gamma_1}\left[\frac{1+c_1}{1-m_2-\gamma_2+\mu}+\frac{1-c_1}{1+m_2+\gamma_2+\mu}\right]\cos(\odot_m+\Gamma) && \text{IV} \\
& \qquad + \frac{7}{2}\frac{es_1}{3m_1-\gamma_1}\left[\frac{1+c_1}{1-3m_2+\gamma_2+\mu}+\frac{1-c_1}{1+3m_2-\gamma_2+\mu}\right]\cos(3\odot_m-\Gamma) \Bigg\} && \text{V} \\
& + \frac{3}{4}\frac{m_1^2}{n}\mu f \Bigg\{ \frac{1}{2}\frac{s_1}{m_1'}\left[\frac{1+c_1}{1-2m_2'+\mu}+\frac{1-c_1}{1+2m_2'+\mu}\right]\cos 2\mathbb{C}_m && \text{VI} \\
& \qquad - \frac{1}{2}\frac{e's_1}{m_1'-\gamma_1'}\left[\frac{1+c_1}{1-m_2'-\gamma_2'+\mu}+\frac{1-c_2}{1+m_2'+\gamma_2'+\mu}\right]\cos(\mathbb{C}_m+\Gamma') && \text{VII} \\
& \qquad + \frac{7}{2}\frac{e's_1}{3m_1'-\gamma_1'}\left[\frac{1+c_1}{1-3m_2'+\gamma_2'+\mu}+\frac{1-c_1}{1+3m_2'-\gamma_2'+\mu}\right]\cos(3\mathbb{C}_m-\Gamma) \Bigg\} && \text{VIII} \\
& + \frac{3}{4}\frac{m_1^2}{n}\mu f \Bigg\{ \frac{i}{2m_1'-\omega_1}\left[\frac{c_1+c_2}{1-2m_2'+\omega_2+\mu}+\frac{c_1+c_2}{1+2m_2'-\omega_2+\mu}\right]\cos(2\mathbb{C}_m-\Omega) && \text{IX} \\
& \qquad - \frac{1}{2}\frac{e'i}{m_1'+\gamma_1'-\omega_1}\left[\frac{c_1+c_2}{1-m_2'-\gamma_2'+\omega_2+\mu}+\frac{c_1-c_2}{1+m_2'+\gamma_2'-\omega_2+\mu}\right]\cos(\mathbb{C}_m+'\Gamma-\Omega) && \text{X} \\
& \qquad - \frac{3}{2}\frac{e'i}{m_1'-\gamma_1'+\omega_1}\left[\frac{c_1+c_2}{1-m_2'+\gamma_2'-\omega_2+\mu}+\frac{c_1-c_2}{1+m_2'-\gamma_2'+\omega_2+\mu}\right]\cos(\mathbb{C}_m-\Gamma'+\Omega) && \text{XI} \\
& \qquad + \frac{5}{2}\frac{e'i}{m_1'-\gamma_1'-\omega_1}\left[\frac{c_1+c_2}{1+m_2'-\gamma_2'-\omega_2+\mu}+\frac{c_1-c_2}{1-m_2'+\gamma_2'+\omega_2+\mu}\right]\cos(\mathbb{C}_m-\Gamma'-\Omega) && \text{XII} \\
& \qquad + \frac{7}{2}\frac{e'i}{3m_1'-\gamma_1'-\omega_1}\left[\frac{c_1+c_2}{1-3m_2'+\gamma_2'+\omega_2+\mu}+\frac{c_1-c_2}{1+3m_2'-\gamma_2'-\omega_2+\mu}\right]\cos(3\mathbb{C}_m-\Gamma'-\Omega) && \text{XIII} \\
& \qquad - \frac{1}{4}s_1\frac{i^2}{2m_1'-2\gamma_1'+2\omega_1}\left[\frac{1+c_1}{1-2m_2'+2\gamma_2'-2\omega_2+\mu}\right. \\
& \qquad\qquad \left. + \frac{1-c_1}{1+2m_2'-2\gamma_2'+2\omega_2+\mu}\right]\cos(2\mathbb{C}_m-2\Gamma'+2\Omega) && \text{XIV} \\
& \qquad + 4s_1\frac{e'^2}{4m_1'-2\gamma_1'}\left[\frac{1+c_1}{1-4m_2'+2\gamma_2'+\mu}+\frac{1-c_1}{1+4m_2'-2\gamma_2'+\mu}\right]\frac{\cos(4\mathbb{C}-2\Gamma')}{4m_1'-2\gamma_1'} \Bigg\} && \text{XV}
\end{aligned}
\tag{86}
$$

$$
\begin{aligned}
\Delta\theta = & \left\{ \mathrm{I} + \frac{1}{4} i^2 . \mathrm{IX} + e' . \mathrm{XI} - e' . \mathrm{XII} \right\} \cos \text{☊} \\
& + \left\{ \mathrm{II} + \frac{1}{4} i^2 . \mathrm{VI} \right\} \cos 2\text{☊} \\
& + \left\{ (1 - 4e'^2) . \mathrm{VI} + e' . \mathrm{VII} - 3e' . \mathrm{VIII} - 3e' . \mathrm{XIII} \right\} \cos 2\text{☾} \\
& + \left\{ (1 - 4e'^2) . \mathrm{IX} + e' . \mathrm{X} \right\} \cos (2\text{☾} - \text{☊}) \\
& + \left\{ (1 - 9e'^2) . \mathrm{VIII} + 2e' . \mathrm{VI} + \frac{9}{8} e'^2 . \mathrm{VII} \right\} \cos (3\text{☾} - \Gamma') + \left\{ \frac{13}{4} e'^2 . \mathrm{VI} - 4e' . \mathrm{XIV} \right\} \cos (3\text{☾} - 2\Gamma') \\
& - \left\{ e'^3 . \mathrm{VI} \, \frac{1}{8} e'^2 . \mathrm{VII} \right\} \cos (\text{☾} - 3\Gamma') + \left\{ (1 - e'^2) . \mathrm{VII} - 2e' . \mathrm{VI} + \frac{13}{4} e'^2 . \mathrm{VIII} \right\} \cos (\text{☾} + \Gamma') \\
& + \mathrm{XI} . \cos (\text{☾} - \Gamma' + \text{☊}) + \mathrm{XII} . \cos (\text{☾} - \Gamma' - \text{☊}) \\
& + \left\{ \mathrm{XIII} + 2e' . \mathrm{IX} \right\} \cos (3\text{☾} - \Gamma' - \text{☊}) + \left\{ \mathrm{X} - 2e' . \mathrm{IX} \right\} \cos (\text{☾} + \Gamma' - \text{☊}) \\
& + \frac{1}{8} i^2 . \mathrm{VII} \cos (\text{☾} - \Gamma' - 2\text{☊}) + \frac{3}{8} i^2 . \mathrm{VIII} \cos (\text{☾} - \Gamma' + 2\text{☊}) \\
& + (\mathrm{XIII} + 2e' . \mathrm{IX}) \cos (3\text{☾} - \Gamma' - \text{☊}) \\
& + \left\{ e' i^2 . \mathrm{VI} - \frac{1}{8} i^2 . \mathrm{VII} \right\} \cos (3\text{☾} + \Gamma' - 2\text{☊}) + \frac{13}{4} e'^2 . \mathrm{IX} \cos (3\text{☾} - 2\Gamma' - \text{☊}) \\
& + e' . \mathrm{XII} \cos (2\text{☾} - 2\Gamma' + \text{☊}) + e' . \mathrm{XII} \cos (2\text{☾} - 2\Gamma' - \text{☊}) \\
& + \mathrm{XV} \cos (4\text{☾} - 2\Gamma') + 3e' \left\{ \mathrm{VIII} + \mathrm{XIII} \right\} \cos (4\text{☾} - 2\Gamma') \\
& - \frac{1}{4} i^2 . \mathrm{VII} \cos (4\text{☾} - 2\text{☊}) - \frac{1}{4} i^2 . \mathrm{IX} \cos (4\text{☾} - 3\text{☊}) \\
& + \left\{ \frac{3}{4} e'^2 . \mathrm{IX} - e' . \mathrm{X} \right\} \cos (2\Gamma' - \text{☊}) \\
& + \left\{ \frac{3}{4} e'^2 . \mathrm{VI} - e' . \mathrm{VII} \right\} \cos 2\Gamma' \\
& + \left\{ (1 - 4e^2) . \mathrm{III} + e . \mathrm{IV} - 3e . \mathrm{V} \right\} \cos 2\odot \\
& + \left\{ (1 - e^2) . \mathrm{IV} - 2e . \mathrm{III} + \frac{13}{4} e^2 . \mathrm{V} \right\} \cos (\odot + \Gamma) \\
& + \left\{ (1 - 9e^2) . \mathrm{V} + \frac{9}{8} e^2 . \mathrm{IV} + 2e . \mathrm{III} \right\} \cos (3\odot - \Gamma) \\
& - \frac{1}{8} e^2 . \mathrm{IV} . \cos (\odot - 3\Gamma) \\
& + \left\{ \frac{3}{4} e^2 . \mathrm{III} - e . \mathrm{IV} \right\} \cos 2\Gamma .
\end{aligned}
\tag{86 bis}
$$

Cette dernière formule renferme deux fois plus de termes que la précédente; nous n'y avons toutefois pas réduit la longitude moyenne Γ' du périgée lunaire en longitude vraie (77^{bis}); c'est une peine que nous pouvons nous épargner, puisque les astronomes, qui calculent avec exactitude les lieux apparents, ne font usage que des longitudes moyennes dans les termes relatifs à la Lune.

Mais il ressort deux conclusions importantes de la comparaison des deux dernières formules. La première, c'est que la constante de la nutation ne conserve pas la même valeur, si l'on substitue simplement, comme beaucoup d'astronomes le croient permis, les longitudes vraies de la Lune aux longitudes moyennes. La seconde, c'est qu'en convertissant les longitudes moyennes du Soleil en longitudes vraies, comme l'a fait Peters, on néglige, dans les formules (94) et (95), les termes qui dépendent du périgée solaire.