THÉORIE

DU

MOUVEMENT DE ROTATION DE L'ÉCORCE SOLIDE DU GLOBE

CHAPITRE PREMIER.

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES DU MOUVEMENT DE L'ÉCORCE ET DE CELUI DU NOYAU.

§ 1. — *Expressions des moments perturbateurs.*

1. Nous considérons le globe terrestre comme formé de deux parties solides, de forme invariable, ellipsoïdales, dont les centres de gravité coïncident, et qui sont séparées par une couche plus ou moins fluide, assez mince.

On sait que les équations du mouvement de rotation de chacune des deux parties solides peuvent se mettre sous la forme

$$(1) \ldots\ldots\ldots \left\{\begin{aligned} \frac{dl}{dt} &= -\frac{C-B}{A}nm + \frac{P}{A}, \\ \frac{dm}{dt} &= \frac{C-A}{B}nl + \frac{Q}{B}, \\ \frac{dn}{dt} &= -\frac{B-A}{C}lm + \frac{R}{C}; \end{aligned}\right.$$

l, m, n représentent les vitesses angulaires du corps autour de ses trois axes principaux X, Y, Z; A, B, C, ses moments d'inertie, P, Q, R, les moments des forces extérieures, autour des mêmes axes.

Au nombre de ces forces, outre les actions du Soleil et de la Lune, on doit compter les actions mutuelles de l'écorce et du noyau.

A la rigueur, on devrait tenir compte également des actions de la couche fluide. Il en sera fait généralement abstraction ici, à cause de l'inutilité pratique de cette recherche fort laborieuse.

2. Les expressions des moments perturbateurs exercés par le Soleil et la Lune sont connues.

Nous avons à rechercher celles des moments des actions mutuelles du noyau sur l'écorce, moments qui seront évidemment égaux et de signes contraires pour ces deux corps.

Considérons un sphéroïde homogène, de densité 1, limité par la surface $R = a(1 + \alpha y)$, α étant un coefficient très petit, dont le carré est négligeable, y une fonction des angles directeurs de R, θ' et ϖ', qui dépend de la nature du sphéroïde.

Un point x', y', z' (de la surface) sera déterminé, en fonction de θ' et de ϖ', par

$$x' = R\mu', \quad y' = R\nu' \cos\varpi', \quad z' = R\nu' \sin\varpi',$$

μ' et ν' désignant le sinus et le cosinus de θ'.

Supposons y développé suivant les fonctions sphériques

$$y = Y_0 + Y_1 + Y_2 + Y_3 + \cdots$$

Pour un point intérieur au sphéroïde, la fonction potentielle sera

$$\text{(2)} \quad \ldots\ldots \quad V_i = 2\pi a^2 - \frac{2}{3}\pi r^2 + 4\alpha\pi a^2\left(Y_0 + \frac{r}{3a}Y_1 + \frac{r^2}{5a^2}Y_2 + \cdots\right),$$

le coefficient d'attraction étant supposé égal à 1.

Pour un point extérieur

$$\text{(3)} \quad \ldots\ldots\ldots \quad V_e = \frac{4}{3}\pi\frac{a^3}{r} + 4\alpha\pi\frac{a^3}{r}\left(Y_0 + \frac{a}{3r}Y_1 + \frac{a^2}{5r^2}Y_2 + \cdots\right)$$

Appliquons ces formules à un ellipsoïde d'axes

$$k(1-\varepsilon_1),\quad k(1-\varepsilon_2),\quad k(1-\varepsilon_3),$$

et posons

$$\frac{\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3}{3}=\varepsilon.$$

De l'équation de sa surface, on déduira

$$R=k\left[1-(\varepsilon_1\mu_2'+\varepsilon_2\nu'^2\cos^2\varpi'+\varepsilon_3\nu'^2\sin^2\varpi')\right],$$

d'où

$$\begin{aligned}-\alpha y&=\varepsilon_1\mu'^2+\varepsilon_2\nu'^2\cos^2\varpi'+\varepsilon_3\nu'^2\sin^2\varpi'\\&=\varepsilon_1\mu'^2+\frac{1}{2}\nu'^2(\varepsilon_2+\varepsilon_3)+\frac{1}{2}\nu'^2(\varepsilon_2-\varepsilon_3)\cos 2\varpi'\\&=\varepsilon+\frac{3\mu'^2-1}{2}(\varepsilon_1-\varepsilon)+\frac{1}{2}\nu'^2(\varepsilon_2-\varepsilon_3)\cos 2\varpi';\end{aligned}$$

et

$$-\alpha Y_0=\varepsilon;\quad -\alpha Y_2=\frac{3\mu'^2-1}{2}(\varepsilon_1-\varepsilon)+\frac{1}{2}\nu'^2(\varepsilon_2-\varepsilon_3)\cos 2\varpi'.$$

Les autres fonctions sphériques disparaissent.

On aura donc, pour un point intérieur :

$$(4)\quad V_i=2\pi k^2(1-2\varepsilon)-\frac{2}{3}\pi r^2-\frac{4}{5}\pi\left[(\varepsilon_1-\varepsilon)x^2+(\varepsilon_2-\varepsilon)y^2+(\varepsilon_3-\varepsilon)z^2\right],$$

et, pour les composantes de l'attraction :

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned}X_i&=-\frac{4}{3}\pi x\left[1+\frac{6}{5}(\varepsilon_1-\varepsilon)\right],\\Y_i&=-\frac{4}{3}\pi y\left[1+\frac{6}{5}(\varepsilon_2-\varepsilon)\right],\\Z_i&=-\frac{4}{3}\pi z\left[1+\frac{6}{5}(\varepsilon_3-\varepsilon)\right];\end{aligned}\right.$$

pour un point extérieur :

$$(6)\quad V_e=\frac{4}{3}\pi\frac{k^3}{r}(1-3\varepsilon)-\frac{4}{5}\pi\frac{k^5}{r^5}\left[(\varepsilon_1-\varepsilon)x^2+(\varepsilon_2-\varepsilon)y^2+(\varepsilon_3-\varepsilon)z^2\right];$$

d'où, en appelant M la masse $\frac{4}{3}\pi k^3(1-3\varepsilon)$ de l'ellipsoïde:

$$(7)\quad \left\{\begin{aligned}
X_e &= -M\frac{x}{r^3}\left[1+\frac{3}{5}\frac{k^2}{r^4}\left(\varepsilon_1(3r^2-5x^2)+\varepsilon_2(r^2-5y^2)+\varepsilon_3(r^2-5z^2)\right)\right],\\
Y_e &= -M\frac{y}{r^3}\left[1+\frac{3}{5}\frac{k^2}{r^4}\left(\varepsilon_1(r^2-5x^2)+\varepsilon_2(3r^2-5y^2)+\varepsilon_3(r^2-5z^2)\right)\right],\\
Z_e &= -M\frac{z}{r^3}\left[1+\frac{3}{5}\frac{k^2}{r^4}\left(\varepsilon_1(r^2-5x^2)+\varepsilon_2(r^2-5y^2)+\varepsilon_3(3r^2-5z^2)\right)\right].
\end{aligned}\right.$$

3. Nous pouvons maintenant procéder au calcul des moments exercés par l'écorce sur le noyau.

Supposons-la formée de couches ellipsoïdales, dont les axes et la densité, constante dans toute la couche, varient d'une manière continue. Soit δ la densité de la couche comprise entre les ellipsoïdes dont les axes sont

$$k(1-\varepsilon_1),\quad k(1-\varepsilon_2)\quad \text{et}\quad k(1-\varepsilon_3)$$

et

$$k(1-\varepsilon_1)+dk\left(1-\varepsilon_1-k\frac{d\varepsilon_1}{dk}\right), \text{ etc.}$$

Les composantes de l'attraction de cette couche sur un point intérieur seront

$$f\delta\frac{dX_i}{dk}dk, \text{ etc.},$$

désignant le coefficient d'attraction; c'est-à-dire,

$$-\frac{8}{5}\pi f\delta x\frac{d\varepsilon_1-d\varepsilon}{dk}dk, \text{ etc.}$$

Pour une couche comprise entre k_0 et k_1, on aura

$$(8)\quad \left\{\begin{aligned}
\mathcal{A}_i &= -\frac{8}{5}\pi f x\int_{k_0}^{k_1}\delta\frac{d\varepsilon_1-d\varepsilon}{dk}dk,\\
\mathcal{B}_i &= -\frac{8}{5}\pi f y\int_{k_0}^{k_1}\delta\frac{d\varepsilon_2-d\varepsilon}{dk}dk,\\
\mathcal{C}_i &= -\frac{8}{5}\pi f z\int_{k_0}^{k_1}\delta\frac{d\varepsilon_3-d\varepsilon}{dk}dk.
\end{aligned}\right.$$

Si l'on pose

$$(9) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{A}_i = - a_1 x, \quad \mathcal{B}_i = - b_1 y, \quad \mathcal{C}_i = - c_1 z, \\ a_1 = \frac{8}{5} \pi f \int_{k_0}^{k_1} \delta \frac{d\varepsilon_1 - d\varepsilon}{dk} dk, \text{ etc.,} \end{array} \right.$$

a_1, b_1, c_1 pourront être considérés comme des quantités très petites, de l'ordre des différences entre les ε relatifs aux deux ellipsoïdes qui limitent la couche.

4. Soit $dm\,(x, y, z)$ un élément du noyau. Les composantes de l'attraction de l'écorce, sur ce point, sont

$$\mathcal{A}_i dm = - a_1 x dm, \text{ etc.,}$$

et ses moments

$$-(c_1 - b_1)\, zydm, \quad -(a_1 - c_1)\, xzdm, \quad -(b_1 - a_1)\, yxdm.$$

Ceux de l'attraction de l'écorce sur le noyau seront donc

$$(10) \quad \mathfrak{M}_x = -(c_1 - b_1) \int zydm, \text{ etc.}$$

Comme on a, de plus,

$$\int \mathcal{A}_i dm = - a_1 \int xdm, \text{ etc.,}$$

on voit que le noyau est en équilibre à l'intérieur de la couche ellipsoïdale si leurs centres de gravité et leurs axes principaux coïncident.

5. Mais ce cas ne se présente pas, à cause, d'abord, de l'inégalité de répartition des masses continentales, mais, surtout, de l'épaisseur plus considérable de l'écorce sous les mers que sous les continents. Nous devons donc donner, aux axes X', Y', Z' du noyau, une direction un peu différente de celle des axes X, Y, Z de l'écorce.

Soient x_1, y_1, z_1 les coordonnées d'un point du noyau, dans l'hypothèse de la coïncidence des axes; x, y, z ses coordonnées dans la position réelle de ceux-ci, supposée atteinte au moyen d'une rotation, dont les composantes sont $\Delta' l$, $\Delta' m$, $\Delta' n$. On aura

$$x = x_1 + z_1 \Delta' m - y_1 \Delta' n; \quad y = y_1 + x_1 \Delta' n - z_1 \Delta' l; \quad z = z_1 + y_1 \Delta' l - x_1 \Delta' n;$$

et

$$\mathfrak{M}_x = -(c_1 - b_1) \int zy dm = -(c_1 - b_1) \left\{ \Delta' l \int (y_1^2 - z_1^2)\, dm - \Delta' m \Delta' n \int x_1^2 dm \right\},$$

ou, en négligeant $\Delta' m\, \Delta' n$ vis-à-vis de $\Delta' l$:

$$(11) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{M}_x = -(c_1 - b_1)(\mathrm{C}' - \mathrm{B}')\Delta' l, \text{ et, de même :} \\ \mathfrak{M}_y = -(a_1 - c_1)(\mathrm{A}' - \mathrm{C}')\Delta' m, \\ \mathfrak{M}_z = -(b_1 - a_1)(\mathrm{B}' - \mathrm{A}')\Delta' n, \end{array} \right.$$

A', B', C' désignant les moments d'inertie principaux du noyau.

Or, si $\Delta' \varphi$, $\Delta' \psi$, $\Delta' \theta$ représentent les variations des angles φ, ψ, θ, produites par la rotation $(\Delta' l, \Delta' m, \Delta' n)$, on a,

$$(12) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Delta' l = \sin \varphi \sin \theta \Delta' \psi - \cos \varphi \Delta' \theta, \\ \Delta' m = \cos \varphi \sin \theta \Delta' \psi + \sin \varphi \Delta' \theta, \\ \Delta' n = \Delta' \varphi - \cos \theta \Delta' \psi. \end{array} \right.$$

Et, par suite :

$$(13) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{M}_x = -(c_1 - b_1)(\mathrm{C}' - \mathrm{B}')[\sin \varphi \sin \theta \Delta' \psi - \cos \varphi \Delta' \theta], \\ \mathfrak{M}_y = -(a_1 - c_1)(\mathrm{A}' - \mathrm{C}')[\cos \varphi \sin \theta \Delta' \psi + \sin \varphi \Delta' \theta], \\ \mathfrak{M}_z = -(b_1 - a_1)(\mathrm{B}' - \mathrm{A}')[\Delta' \varphi - \cos \theta \Delta' \psi]. \end{array} \right.$$

§ 2. — *Équations différentielles du mouvement de rotation de l'écorce et de celui du noyau. — Théorèmes qui résultent de leur combinaison.*

6. En posant $\mathrm{C} - \mathrm{B} = b$, $\mathrm{C} - \mathrm{A} = a$, $\mathrm{B} - \mathrm{A} = c$, les équations différentielles (1) du mouvement de rotation de l'écorce s'écriront :

$$(14) \quad \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{dl}{dt} = -\dfrac{b}{\mathrm{A}} nm + \dfrac{\mathrm{P}}{\mathrm{A}} - \dfrac{\mathfrak{M}_x}{\mathrm{A}}, \\ \dfrac{dm}{dt} = \dfrac{a}{\mathrm{B}} nl + \dfrac{\mathrm{Q}}{\mathrm{B}} - \dfrac{\mathfrak{M}_y}{\mathrm{B}}, \\ \dfrac{dn}{dt} = -\dfrac{c}{\mathrm{C}} mn + \dfrac{\mathrm{R}}{\mathrm{C}} - \dfrac{\mathfrak{M}_z}{\mathrm{C}}, \end{array} \right.$$

P, Q, R, représentant les moments des actions des astres attirants, $-\mathfrak{M}_x$, $-\mathfrak{M}_y$, $-\mathfrak{M}_z$ ceux des actions du noyau sur l'écorce. Remplaçant ces derniers par leurs expressions (11), il viendra

$$(15) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{dl}{dt} &= -\frac{b}{A} nm + \frac{P}{A} + \frac{(c_1 - b_1)(C' - B')}{A} \Delta' l, \\ \frac{dm}{dt} &= \frac{a}{B} nl + \frac{Q}{B} + \frac{(a_1 - c_1)(A' - C')}{B} \Delta' m, \\ \frac{dn}{dt} &= -\frac{c}{C} mn + \frac{R}{C} + \frac{(b_1 - a_1)(B' - A')}{C} \Delta' n. \end{aligned} \right.$$

7. Pour écrire les équations différentielles du mouvement du noyau, il suffira d'accentuer tous les symboles des équations précédentes, à l'exception, toutefois, de leurs derniers termes, qu'on prendra simplement en signes contraires :

$$(16) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{dl'}{dt} &= -\frac{b'}{A'} n'm' + \frac{P'}{A'} - \frac{(c_1 - b_1)(C' - B')}{A} \Delta' l, \\ \frac{dm'}{dt} &= \frac{a'}{B'} n'l' + \frac{Q'}{B'} - \frac{(a_1 - c_1)(A' - C)}{B} \Delta' m, \\ \frac{dn'}{dt} &= -\frac{c'}{C'} l'm' + \frac{R'}{C'} - \frac{(b_1 - a_1)(B' - A')}{C} \Delta' n \text{ (*)}. \end{aligned} \right.$$

8. Or on sait que, pour la Terre, envisagée comme solide, B — A est très petit, puisque les mesures des méridiens concordent à assigner au globe, à très peu près, la forme d'un ellipsoïde de révolution, forme qu'il a dû affecter dans son état fluide primitif. On peut affirmer qu'il en est de même, à plus forte raison, pour le noyau, qui n'a pas été soumis au refroidissement, comme l'écorce, et qui subit des pressions considérables, de nature à empêcher les soulèvements qui se sont produits dans celle-ci.

De plus, on verra :

1° Que les vitesses angulaires l, l', m, m' sont très faibles : les produits $(B - A)\, lm$, $(B' - A')\, l'm'$ sont donc absolument négligeables;

(*) Cette première partie de notre travail est extraite d'un Mémoire déposé aux archives de l'Académie royale des sciences, des lettres et des beaux-arts de Belgique. Voir les rapports sur ce Mémoire dans le numéro de décembre 1893 du *Bulletin de l'Académie*.

2° Que les moments perturbateurs, autour des axes des Z, ne peuvent produire, dans la vitesse angulaire autour de ces axes, que des variations semi-diurnes qui ne surpassent pas la millionième partie de sa valeur, pour l'écorce terrestre, et seraient encore plus faibles pour le noyau.

On peut donc poser $n = n' = c^{te}$, et faire provisoirement abstraction de la dernière équation de chacun des deux systèmes précédents.

9. Si maintenant on admet, comme il sera établi par la suite, que les quantités $\frac{a}{B}$ et $\frac{b}{A}$, que nous appellerons les *éléments perturbateurs* de l'écorce, diffèrent peu de ceux $\frac{a'}{B'}$ et $\frac{b'}{A'}$, du noyau, on pourra écrire, en ne négligeant que les termes du second ordre :

$$\frac{b}{A}m + \frac{b'}{A'}m' = \left(\frac{b}{A}\right)_m m_m, \quad \frac{a}{B}l + \frac{a'}{B'}l' = \left(\frac{a}{B}\right)_m l_m,$$

les quantités affectées de l'indice m désignant les moyennes entre les quantités de même espèce relatives à l'écorce et au noyau.

Et, puisque $n' = n$, la demi-somme des deux premières équations de chacun des systèmes précédents donnera

$$\frac{dl_m}{dt} = -\left(\frac{b}{A}\right)_m nm_m + \frac{1}{2}\left(\frac{P}{A} + \frac{P'}{A'}\right),$$

$$\frac{dm_m}{dt} = \left(\frac{a}{B}\right)_m nl_m + \frac{1}{2}\left(\frac{Q}{B} + \frac{Q'}{B'}\right).$$

Mais on a

$$\frac{P}{A} = -\frac{b}{A}nq, \quad \frac{Q}{B} = \frac{a}{B}np \quad (*),$$

en désignant par p et q les expressions

$$h\frac{4xz}{R^2}\left(\frac{D}{R}\right)^3 \quad \text{et} \quad h\frac{4yz}{R^2}\left(\frac{D}{R}\right)^3,$$

qui sont les mêmes pour l'écorce que pour le noyau, puisque nous avons admis que leurs centres coïncident.

(*) Voir *Théorie des mouvements diurne et de l'axe du monde*, première partie, p. 5.

On pourra donc écrire

$$\frac{1}{2}\left(\frac{P}{A}+\frac{P'}{A'}\right)=-\left(\frac{b}{A}\right)_m nq_m, \text{ etc.,}$$

et les équations précédentes deviendront

$$(17) \quad \left\{\begin{aligned} \frac{dl_m}{dt} &= -\left(\frac{b}{A}\right)_m n\,(m+q)_m, \\ \frac{dm_m}{dt} &= \left(\frac{a}{B}\right)_m n\,(l+q)_m. \end{aligned}\right.$$

10. Ces équations sont précisément celles du mouvement de rotation d'un ellipsoïde solide, sous l'influence des attractions du Soleil et de la Lune. On peut donc énoncer le théorème :

THÉORÈME I. — *Si les éléments perturbateurs du noyau et de l'écorce terrestres diffèrent peu entre eux, on peut imaginer un ellipsoïde solide, dont les éléments perturbateurs et les vitesses angulaires sont les moyennes entre les éléments perturbateurs et les vitesses angulaires du noyau et de l'écorce.*

Or, pour un ellipsoïde solide, on connaît les intégrales des équations (17); on connaît donc les vitesses angulaires moyennes entre celles l et l', m et m' de l'écorce et du noyau. Et le problème serait entièrement résolu, si l'on était en droit d'affirmer que les différences $l - l'$, $m - m'$ sont insignifiantes. Nous aurons à les calculer.

11. Mais d'abord, examinons, abstraction faite de ces différences, qui sont assez faibles, les conséquences principales du THÉORÈME I.

On sait qu'outre la nutation eulérienne, il existe, pour notre ellipsoïde fictif, deux nutations bien distinctes, la nutation bradléenne et la nutation diurne, qui ont respectivement pour facteurs $\frac{1}{2}\left(\frac{a}{B}\pm\frac{b}{A}\right)$, en laissant de côté l'indice m.

Le premier se réduit à $\frac{C-A}{A}$ dans l'hypothèse $B = A$; c'est dans cette hypothèse que les astronomes en ont déterminé la valeur pour une Terre solide, au moyen des constantes de la précession et de la nutation.

Mais on voit, par notre théorème, que cette valeur n'est relative ni à l'écorce, ni au noyau, mais bien à notre ellipsoïde fictif; elle est égale à

$$\frac{1}{4}\left(\frac{a}{B}+\frac{b}{A}+\frac{a'}{B'}+\frac{b'}{A'}\right),$$

que nous écrirons

$$\frac{1}{2}(\alpha+\beta)=\mu,$$

en faisant

$$\frac{1}{2}\left(\frac{a}{B}+\frac{a'}{B'}\right)=\alpha,\quad \frac{1}{2}\left(\frac{b}{A}+\frac{b'}{A'}\right)=\beta.$$

De même, nous écrirons

$$\frac{1}{2}(\alpha-\beta)=\nu.$$

Comme B′ diffère certainement très peu de A′ (art. 8), μ se réduira à

$$\frac{1}{2}\frac{C'-A'}{A'}+\frac{1}{4}\left(\frac{C-A}{B}+\frac{C-B}{A}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{C'-A'}{A'}+\frac{C-A}{A}-\frac{1}{2}\frac{B-A}{AB}(C+B-A)\right)$$

et ν à

$$\frac{1}{2}\left(\frac{C-A}{B}-\frac{C-B}{A}\right)=\frac{B-A}{2}\frac{B+A-C}{AB}.$$

Donc

THÉORÈME II. — *Si le noyau est un ellipsoïde de révolution, le coefficient* ν *de la nutation diurne dépend exclusivement des moments d'inertie de l'écorce.*

Celui μ *de la précession et de la nutation bradléenne dépend à la fois des moments de l'écorce et du noyau.*

12. La première partie de ce théorème montre que, si la nutation diurne est absolument insensible pour une Terre solide, elle peut fort bien exister pour l'écorce terrestre. En effet, les irrégularités, produites par le refroidissement et par le soulèvement des continents, font que, si même, à l'origine de sa formation, B était à peu près égal à A, il doit en avoir différé de plus en plus, et en différera sans doute encore davantage dans la suite des temps.

Afin de nous faire une idée de la valeur que doit avoir

$$\nu = \frac{1}{2}\left(\frac{C - A}{B} - \frac{C - B}{A}\right)$$

pour l'écorce terrestre, partons de celle que nous avons déduite à la fois des observations de Struve en ascension droite, et de Gyldén en déclinaison, pour le coefficient de la nutation diurne, et qui est 0''.0666 (*). Ce coefficient est

$$\nu \times \frac{3}{8}\left(\frac{m_1}{n}\right)^2 \text{ ou } \nu \times 0''.58\,; \quad \text{d'où} \quad \nu = 0.114.$$

On voit que la nutation diurne, telle qu'elle est établie par l'observation, entraîne une différence assez considérable entre les moments d'inertie de l'écorce autour de ses axes équatoriaux principaux.

13. Ce qui précède confirme les vues de W. Thomson et de Delaunay sur l'indépendance des mouvements à courte période de l'écorce (**), vues qui ont été corroborées par l'étude de M. le professeur Ronkar sur les mouvements périodiques d'un système de points matériels (***), et qui m'ont, à juste titre, décidé à poursuivre avec confiance la recherche des constantes de la nutation diurne, malgré l'insignifiance bien démontrée de son coefficient pour une Terre solide (IV).

Et ainsi se trouve établie, *a priori*, la possibilité de l'existence de la nutation diurne, pour un globe composé d'un noyau et d'une écorce solides,

(*) *Revision des constantes de l'astronomie stellaire*, p. 56.
(**) TISSERAND, *Mécanique céleste*, t. II, p. 480.
(***) *Mémoires de l'Académie royale de Belgique*, t. LI.
(IV) TISSERAND, *Mécanique céleste*, t. II, p. 499.

séparés entre eux par une couche liquide assez mince. Car, lorsque le globe était tout entier à l'état fluide, les couches qui, plus tard, ont formé l'écorce, et celles qui ont formé le noyau, devaient affecter à très peu près la forme ellipsoïdale de révolution, et les éléments perturbateurs de ces couches devaient différer fort peu les uns des autres. Lorsque la croûte s'est solidifiée, et que les mers ont été séparées des continents, il est survenu, entre les deux éléments perturbateurs de l'écorce, des différences provenant de la surélévation de certaines parties continentales, et, plus encore, de ce que l'écorce doit être, comme l'a le premier signalé M. H. Faye, plus épaisse sous les mers que sous les continents (*).

Il résulte de cette remarque que notre *premier méridien* (qui passe par l'axe du plus petit moment d'inertie A de l'écorce) doit traverser le Pacifique en son milieu; et cette prévision concorde fort bien avec notre détermination, qui le place vers Poulkovo, c'est-à-dire entre les îles Marquises et les îles de la Société (**).

L'idée lumineuse de M. Faye permet donc de fixer approximativement la position du premier méridien; la concordance entre celle qui est ainsi fixée, et celle que nous avons déduite d'un très grand nombre d'observations, et par des procédés très différents (***), est une preuve concluante de l'existence d'une couche fluide en dessous de l'écorce solide du globe.

(*) *Contributions astronomico-géodésiques à l'étude de la formation de l'écorce terrestre.* (Extrait des COMPTES RENDUS du 12 janvier 1891.)

(**) *Revision des constantes de l'astronomie stellaire*, p. 56.

(***) Nos dernières déterminations des constantes de la nutation diurne concordent tellement bien entre elles, que nous avons pu renoncer à en faire de nouvelles.

Les observations de F.-W. Struve, en ascension droite, à Dorpat, ont donné :

$$\nu = 0''.0695 \pm 0.0019; \quad 2L = 358^\circ 15' \pm 1^\circ 34'.$$

Celles de Gyldén, en déclinaison, à Poulkovo :

$$\nu = 0''.0620 \pm 0.0024; \quad 2L = 375^\circ 56' \pm 2^\circ 15'.$$

De la combinaison de ces valeurs, on déduit

$$\nu = 0''.0666 \pm 0.0015; \quad 2L = 364^\circ \pm 1^\circ 19'.$$

On trouve, dans les Notices extraites de l'*Annuaire de l'Observatoire royal de Belgique*, à partir de 1888, et particulièrement dans celles de 1897, un grand nombre de déterminations, parmi lesquelles je signalerai spécialement celles que M. Niesten, astronome

§ 3. — *Intégration des équations relatives aux différences de vitesse entre l'écorce et le noyau.*

14. Nous avons à rechercher si les vitesses angulaires de l'écorce, l et m, ne diffèrent pas, d'une manière appréciable, des vitesses l_m et m_m de notre ellipsoïde fictif, c'est-à-dire si $l_2 = l' - l$ et $m_2 = m' - m$ sont très faibles vis-à-vis de l et de m.

En faisant la différence des équations (15) et (16), et en admettant, à cause de la petitesse des l, l', m, m', que

$$\frac{b}{A} = \frac{b'}{A'} = \beta_1, \quad \frac{a}{B} = \frac{a'}{B'} = \alpha_1,$$

on trouve, après avoir remplacé $\frac{P}{A}$, $\frac{Q}{B}$ par leurs expressions $-n\beta_1 q$, $n\alpha_1 p$ (*) :

$$(18). \quad . \quad . \quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{dl_2}{dt} + \beta_1 n m_2 = -2\alpha_2(s'\psi_2 \sin\varphi - \theta_2\cos\varphi) - n\beta_1\left(\theta_2\frac{dq}{d\theta} + \psi_2\frac{dq}{d\psi}\right); \\ &\frac{dm_2}{dt} - \alpha_1 n l_2 = -2\beta_2(s'\psi_2\cos\varphi + \theta_2\sin\varphi) + n\alpha_1\left(\theta_2\frac{dp}{d\theta} + \psi_2\frac{dp}{d\psi}\right); \end{aligned} \right.$$

à l'Observatoire royal, a déduites des différences observées, à quelques heures d'intervalle seulement, par M. Fabritius, dans la position de la Polarissime, et par moi-même, dans celle d'étoiles très voisines du pôle.

Ce mode d'observation est l'un des plus propres à manifester immédiatement l'existence de la nutation diurne.

Elle se révèle également dans la comparaison des catalogues : ainsi, la comparaison de ceux de Bruxelles et de Washington, fondés sur un même système de réduction, a donné $\nu = 0''.07$, $L = 12^h.5$ E. de Bruxelles. Les différences systématiques signalées par M. Downing entre les catalogues de Greenwich, et ceux de Melbourne et du Cap, ont été réduites très notablement par l'introduction de la nutation diurne.

Enfin, fait plus frappant, les écarts systématiques en déclinaison, constatés par Gould dans son Catalogue, par M. Ivanof dans celui de Poulkovo, et par M. Tucker dans les latitudes de Lick Observatory, s'expliquent également fort bien par la négligence de la nutation diurne dans la réduction des observations.

(Voir les Notices précitées, ainsi que le *Bulletin de l'Académie royale de Belgique*, 3e série, t. III, XVI, XVII, XXVI, XXVIII, XXXIII; les *Monthly Notices*, 1889; *Science* (New-York), 1895; les *Astronomische Nachrichten*, 1889; les *Comptes rendus* de 1886, 1887; le *Bulletin astronomique* de 1889).

(*) *Théorie des mouvements diurne et de l'axe du monde*, p. 5; *Revision des constantes de l'astronomie stellaire*, p. 64.

les quantités affectées des indices 2, telles l_2, ψ_2, représentent les différences $l' - l$, $\psi' - \psi$; à l'exception de α_2 et de β_2 qui représentent

$$(c_1 - b_1)\frac{C' - B'}{A} \quad \text{et} \quad (b_1 - a_1)\frac{B' - A'}{C}.$$

Or on a (*)

$$p = \Sigma\varkappa \sin(\upsilon_1 t \pm \varphi), \quad q = \pm \Sigma\varkappa \cos(\upsilon_1 t \pm \varphi);$$

d'où

$$\frac{dp}{d\theta} = \Sigma\varkappa' \sin(\upsilon_1 t \pm \varphi), \qquad \frac{dq}{d\theta} = \pm \Sigma\varkappa \cos(\upsilon_1 t \pm \varphi),$$

$$\frac{dp}{d\psi} = \Sigma(i \pm c')\varkappa \cos(\upsilon_1 t \pm \varphi), \quad \frac{dq}{d\psi} = \mp \Sigma(i \pm c')\varkappa \sin(\upsilon_1 t \pm \varphi);$$

car $\varkappa$ est une fonction de θ seul, et les angles $\upsilon_1 t$, qui sont des longitudes moyennes, varient tous de la même quantité $\Delta'\psi$, en vertu de ce même déplacement imprimé à la ligne de référence.

La lettre i représente les facteurs 1, 2, 3 ..., selon qu'il s'agit de longitudes simples, doubles ou triples.

Quant à l'angle φ, on voit, par la troisième des équations (12), puisque n est constant, que

$$\frac{d\varphi}{d\psi} = \cos\theta = c'.$$

15. Les équations (18) deviendront donc, si l'on supprime les indices 2 des lettres l, m, θ, ψ,

$$(19) \ldots \left\{\begin{aligned} &\frac{dl}{dt} + \beta_1 nm = -2\alpha_2(s'\psi \sin\varphi - \theta\cos\varphi) \\ &\qquad - n\beta_1\left[\theta\Sigma \pm u' \cos(\upsilon_1 t \pm \varphi) \mp \psi\Sigma(i \pm c')u \sin(\upsilon_1 t \pm \varphi)\right], \\ &\frac{dm}{dt} - \alpha_1 nl = -2\beta_2(s'\psi\cos\varphi + \theta\sin\varphi) \\ &\qquad + n\alpha_1\left[\theta\Sigma u' \sin(\upsilon_1 t \pm \varphi) + \psi\Sigma(i \pm c')u\cos(\upsilon_1 t \pm \varphi)\right]. \end{aligned}\right.$$

Nous traiterons ces équations dans l'hypothèse d'un ellipsoïde de révolu-

(*) Voir la note précédente.

tion ($\beta_1 = \alpha_1$), ce qui fera disparaître simplement les termes complémentaires de la nutation diurne. Comme les termes principaux de celle-ci sont déjà très faibles, on peut, sans erreur sensible, en négliger les compléments, provenant des légères différences entre les vitesses de l'écorce et celles de notre ellipsoïde fictif.

Nous ferons donc $\beta_1 = \alpha_1$, et, en même temps, $\beta_2 = \alpha_2$.

16. Au moyen des équations connues

$$\frac{d\theta}{dt} = -\,l \cos \varphi + m \sin \varphi,$$

$$s' \frac{d\psi}{dt} = \quad l \sin \varphi + m \cos \varphi,$$

d'où l'on tire, en regardant $s' = \sin \theta$ comme constant,

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{dl}{dt} \cos \varphi + \frac{dm}{dt} \sin \varphi + ns' \frac{d\psi}{dt},$$

$$s' \frac{d^2\psi}{dt^2} = \quad \frac{dl}{dt} \sin \varphi + \frac{dm}{dt} \cos \varphi - n \frac{d\theta}{dt},$$

les précédentes deviennent

$$(20) \quad \left\{ \begin{aligned} & s' \frac{d^2\psi}{dt^2} + n(1 + \alpha_1) \frac{d\theta}{dt} = -\,2\alpha_2 s'\psi - n\alpha_1 \left[\theta \Sigma \varkappa' \sin \upsilon_1 t + s'\psi \Sigma (i \pm c')\varkappa \cos \upsilon_1 t\right], \\ & \frac{d^2\theta}{dt^2} - n(1 + \alpha_1) s' \frac{d\psi}{dt} = -\,2\alpha_2 \theta \pm n\alpha_1 \left[\theta \Sigma \varkappa' \cos \upsilon_1 t - s'\psi \Sigma (i \pm c')\varkappa \sin \upsilon_1 t\right]. \end{aligned} \right.$$

17. Il est très difficile de trouver l'intégrale complète de ces équations. Nous devrons nous borner à en donner les termes du premier ordre, en considérant θ et ψ comme des constantes, θ'_0 et ψ'_0, dans les termes du second membre qui sont multipliés par α_1, égal à 0.0033 environ pour la Terre solide.

Si l'on pose alors

$$\theta = \theta'_0 + a \sin \upsilon_1 t + b \cos \upsilon_1 t,$$

$$s'\psi = s'\psi'_0 + b \sin \upsilon_1 t - a \cos \upsilon_1 t,$$

la substitution conduit, en égalant à zéro les facteurs de sin $\upsilon_1 t$ et de cos $\upsilon_1 t$, aux équations

$$0 = -b(\upsilon_1^2 + n_1\upsilon_1 - 2\alpha_2) + n\alpha_1\varkappa'\theta'_0,$$

$$0 = a(\upsilon_1^2 + n_1\upsilon_1 - 2\alpha_2) + n\alpha_1(i \pm c')\varkappa s'\psi'_0,$$

$$0 = -a(\upsilon_1^2 + n_1\upsilon_1 - 2\alpha_2) + n\alpha_1(i \pm c')\varkappa s'\psi'_0,$$

$$0 = -b(\upsilon_1^2 + n_1\upsilon_1 - 2\alpha_2) \mp n\alpha_1\varkappa'\theta'_0.$$

Ces quatre équations ne sont compatibles, dans le cas des signes supérieurs, que pour autant que

$$\theta'_0 = \psi'_0 = 0; \qquad \text{d'où} \qquad a = b = 0,$$

et, en réintroduisant l'indice 2,

$$\theta_2 = 0; \qquad \psi_2 = 0.$$

En ce cas, qui répond à celui de

$$p = \Sigma\varkappa \sin(\upsilon_1 t + \varphi),$$

et qui est, en particulier, celui de la précession, il n'existe *aucune différence* entre la nutation de l'écorce et celle de notre ellipsoïde fictif.

Dans le cas des signes inférieurs, les deux secondes équations sont identiques aux premières, et l'on en déduit, en posant

$$\varkappa'\theta'_0 = k', \quad (1 - c')\varkappa s'\psi'_0 = -k''$$

et

$$\upsilon_1^2 + n_1\upsilon_1 - 2\alpha_2 = \mathrm{N}:$$

$$a = \frac{k''}{\mathrm{N}} n\alpha_1, \qquad b = \frac{k'}{\mathrm{N}} n\alpha_1;$$

et, par suite,

$$(21) \quad \ldots\ldots \quad \left\{ \begin{aligned} \theta_2 &= \frac{k'}{\varkappa'} + \frac{n\alpha_1}{\mathrm{N}}(k'' \sin \upsilon_1 t + k' \cos \upsilon_1 t), \\ s'\psi_2 &= -\frac{k''}{(1 - c')\varkappa} + \frac{n\alpha_1}{\mathrm{N}}(k' \sin \upsilon_1 t - k'' \cos \upsilon_1 t). \end{aligned} \right.$$

18. On voit que des termes, qui seraient insensibles pour la Terre entière, à cause de la petitesse de leur coefficient, inclus dans le facteur $\varkappa$ du développement de la fonction perturbatrice p, pourront devenir sensibles pour l'écorce, si le dénominateur N est très petit; et que les termes usuels de nutation seront modifiés, dans le cas où ce dénominateur serait assez petit. Mais celui-ci renferme le terme $2\alpha_2$, qui dépend essentiellement de la constitution de l'écorce et de celle du noyau, et ne peut donc nullement être déterminé par la théorie, si même on pouvait se contenter d'une très grossière approximation. C'est de l'observation qu'on devra chercher à en déduire la valeur.

Nous avons laissé de côté les termes dépendants des constantes arbitraires; nous aurons à y revenir.

19. Deux théorèmes très importants se dégagent des articles précédents; le premier, que nous avons déjà signalé en passant, est celui-ci :

Théorème III. — *Les actions mutuelles des deux parties du globe ne modifient absolument en rien la précession.*

Le second, presque aussi important, est le suivant :

Théorème IV. — *Le terme du nœud sera très peu modifié par les actions mutuelles des deux parties du globe.*

Il est impossible, en effet, que pour ce terme, le dénominateur N puisse devenir assez petit. On peut l'écrire $\upsilon_2 n_1^2(1+\upsilon_2) - 2\alpha_2$, en faisant $\frac{\upsilon_1}{n_1} = \upsilon_2$. Or υ_2 est négatif pour le nœud; $n_1 = n(1+\alpha_1)$ est à peu près égal à la vitesse angulaire n de la Terre. N est donc, pour les termes du nœud, négatif, et assez grand.

On doit exclure le cas où les coefficients k' et k'', qui ne peuvent être déterminés que par l'observation, seraient assez grands : alors, en effet, tous les termes de nutation seraient altérés par les actions mutuelles du noyau et de l'écorce, et la concordance que l'on a trouvée entre les formules relatives à la Terre solide, et les observations, ne pourrait pas exister.

20. Quant aux termes solaires, l'observation seule, aidée de la présente théorie, pourra révéler dans quelle proportion ils seront altérés.

On ne se préoccupera pas des termes lunaires, qui sont très peu importants, et par eux-mêmes, et par la brièveté de leur période.

Il serait possible, enfin, que l'observation révélât l'existence d'un terme de nutation qui, absolument insensible pour la Terre solide, pourrait être sensible pour l'écorce : il suffirait pour cela que $\nu_2 n_1^2(1+\nu_2)$ approchât de $2\alpha_2$, ou, plus simplement, que ν_2 approchât de $\frac{2\alpha_2}{n_1^2}$.

Si l'observation parvient à découvrir la période de ce terme inconnu, période égale à $\frac{2\pi}{\nu_1}$, on connaîtra la valeur de α_2. En même temps, l'observation aura donné la valeur du coefficient de ce terme; si elle concorde avec celle qui se déduit de la théorie précédente, on sera assuré que ce terme nouveau est bien un terme provenant des actions luni-solaires, mais négligeable pour la Terre solide, et non d'une action cosmique, comme celle de la matière zodiacale, à laquelle certains auteurs ont voulu attribuer quelque influence.

Quand on connaîtra ainsi, approximativement, la valeur de α_2, on pourra juger de l'altération que les actions mutuelles du noyau et de l'écorce introduisent dans les termes solaires de nutation.

On peut, d'une manière générale, énoncer ce théorème (21) :

THÉORÈME V. — *Les actions mutuelles du noyau et de l'écorce altèreront, non seulement la grandeur, mais la forme même de quelques-uns des termes de la nutation.*

21. En recherchant les constantes de la nutation diurne au moyen des observations de latitude de Gyldén, nous avons trouvé, pour la correction du coefficient $0''.505$ des termes en $2\odot$ de Peters, relatifs à la déclinaison de la Polaire, $0''.0064$ (*). Mais cette correction peut provenir aussi bien de la négligence des termes correspondants de la nutation diurne, que des actions mutuelles du noyau et de l'écorce; elle est, au surplus, très faible. Il ne semble donc pas que les termes de nutation en $2\odot$ doivent être notablement altérés par ces actions.

(*) *Revision des constantes de l'astronomie stellaire*, p. 55.

Mais on ne pourrait pas affirmer qu'il en est de même des termes en $\odot \pm \Gamma$: les termes correspondants de la nutation diurne étant insensibles, s'il existe une erreur dans les coefficients des premiers, elle ne peut provenir que de la négligence des actions mutuelles.

Ne serait-ce pas à l'existence, très possible, de cette erreur [indépendamment des négligences commises dans le calcul des termes de réduction du second ordre pour les circompolaires (*)] qu'il faudrait attribuer les discordances considérables que l'on constate entre les récentes déterminations de la constante de l'aberration ?

22. Les conclusions précédemment soulignées concordent généralement avec celles qui ont été énoncées, sans démonstration, par Delaunay (**), puis par W. Thomson (Lord Elkin), dans un discours prononcé en 1876 devant l'Association Britannique réunie à Glascow, et que nous reproduisons en ces termes, empruntés à la *Mécanique céleste* de Tisserand (***) :

« En la supposant rigide, l'écorce entraînerait complètement le noyau
» dans les oscillations à longue période, telles que la précession ; mais les
» oscillations à courte période, notamment celles de six mois et de quatorze
» jours, seraient fortement altérées, sinon dénaturées. »

Elles sont bien d'accord également avec le théorème, démontré par M. le professeur Ronkar, pour le cas de deux sphères concentriques, entre lesquelles s'exercerait un frottement proportionnel à la différence des vitesses des surfaces frottantes :

« Dans les mouvements à longue période, le noyau et l'écorce se meuvent
» comme s'ils formaient une masse solidaire.

» Dans les mouvements à courte période, au contraire, l'écorce se meut
» indépendamment du noyau (IV). »

Ce théorème a été démontré d'une manière générale, par le même auteur,

(*) *Revision des constantes de l'astronomie stellaire*, p. 113.

(**) *Comptes rendus*, 13 juillet 1888.

(***) *Ibid.*, t. II, p. 480.

(IV) Notices extraites de l'*Annuaire de l'Observatoire royal de Bruxelles pour 1888.*

dans le cas d'un système de points matériels animés de mouvements périodiques (*).

Elles sont les mêmes, enfin, que celles auxquelles est arrivé, par une intégration plus laborieuse, l'auteur du mémoire inédit d'où ont été extraites les équations différentielles du mouvement du noyau et de l'écorce terrestres.

§ 4. — *De l'action du frottement de la couche fluide.*

23. Dans l'intégration des équations différentielles, il a été fait abstraction des termes qui proviennent du frottement de l'écorce sur la couche fluide; mais on a vu, par les théorèmes démontrés par M. Ronkar, que, si même l'influence du frottement était sensible, les conclusions précédentes n'en subsisteraient pas moins.

L'existence d'une couche fluide un peu considérable est, du reste, rejetée par les meilleurs auteurs, W. Thomson, G. H. Darwin; et, dans le cas d'une couche mince, l'influence du frottement est certainement peu sensible vis-à-vis de celles des actions mutuelles que le noyau et l'écorce exercent l'un sur l'autre.

Nous pourrons nous borner à rechercher les termes provenant du frottement dans le cas où il n'existe pas de forces perturbatrices, et déterminerons en même temps ceux qui renferment les constantes arbitraires, et qui sont absolument les mêmes, dans ce cas simple, que dans le cas général.

Remarquons d'abord que, pour notre ellipsoïde fictif, auquel s'appliquent les équations (17), identiquement les mêmes que celles qui conviennent à une Terre solide, les termes renfermant les constantes arbitraires sont ceux mêmes de Laplace, et que le frottement n'intervient que dans les équations relatives aux différences des vitesses angulaires de l'écorce et du noyau. Nous y supposerons $\alpha_1 = \beta_1$, $\alpha_2 = \beta_2$, comme précédemment, et nous ne tiendrons plus compte des actions extérieures, dont l'influence a été déterminée ci-dessus.

(*) *Mémoires de l'Académie royale des sciences, etc., de Belgique*, t. LI.

24. Si l'on introduit dans ces équations les termes qui proviennent du frottement, et qui sont proportionnels à un facteur f, dépendant de celui-ci, et aux différences des vitesses angulaires de l'écorce et du noyau, on aura, en supprimant les indices 2 dans l, m, θ, $s'\psi$,

$$(22) \quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{dl}{dt} + \alpha_1 nm = -2fl - 2\alpha_2(s'\psi \sin\varphi - \theta\cos\varphi), \\ &\frac{dm}{dt} - \alpha_1 nl = -2fm - 2\alpha_2(s'\psi\cos\varphi + \theta\sin\varphi) \end{aligned} \right.$$

Le procédé dont il a été fait usage, en traitant les équations (19), transformera les précédentes en

$$(23) \quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{d^2\theta}{dt^2} - n_1 s' \frac{d\psi}{dt} = -2f\frac{d\theta}{dt} - 2\alpha_2\theta, \\ &s'\frac{d^2\psi}{dt^2} + n_1\frac{d\theta}{dt} = -2fs'\frac{d\psi}{dt} - 2\alpha_2 s'\psi. \end{aligned} \right.$$

Si l'on pose

$$\theta = \Sigma p_1 e^{-\gamma_1 t}, \qquad s'\psi = \Sigma p'_1 e^{-\gamma_1 t},$$

on obtiendra, pour chacun des termes de ces sommes, les équations

$$p_1(\gamma_1^2 - 2f\gamma_1 + 2\alpha_2) + n_1 p'_1\gamma_1 = 0,$$
$$p'_1(\gamma_1^2 - 2f\gamma_1 + 2\alpha_2) - n_1 p_1\gamma_1 = 0,$$

ou, en prenant $p'_1 = i\,p_1$:

$$\gamma_1^2 + (n_1 i - 2f)\gamma_1 + 2\alpha_2 = 0,$$
$$\gamma_1^2 + \left(-\frac{n_1}{i} - 2f\right)\gamma_1 + 2\alpha_2 = 0,$$

équations qui sont identiques, si $i = \sqrt{-1}$.

On en déduit

$$\gamma_1 = f - \frac{1}{2}in_1 \pm \sqrt{f^2 - \frac{n_1^2}{4} - 2\alpha_2 - in_1 f};$$

en sorte que θ sera de la forme

$$\theta = e^{-ft}\Sigma p_1 P_1,$$

P désignant une fonction périodique de t.

Il n'y a lieu de s'occuper de ces expressions que si le frottement n'est pas négligeable. Dans ce cas, on voit que tous les termes décroissent rapidement avec le temps et sont, par conséquent, insensibles à l'époque actuelle.

Il est donc permis de faire abstraction du frottement, et il ne restera plus qu'à considérer quels sont les termes, renfermant les constantes arbitraires, qui proviennent des actions mutuelles seules, dans les équations précédentes (23).

25. Celles-ci se réduiront à

$$(24) \quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{d^2\theta}{dt^2} - n_1 s' \frac{d\psi}{dt} = -2\alpha_2\theta, \\ &s'\frac{d^2\psi}{dt^2} + n_1 \frac{d\theta}{dt} = -2\alpha_2 s'\psi. \end{aligned} \right.$$

En y posant

$$\theta = \varepsilon_1 \sin(b_1 + \beta_1 t) + \varepsilon_2 \sin(b_2 + \varphi + \beta_2 t),$$

$$s\,\psi = \varepsilon_1 \cos(b_1 + \beta_1 t) + \varepsilon_2 \cos(b_2 + \varphi + \beta_2 t),$$

on trouve que β_1 et β_2 doivent satisfaire aux équations suivantes :

$$\beta_1^2 - n_1\beta_1 - 2\alpha_2 = 0,$$

$$(n + \beta_2)^2 - n_1(n + \beta_2) - 2\alpha_2 = 0;$$

d'où

$$\beta_1 = n + \beta_2 = \frac{n_1}{2} \pm \sqrt{\frac{n_1^2}{4} + 2\alpha_2},$$

qu'on peut écrire très approximativement, puisque $2\alpha_2$ est très faible relativement à $\frac{n_1^2}{4}$, et que, de plus, $n_1 = n(1 + \alpha_1)$ diffère fort peu de n :

$$\beta_1 = n + \beta_2 = \frac{n_1}{2} \pm \left(\frac{n_1}{2} + \frac{2\alpha_2}{n_1}\right);$$

$$b_1 + \beta_1 t = \left\{ \begin{aligned} &b_1 + \varphi + \frac{2\alpha_2}{n_1} t, \\ &b_1 - \frac{2\alpha_2}{n_1} t; \end{aligned} \right. \qquad b_2 + \varphi + \beta_2 t = \left\{ \begin{aligned} &b_2 + \varphi + \frac{2\alpha_2}{n_1} t, \\ &b_2 - \frac{2\alpha_2}{n_1} t. \end{aligned} \right.$$

Les valeurs de θ et de $s'\psi$, dans lesquelles nous réintroduirons les indices 2, se réduiront donc à

$$(25) \quad \left\{ \begin{aligned} \theta_2 &= \varepsilon_1 \sin\left(b_1 - \frac{2\alpha_2}{n_1} t\right) + \varepsilon_2 \sin\left(b_2 + \varphi + \frac{2\alpha_2}{n_1} t\right), \\ s'\psi_2 &= \varepsilon_1 \cos\left(b_1 - \frac{2\alpha_2}{n_1} t\right) + \varepsilon_2 \cos\left(b_2 + \varphi + \frac{2\alpha_2}{n_1} t\right). \end{aligned} \right.$$

26. Voici donc deux termes, entièrement nouveaux, provenant des actions mutuelles : le premier est rétrograde et a une période égale à $\frac{n_1\pi}{\alpha_2}$; le second, de forme eulérienne, est direct et a la même période, abstraction faite du caractère diurne de ce terme.

Il est à présumer que celui-ci est le terme de Chandler, d'une période de 431 jours, dont l'existence semble bien établie par les nombreuses recherches de l'astronome américain, mais n'avait nullement été expliquée en théorie.

S'il en est ainsi, on a, en prenant pour unité le jour sidéral, $\frac{n_1\pi}{\alpha_2} = 432$; et, comme n diffère fort peu de 2π, α_2 sera à peu près égal à $\frac{2\pi^2}{432} = 0.0436$.

On en déduirait approximativement (art. 7), pour $(c_1 - b_1)\frac{A'}{A}$, supposé égal à $(c_1 - a_1)\frac{B'}{B}$, la valeur 13.3.

27. L'introduction des constantes arbitraires dans les équations relatives aux différences de vitesse entre le noyau et l'écorce, nous a conduit à ce résultat inattendu :

Théorème VI. — *Indépendamment de l'altération que les actions mutuelles du noyau et de l'écorce peuvent introduire dans certains termes de nutation, provenant du développement de la fonction perturbatrice, elles introduisent, en obliquité et en longitude, deux termes nouveaux, l'un à longue période* $\frac{n_1\pi}{\alpha_2}$ (431 jours?), *l'autre de forme eulérienne et de même période, abstraction faite de son caractère diurne.*

Chacun de ces termes renferme deux constantes arbitraires, qui ne peuvent être déterminées que par l'observation. Il en est de même de la période, à cause de notre ignorance absolue quant à la valeur du coefficient α_2.

Il y a donc deux nutations eulériennes, qui proviennent des conditions initiales du mouvement : la première est celle de notre ellipsoïde fictif; elle est commune à l'écorce et au noyau; sa période est de 304 jours. La seconde provient des différences entre les positions des axes et entre les vitesses angulaires de l'écorce et du noyau; elle affecte, comme la nutation eulérienne proprement dite, le caractère diurne affirmé par Laplace quant à celle-ci; sa période dépend des actions mutuelles, et ne peut être déterminée que par l'observation.

De plus, il existe une seconde nutation, provenant des actions mutuelles, qui a la même période que la précédente (abstraction faite du caractère diurne de celle-ci), et dont le sens est rétrograde.

§ 5. — *Développement de la fonction perturbatrice.*

28. Des termes nouveaux, insensibles pour la Terre entière, pourraient, on l'a vu (art. 20), devenir sensibles pour l'écorce, si le dénominateur N était très petit pour ces termes.

Afin de pouvoir les découvrir, nous développerons, plus complètement qu'on ne l'a fait, la fraction perturbatrice, en laissant de côté les termes lunaires, dont les expressions connues sont très suffisamment correctes.

Il s'agit de trouver le développement de

$$p = h\frac{4xz}{R_2}\left(\frac{D}{R}\right)^3.$$

Pour le Soleil, on a

$$\frac{4xz}{R^2} = s'' \sin \varphi + s'(2\lambda)_1,$$

et

$$\left(\frac{D}{R}\right)^3 = 1 + \frac{9}{2}e^2 + \frac{21}{2}e^4 + 3e\left(1 + \frac{15}{4}e^2\right)\cos v + \frac{3}{2}e^2(1 + 3e^2)\cos 2v + \frac{1}{4}e^3\cos 3v \text{ (*)}.$$

Si l'on remplace, dans ces expressions, la longitude et l'anomalie vraies,

(*) Voir *Revision des constantes de l'astronomie stellaire*, pp. 67 et suivantes.

λ et v, du Soleil, en fonction de sa longitude et de son anomalie moyennes, $\odot$ et u, d'après les tables de Le Verrier, abstraction faite du terme en $☾ - \odot$:

$$\lambda = \odot + e_1 \sin u + e_2 \sin 2u + e_3 \sin 3u + e_4 \sin 4u - e_2' \sin \Omega - e_3' \sin 2\odot = \odot + \varepsilon,$$

on trouvera, en conservant nos notations antérieures (*),

$$
\begin{aligned}
(2\lambda)_1 \left(\frac{D}{R}\right)^3 = & \left\{ a_0\left(1 - 2E_2 + \frac{2}{3}G_4\right) - a_1\left(e_1 + \frac{5}{2}E_3 - \frac{13}{6}F_3\right) \right\} (2\odot)_1 \\
& + \left\{ a_0\left(e_1 - E_3 - \frac{2}{3}F_3\right) + \frac{a_1}{2}\left(1 + e_2 - \frac{9}{2}E_2 + \frac{1}{2}E_2'\right) \right\} (3\odot - \Gamma)_1 \\
& + \left\{ a_0\left(e_1 + E_3 - \frac{2}{3}F_3\right) - a_1\left(1 - \frac{1}{2}E_2 - \frac{3}{2}e_2 + \frac{9}{4}E_2'\right) \right\} (\odot + \Gamma)_1 \\
& - a_0\left(e_2' - \frac{2}{3}F_4'''\right) \left\{ (2\odot + \Omega)_1 - (2\odot - \Omega)_1 \right\} \\
& + \left(a_0 E_3' - \frac{1}{2}a_1 e_2'\right) \left\{ (\odot + \Gamma + \Omega)_1 - (\odot + \Gamma - \Omega)_1 \right\} \\
& + \left(a_0 E_4''' + \frac{3}{2}a_1 e_3'\right) (\odot - \Gamma)_1 \\
& - \left(a_0 E_4''' - \frac{1}{2}a_1 e_3'\right) (-\odot + \Gamma)_1 \\
& + \left\{ a_0\left(E_3 - e_3 - \frac{2}{3}F_3'\right) - \frac{a_1}{2}\left(e_2 - \frac{1}{2}E_2'\right) + a_3 \right\} (\odot + 3\Gamma)_1 \\
& + a_0 E_4'''(3\odot + \Gamma)_1 \\
& + a_0 e_3'(O)_1 \\
& + \left\{ a_0\left(E_2' - e_2 + \frac{2}{3}F_4 - \frac{1}{3}G_4'\right) - \frac{a_1}{2}\left(e_1 + 3e_3 + \frac{1}{2}E_3 - \frac{14}{3}F_3 + \frac{27}{6}F_3'\right) + a_2 - \frac{1}{2}a_3 e_1 \right\} (2\Gamma)_1 \\
& + \left\{ a_0\left(E_4'' - \frac{2}{3}F_4''\right) + \frac{1}{4}a_1 E_3' \right\} \left\{ (2\Gamma + \Omega)_1 - (2\Gamma - \Omega)_1 \right\}.
\end{aligned}
$$

Les indices des divers coefficients indiquent l'ordre de ceux-ci par rapport aux puissances de l'excentricité; les coefficients du quatrième ordre les plus forts surpassent à peine $0''.1$.

(*) Voir *Revision des constantes de l'astronomie stellaire*, pp. 67 et suivantes.

29. Nous écrirons simplement le second membre, multiplié par s', et augmenté de $\sin\varphi\left(\frac{D}{R}\right)^3$, afin d'obtenir l'expression complète de

$$\frac{p}{h} = \frac{4xz}{R_2}\left(\frac{D}{R}\right)^3$$

relative au Soleil, en supprimant les termes dont la pratique astronomique n'a pas à tenir compte :

$$(26)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{p}{h} = {} & s''a_0 \sin\varphi + s'b_0(0)_1 - s'c_0(2\Gamma)_1 - s''c_4[\odot - \Gamma] \\ & + s'\{c_1(2\odot)_1 + c_2(3\odot - \Gamma)_1 - c_3(\odot + \Gamma)_1 - c'_6[(2\odot + \Omega)_1 - (2\odot - \Omega)_1] \\ & \quad + c'_3[(\odot + \Gamma + \Omega)_1] - c'_4[(2\Gamma + \Omega)_1 - (2\Gamma - \Omega)_1] \\ & \quad - c''_3(-\odot + 3\Gamma)_1 + c'''_3(-\odot + \Gamma)_1 + c'_4(\odot - \Gamma)_1\}. \end{aligned}\right.$$

Si nous comparons cette expression à celle de notre *Revision des constantes de l'astronomie stellaire*, page 76, nous voyons qu'il n'y a lieu d'ajouter à cette dernière que les termes en $\odot + \Gamma \pm \Omega$ et en $(-\odot + 3\Gamma)$, de coefficients respectifs $0''.2$ et $-0''.02$, qui sont absolument insensibles pour une Terre solide, et le seront certainement aussi pour l'écorce, ainsi que les termes du quatrième ordre en $2\Gamma \pm \Omega$.

Quant aux termes en $(\odot - \Gamma)$ et $(-\odot + \Gamma)$, trouvés antérieurement (*ibid.*, p. 73), ils ont pour coefficients respectifs $0''.13$ et $0''.003$, qui sont plus faibles que celui des termes en $\odot + \Gamma + \Omega$.

Or ces derniers seront bien plus considérablement augmentés que les premiers par l'intégration.

Nous ferons donc abstraction de ceux-ci.

30. Pour tous les termes précédents, qui sont de la forme $\varkappa \sin(\upsilon_1 t + \varphi)$, nous avons vu que les différences entre les $\Delta\theta$ et les $\Delta\psi$ de l'écorce et du noyau s'expriment, dans le cas du signe inférieur $(-\varphi)$ *seulement* (21), par

$$\Delta\theta - \Delta\theta' = -\frac{n\alpha_1}{N}(K'' \sin\upsilon_1 t + K' \cos\upsilon_1 t),$$

$$s'(\Delta\psi - \Delta\psi') = -\frac{n\alpha_1}{N}(-K'' \cos\upsilon_1 t + K' \sin\upsilon_1 t),$$

où

$$N = \upsilon_1^2 + n_1\upsilon_1 - 2\alpha_2 \quad \text{et} \quad n_1 = n(1 + \alpha_1).$$

Si $(\Delta\theta)_1$ et $(\Delta\psi)_1$ représentent les valeurs calculées pour notre ellipsoïde fictif (Terre solide), et qui sont respectivement

$$\frac{\Delta\theta + \Delta\theta'}{2} \quad \text{et} \quad \frac{\Delta\psi + \Delta\psi'}{2},$$

celles qui se rapportent à l'écorce seront

$$(27) \ldots\ldots \left\{ \begin{aligned} \Delta\theta &= (\Delta\theta)_1 - \frac{1}{2}\frac{n\alpha_1}{N}(k'' \sin \upsilon_1 t + k' \cos \upsilon_1 t), \\ s'\Delta\psi &= s'(\Delta\psi)_1 - \frac{1}{2}\frac{n\alpha_1}{N}(- k'' \cos \upsilon_1 t + k' \sin \upsilon_1 t). \end{aligned} \right.$$

De plus, nous avons vu (25) que les actions mutuelles introduisent deux termes, dépendants de constantes arbitraires, d'arguments

$$-\frac{2\alpha_2}{n_1}t \quad \text{et} \quad \left(n + \frac{2\alpha_2}{n_1}t\right),$$

le premier de période $\frac{n_1\pi}{\alpha_2}$, le second, diurne.

Il y a lieu de présumer que ce dernier est celui de Chandler, comme nous l'avons dit ci-dessus (art. 26); par suite, α_2 serait égal à $\frac{n_1\pi}{432}$ environ, le jour sidéral étant pris pour unité.

Pour que nos termes complémentaires, qui ont $\frac{1}{2}\,n\alpha_1$ pour facteur, puissent devenir sensibles, il faut que N soit très petit et, par suite, que υ_1 approche de $\frac{2\pi}{432}$, c'est-à-dire que la période de ces termes approche de 432 jours sidéraux. Les seuls pour lesquels cette circonstance puisse se présenter, sont ceux qui dépendent de la simple longitude du Soleil, augmentée d'arguments à longue période, et particulièrement les termes en $\odot + \Gamma + m\Omega$.

Mais on a vu qu'il y a déjà, dans ceux du développement précédent, des termes tellement faibles que nous avons pu les omettre. A plus forte raison ne tiendrons-nous nul compte de ceux en $\odot + \Gamma + 2\Omega$, $\odot + \Gamma + 4\Omega$, quoique ces derniers, d'une période de 465 jours, soient accrus dans une proportion très considérable par l'intégration. Ce ne serait, toutefois, que dans le cas où α_2 approcherait très fort de $\frac{2\pi}{465}$, que ces derniers termes pourraient devenir sensibles.

31. Le coefficient de $\Delta\theta$ et de $s'\Delta\psi$, $-\frac{1}{2}\frac{\alpha_1 n}{N}$, doit encore être multiplié par h, puisque la fonction perturbatrice est (art. 28) :

$$p = h\frac{4\varkappa z}{R_2}\left(\frac{D}{R}\right)^5.$$

Or

$$-h = \frac{3}{4}\frac{m_1^2}{n};$$

le coefficient est donc

$$\frac{3}{8}\frac{m_1^2}{n}\alpha_1\frac{n}{N} = \frac{n^2}{N}\,[\bar{9}.962].$$

Mais

$$N = n^2\left[\upsilon_2(1+\upsilon_2) - \frac{1}{432}\right],$$

et le coefficient précédent se réduit à

$$\frac{[\bar{9}.962]}{\upsilon_2(1+\upsilon_2)-i}, \quad i = \frac{1}{432},$$

en écrivant $n\upsilon_1 = n^2\upsilon_2^2$ au lieu de $n_1\upsilon_1 = n(1+\alpha_1)\upsilon_1$. On a pris $\alpha_1 = 0.00328$, comme pour la Terre solide.

Si $\upsilon_2(1+\upsilon_2) - i$ n'est pas excessivement petit, on voit que les coefficients $\varkappa$ des termes de p doivent être considérables, pour que les termes complémentaires puissent être sensibles, à moins que les constantes k' et k'' ne soient très grandes, ce qui ne semble guère probable (*).

Or, pour les termes en $\odot + \Gamma + \Omega$, qui sont accrus dans la plus forte proportion, le logarithme de $\upsilon_2(1+\upsilon_2) - i$ est $\bar{3}.566$; celui du terme complémentaire en $\odot + \Gamma + \Omega$ sera donc $\bar{6}.396$; et comme, dans l'expression de $\frac{p}{h}$, le facteur des termes de cet argument est inférieur à $0''.5$, les termes

(*) Les observations de Gyldén nous ont conduit, en effet, à une correction très faible du coefficient des termes en $2\odot$ (art. 21).

complémentaires en $\odot + \Gamma + \Omega$ seront absolument négligeables. Il en est de même, à plus forte raison, de ceux en $(-3\odot + \Gamma)$.

32. Pour les termes dépendants de la simple longitude du Soleil,

$$s''c_4[\odot - \Gamma] \quad \text{et} \quad s'c_3(\odot + \Gamma)_1,$$

on a

$$\upsilon_2(1 + \upsilon_2) - i = \frac{1}{366} - \frac{1}{432},$$

dont l'inverse est $[3.387]$, qui, multiplié par $[\bar{9}.962]$, donne $[\bar{5}.349]$. Mais, en secondes, $c_4 = [3.716]$, $c_3 = [3.238]$.

Les coefficients des termes complémentaires sont donc $[\bar{1}.065] = 0''.116$, et $[\bar{2}.587] = 0''.039$, si notre hypothèse sur l'identité du nouveau terme eulérien, provenant des actions mutuelles, avec celui de Chandler, est exacte.

Il y a lieu de rechercher aussi, à cause du fort coefficient c_1 des termes en $2\odot$, si ceux-ci ne seront pas altérés. Pour eux,

$$\upsilon_2(1 + \upsilon_2) - i = \frac{2}{367} - \frac{1}{432},$$

dont l'inverse est $[2.504]$, qui, multiplié par $[\bar{9}.962]$, donne $[\bar{6}.466]$, et par $c_1 = [\bar{5}.314]$: $[\bar{1}.780] = 0''.60$. L'altération serait donc plus considérable que celle des termes précédents.

Pour les uns et les autres, du reste, il y a lieu de déterminer par l'observation les constantes k' et k''.

Nous y ferons rentrer le coefficient α_1, pris ci-dessus égal à 0.00328, et ferons (27) $\alpha_1 k' = k_1$, $\alpha_1 k'' = k_2$. Au lieu du coefficient précédent

$$[\bar{9}.962] = \frac{3}{8}\left(\frac{m_1}{n}\right)^2 \alpha_1,$$

on aura

$$\frac{3}{8}\left(\frac{m_1}{n}\right)^2 = [\bar{6}.446],$$

qui, multiplié par $\frac{1}{\upsilon_2(1 + \upsilon_2) - i}$, et ensuite par c_1, c_4, c_3, donne :

$$d_1 = [7.136], \quad d_4 = [6.421], \quad d_3 = [5.943].$$

33. En désignant par $\Delta_1\theta$ et $\Delta_1\psi$ les termes solaires complémentaires en obliquité et en longitude, et en se rappelant que, abstraction faite des termes en $+\varphi$, qui ne donnent lieu à aucune correction, on peut se borner à écrire

$$(\mathrm{M})_1 = (1 + c')\sin(\mathrm{M} - \varphi),$$

$$[\mathrm{M}] = \sin(\mathrm{M} - \varphi),$$

on trouvera :

$$\Delta_1\theta = \frac{1}{2}s'(1 + c')\left\{d_1[k_2 \sin 2\odot + k_1 \cos 2\odot] - d_3[k_2 \sin(\odot + \Gamma) + k_1 \cos(\odot + \Gamma)]\right\}$$
$$- \frac{1}{2}s''d_4[k_2 \sin(\odot - \Gamma) + k_1 \cos(\odot - \Gamma)].$$

$$s'\Delta_1\psi = \frac{1}{2}s'(1 + c')\left\{d_1[- k_2 \cos 2\odot + k_1 \sin 2\odot] - d_3[- k_2 \cos(\odot + \Gamma) + k_1 \sin(\odot + \Gamma)]\right\}$$
$$- \frac{1}{2}s''d_4[- k_2 \cos(\odot - \Gamma) + k_1 \sin(\odot - \Gamma)],$$

ou, en effectuant les calculs numériques :

$$(28)\left\{\begin{aligned} \Delta_1\theta &= [6.707]\left\{k_2 \sin 2\odot + k_1 \cos 2\odot\right\} - [5.419]\left\{k_2 \sin(\odot + \Gamma) + k_1 \cos(\odot + \Gamma)\right\} \\ &\quad - [6.011]\left\{k_2 \sin(\odot - \Gamma) + k_1 \cos(\odot - \Gamma)\right\}. \\ s'\Delta_1\psi &= [6.707]\left\{-k_2 \cos 2\odot + k_1 \sin 2\odot\right\} - [5.419]\left\{-k_2 \cos(\odot + \Gamma) + k_1 \sin(\odot + \Gamma)\right\} \\ &\quad - [6.011]\left\{-k_2 \cos(\odot - \Gamma) + k_1 \sin(\odot - \Gamma)\right\}. \end{aligned}\right.$$

Les coefficients qui entrent dans ces expressions ont été calculés dans l'hypothèse que le terme eulérien, provenant des actions mutuelles, a une période de 431 jours.

S'il n'en est pas ainsi, cette période devra être recherchée empiriquement; elle servira à déterminer la valeur de α_2, d'où l'on déduira, comme nous venons de le faire, les coefficients numériques de la formule (28).

Elle servira également à la détermination, au moyen de bonnes séries d'observations d'une même étoile, des constantes arbitraires de la formule (25), de même que des facteurs k_1 et k_2 de la formule (28).

On connaîtra alors tous les termes complémentaires de nutation, (25) et (28), dus aux actions mutuelles.

34. On sait que, avant la réduction des longitudes moyennes en longitudes vraies, les expressions de la nutation renferment un terme dépendant de la double longitude du périgée solaire. Ce terme disparaît au moyen de cette réduction, de même que le terme en $3\odot - \Gamma$ (le même procédé, appliqué aux termes lunaires, fait disparaître ceux en $3☾ - \Gamma'$) (*).

Le terme en 2Γ reparaîtrait si les facteurs k_1 ou k_2 étaient un peu sensibles, puisqu'on devrait remplacer $\cos 2\odot_m$ ou $\sin 2\odot_m$ par

$$\cos 2\odot - \frac{5}{4} e^2 \cos 2\Gamma \quad \text{ou} \quad \sin 2\odot - \frac{5}{4} e^2 \sin 2\Gamma.$$

Mais ce cas est fort improbable, et nous laisserons de côté les termes en 2Γ dans l'expression complète que nous donnerons de la nutation en obliquité et en longitude.

§ 6. — *Expression de la nutation de l'écorce terrestre en obliquité et en longitude.*

35. Cette expression se décomposera en deux parties :

I. Nutation générale ;

II. Nutation spéciale.

La première est indépendante, la seconde dépend de la longitude occidentale de l'observatoire par rapport au premier méridien (qui passe par l'axe du plus petit moment d'inertie A de l'écorce), en sorte que φ, temps sidéral de ce méridien, est égal à $L + \tau$, τ étant celui de l'observatoire.

La nutation générale I renfermera, outre les termes usuels, des termes nouveaux qui ne peuvent pas être négligés dans une réduction précise (**).

On n'a encore tenu nul compte de la nutation spéciale II, si l'on excepte les tentatives de Chandler quant à la recherche du terme eulérien.

(*) *Revision des constantes de l'astronomie stellaire,* p. 85.

(**) En ce qui concerne les développements de $(\Delta\theta)_1$ et de $s'(\Delta\psi)_1$, relatifs à notre ellipsoïde fictif (27), nous nous bornerons à reproduire ceux qui sont donnés dans notre *Revision des constantes de l'astronomie stellaire,* page 87. Le lecteur en trouvera la démonstration dans ce dernier travail.

Sous le n° III, enfin, figureront les termes qui proviendraient d'un déplacement possible du pôle d'inertie dû aux précipitations atmosphériques (*). Quelques astronomes, d'une certaine compétence en mécanique, ont émis l'opinion que les dépressions ou les surpressions atmosphériques pouvaient jouer le même rôle que les précipitations. C'est une profonde erreur : les pressions des différents secteurs de l'atmosphère peuvent être considérées comme des forces extérieures ; si la somme de leurs moments n'est pas nulle, elles pourront déplacer, d'une quantité très faible, l'axe d'inertie dans l'espace, mais elles ne le déplaceront dans le corps que de la 300e partie de cette quantité, ce qui sera tout à fait insignifiant.

36. Les formules des variations périodiques de l'axe d'inertie de l'écorce, en obliquité et en longitude, sont :

$$
(29) \quad \left\{
\begin{array}{lll}
 & \Delta\theta = \mathbf{I.} & 9''.215 \cos \Omega - 0''.090 \cos 2\Omega + 0''.553 \cos 2\odot \\
\text{Bradl.} & & - 0''.009 \cos(\odot + \Gamma) + 0''.096 \cos 2\text{☾} + 0''.018 \cos(2\text{☾} - \Omega) \\
 & & + 2d_1 \cos(2\odot + \theta) - 2d_3 \cos(\odot + \Gamma - \theta) + \gamma'' \sin(\beta''_0 - \beta' t). \\
\text{Eul.} & \mathbf{II.} & - \gamma \sin(\varphi + \beta t + \beta_0) + \gamma' \sin(\varphi + \beta' t + \beta'_0). \\
\text{Diurne} & & + \nu[\Sigma_1 \cos 2\varphi + \Sigma_2 \sin 2\varphi]. \\
 & \mathbf{III.} & - i \sin(\varphi + \mathrm{I}) \cos(\odot - \mathrm{A}).
\end{array}
\right.
$$

$$
(30) \quad \left\{
\begin{array}{lll}
s'\Delta\psi = & \mathbf{I.} & 0.00023\Delta\theta.t - 6''.864 \sin \Omega + 0''.090 \sin 2\Omega - 0''.554 \sin 2\odot \\
\text{Bradl.} & & + 0''.009 \sin(\odot + \Gamma) + 0''.054 \sin(\odot - \Gamma) - 0''.097 \sin 2\text{☾} - 0''.014 \sin(2\text{☾} - \Omega) \\
 & & + 0''.027 \sin(\text{☾} - \Gamma') + 2d_1 \sin(2\odot - \theta) - 2d_3 \sin(\odot + \Gamma - \theta) + \gamma'' \cos(\beta''_0 - \beta' t). \\
\text{Eul.} & \mathbf{II.} & - \gamma \cos(\varphi + \beta t + \beta_0) + \gamma' \cos(\varphi + \beta' t + \beta'_0). \\
\text{Diurne} & & + \nu[- \Sigma_1 \sin 2\varphi + \Sigma_2 \cos 2\varphi]. \\
 & \mathbf{III.} & - i \cos(\varphi + \mathrm{I}) \cos(\odot - \mathrm{A}).
\end{array}
\right.
$$

Σ_1 et Σ_2 représentent respectivement :

$$\Sigma_1 : \quad - 1.152 - 0.154 \cos \Omega + 0.36 \cos 2\odot + 0.84 \cos 2\text{☾},$$

$$\Sigma_2 : \quad - 0.18 \sin \Omega + 0.39 \sin 2\odot + 0.88 \sin 2\text{☾},$$

en omettant quelques termes lunaires peu importants.

(*) Voir *Essai sur les variations de latitude*, 1894.

Nous avons trouvé $\nu = 0''.0666$, et $L = 2^h15^m$ E. de Greenwich; d'où $L = 2^h15^m + l$, pour un lieu situé à l heures à l'ouest de Greenwich; φ est égal à $L + \tau$, τ étant l'heure sidérale de l'observation.

Les arguments employés dans ces formules sont les longitudes *vraies*.

Le terme en γ est le terme eulérien proprement dit; sa période est de 304 jours moyens, abstraction faite de son caractère diurne.

Le terme en γ' est probablement le terme chandlérien, dont la période est de 431 jours, de même que celle du terme en γ''.

Il y a donc deux nutations eulériennes, de caractère diurne, qui proviennent des conditions initiales du mouvement.

La première est celle de notre ellipsoïde fictif : elle est commune à l'écorce et au noyau.

La seconde provient des différences entre les positions des axes et entre les vitesses angulaires de l'écorce et du noyau.

Mais, en outre, il existe une troisième nutation, sans caractère diurne, de même période que celle de cette dernière.

Cette période dépend de α_2 et ne peut être actuellement déterminée que par l'observation. Il est à présumer que c'est la période de Chandler.

Il y aura lieu de rechercher également s'il n'existe pas de termes dépendants du périgée lunaire. Si cette éventualité, que nous considérons comme fort probable, se réalise, il y aura également un terme dépendant du périgée solaire. A raison de la longueur de sa période, ce dernier terme devra rentrer dans celui de la précession, et il en résultera une modification plus ou moins sensible dans la constante de la précession luni-solaire (*).

(*) Voir, sur ce sujet, notre *Traité des réductions stellaires*, pages 37 et suivante, où nous avons démontré que l'on ne peut pas déterminer les coefficients de ces termes au moyen d'observations sur le pendule, comme Bessel, Peters et Nyrén ont tenté de le faire.

§ 7. — *Des variations en ascension droite et en déclinaison.*

37. On sait que les variations en ascension droite et en déclinaison se déduisent des précédentes au moyen des formules

$$\begin{aligned}\Delta\alpha &= \cos\theta\,\Delta\psi + \operatorname{tg}\delta(\sin\alpha\, s'\Delta\psi - \cos\alpha\Delta\theta),\\ \Delta\delta &= \qquad\qquad\qquad \cos\alpha\, s'\Delta\psi + \sin\alpha\,\Delta\theta,\end{aligned}$$

auxquelles on devra ajouter, pour les circompolaires, les termes du second ordre dont il sera fait mention plus bas.

Occupons-nous, en particulier, des nutations eulérienne et chandlérienne, dans le cas d'observations de passages supérieurs et inférieurs consécutifs. Alors $\varphi \doteq L + \alpha$ pour les premiers, $L + \alpha + 12^h$ pour les seconds.

On aura, en laissant de côté le terme $\cos\theta\Delta\psi$ de ces nutations, qui rentre dans la correction de la pendule :

$$(31)\ldots\ldots \left\{\begin{aligned}\cot\delta\,\Delta\alpha_s &= \gamma\sin(\beta_1 + \beta t) - \gamma'\sin(\beta_1' + \beta' t),\\ \cot\delta\,\Delta\alpha_i &= -\gamma\sin(\beta_1 + \beta t) + \gamma'\sin(\beta_1' + \beta' t),\\ \Delta\delta_s &= -\gamma\cos(\beta_1 + \beta t) + \gamma'\cos(\beta_1' + \beta' t),\\ \Delta\delta_i &= \gamma\cos(\beta_1 + \beta t) - \gamma'\cos(\beta_1' + \beta' t),\end{aligned}\right.$$

où β_1 et β_1' représentent $\beta_0 + L$ et $\beta_0' + L$.

On voit que ces deux nutations s'éliminent dans la moyenne des observations faites à deux passages consécutifs (supérieur et inférieur).

Il en serait de même quant aux déviations périodiques de la verticale et quant aux déplacements de l'axe d'inertie, à raison de leur caractère également diurne.

L'élimination de ces quatre variations, dont l'avant-dernière joue un très grand rôle dans les observations de latitude, est de nature à établir, comme nous nous proposons de le faire prochainement, l'invariabilité du pôle d'inertie, affirmée par nous depuis plus de sept ans (*).

(*) *B. A.*, 1890. *Bull. de l'Académie royale de Belgique*, 1892, n° 12.

38. Si, au lieu de prendre la moyenne des observations de deux passages (s et i) consécutifs, on en fait la différence, on éliminera la nutation bradléenne ainsi que la nutation diurne, et l'on doublera les nutations eulérienne et chandlérienne, de même que la variation annuelle provenant d'un déplacement du pôle d'inertie; mais on doublera également les termes provenant des déviations périodiques de la verticale, dont l'expression est encore à trouver.

Et c'est là, pour nous, la source de la plus grave difficulté qui se rencontre dans la solution de la question de la variation des latitudes.

39. Enfin, à raison de l'indépendance des mouvements à courte période de l'écorce, celle-ci n'a pas une vitesse angulaire rigoureusement uniforme autour de l'axe géographique, et il en résulte, pour l'angle φ, que la trace de l'équateur sur l'écliptique fait avec la ligne des équinoxes des variations périodiques déterminées par la formule (*)

$$(32) \quad . \quad . \quad \Delta\varphi = -\frac{1}{2}\nu[0.5 \sin 2\varphi + 2.15 \sin(2☾ - 2\varphi) + 0.92 \sin(2\odot - 2\varphi)],$$

et que nous avons désignées sous le nom de libration terrestre (**).

L'expression complète de l'angle φ est donc

$$\varphi = n_1 t + \Delta\mu + \Delta\varphi;$$

$\nu(32)$ est le coefficient de la nutation diurne $\frac{0^s.067}{15}$; $\Delta\mu$ la nutation équatoriale de l'équinoxe.

La définition de l'heure *correcte*, c'est-à-dire *rigoureusement uniforme*, ne peut être que

$$h = n_1 t.$$

On a donc $\varphi = h + \Delta\mu + \Delta\varphi$; et l'on en conclut que l'*ascension droite* d'une étoile est égale à l'*heure correcte* de son passage supérieur au méri-

(*) *Théorie des mouvements diurne, etc., de l'axe du monde*, et *Revision des constantes de l'astronomie stellaire*, p. 92.

(**) *Annuaire de l'Observatoire royal de Belgique pour 1887.*

dien, augmentée de la *nutation équatoriale de l'équinoxe* et de la *libration terrestre* en cet instant.

(Voir, sur ce sujet, *Théorie des mouvements diurne, annuel et séculaire de l'axe du monde*, et *Revision des constantes de l'astronomie stellaire*, pp. 93 et suiv.)

§ 8. — *Formules complémentaires de la réduction au lieu apparent.*

40. Les formules précédentes permettent de passer du lieu moyen d'un astre à son lieu vrai.

Pour obtenir le lieu apparent, il faut encore introduire l'influence de l'aberration, de la parallaxe et de la réfraction.

Nous ne nous occuperons pas des deux dernières.

Quant à l'aberration, comme aucun traité n'en renferme les expressions complètes, en ce qui concerne les termes du second ordre, nous croyons utile de reproduire ceux que nous avons donnés, avec démonstration, dans notre *Revision des constantes de l'astronomie stellaire*, pages 98 et suivantes (*).

Les formules qui suivent renferment les expressions complètes des termes du second ordre, tant de la nutation que de l'aberration.

La lettre $\mathbf{d}$ y représente la nutation (précession comprise); Δ, la réduction complète (nutation et aberration); r, la réfraction; k et k', les constantes des aberrations annuelle et systématique; A$'$, l'Apex du mouvement du système solaire; A_δ, l'aberration en déclinaison; s' et c', les sinus et cosinus de l'obliquité θ; α, δ, les coordonnées moyennes :

$$(55)\quad \left\{\begin{aligned}
\Delta^2\alpha &= \frac{2}{\sin 2\delta}\left(1-\frac{1}{2}\cos^2\delta\right)\Delta\alpha\Delta\delta - \operatorname{tg}\delta\,\mathbf{d}\delta\, c'\mathbf{d}\psi + \Delta\varphi \\
&\quad - k'\sec\delta[\operatorname{tg}\delta\sin(A'-\alpha)\,\mathbf{d}\delta - \cos(A'-\alpha)\,\mathbf{d}\alpha] \\
&\quad + kk'\sec^2\delta[\sin(A'-2\alpha)\sin\odot - c'\cos(A'-2\alpha)\cos\odot] \\
&\quad + \frac{2s'kk'}{\sin 2\delta}\cos\odot\sin(A'-\alpha) + r\operatorname{tg}\delta(\Delta\alpha - c'\mathbf{d}\psi). \\
\Delta^2\delta &= -\frac{1}{4}\sin 2\delta(\Delta\alpha)^2 + k\frac{s'}{\sin\delta}\cos\odot A_\delta + k\sin\delta\sin(A'-\alpha)\,\mathbf{d}\alpha \\
&\quad - kk'\operatorname{tg}\delta\sin(A'-\alpha)(c'\cos\alpha\cos\odot + \sin\alpha\sin\odot).
\end{aligned}\right.$$

(*) Nous y avons ajouté les termes en k', provenant de la combinaison de l'aberration systématique et de la nutation, termes qui peuvent n'être pas négligeables.

41. Nous donnerons enfin les formules qui expriment la variation du lieu moyen d'une étoile, d'une époque à une autre, en vertu de la vitesse et de l'aberration systématiques.

M désignera cette variation en ascension droite; N, en D; n, le produit $s'p = 20''$; T', la tangente de la déclinaison de l'Apex; ϖ', le produit de la parallaxe de l'étoile par le rapport de la vitesse systématique *réduite* (c'est-à-dire projetée sur l'équateur) au rayon de l'orbite terrestre. L'unité de temps est l'année :

$$(34). \quad . \quad . \quad \left\{ \begin{aligned} &\mathrm{M} = -\varpi' \sec \delta \sin (\mathrm{A}' - \alpha) \\ &\qquad - k'n \sec \delta \operatorname{tg} \delta [\sin (\mathrm{A}' - 2\alpha) + \mathrm{T}' \cot \delta \sin \mathrm{A}' \cos (\mathrm{A}' - \alpha)]. \\ &\mathrm{N} = \varpi' [\sin \delta \cos (\mathrm{A}' - \alpha) - \cos \delta \mathrm{T}'] \\ &\quad + \frac{1}{2} k'n \sec \delta [\cos (\mathrm{A}' - 2\alpha) + \cos \mathrm{A}' \cos 2\delta] \\ &\quad + k'n\mathrm{T}' \sin \delta \cos \mathrm{A}' \cos (\mathrm{A}' - \alpha). \end{aligned} \right.$$

On voit qu'il est aisé d'éliminer la parallaxe de l'étoile entre ces deux équations.

Si l'on ajoute, au second membre de la première, $(m + n \sin \alpha \operatorname{tg} \delta) \varkappa$, de la seconde, $n \cos \alpha . \varkappa$, on obtiendra, après cette élimination, une équation de condition qui renfermera les inconnues $\varkappa$ et k' seulement, en supposant donnée la position de l'Apex.

Cette équation, appliquée à un grand nombre d'étoiles, dont on connaît les positions à un siècle d'intervalle, fournira un système dans lequel on éliminera, par un procédé convenable, les mouvements propres objectifs des étoiles. On connaîtra ainsi $\varkappa$, qui donnera la correction de la constante de la précession, et k', constante *réduite* de l'aberration systématique, qui déterminera la vitesse *réduite* du système solaire.

On peut aussi faire servir ces équations à la détermination de A' et de T', en considérant d'abord T', $\mathrm{T}' \sin \mathrm{A}'$ et $\mathrm{T}' \cos \mathrm{A}'$ comme connus, et prenant pour inconnues $\varkappa$, $k' \sin \mathrm{A}'$ et $k' \cos \mathrm{A}'$.

A' étant déterminé, le calcul de T' sera fort simple.

Le procédé qui vient d'être exposé est le seul au moyen duquel on puisse rigoureusement déterminer la constante de la précession et la vitesse systématique.

Quand ces quantités seront connues, chacune des deux expressions M et N (augmentées, dans leurs seconds membres, des termes additionnels de précession) permettra de calculer ϖ', et, par suite, la parallaxe *absolue* de l'étoile. Les deux valeurs obtenues ne concorderont entre elles que si l'étoile n'a pas de mouvement objectif et a été correctement observée aux deux époques.

Ce procédé permettra, sans doute, de déterminer un assez grand nombre de parallaxes, d'une manière fort simple.

§ 9. — *Conclusion.*

42. Nous avons exposé, dans ces dernières pages, les formules capitales de l'astronomie sphérique du XX^e siècle.

L'astronomie du XIX^e siècle repose sur les formules de Bessel, qui ont pour base la théorie laplacienne du mouvement de la Terre solide.

Aujourd'hui que la fluidité superficielle de la Terre, en dessous de son écorce, est établie, aussi bien par la géologie que par l'existence de la nutation diurne, qui serait impossible pour une Terre solide, c'est la théorie du mouvement de cette écorce qui doit servir de base à l'astronomie sphérique.

Nous l'avons esquissée, en ce travail, quant au mouvement de rotation de l'écorce.

Il s'agirait d'établir également la théorie des mouvements de translation de l'écorce et du noyau, pour en déduire la loi des déviations périodiques de la verticale, qui proviennent, pour la plus grande part, de la non-coïncidence des centres de gravité de ces deux corps.

L'élasticité de l'écorce devrait intervenir également dans la théorie de son mouvement.

Celle-ci n'est donc pas achevée.

Les résultats que nous venons d'en déduire sont, toutefois, assez importants pour que nos formules diffèrent, par des termes qui ne sont nullement négligeables, de celles de Peters et, surtout, de celles d'Oppolzer, dont les astronomes font usage depuis trente ans.

Ce ne sera pas l'un des moindres services rendus à l'astronomie, que d'avoir démontré l'incorrection radicale de ces dernières, qui a enrayé bien longtemps les progrès de la science (*).

Il faut, sous peine de continuer à errer gravement, que l'astronomie de précision en revienne aux observations de Bessel, dans un méridien *fixe*, et aux formules de Laplace, augmentées des termes nouveaux trouvés, soit par un développement plus scrupuleux, soit par la considération de l'état fluide du globe en dessous de son écorce. Ce sont là des compléments indispensables que nous avons essayé de donner dans ce travail, et qui nous semblent justifier le sous-titre que nous lui avons donné : « Fondements de l'astronomie sphérique du XXe siècle. »

(*) Depuis 1890, nous avons constamment soutenu la supériorité de la méthode de Laplace sur celle d'Oppolzer. En 1896, nous avons démontré, dans la *Vierteljahrschrift*, que les formules de l'astronome viennois sont fausses; cette démonstration a paru, avec plus de développements, dans les Notices extraites de l'*Annuaire de l'Observatoire pour 1897*. Postérieurement, nous avons fait voir dans deux notes (*Bull. de l'Académie*, 3e série, t. XXXIII) que, si l'on veut rapporter correctement les formules à l'axe instantané, la nutation eulérienne, qu'Oppolzer a cru éliminer par ce procédé, ne disparaît qu'en obliquité, mais subsiste en longitude, et, chose plus grave, intervient même dans l'expression de l'heure! Il est étonnant que des géomètres illustres ne se soient pas aperçus de l'erreur dans laquelle a versé, à son insu, l'astronome viennois. (Voir, sur ce sujet, *Bull. de l'Académie*, 3e série, t. II, III, XX à XXX; *Comptes rendus*, 1890, 1891; *Bull. astron.*, 1889, 1890; *Monthly Not.*, 1890; *Acta mathem.*, 1892.)