

Théorie nouvelle du mouvement d'un corps libre; par F. Folie, docteur en sciences physiques et mathématiques, répétiteur à l'École des mines de Liège.

PREMIÈRE PARTIE : *Détermination du mouvement initial.*

I.

1. Jusqu'aujourd'hui toutes les solutions du problème du mouvement d'un corps solide libre consistent à envisager d'une manière distincte le mouvement de translation du centre de gravité et le mouvement de rotation autour de ce centre; outre cet artifice, plusieurs méthodes doivent recourir à l'introduction de deux forces égales et directement contraires appliquées en différents points du système. Enfin, pour arriver à l'idée la plus simple du mouvement de ce corps, c'est-à-dire à la détermination de l'axe spontané glissant de rotation, il est nécessaire de s'appuyer sur la cinématique.

Nous nous proposons dans ce travail de résoudre ce problème sans recourir à aucun de ces artifices, et sans rien emprunter à la cinématique que la composition des vitesses rectilignes sollicitant un même point matériel. Nous supposons démontrés les principes de la composition des forces concourantes et des forces parallèles; y compris la détermination du centre de ces forces et celle du centre de gravité; enfin nous invoquerons également les propriétés analytiques et géométriques des moments d'inertie. — Il nous a semblé que la cause pour laquelle on n'a pas donné une solution tout à fait directe du problème réside dans l'idée même que l'on se fait de l'effet d'une force sur

un point matériel libre, et qu'en cherchant à donner à cette idée un plus grand caractère de généralité, nous éviterions bien des difficultés.

Nous sommes donc parti de ce principe fondamental qui forme toute la base de notre théorie, à savoir : qu'une force agissant sur un point matériel libre lui fait décrire au premier instant un arc élémentaire dont le centre est en un point arbitraire d'une normale quelconque élevée par le point matériel à la direction de la force. Grâce à ce principe évident, le mouvement de rotation se présente tout naturellement en mécanique, et l'on détermine avec la plus grande facilité le centre instantané de rotation d'une figure matérielle plane sollicitée par un système de forces qui agissent sur elle dans son plan; en s'appuyant sur cette détermination, on trouve les conditions du mouvement spontané de rotation d'un corps libre autour d'un axe; et partant de là on arrive enfin à l'axe spontané de rotation et de glissement d'un corps libre sollicité par un nombre quelconque de forces.

Nous nous sommes attaché à résoudre toutes ces questions d'une manière uniforme en faisant usage de la règle suivante, qui n'est au fond que le principe de d'Alembert :

Quand des forces agissent sur un système, il faut tâcher de les ramener à d'autres forces agissant sur tous les points matériels qui constituent le système, de manière que le mouvement de ceux-ci, regardés comme des points libres, soit le même que celui qu'ils prennent dans le système.

On pourra juger par notre travail si cette manière simple et naturelle d'aborder le problème, sans recourir à l'introduction d'aucune force étrangère, ne satisfait pas plus complètement l'esprit au point de vue philosophique;

et si, d'un autre côté, elle conduit à des développements analytiques d'une difficulté beaucoup plus grande.

Ce que l'on reconnaîtra, sans aucun doute, c'est que cette méthode nous a conduit directement, et sans recourir à la cinématique (en exceptant toutefois la composition des vitesses rectilignes) à la détermination de l'ellipsoïde central et à celle de l'axe spontané glissant de rotation dans le cas du mouvement le plus général d'un corps libre.

On verra même découler de cette analyse des théorèmes dont la forme paraîtra peut-être plus simple que celle des théorèmes similaires dus à Poinsot, ainsi qu'un principe que nous croyons nouveau et qui n'a pas son analyse dans la théorie de la rotation des corps, quoiqu'il y soit évidemment contenu d'une manière implicite. On voudra bien nous pardonner les détails élémentaires par lesquels nous entrons en matière, nous aurions sans doute pu les omettre; mais, dans ce cas, on ne se serait probablement pas rendu un compte exact de la marche que nous avons suivie pour arriver à la solution générale du problème qui nous occupe.

II.

2. LEMME. — *Lorsqu'un point libre de masse m est sollicité par une force f , son accélération $\frac{f}{m}$ peut être considérée au premier instant comme une accélération angulaire $\omega = \frac{f}{mr}$ autour d'un point situé à une distance quelconque r sur une perpendiculaire élevée de ce point à la direction de la force.*

3. LEMME. — *La force nécessaire pour faire tourner autour d'une de ses extrémités une barre rigide parfait-*

tement libre composée de points matériels égaux est égale au produit de la masse de la barre par l'accélération de son centre de gravité et est appliquée aux $\frac{2}{5}$ de la longueur de la barre.

En effet, en appelant r la distance d'un point quelconque de la barre à son extrémité, et l la longueur de la barre, kdr la masse d'un des points, l'accélération de chaque point sera ωr ; la force qui l'anime : $\omega krdr$; la somme de ces forces appliquées à tous les points de la barre sera :

$$\omega k \int_0^l r dr = \frac{\omega kl^2}{2},$$

et le point d'application de cette résultante sera à une distance r_1 de l'extrémité donnée par :

$$r_1 = \frac{\omega k \int_0^l r^2 dr}{\omega k \int_0^l r dr} = \frac{2}{5} l.$$

L'accélération du centre de gravité étant $\frac{\omega l}{2}$, si on la multiplie par la masse totale kl , on aura l'expression de la force $\frac{\omega kl^2}{2}$.

4. COROLLAIRE. — De là résulte qu'on peut faire tourner une barre rigide homogène parfaitement libre autour d'un point quelconque de sa direction au moyen d'une force normale convenablement appliquée.

..... Pour faire tourner la barre au-
 C A B tour du point C, situé à une distance
 λ de son extrémité, il faudra em-
 ployer une force

$$\omega k \int_{\lambda}^{\lambda+l} r dr = \omega kl \left(\frac{l}{2} + \lambda \right)$$

appliquée en un point situé à une distance de C qui sera déterminée par :

$$r_1 = \frac{\int_{\lambda}^{\lambda+l} r^2 dr}{\int_{\lambda}^{\lambda+l} r dr} = \frac{\frac{l^2}{5} + l\lambda + \lambda^2}{\frac{l}{2} + \lambda}$$

si le point C était sur la barre, il faudrait appliquer à la barre BC une force

$$\omega k \int_0^{l-\lambda} r dr,$$

A C B et à AC une force

$$\omega k \int_0^{\lambda} r dr;$$

et comme les deux forces sont de sens contraire, leur résultante sera leur différence, c'est-à-dire

$$\omega k \int_{\lambda}^{l-\lambda} r dr$$

Le point d'application de la première est à une distance de C :

$$\frac{\int_{\lambda}^{l-\lambda} r^2 dr}{\int_{\lambda}^{l-\lambda} r dr}$$

celui de la seconde à une distance de ce même point :

$$\frac{\int_0^{\lambda} r^2 dr}{\int_0^{\lambda} r dr}$$

on trouvera donc la distance r_1 , du point d'application de la résultante, en vertu de la composition des forces parallèles, par la formule :

$$r_1 \int_{\lambda}^{l-\lambda} r dr = \int_0^{l-\lambda} r^2 dr + \int_0^{\lambda} r^2 dr = \int_{\lambda}^{l-\lambda} r^2 dr; \text{ d'où } r_1 = \frac{\int_{\lambda}^{l-\lambda} r^2 dr}{\int_{\lambda}^{l-\lambda} r dr}.$$

On voit par là, en prenant les mots de *moments* et de *moments d'inertie* dans un sens purement analytique, que : *Le moment de la force capable de produire la rotation de la barre autour d'un centre instantané doit être égal au produit de l'accélération angulaire par le moment d'inertie de la barre autour de ce centre.*

5. Si les deux parties AC et CB de la barre étaient égales, les deux forces que nous venons de trouver le seraient aussi et constitueraient un couple qui aurait pour effet de faire tourner la barre autour de son centre de gravité; mais nous ne nous arrêterons pas à ce cas que nous examinerons d'une manière plus générale au n° 9.

6. Nous ne nous occuperons pas non plus du cas où les forces composantes seraient obliques à la barre, ce qui nous conduirait à la détermination d'un centre instantané situé hors de la direction de la barre; nous croyons que ce qui précède suffit pour faire comprendre la méthode que nous avons annoncée au n° 11 et que nous allons généraliser : 1° dans le cas d'un système plan invariable et libre tournant spontanément autour d'un axe perpendiculaire à son plan; 2° dans le cas d'un système invariable quelconque tournant spontanément autour d'un axe; 3° enfin dans le cas d'un système invariable sollicité par des forces quelconques. Nous aurons donc à déterminer dans

chacun de ces cas les forces capables de produire le mouvement et réciproquement le mouvement dû à des forces données, deux problèmes qui au fond sont identiques.

7. Considérons actuellement un système plan invariable tournant spontanément autour d'un axe perpendiculaire à son plan; prenons ce plan pour plan des XY.

Soient x et y les coordonnées d'un élément de masse $k dx dy$; ω l'accélération angulaire du système autour du centre instantané dont les coordonnées sont x_0 et y_0 .

L'élément $k dx dy$ sera sollicité par une force dP perpendiculaire à la droite qui l'unit au centre : $dP = k \omega r dx dy$, r désignant la distance de l'élément au centre. Donc, en décomposant cette force dP en deux autres respectivement parallèles aux deux axes, ces composantes seront :

$$dP_y = dP \frac{x - x_0}{r} = k \omega (x - x_0) dx dy.$$

$$dP_x = -dP \frac{y - y_0}{r} = -k \omega (y - y_0) dx dy.$$

Intégrant entre les limites du système :

$$P_y = k \omega \iint (x - x_0) dx dy = \omega M (X - x_0) . . . (1)$$

$$P_x = -k \omega \iint (y - y_0) dx dy = -\omega M (Y - y_0) . . (2)$$

où X et Y désignent les coordonnées du centre de gravité du système, et M la masse totale. Si nous représentons par x_1 et y_1 les distances respectives de ces deux forces P_y et P_x aux deux axes, le principe des moments des forces parallèles par rapport à deux plans menés par le centre instantané nous donnera :

$$(x_1 - x_0) P_y = k \omega \iint (x - x_0)^2 dx dy . . . (3)$$

$$(y_1 - y_0) P_x = k \omega \iint (y - y_0)^2 dx dy . . . (4)$$

Et ces deux forces P_x et P_y pourront être supposées appliquées toutes deux au point x_1, y_1 où elles se composeront en une force unique P .

8. Ces quatre formules conduisent à des conséquences importantes.

En posant $P=Mg$, et appelant a et b les cosinus des inclinaisons de cette force sur les axes des X et des Y , les deux premières formules pourront s'écrire :

$$g.b = \omega(X - x_0), \quad g.a = -\omega(Y - y_0).$$

Ajoutant les carrés :

$$g^2 = \omega^2 [(X - x_0)^2 + (Y - y_0)^2] = \omega^2 R^2.$$

D'où

$$g = \omega R,$$

formule dans laquelle R désigne la distance du centre de gravité au centre instantané. Cette formule prouve que :

THÉORÈME. — *Le centre de gravité se meut comme si toutes les forces y étaient directement appliquées et toute la masse concentrée.*

Et par les formules mêmes d'où elle résulte, on voit immédiatement que :

THÉORÈME. — *La force unique capable d'imprimer au système un mouvement de rotation autour d'un centre instantané est perpendiculaire à la droite qui unit ce centre au centre de gravité.*

Si nous ajoutons la 3^me et la 4^me formule :

$$(x_1 - x_0)P_y + (y_1 - y_0)P_x = k\omega \iint r^2 dx dy = \omega \int r^2 dm = \omega I_0,$$

en représentant par I_0 le moment d'inertie du système

autour du centre instantané : or, en appelant r_0 la distance du centre instantané à la force P , le premier membre de l'égalité précédente est égal à Pr_0 ou à $M\omega Rr_0$; quant au second membre, en vertu d'une propriété analytique des moments d'inertie, nous savons qu'il peut se mettre sous la forme : $\omega I_0 = \omega(I + MR^2)$, en nommant I le moment d'inertie du système autour de son centre de gravité; de sorte que l'égalité, divisée par ω , qui devient facteur commun aux deux membres, s'écrira :

$$MRr_0 = I + MR^2; \text{ ou } R(r_0 - R) = \frac{I}{M};$$

ce qui nous donne ce théorème fort simple :

THÉORÈME. — *Lorsqu'un système plan parfaitement libre est sollicité par une force située dans son plan, l'effet de cette force est de le faire tourner au premier instant autour d'un centre situé sur la perpendiculaire abaissée du centre de gravité sur la direction de la force et tel que le produit des distances respectives du centre de gravité au centre instantané et à la force est égal au moment d'inertie autour du centre de gravité divisé par la masse totale; et l'accélération angulaire est égale au quotient de la force accélératrice par la distance du centre de gravité à ce centre instantané.*

Il nous semble inutile de montrer que ce théorème peut se déduire très-aisément de la méthode de Poinsot.

9. Un autre théorème se déduit du cas particulier où les composantes parallèles aux axes seraient nulles séparément, c'est-à-dire où les forces qui sollicitent le système se réduiraient à deux forces égales et contraires,

mais non directement opposées. Dans ce cas les formules (1) et (2) donnent :

$$x_0 = X, \quad y_0 = Y,$$

ce qui prouve que le centre instantané est le centre de gravité lui-même.

Prenons donc ce dernier point pour origine, et pour axe des Y une droite parallèle à la direction des deux forces égales et contraires auxquelles se réduit le système. Appelons M' et M'' les masses des deux parties du système situées à droite et à gauche de l'axe, δ' et δ'' les distances de leurs centres de gravité respectifs au centre de gravité de tout le système; r' et r'' les distances de ce dernier point à deux forces égales et contraires P' , telles que chacune fasse tourner l'une des deux parties du système autour du centre de gravité pris pour origine; — x'' et $+x'$ les limites du système dans le sens de l'axe des X.

En vertu des formules et du théorème qui précèdent nous aurons les relations :

$$P_y = \omega M' \delta', \quad -P_y = -\omega M'' \delta''.$$

et en outre :

$$M' r' \delta' = \int_0^{\delta'} r^2 dm, \quad M'' r'' \delta'' = \int_{-x''}^0 r^2 dm.$$

De la combinaison de ces formules entre elles nous tirons :

$$\frac{P_y}{\omega} (\delta' + \delta'') = \int_{-x''}^{\delta'} r^2 dm; \quad \text{d'où } \omega = \frac{P_y \delta}{I}, \quad (\delta = \delta' + \delta'');$$

ce qui prouve que l'accélération angulaire est égale à la

somme des moments des deux forces autour du centre de gravité divisée par le moment d'inertie de la masse totale autour de ce centre. Or, il est évident que cette somme des moments serait la même autour de tout autre point du plan; et en conservant le nom de couple à un système de deux forces égales et contraires, mais non directement opposées, cette somme est le moment du couple; la formule précédente nous démontre donc que :

THÉORÈME. — *L'effet d'un couple sur un système invariable et libre, situé dans son plan, est de produire au premier instant autour du centre de gravité de ce système une accélération angulaire égale au moment du couple divisé par le moment d'inertie du système autour de ce centre.*

10. Mais par la manière dont nous sommes arrivé à ce résultat, on voit que pour nous il provient de ce que chacune des deux forces qui constituent le couple fait tourner une partie du système autour du centre de gravité du système tout entier, de telle sorte que l'ensemble de ces deux forces ou le couple fait tourner le système complet autour de ce même centre. Cette conception nous paraît de nature à jeter quelque lumière sur le mode d'action des couples, en montrant qu'il ne diffère en rien de celui des simples forces, quoique l'on regarde généralement les premiers comme capables d'un pur mouvement de rotation, les seconds, au contraire, comme produisant exclusivement des translations, au moins dans le cas d'un système libre (*);

(*) « Quelle que soit l'action de deux forces, telles que P et $-P$ sur le corps auquel elles sont appliquées, nous avons vu que cette action ne peut être contre-balancée par celle d'aucune simple force appliquée »

si bien que, quand l'une de celles-ci est appliquée ailleurs qu'au centre de gravité du système, on se croit obligé, pour se former une idée claire du mouvement, de l'y transporter en introduisant un couple qui produira le mouvement de rotation, tandis que la force appliquée au centre de gravité produira la translation du système.

Mais dans toutes les méthodes, on voit d'une manière directe qu'une force produit un mouvement de rotation autour d'un centre instantané; et que l'ensemble de deux forces égales et contraires produit un mouvement semblable; la seule différence est que, dans le premier cas, ce centre ne peut jamais être le centre de gravité, tandis que, dans le second, il l'est toujours (*).

» comme on voudra au même corps, et que, par conséquent, l'effort
 » d'un couple ne peut être comparé d'aucune manière à une simple force.
 » Pour distinguer cette nouvelle cause de mouvement, qui est en quelque
 » sorte d'une nature particulière, on pourrait lui donner un nom particu-
 » lier; mais celui de *couple* nous suffit et peut très-bien désigner l'en-
 » semble des deux forces contraires dont il s'agit, et le genre d'effort
 » auquel ce couple donne naissance. » Poinsot, *Éléments de statique*,
 n° 47.

(*) Si nous considérons un couple du même moment que le précédent, mais dont les deux forces soient situées d'une manière quelconque dans le plan du système, nous avons vu qu'il produira une rotation autour du centre de gravité. Or, chacune des deux forces qui le constituent, agissant seule sur le système, produit une accélération angulaire autour d'un centre instantané que nous connaissons: si nous nommons P les deux forces, p et p' leurs distances respectives au centre de gravité, supposé compris entre les deux forces, d et d' les distances des centres instantanés respectifs à ce point, ω et ω' les accélérations angulaires autour de ces centres, nous savons que: $p d = p' d' = \frac{M}{I}$; $P p = \omega I$, $P p' = \omega' I$; d'où $P(p + p')$ ou $P d = (\omega + \omega') I$; mais ce moment étant égal à celui du couple précédent qui produit une accélération angulaire Ω autour du centre de gravité donnée par $P p = \Omega I$, comme le couple considéré fait aussi tourner autour de ce centre, il s'ensuit que $\omega + \omega' = \Omega$ est l'accélération angu-

Nous pourrions même montrer, par notre analyse, qu'à proprement parler, le couple ne se compose, en définitive, tout comme la force, que des quantités de mouvement (*) des différentes parties du système, comme le lecteur aura déjà pu s'en convaincre; et c'est cette notion surtout qui montre clairement les forces appliquées au système comme parfaitement équivalentes aux quantités de mouvement qu'elles produisent.

Nous sommes le premier à reconnaître que la méthode que nous employons n'est pas, au fond, différente de celle que Poinsot a si nettement exposée dans sa *Théorie de la rotation des corps*; nous avons même qu'il y a dans la théorie des couples une simplicité qui nous charme et que nous voudrions pouvoir donner à notre analyse. Mais cette simplicité, est-il sûr que Poinsot ne l'eût pas rencontrée par une autre voie, et prouve-t-elle que la conception des couples soit la méthode naturelle en mécanique?

Certes, ce n'est pas à elle qu'il doit ni la découverte de son ellipsoïde central, ni surtout celle de la position géométrique de l'axe instantané de rotation, mais bien à la pénétration avec laquelle il sait lire ses formules et les combiner; et s'il semble attacher peu de prix à cette faculté qui brille en lui, n'est-ce pas peut-être par le désir instinctif

laire produite par ce nouveau couple. De là et des relations $\frac{\omega}{\omega'} = \frac{p}{p'} = \frac{d}{d'}$ on déduit comme corollaire la composition de deux rotations de même sens autour de deux axes parallèles.

Si le centre de gravité avait été supposé en dehors des deux forces qui constituent le couple, on serait arrivé de même à la composition de deux rotations de sens contraires autour de deux axes parallèles.

(*) En entendant par ces mots la somme des produits des masses par les accélérations qui leur sont imprimées.

de n'être redevable de toutes ses découvertes qu'à l'idée seule du couple ?

Sans doute, si la théorie des couples ne laissait planer aucun doute dans l'esprit, quoiqu'il semble peu naturel d'introduire dans une question des forces étrangères, on n'aurait pas le courage de la rejeter, vu la simplicité admirable avec laquelle elle résout tous les problèmes; mais nous nous demandons si cet artifice n'a pas l'inconvénient de concentrer sur le seuil de la statique, dans la considération abstraite du couple, toutes les difficultés que l'on aurait rencontrées plus tard en se servant d'un procédé plus direct, inconvénient analogue à celui que Poinsot reproche à la méthode des vitesses virtuelles de Lagrange (*).

Ce sont ces considérations qui nous ont engagé à rechercher une solution plus naturelle, oserons-nous dire plus philosophique? du problème général de la dynamique, en ne regardant plus les moments des forces simples et des couples, et les moments d'inertie, que comme de simples expressions analytiques auxquelles nous n'avons aucun besoin d'attacher un sens mécanique. Que ces expressions surgissent d'elles-mêmes dans l'étude de l'effet d'une force sur un système, rien de plus naturel, puisque cet effet dépend, non-seulement de l'intensité de la force, mais encore de sa position géométrique; mais la mesure d'une force, ou de son effet, n'en reste pas moins, dans tous les cas, la somme des quantités de mouvement qu'elle produit sur un système libre.

(*) Voir, à la fin de la STATIQUE, le Mémoire sur la théorie générale de l'équilibre et du mouvement des systèmes.

III.

11. Abordons maintenant le cas d'un corps solide libre tournant autour d'un axe, et cherchons à quelles conditions le mouvement se fera spontanément autour de cet axe au premier instant.

Choisissons trois axes rectangulaires, tels que l'axe des Z soit parallèle à l'axe spontané, et nommons x_0 et y_0 les coordonnées de la projection de cet axe sur le plan des XY.

En vertu des formules précédentes, les forces élémentaires capables de faire tourner autour de cet axe une section élémentaire d'épaisseur dz , faite parallèlement à XY, seront, en faisant toujours par la suite $k = 1$, d'où $dm = dx dy dz$:

$$\begin{aligned} dP_y &= \omega dz \iint (x - x_0) dx dy, & dP_x &= -\omega dz \iint (y - y_0) dx dy, \\ (x_1 - x_0) dP_y &= \omega dz \iint (x - x_0)^2 dx dy, \\ (y_1 - y_0) dP_x &= \omega dz \iint (y - y_0)^2 dx dy. \end{aligned}$$

Intégrant par rapport à z , qui est pris comme variable indépendante dans ces expressions, on a :

$$P_y = \omega \iiint (x - x_0) dx dy dz, \quad P_x = -\omega \iiint (y - y_0) dx dy dz. \quad (1)$$

Si nous nommons X et Z_1' , Y et Z_1'' , les coordonnées des traces respectives de P_y et de P_x , sur les plans coordonnés qu'elles rencontrent, il est clair que :

$$\int (x_1 - x_0) dP_y = (X_1 - x_0) P_y \quad \text{et que :} \quad \int z dP_y = Z_1' P_y.$$

De même :

$$\int (y_1 - y_0) dP_x = (Y_1 - y_0) P_x \quad \text{et :} \quad \int z dP_x = Z_1'' P_x.$$

D'après les propriétés des moments des forces parallèles, nous aurions donc :

$$\left. \begin{aligned} (X_1 - x_0) P_y &= \omega \iiint (x - x_0)^2 dx dy dz, \\ (Y_1 - y_0) P_x &= \omega \iiint (y - y_0)^2 dx dy dz \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

$$\left. \begin{aligned} Z_1' P_y &= \omega \iiint (x - x_0)^2 dx dy dz, \\ Z_1'' P_x &= \omega \iiint (y - y_0)^2 dx dy dz \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

12. Les deux premières égalités peuvent s'écrire :

$$P_y = \omega M (X - x_0), \quad P_x = -\omega M (Y - y_0),$$

en appelant X, Y, Z, les coordonnées du centre de gravité du corps.

donc
THÉORÈME. — Et de là résulte, puisque nous n'avons aucune force parallèle à l'axe des Z, que le centre de gravité se meut comme si toute la masse y était concentrée et toutes les forces directement appliquées.

Les deux secondes formules ajoutées donnent :

$$(X_1 - x_0) P_y + (Y_1 - y_0) P_x = \omega \iiint z^2 dx dy dz = \omega I_0,$$

où z désigne la distance d'un point quelconque à l'axe, et I₀ le moment d'inertie du corps autour de cet axe.

Si nous nommons P la résultante des forces P_x et P_y projetées, si l'on veut, sur le plan des XY, comme on tire des premières formules de ce numéro 12 :

$$(X - x_0) P_x + (Y - y_0) P_y = 0,$$

On en conclura que cette force P est perpendiculaire à

la droite qui unit la projection du centre de gravité à celle de l'axe, que nous nommerons centre instantané.

En outre, en appelant R₁, la distance du centre instantané à la direction de cette force dans le plan des XY, la troisième formule de ce même numéro pourra s'écrire :

$$PR_1 = \omega I_0,$$

d'où résulte que l'accélération angulaire est égale au moment de cette force autour de l'axe instantané, divisé par le moment d'inertie du corps autour de cet axe.

Si nous substituons ensuite dans cette troisième formule les valeurs de P_x et de P_y tirées des deux précédentes, nous obtiendrons :

$$M\omega [(X_1 - x_0)(X - x_0) - (Y_1 - y_0)(Y - y_0)] = \omega I_0.$$

Or, en désignant par R et R₁ les distances respectives du centre instantané au centre de gravité et à la force dans le plan des XY, l'expression entre crochets est manifestement égale à R - R₁; et la formule deviendra, si nous y remplaçons aussi I₀ en fonction du moment d'inertie I autour du centre de gravité :

$$MR R_1 = I + MR^2; \text{ ou } R(R_1 - R) = \frac{I}{M}.$$

Les résultats que nous venons d'obtenir nous conduisent au théorème suivant :

THÉORÈME. — Lorsqu'un système de forces fait tourner spontanément un corps libre autour d'un axe instantané, et qu'on projette les forces ainsi que l'axe et le centre de gravité sur un plan perpendiculaire à cet axe, le centre

instantané se trouvera dans ce plan sur la perpendiculaire abaissée du centre de gravité sur la direction de la résultante, en un point tel que le produit des distances du centre de gravité à ce point et à la force est égal au quotient du moment d'inertie du corps autour du centre de gravité, divisé par la masse du corps; et l'accélération angulaire est égale au moment de cette force autour de l'axe instantané divisé par le moment d'inertie autour de ce même axe.

13. N'oublions pas que pour qu'un système de forces produise une rotation initiale autour d'un axe spontané, comme si cet axe était fixe, il ne suffit pas qu'il puisse se réduire à deux forces perpendiculaires à cet axe, mais qu'il faut encore que les points d'application de ces deux forces (X_1 et Z_1') pour P_y (Y_1 et Z_1'') pour P_x , satisfassent aux deux conditions exprimées dans les formules (3) :

$$Z_1' P_y = \omega \iiint (x - x_0) z \, dx \, dy \, dz.$$

$$Z_1'' P_x = \omega \iiint (y - y_0) z \, dx \, dy \, dz,$$

ou :

$$Z_1' P_y = \omega \int (x - x_0) z \, dm.$$

$$Z_1'' P_x = \omega \int (y - y_0) z \, dm;$$

C'est-à-dire que les moments des forces dans deux plans rectangulaires passant par l'axe doivent être respectivement égaux aux moments des quantités de mouvement dans les mêmes plans.

14. Si l'axe est principal pour le point où il perce le plan des XY, on aura par définition :

$$\int (x - x_0) z \, dm = 0, \quad \int (y - y_0) z \, dm = 0;$$

de sorte que :

$$Z_1' = Z_1'' = 0.$$

d'où résulte que les forces se réduisent à une force unique située dans le plan XY et perpendiculaire, comme nous savons, à la droite qui joint la projection du centre de gravité au centre instantané, ou, si l'on veut, au plan qui passe par l'axe instantané et par le centre de gravité. Ainsi :

THÉORÈME. — *Lorsqu'un axe est principal pour un de ses points, toute force située dans un plan mené perpendiculairement à l'axe par ce point, de manière qu'elle soit perpendiculaire au plan qui passe par l'axe et le centre de gravité, fera tourner le corps au premier instant autour de cet axe comme s'il était fixe.*

15. Si nous posons $x_0 = X_1$, $y_0 = Y_1$, il en résulte $P_y = 0$, $P_x = 0$; et comme il n'existe aucune force parallèle à l'axe des Z, nous en concluons que pour qu'un système de forces puisse faire tourner un corps autour d'un axe spontané passant par son centre de gravité, il faut qu'il se réduise à un système de deux forces égales et contraires, c'est-à-dire à un couple; et réciproquement, qu'un couple fait toujours tourner un corps autour d'un axe passant par son centre de gravité. Mais nous allons montrer que cet axe ne sera perpendiculaire au plan du couple que si celui-ci est perpendiculaire à un axe principal du centre de gravité, qui sera dans ce cas l'axe instantané.

Si nous considérons en effet, comme précédemment, une section d'épaisseur dz , nous savons que nous aurons (numéro 9) :

$$dP_y = \omega dz \int_0^x dx \int y \, dx, \quad -dP_x = \omega dz \int_{x'}^0 dx \int x \, dy,$$

pour les deux forces élémentaires égales et contraires capa-

bles de faire tourner cette section autour de son centre de gravité.

Si nous cherchons ces forces pour toutes les sections et que nous voulions que le corps tourne autour d'un axe perpendiculaire au plan de ces deux forces ou du couple, il faudra que les centres de gravité de toutes les sections se trouvent sur le même axe, c'est-à-dire que :

$$\iint x \, dx \, dy = 0 \text{ et } \iint y \, dx \, dy = 0,$$

quel que soit z ; donc que :

$$\iiint x z \, dx \, dy \, dz = 0, \quad \iiint y z \, dx \, dy \, dz = 0,$$

ou que l'axe soit principal pour le centre de gravité.

Pour trouver les coordonnées z' et z'' des points d'application des résultantes de ces deux systèmes de forces dP_y et $-dP_y$, nous multiplierons par z et nous intégrerons; nous obtiendrons ainsi :

$$z' P_y = \omega \int z \, dz \int_0^{z'} dx \int x \, dy; \quad -z'' P_y = \omega \int z \, dz \int_{-z''}^0 dx \int x \, dy; \text{ d'où:}$$

$Z' = Z''$, puisque les forces élémentaires dP_y et $-dP_y$ étant égales, on a :

$$\int_0^{z'} dx \int x \, dy = - \int_{-z''}^0 dx \int x \, dy;$$

ce qui prouve que les deux résultantes P_y et $-P_y$ sont dans un même plan perpendiculaire à l'axe principal.

Quant à l'accélération angulaire, elle sera donnée, comme nous l'avons déjà vu dans le cas général (n° 12), par :

$$P_y p' = \omega \int z^2 \, dm, \quad -P_y \times -p'' = \omega \int z^2 \, dm;$$

ajoutons :

$$P_y \cdot p = \omega I; \text{ d'où } \omega = \frac{P_y \cdot p}{I}.$$

Donc :

THÉORÈME. — *Lorsqu'un couple est perpendiculaire à l'un des axes principaux du centre de gravité d'un corps libre, il le fait tourner au premier instant autour de cet axe avec une accélération angulaire égale au quotient du moment du couple par le moment d'inertie du corps autour de cet axe.*

16. Nous pourrions déduire de là, par la décomposition d'un couple quelconque, en trois couples perpendiculaires aux trois axes principaux, l'axe instantané autour duquel ce couple fait tourner le corps, ainsi que l'accélération autour de cet axe; mais nous n'aurions évidemment ici qu'à répéter la théorie même de Poinsot; aussi, au lieu d'entrer dans le détail de ce cas particulier, préférons-nous en examiner un autre, qui nous sera très-utile, pour arriver à la solution générale vers laquelle nous tendons.

17. Nous avons trouvé (n° 11, 12, 13) que si l'on applique à un corps solide deux forces P_x et P_y dont les points d'application respectifs sont Y_1, Z_1'' et X_1, Z_1' , elles produiront, au premier instant, un mouvement de rotation spontané autour d'un axe parallèle à Z et dont le pied est x_0, y_0 , pourvu que les conditions :

$$Z_1' P_y = \omega \int (x - x_0) z \, dm, \quad Z_1'' P_x = \omega \int (y - y_0) z \, dm,$$

soient satisfaites; les équations qui déterminent x_0, y_0 et ω étant :

$$P_y = \omega M (X - x_0), \quad P_x = -\omega M (Y - y_0),$$

où X et Y sont les coordonnées du centre de gravité, et $\omega = \frac{Pp}{I_0}$, Pp désignant le moment de la résultante des forces projetées sur le plan des XY autour du pied de l'axe instantané, et I_0 le moment d'inertie du corps autour de cet axe.

Pour simplifier ces formules, plaçons l'origine au centre de gravité, prenons pour axe des X l'un des axes principaux du corps, et faisons $P_y = 0$; il en résultera :

$$x_0 = 0, y_0 = \frac{P_x}{\omega M}, \omega = \frac{Pp}{I_0}, Z_1'' P_x = \omega \int yz dm.$$

Il s'ensuit qu'une force P_x parallèle à l'un des axes principaux du centre de gravité du corps le fait tourner spontanément, au premier instant, autour d'un axe parallèle à l'axe des Z et situé dans le plan des YZ ($x_0 = 0$) à une distance de Z égale à $\frac{P_x}{\omega M}$, avec une accélération angulaire $\omega = \frac{P_x p}{I_0}$, pourvu que cette force soit à une distance Z_1'' du plan des XY , telle que $Z_1'' P_x = \omega \int yz dm$.

L'accélération angulaire est susceptible d'une expression plus simple. En effet, en désignant par Y_1 , Z_1'' les coordonnées du pied de la force, il est clair que $P_x p = P_x (y_0 + Y_1)$ puisque le pied de l'axe est au delà du centre de gravité par rapport au pied de la force. Or, en nommant I le moment d'inertie autour de l'axe des Z qui passe par le centre de gravité, on a : $I_0 = I + My_0^2$.

Si nous substituons ces expressions dans $\omega I_0 = P_x p$ et que nous réduisons en vertu de la relation : $P_x y_0 = \omega My_0^2$, nous aurons : $\omega I = P_x Y_1$, d'où $\omega = \frac{P_x Y_1}{I}$, c'est-à-dire que l'accélération angulaire est égale au quotient du moment de la force, autour du centre de gravité, divisé par le moment d'inertie autour de l'axe mené par ce centre parallèlement à l'axe spontané.

18. Si nous changeons x en z et réciproquement, et si nous accentuons les coordonnées, les formules qui déterminent la force unique P_z , parallèle à un axe principal du centre de gravité, qui peut produire un mouvement de rotation autour d'un axe parallèle à X' et situé dans le plan $X'Y'$ à une distance Y_0' de ce dernier axe, seront :

$$P_{z'} = \omega M y_0', X_1' P_{z'} = \omega \int x' y' dm, \omega = \frac{P_{z'} Y_1'}{I'} = \frac{P_{z'} Y_1'}{\int (y'^2 + z'^2) dm},$$

où X_1' et Y_1' désignent les distances respectives de la force aux plans des $Y'Z'$ et des $X'Z'$.

Pour déterminer d'une manière complète la position de l'axe instantané en fonction de la force et des éléments qui constituent le corps, rapportons les coordonnées aux trois axes principaux du centre de gravité, et menons dans le plan XY deux nouveaux axes rectangulaires entre eux, dont le premier soit l'axe précédent X' faisant avec l'axe principal X un angle α .

Reprenons les formules que nous venons d'établir, pour y introduire les nouvelles coordonnées.

$$P_{z'} = \omega M y_0', P_{z'} Y_1' = \omega \int (y'^2 + z'^2) dm, P_{z'} X_1' = \omega \int x' y' dm.$$

Les formules de transformation sont :

$$\begin{aligned} x' &= x \cos \alpha + y \sin \alpha, \\ y' &= y \cos \alpha - x \sin \alpha, z' = z. \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} \int x' y' dm &= \int [(y^2 - x^2) \sin \alpha \cos \alpha + xy (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha)] dm \\ &\quad - (A - B) \sin \alpha \cos \alpha, \end{aligned}$$

A, B, C désignant les trois moments d'inertie principaux;

$$\begin{aligned} \int (z'^2 + y'^2) dm &= \int [(y^2 + z^2) \cos^2 \alpha + (x^2 + z^2) \sin^2 \alpha \\ &\quad - 2xy \sin \alpha \cos \alpha] dm = A \cos^2 \alpha + B \sin^2 \alpha. \end{aligned}$$

Substituant nous aurons :

$$\begin{aligned} P_z(Y_1 \cos \alpha - X_1 \sin \alpha) &= \omega(A \cos^2 \alpha + B \sin^2 \alpha) \\ P_z(X_1 \cos \alpha + Y_1 \sin \alpha) &= \omega(A - B) \sin \alpha \cos \alpha. \end{aligned}$$

D'où par élimination :

$$\begin{aligned} P_z X_1 &= -B \omega \sin \alpha. \\ P_z Y_1 &= A \omega \cos \alpha. \end{aligned}$$

et par suite :

$$\omega = P_z \sqrt{\frac{X_1^2}{B^2} + \frac{Y_1^2}{A^2}}.$$

L'équation de l'axe :

$$y_0' = \frac{P_z'}{\omega M}$$

deviendra :

$$y \cos \alpha - x \sin \alpha = \frac{P_z}{\omega M};$$

et remplaçant $\sin \alpha$ et $\cos \alpha$ par leurs valeurs précédentes, nous aurons pour l'équation de l'axe :

$$\frac{y Y_1}{A} + \frac{x X_1}{B} = \frac{I}{M}$$

Or si nous posons :

$$\frac{Y_1^2}{A^2} + \frac{X_1^2}{B^2} = \frac{I}{N},$$

l'équation de l'axe mise sous la forme,

$$\frac{y Y_1}{A} \cdot \frac{M^2 f}{N} + \frac{x X_1}{B} \cdot \frac{M^2 f}{N} = \frac{M f}{N} = 1,$$

prouve qu'il est tangent à une ellipse dont les axes sont

$$a_1 = \frac{\sqrt{BN}}{M}, b_1 = \frac{\sqrt{AN}}{M}$$

en un point qui a pour coordonnées

$$Y_1 f \text{ et } X_1 f \text{ ou } \frac{Y_1 N}{M} \text{ et } \frac{X_1 N}{M},$$

et qui par conséquent est situé sur le rayon vecteur qui joint le centre de gravité au pied (X_1, Y_1) de la force.

Mais cette ellipse est évidemment semblable à la section par le plan des XY de l'ellipsoïde central des moments d'inertie; car si nous prenons $N = \frac{M^2 E_1^2}{A \cdot B}$, les carrés des axes deviennent

$$a_1^2 = \frac{E_1^2}{A}, b_1^2 = \frac{E_1^2}{B},$$

c'est-à-dire sont en raison inverse des moments d'inertie principaux.

Ces propriétés peuvent se renfermer dans l'énoncé suivant :

THÉORÈME. — *Lorsqu'une force quelconque parallèle à l'un des axes principaux d'un corps libre sollicité ce corps, elle le fait tourner au premier instant autour d'un axe tangent à une ellipse semblable et concentrique à la section de l'ellipsoïde central perpendiculaire à cet axe, en un point qui se trouve sur la droite qui unit le pied de cette force sur ce plan au centre de gravité. En nommant $\frac{N}{I}$ la constante $\frac{Y_1^2}{A} + \frac{X_1^2}{B}$, les axes de cette ellipse sont :*

$$a_1 = \frac{\sqrt{BN}}{M}; b_1 = \frac{\sqrt{AN}}{M}.$$

On voit, en outre, que cet axe sera le même pour tous les corps qui ont la même masse et les mêmes moments d'inertie principaux A et B, et qui sont sollicités par la même force.

Quant à l'accélération angulaire, nous avons vu qu'elle est :

$$\omega = P_z \sqrt{\frac{Y_1^2}{A^2} + \frac{X_1^2}{B^2}},$$

c'est-à-dire qu'elle restera la même, quelle que soit la position que le pied de la force P_z occupe sur l'ellipse

$$\frac{y^2}{A^2} + \frac{x^2}{B^2} = c^2.$$

De plus, elle est indépendante, comme la position de l'axe, du moment d'inertie du corps autour de l'axe parallèle à la force; mais l'axe autour duquel s'effectue la rotation variera avec le pied de la force, suivant le théorème qui précède.

19. Ce théorème, que Poinsot n'a pas donné parce qu'il rapporte tous les mouvements de rotation à des couples, et qui ne se trouve pas énoncé dans les traités de mécanique à notre connaissance, parce que leurs auteurs ont toujours étudié isolément le mouvement du centre de gravité et le mouvement de rotation autour de ce centre, ce théorème, disons-nous, va nous servir à fonder la théorie générale du mouvement d'un corps libre.

IV.

20. Considérons un corps libre de figure invariable sollicité par un système quelconque de forces, et rapportons le tout aux trois axes principaux du corps.

Nous pourrions décomposer chaque force au point même où elle est appliquée en trois forces parallèles à ces axes, et réduire par la composition des forces parallèles tout le système de forces en trois forces P_x, P_y, P_z dont les directions iront rencontrer les trois plans coordonnés respectivement aux points :

$$X, \text{ et } Y_1, \quad X_2 \text{ et } Z_2, \quad Z_3 \text{ et } Y_3.$$

Nous examinerons au n° 30 le cas où ces composantes seraient nulles, c'est-à-dire où le système se réduirait à des couples.

D'après le théorème précédent, chacune de ces forces fait tourner le corps autour d'un axe tangent à une ellipse déterminée, au point où elle est rencontrée par la droite qui unit le pied de la force au centre de gravité; et les axes respectifs de ces trois ellipses sont :

$$a_1 = \frac{E_1}{\sqrt{A}} \text{ et } b_1 = \frac{E_1}{\sqrt{B}}; \quad a_2 = \frac{E_2}{\sqrt{A}} \text{ et } c_2 = \frac{E_2}{\sqrt{C}};$$

$$b_3 = \frac{E_3}{\sqrt{B}} \text{ et } c_3 = \frac{E_3}{\sqrt{C}};$$

d'où

$$\frac{a_1}{b_1} = \sqrt{\frac{B}{A}}, \quad \frac{c_2}{a_2} = \sqrt{\frac{A}{C}}, \quad \frac{b_3}{c_3} = \sqrt{\frac{C}{B}};$$

et si nous faisons :

$$a = \frac{\zeta}{\sqrt{A}}; \quad b = \frac{\zeta}{\sqrt{B}}; \quad c = \frac{\zeta}{\sqrt{C}},$$

nous aurons :

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a}{b}, \quad \frac{c_2}{a_2} = \frac{c}{a}, \quad \frac{b_3}{c_3} = \frac{b}{c};$$

ce qui prouve que les trois ellipses seront semblables aux sections principales de l'ellipsoïde

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \text{ ou } Ax^2 + By^2 + Cz^2 = z^2,$$

qui est, comme on sait, l'ellipsoïde central des moments d'inertie :

On voit que notre théorie nous conduit de la manière la plus directe à cet ellipsoïde, et qu'elle montre en même temps que le mouvement du corps, sous l'influence des forces données, ne dépend absolument que de la masse et de la figure de cet ellipsoïde, puisque toutes les quantités qui déterminent ce mouvement ne sont fonctions que de M , A , B , C , et des forces.

21. Le corps prend donc autour de trois axes situés respectivement dans les trois plans coordonnés et ayant pour équations :

$$(1) \frac{yY_1}{A} + \frac{xX_1}{B} = \frac{1}{M}, (2) \frac{xX_2}{C} + \frac{zZ_2}{A} = \frac{1}{M}, (3) \frac{yY_3}{C} + \frac{zZ_3}{B} = \frac{1}{M}$$

les trois accélérations angulaires respectives :

$$r = P_z \sqrt{\frac{X_1^2}{B^2} + \frac{Y_1^2}{A^2}}, \quad q = P_y \sqrt{\frac{X_2^2}{C^2} + \frac{Z_2^2}{A^2}}, \quad p = P_x \sqrt{\frac{Y_3^2}{A^2} + \frac{Z_3^2}{B^2}}$$

Mais ces trois radicaux représentent évidemment les inverses des produits Mr_1 , Mq_1 , Mp_1 ; r_1 , q_1 , et p_1 , désignant les distances respectives de l'origine ou du centre de gravité aux trois axes : donc :

$$r = \frac{P_z}{Mr_1}, \quad q = \frac{P_y}{Mq_1}, \quad p = \frac{P_x}{Mp_1}$$

22. Cherchons maintenant l'accélération linéaire qu'un point quelconque du corps prendra, en vertu de ces trois accélérations angulaires simultanées ; et pour cela, déterminons les distances respectives de ce point aux trois axes.

Si par la projection de ce point sur le plan des XY nous menons une parallèle à l'axe (1), sa distance à l'origine sera

$$\frac{\frac{yY_1}{A} + \frac{xX_1}{B}}{\sqrt{\frac{Y_1^2}{A^2} + \frac{X_1^2}{B^2}}} = Mr_1 \left(\frac{yY_1}{A} + \frac{xX_1}{B} \right)$$

Et par suite la distance de cette projection à l'axe (1) sera :

$$Mr_1 \left(\frac{yY_1}{A} + \frac{xX_1}{B} - \frac{1}{M} \right)$$

que nous poserons pour plus de simplicité égale à :

$$r_1 \left(\frac{y}{b_1} + \frac{x}{a_1} - 1 \right), \text{ en faisant } \frac{MY_1}{A} = \frac{1}{b_1}, \quad \frac{MX_1}{B} = \frac{1}{a_1}$$

La distance du point (x, y, z) à cet axe sera donc :

$$\delta_1^2 = z^2 + r_1^2 \left(\frac{y}{b_1} + \frac{x}{a_1} - 1 \right)^2,$$

et par suite l'accélération linéaire de ce point autour de cet axe :

$$V_1 = \frac{P_z}{Mr_1} \delta_1 = \frac{P_z}{M} \sqrt{\left(\frac{z}{r_1} \right)^2 + \left(\frac{y}{b_1} + \frac{x}{a_1} - 1 \right)^2}$$

Cette accélération est perpendiculaire au plan qui passe par le point donné et par l'axe et qui a pour équation, en accentuant ses coordonnées courantes :

$$\frac{x'}{a_1} + \frac{y'}{b_1} - \left(\frac{x}{a_1} + \frac{y}{b_1} - 1 \right) \frac{z'}{z} = 1.$$

Les cosinus des angles de cette accélération avec les trois axes seront donc :

$$\alpha_1 = \frac{D}{a_1}, \quad \beta_1 = \frac{D}{b_1}, \quad \gamma_1 = -\frac{\frac{x}{a_1} + \frac{y}{b_1} - 1}{z},$$

D étant la distance du plan à l'origine. D'où :

$$1 = \frac{D^2}{a_1^2 b_1^2 z^2} [(a_1^2 + b_1^2)z^2 + (b_1 x + a_1 y - a_1 b_1)^2] \text{ et } D = \frac{a_1 b_1 z k}{\sqrt{\dots}}$$

$$\alpha = \frac{b_1 z}{\sqrt{\dots}}, \quad \beta = \frac{a_1 z}{\sqrt{\dots}}, \quad \gamma_1 = \frac{b_1 x + a_1 y - a_1 b_1}{\sqrt{\dots}}$$

Par suite, les trois composantes de l'accélération V_1 seront :

$$V_{1x} = V_1 \alpha_1 = \frac{P_z}{M} \cdot \frac{z}{a_1}, \quad V_{1y} = V_1 \beta_1 = \frac{P_z}{M} \cdot \frac{z}{b_1},$$

$$V_{1z} = V_1 \gamma_1 = -\frac{P_z}{M} \left(\frac{y}{b_1} + \frac{x}{a_1} - 1 \right).$$

En employant des notations analogues, c'est-à-dire en posant :

$$\frac{MX_2}{C} = \frac{z}{a_2}, \quad \frac{MZ_2}{A} = \frac{1}{c_2}, \quad \frac{MY_3}{C} = \frac{1}{b_3}, \quad \frac{MZ_3}{B} = \frac{1}{c_3},$$

nous trouverons de même pour les composantes des accélérations linéaires du point (x, y, z) autour des axes (2) et (3) :

$$V_{2x} = V_2 \alpha_2 = \frac{P_y}{M} \frac{y}{a_2}, \quad V_{2y} = V_2 \beta_2 = -\frac{P_y}{M} \left(\frac{x}{a_2} + \frac{z}{c_2} \right),$$

$$V_{2z} = V_2 \gamma_2 = \frac{P_y}{M} \cdot \frac{y}{c_2};$$

$$V_{3x} = V_3 \alpha_3 = -\frac{P_x}{M} \left(\frac{y}{b_3} + \frac{z}{c_3} - 1 \right), \quad V_{3y} = V_3 \beta_3 = \frac{P_x}{M} \cdot \frac{x}{b_3},$$

$$V_{3z} = V_3 \gamma_3 = \frac{P_x}{M} \cdot \frac{x}{c_3}.$$

Enfin pour les composantes totales de la vitesse du point (x, y, z) suivant les trois axes :

$$V_x = \frac{1}{M} \left\{ P_x + z \left(\frac{P_z}{a_1} - \frac{P_z}{c_3} \right) + y \left(\frac{P_y}{a_2} - \frac{P_z}{b_3} \right) \right\},$$

$$V_y = \frac{1}{M} \left\{ P_y + x \left(\frac{P_x}{b_3} - \frac{P_y}{a_2} \right) + z \left(\frac{P_z}{b_1} - \frac{P_y}{c_2} \right) \right\},$$

$$V_z = \frac{1}{M} \left\{ P_z + y \left(\frac{P_y}{c_2} - \frac{P_z}{b_1} \right) + x \left(\frac{P_x}{c_3} - \frac{P_z}{a_1} \right) \right\},$$

que nous mettrons pour abrégé sous la forme suivante en posant :

$$\frac{P_z}{a_1} - \frac{P_z}{c_3} = -l, \quad \frac{P_x}{b_3} - \frac{P_y}{a_2} = -k, \quad \frac{P_y}{c_2} - \frac{P_z}{b_1} = -h;$$

$$MV_x = P_x - lz + ky, \quad MV_y = P_y - kx + hz, \quad MV_z = P_z - hy + lx.$$

D'où sommant les carrés :

$$M^2 V^2 = (P_x - lz + ky)^2 + (P_y - kx + hz)^2 + (P_z - hy + lx)^2.$$

23. Telle est l'expression qui nous donne le carré de l'accélération linéaire d'un point quelconque du corps.

Nous pourrions faire remarquer que l'on y voit immédiatement la décomposition de l'accélération de ce point en deux autres, l'une invariable, quelle que soit la position du point, et qui serait l'accélération du centre de gravité, l'autre, fonction de cette position. Mais poursuivons plus directement notre marche.

Puisque le mouvement de ce point se compose, en général, de trois rotations simultanées, il est naturel de chercher quels sont les points dont l'accélération est un *minimum*.

Dérivons donc l'expression précédente successivement par rapport à x, y, z , et accentuons les coordonnées des points cherchés :

$$M^2 V \frac{dV}{dx'} = -k(P_y - kx' + hz') + l(P_x - hy' + lx') = 0.$$

$$M^2 V \frac{dV}{dy'} = k(P_x - lz' + ky') - h(P_x - hy' + lx') = 0.$$

$$M^2 V \frac{dV}{dz'} = -l(P_x - lx' + ky') + h(P_y - kx' + hz') = 0.$$

Mais en appelant V_x, V_y et V_z les composantes de l'accélération des points (x', y', z') , ces expressions prendront la forme plus simple :

$$-kV_y + lV_z = 0, \quad kV_x - hV_z = 0, \quad -lV_x + hV_y = 0;$$

d'où :

$$\frac{V_x}{V_y} = \frac{l}{k}, \quad \frac{V_x}{V_z} = \frac{h}{k}, \quad \frac{V_x}{V_y} = \frac{h}{l}; \text{ ou } \frac{V_x}{k} = \frac{V_y}{l} = \frac{V_z}{h} = \frac{E}{M},$$

$\frac{E}{M}$ désignant une constante à déterminer.

Or, ces équations, vu les valeurs de V_x, V_y, V_z , représentent évidemment une ligne droite; nous avons donc ce théorème :

THÉORÈME. — Dans le mouvement d'un corps libre sollicité par un nombre quelconque de forces, il existe au premier instant une série de points dont l'accélération est un minimum, et tous ces points sont en ligne droite.

Cette droite, nous l'appellerons *axe spontané glissant de rotation*, par des raisons que développera la suite de cette analyse.

Cherchons à déterminer géométriquement la direction de cet axe et sa position dans le corps, ainsi que l'accélération des points dont il se compose.

24. Les équations de cet axe pourront se mettre sous la forme :

$$MV_x = kE, \quad MV_y = lE, \quad MV_z = hE;$$

ou :

$$P_x - hy' + lx' = kE, \quad P_y - kx' + hz' = lE, \quad P_x - lx' + ky' = hE;$$

d'où il suit que les cosinus des inclinaisons de cet axe sur les trois axes principaux sont :

$$\alpha = f.h, \quad \beta = f.l, \quad \gamma = f.k,$$

en faisant

$$f = \frac{1}{\sqrt{h^2 + l^2 + k^2}}.$$

Si nous reprenons les valeurs que nous avons désignées par h, l, k , savoir :

$$h = \frac{M}{A}(P_x Y_1 - P_y Z_1), \quad l = \frac{M}{B}(P_x Z_2 - P_z X_1), \quad k = \frac{M}{C}(P_y X_2 - P_z Y_3),$$

dans lesquelles il est visible que les parenthèses représentent les moments des forces autour des trois axes, moments que nous nommerons pour plus de simplicité M_3, M_2, M_1 , ces valeurs deviendront :

$$h = M \frac{M_3}{A}, \quad l = M \frac{M_2}{B}, \quad k = M \frac{M_1}{C}.$$

Or, en regardant les moments comme des aires planes, nous savons que la somme de leurs projections sur le plan du *maximum* des aires est

$$M_0 = \sqrt{M_1^2 + M_2^2 + M_3^2} = \frac{1}{M} \sqrt{A^2 h^2 + B^2 l^2 + C^2 k^2},$$

que nous pourrions nommer le moment résultant.

Les cosinus de l'inclinaison de son plan sur les trois plans coordonnés seront :

$$\alpha_0 = \frac{M_3}{M_0}, \quad \beta_0 = \frac{M_2}{M_0}, \quad \gamma_0 = \frac{M_1}{M_0};$$

de sorte que l'équation de ce plan est, si nous le faisons passer par l'origine :

$$xM_3 + yM_2 + zM_1 = 0,$$

ou :

$$Ahx + Bly + Ckz = 0.$$

Mais l'équation de l'ellipsoïde central étant (20) :

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = c^2,$$

si nous menons par l'origine un plan parallèle au plan tangent à cet ellipsoïde au point (x', y', z') , l'équation de ce plan sera :

$$Ax'x + By'y + Cz'z = 0.$$

On fera coïncider ces deux plans en posant :

$$x' = \lambda h, \quad y' = \lambda l, \quad z' = \lambda k,$$

ou :

$$x' = \frac{\lambda}{f} \alpha, \quad y' = \frac{\lambda}{f} \beta, \quad z' = \frac{\lambda}{f} \gamma,$$

équations qui prouvent que le rayon vecteur qui aboutit au point de contact fait avec les axes les angles mêmes que fait l'axe spontané; donc :

THÉORÈME. *L'axe spontané glissant de rotation est parallèle au rayon vecteur conjugué au plan du moment résultant dans l'ellipsoïde central.*

25. Des équations de l'axe mises sous leur première forme (24) nous déduisons :

$$M^2 V'^2 = E^2 (h^2 + l^2 + k^2) = \frac{E^2}{f^2}; \quad \text{d'où } E = MV'f; \text{ et :}$$

$$V_x = \frac{hE}{M} = V'hf = V'\alpha, \quad V_y = V'\beta, \quad V_z = V'\gamma,$$

ce qui prouve que les points de l'axe spontané glissant se meuvent dans la direction même de cet axe.

Mises sous la seconde forme et ajoutées après avoir été respectivement multipliées par h, l, k , elles donnent :

$$hP_x + lP_y + kP_z = E(h^2 + l^2 + k^2) = \frac{E}{f^2} = \frac{MV'}{f}.$$

Mais en nommant a, b, c , et θ les cosinus respectifs

des inclinaisons de la résultante de toutes les forces supposées transportées en un même point avec les trois axes et avec l'axe spontané, cette dernière égalité pourra s'écrire :

$$MV' = P(ahf + blf + ckf) = P(\alpha x + b\beta + c\gamma) = P\theta;$$

d'où $V' = \frac{P}{M}\theta$, ce qui est la projection de la force accélératrice $\frac{P}{M}$ sur l'axe :

THÉORÈME. — *Les points de l'axe spontané glissant se meuvent dans la direction même de cet axe comme si toute la masse était concentrée le long de l'axe et toutes les forces projetées sur la direction.*

26. Il nous reste encore à déterminer la position de cet axe dans le corps. A cette fin reprenons ses équations :

$$hy' - lx'z' = Pz' - kE, \quad kx' - hz' = Py - lE, \quad lx' - ky' = Px - hE,$$

et remplaçons $-yE$ par la valeur $MV'f = Pf\theta$, elles deviendront :

$$hy' - lz' = P(c - \gamma\theta), \quad kx' - hz' = P(b - \beta\theta), \quad lx' - ky' = P(a - \alpha\theta).$$

Or, si nous appelons p et N les composantes de P parallèle et perpendiculaire à l'axe, et $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ les cosinus des inclinaisons de cette dernière, nous aurons :

$$Pa = p\alpha + N\alpha_1 = P\alpha\theta + N\alpha_1;$$

d'où

$$P(a - \alpha\theta) = N\alpha_1.$$

De même :

$$P(b - \beta\theta) = N\beta_1, \quad P(c - \gamma\theta) = N\gamma_1,$$

et par suite :

$$hy' - lx' = N\gamma_1, \quad kx' - hz' = N\beta_1, \quad lx' - ky' = N\alpha_1,$$

Le plan mené par l'origine perpendiculairement à cet axe sera :

$$hx' + ly' + kz' = 0.$$

Ajoutant les carrés de ces quatre équations, on trouve après réduction :

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = \frac{N^2}{h^2 + l^2 + k^2},$$

ce qui donne le carré de la distance de l'axe au centre de gravité.

Extrayant la racine et désignant cette distance par d' :

$$d' = \frac{N}{\sqrt{h^2 + l^2 + k^2}} = N.f.$$

Par voie de simple élimination on aura :

$$x' = \frac{N(\beta_1 k - \gamma_1 l)}{h^2 + l^2 + k^2} = d'.f(\beta_1 k - \gamma_1 l),$$

$$y' = d'.f(\gamma_1 h - \alpha_1 k),$$

$$z' = d'.f(\alpha_1 l - \beta_1 h),$$

pour les coordonnées du pied de l'axe sur le plan mené perpendiculairement à cet axe par le centre de gravité; et si l'on unit ce pied au centre de gravité par une

droite, les cosinus des inclinaisons de cette droite seront :

$$\alpha' = \frac{x'}{d'} = f(\beta_1 k - \gamma_1 l),$$

$$\beta' = \frac{y'}{d'} = f(\gamma_1 h - \alpha_1 k),$$

$$\gamma' = \frac{z'}{d'} = f(\alpha_1 l - \beta_1 h);$$

d'où résulte :

$\alpha_1 \alpha' + \beta_1 \beta' + \gamma_1 \gamma' = 0$, et par conséquent le théorème :

THÉORÈME. — Si l'on mène par le centre de gravité un plan perpendiculaire à l'axe spontané et qu'on projette la résultante de toutes les forces de l'espace sur ce plan, l'axe spontané passera par un point situé sur la perpendiculaire à cette projection, à une distance du centre de gravité égale au quotient de la projection de la résultante par le produit de la masse et de l'accélération angulaire.

Cette dernière partie du théorème sera démontrée à la fin du numéro suivant.

27. Enfin, cherchons quel sera le mouvement des points du corps qui ne sont pas situés sur l'axe, et pour cela, déterminons l'accélération relative d'un quelconque de ces points par rapport à l'axe.

En nommant V_x'' , V_y'' , V_z'' , les composantes de cette accélération relative, nous aurons :

$$V_x'' = V_x - V_x', \quad V_y'' = V_y - V_y', \quad V_z'' = V_z - V_z';$$

d'où, substituant à V_x et V_x' et à leurs valeurs (52 et 55),

nous trouverons :

$$M V_x'' = k(y - y') - l(z - z'),$$

$$M V_y'' = h(z - z') - k(x - x'),$$

$$M V_z'' = l(x - x') - h(y - y').$$

Et si nous imaginons les axes transportés parallèlement à eux-mêmes au point (x', y', z') , de l'axe spontané, et que nous nommions x'' , y'' et z'' les coordonnées du point (x, y, z) rapportées à ces nouveaux axes, les expressions précédentes pourront s'écrire :

$$M V_x'' = k y'' - l z'',$$

$$M V_y'' = h z'' - k x'',$$

$$M V_z'' = l x'' - h y''.$$

Or, il est visible que ces trois accélérations composantes relatives résultent d'une vitesse angulaire.

$$\omega = \frac{\sqrt{h^2 + l^2 + k^2}}{M} = \frac{1}{M f}$$

a. Autour de l'axe spontané glissant.

En effet :

1° L'accélération relative résultante est perpendiculaire à l'axe; car :

$$h V_x'' + l V_y'' + k V_z'' = 0.$$

2° Elle est perpendiculaire à la droite qui unit le point (x'', y'', z'') à l'origine prise sur l'axe, puisque :

$$x'' V_x'' + y'' V_y'' + z'' V_z'' = 0.$$

3° Enfin elle est égale au produit de la distance du point à l'axe par une constante qui sera l'accélération angulaire autour de cet axe. Car si nous appelons z'' la distance du point à l'origine prise sur l'axe, p'' sa projection sur l'axe, ρ la distance du point à l'axe, nous aurons :

$$\begin{aligned} M^2 V''^2 &= (h^2 + l^2 + k^2) (x''^2 + y''^2 + z''^2) - h^2 x''^2 - l^2 y''^2 \\ &\quad - k^2 z''^2 - 2lhx''y'' - 2hky''z'' - 2lkx''z'' \\ &= (h^2 + l^2 + k^2) r''^2 - (hx'' + ly'' + kz'')^2 = \frac{1}{f^2} [r''^2 \\ &\quad - (x''\alpha + y''\beta + z''\gamma)^2] = \frac{r''^2 - p''^2}{f^2} = \frac{\rho^2}{f^2}, \end{aligned}$$

d'où

$$M V'' = \frac{\rho}{f}, \quad V'' = \frac{\rho}{Mf} = \frac{\sqrt{h^2 + l^2 + k^2}}{M} \rho.$$

De ces trois propriétés résulte à l'évidence que le mouvement relatif d'un point quelconque par rapport à l'axe est un mouvement de rotation dont l'accélération angulaire est

$$\omega = \frac{\sqrt{h^2 + l^2 + k^2}}{M} = \frac{1}{Mf}.$$

28. D'après les expressions de l, h, k , l'accélération angulaire ne dépend que des moments des forces et des moments d'inertie autour des trois axes principaux; et comme nous savons déjà par la théorie de la rotation d'un corps autour d'un axe que son accélération angulaire dépend de son moment d'inertie autour de cet axe, il est naturel de rechercher s'il n'en sera pas de même ici.

Si donc nous prenons le moment d'inertie du corps au-

tour d'un axe mené par le centre de gravité parallèlement à l'axe spontané, nous aurons :

$$\begin{aligned} I &= Ax^2 + B\beta^2 + C\gamma^2 = f(Aah + Bbl + C\gamma k) Mf(M_3\alpha + M_2\beta + M_1\gamma) \\ I &= MfM' = \frac{M'}{\omega}, \end{aligned}$$

en remplaçant Ah, Bl, Ck par leurs valeurs en fonction des moments des forces et représentant par M' la projection du moment résultant sur un plan perpendiculaire à l'axe.

De là nous tirons $\omega = \frac{M'}{I}$; c'est-à-dire :

THÉORÈME. — *L'accélération angulaire du corps autour de l'axe spontané glissant est égale au moment des forces autour de cet axe divisé par le moment d'inertie du corps autour d'un axe parallèle mené par le centre de gravité.*

29. Enfin si nous comparons les formules des numéros 26 et 28 :

$$d' = \frac{N}{M\omega}, \quad \omega = \frac{M'}{I},$$

nous en déduisons :

$$M'd' = \frac{IN}{M};$$

et en posant : $M' = N.d'$, cette formule deviendra :

$$d'.d' = \frac{1}{M}.$$

ce qui nous permet d'énoncer le théorème du numéro 26 sous cette forme très-simple :

THÉORÈME. — *Si, par le centre de gravité du corps, on mène un plan perpendiculaire à l'axe spontané, et qu'après avoir projeté toutes les forces sur ce plan on prend la résultante de ces projections, l'axe spontané passera par un point situé sur la perpendiculaire abaissée du centre de gravité sur cette résultante, et tel que le produit des distances respectives du centre de gravité à ce point et à cette force est égal au moment d'inertie du corps autour d'un axe parallèle du centre de gravité, divisé par la masse du corps.*

Ce théorème n'est, comme on voit, que l'extension de celui que nous avons donné dans le cas d'un système plan (§).

30. Si toutes les forces se ramènent à un couple unique, c'est-à-dire à un système réductible à des forces deux à deux égales et contraires, mais non directement opposées, la réduction que nous avons faite au numéro 20 paraît être en défaut. Il est clair toutefois qu'on peut encore l'employer dans ce cas, pourvu que l'on fasse séparément, suivant les trois axes, la somme des forces positives et des forces négatives. On arrivera ainsi à un système de trois couples P_x et $-P_x$, P_y et $-P_y$, P_z et $-P_z$; et si l'on applique la théorie précédente successivement aux deux systèmes P_x, P_y, P_z et $-P_x, -P_y, -P_z$, et qu'on ajoute les accélérations ainsi obtenues suivant les trois axes, il est évident que les termes P_x, P_y, P_z , disparaissent des équations du numéro 22, qui expriment les composantes de ces

accélérations, et que les quantités h, l, k , qui désignent dans ce numéro les moments des forces P_x, P_y, P_z autour des trois axes, multipliés respectivement par $\frac{M}{A}, \frac{M}{B}, \frac{M}{C}$, représenteront dans le cas actuel les sommes des forces P_x et $-P_x, P_y$ et $-P_y, P_z$ et $-P_z$, ou des couples, multipliés respectivement par les mêmes quantités; les valeurs de h, l, k , conservent donc entièrement leur signification, et par suite la direction de l'axe instantané sera encore donnée par le théorème du numéro 24, et l'accélération angulaire autour de cet axe par le théorème du numéro 28.

Or, la disparition, dans le cas qui nous occupe, des termes P_x, P_y, P_z , dans les expressions des composantes de l'accélération d'un point quelconque (n° 22), montre immédiatement que la vitesse du centre de gravité, pris pour origine, est nulle; l'axe instantané passe donc par le centre de gravité ou par le centre de l'ellipsoïde central; et par suite :

THÉORÈME. — *Lorsqu'un corps libre est sollicité par un système de forces qui se réduisent à un couple, il tourne au premier instant autour du diamètre de l'ellipsoïde central conjugué au plan de ce couple, avec une accélération angulaire égale au moment des forces autour de cet axe, divisé par le moment d'inertie du corps autour de ce même axe.*

Voici du reste une manière indirecte, mais peut-être plus simple, d'arriver au même résultat.

Si après avoir cherché les composantes des accélérations produites par le système de forces réduit aux trois

forces P_x, P_y, P_z , nous ajoutons une force $-P$ dont les composantes soient $-P_x, -P_y, -P_z$, et dont la direction aille passer par l'origine, il est évident que cette force aura un moment nul autour des trois axes, et que par suite les quantités h, l, k ne subiront aucune modification; mais ses trois composantes, introduites dans les expressions de l'accélération, détruiront les termes P_x, P_y, P_z , ce qui nous conduit au même résultat que précédemment; et il est clair que le système formé des forces primitives P_x, P_y, P_z , et des forces introduites $-P_x, -P_y, -P_z$, se réduit à un couple.

Nous aurions pu introduire cette force $-P$ de manière que sa direction ne passât pas par le centre de gravité; ce point n'en eût pas moins été sur l'axe instantané de rotation, et son accélération aurait également été nulle; mais la direction de cet axe eût changé, à cause des moments de cette force $-P$ qui auraient altéré les quantités h, l, k ; nous ne nous arrêterons pas à démontrer que le nouvel axe de rotation serait encore dans ce cas conjugué au plan du moment résultant, parce que la démonstration qui précède renferme ce cas-ci à cause de sa généralité.

51. Si nous jetons un coup d'œil sur l'ensemble de cette théorie, nous pourrions la résumer en ces termes quant aux idées fondamentales qui en font l'objet.

Nous nous sommes appuyé sur la mesure d'une force, la composition et la décomposition des forces et des vitesses appliquées à un même point matériel, et les lois de la composition des forces parallèles appliquées à un système de points matériels invariablement reliés entre eux.

Dans nos recherches, nous nous sommes gardé d'introduire aucune force qui n'existât point dans le système, mais nous avons plutôt cherché, d'une manière directe, l'effet que devait produire isolément chaque force donnée en tenant compte de l'invariabilité du système.

C'est ainsi que nous avons trouvé que l'effet produit, au premier instant, sur un système plan invariable, par une force qui lui est appliquée dans son plan, est de faire tourner ce système autour d'un centre instantané facile à déterminer; et quant à l'effet d'un couple, nous avons montré qu'il ne diffère en rien de l'effet produit par chacune des deux forces dont il se compose.

Lorsque, pour étudier l'effet produit sur un système invariable par un nombre quelconque de forces, nous avons supposé ces forces réduites à d'autres parallèles aux axes, cette transformation n'a été pour nous qu'un artifice destiné à simplifier les calculs; mais il est clair que les quantités de mouvement que nous avons obtenues au moyen de cet artifice représentent exactement les sommes des quantités de mouvement produites par chacune des forces considérées comme appliquées isolément au système.

« Ce n'est pas, comme le dit si bien Poinsot (*Théorie de la rotation des corps*, 2^e partie, n^o 23), que les choses soient composées de cette manière; mais c'est notre seule manière de les voir, de nous en faire une idée, et partant de les connaître. »

Nous ferons remarquer toutefois que nous avons cherché à nous rapprocher de la nature en évitant des artifices que certes elle n'emploie pas, savoir: le transport de toutes les forces en un même point par le moyen de l'introduc-

tion de forces égales deux à deux et directement contraires.

Nous croyons également devoir encore répéter ici que quand nous nous sommes servi, dans la réduction des forces ou des quantités de mouvement, des termes de moment d'une force, moment d'inertie, ce n'a été que dans un sens purement analytique ou géométrique, et que nous ne voulons pas y voir la mesure d'une force dans le cas où elle produit un mouvement de rotation, comme si cette mesure n'était pas dans tous les cas la source algébrique des quantités de mouvement produites par la force (*).

(*) Telle est aussi l'idée du grand géomètre qui a su déduire, par la seule puissance de l'analyse, toutes les lois du mouvement de l'unique principe des vitesses virtuelles :

« C'est aussi par la quantité de mouvement imprimé ou prêt à imprimer, dit-il, que la force ou la puissance doit s'estimer. » (*Mécanique analytique*, 1^{re} partie, section I, *préliminaires*).

Quant aux moments, après avoir exposé la notion des moments de Galilée ou moments virtuels, il ajoute : « Aujourd'hui on n'entend plus communément par moment que le produit d'une puissance par la distance de sa direction à un point, à une ligne, ou à un plan, c'est-à-dire par le bras de levier par lequel elle agit; mais il me semble que la notion du moment donnée par Galilée et par Wallis est bien plus naturelle et plus générale, et je ne vois pas pourquoi on l'a abandonnée pour lui en substituer une autre qui exprime seulement la valeur du moment dans certains cas, comme dans le levier, etc. » (*Ibid.*, 1^{re} partie, section I, n° 16.)

Nous avons même remarqué qu'il n'emploie pas une fois le terme de moment d'inertie, si ce n'est lorsque, rapprochant sa théorie du mouvement de rotation d'un corps libre de celle d'Euler, il fait « observer que les constantes A, B, C ne sont autre chose que ce qu'Euler nomme les moments d'inertie du corps autour des axes des coordonnées. » (*Ibid.*, 2^{me} partie, section IX, n° 51.)

Ne pourrait-on pas appliquer à l'idée des moments, considérés comme

La méthode que nous avons développée nous paraît donc avoir l'avantage de montrer de la manière la plus directe que l'effet d'une force est connue parfaitement conforme dans tous les cas à l'idée simple que nous nous en sommes faite; car elle nous fait voir une force comme pouvant toujours se décomposer en une somme algébrique de forces mesurées chacune par la quantité de mouvement qu'elle imprime au point matériel auquel elle est appliquée.

Elle nous a permis enfin d'aborder, en ne nous appuyant que sur la composition des forces concourantes et des forces parallèles, l'étude directe du mouvement le plus général que puisse prendre un corps sous l'influence d'un nombre quelconque de forces; et elle nous a conduit, en n'empruntant d'autre secours que celui de l'analyse, à cette belle propriété que la mécanique n'a pas encore démontrée sans s'aider de l'étude géométrique du mouvement considéré en lui-même, savoir : que le mouvement le plus général que puisse prendre au premier instant un corps libre sous l'influence d'un nombre quelconque de forces peut toujours se ramener à une translation le long d'un certain axe et à une rotation autour de ce même axe.

Sans doute, nous devons une grande partie de nos idées à l'étude des beaux ouvrages de Poinsot; mais nous pou-

mesure d'un effort qui produit une rotation, ces paroles profondes : « Comme si des dénominations vagues et arbitraires faisaient l'essence des lois de la nature et pouvaient, par quelque vertu secrète, ériger en causes finales de simples résultats des lois connues de la mécanique! » (*Ibid.*, 2^{me} partie, section I, n° 16.)

vons dire en toute sincérité que nous n'avons pas cherché à faire sortir de nos formules, en les torturant, les résultats qu'il a consignés dans sa théorie de la rotation des corps; et même plusieurs des théorèmes auxquels notre analyse nous avait conduit tout naturellement nous ont un peu étonné au premier abord, lorsque nous ne voyions pas encore nettement qu'ils se ramenaient à des théorèmes énoncés sous une autre forme par ce géomètre.

Il est un point peut-être que nous n'eussions pas découvert si nous ne l'avions connu d'avance : c'est la position géométrique de l'axe instantané de rotation; or, c'est bien de l'analyse, prise dans le sens qu'on lui donne habituellement en mathématiques, qu'il a déduit cette propriété nouvelle, et nous croyons pouvoir dire, avec l'un des plus grands analystes du siècle (1) :

« Trop éblouis par la simplicité, la lucidité, l'élégance
 » de certaines démonstrations purement géométriques,
 » ne les substituons pas partout en mécanique, en phy-
 » sique, aux méthodes analytiques qui ont véritablement
 » signalé les théorèmes énoncés, et qui, bien présentées,
 » sont aussi simples, aussi lucides, aussi élégantes, et
 » ont de plus le mérite de l'invention. »

Dans un prochain mémoire, nous appliquerons la même méthode à la détermination du mouvement du corps dans la suite des temps.

(1) Lamé, *Traité des coordonnées curvilignes*, discours préliminaire.