

UNIVERSITE DE LIEGE
FACULTE DES SCIENCES APPLIQUEES
LABORATOIRE DE METHODES DE FABRICATION

LECONS SUR LA THEORIE DES VIBRATIONS

J.F. DEBONGNIE

Cours EMI, Rabat, 1981
Rapport LMF/D2

**Leçons sur la
théorie des vibrations**

Notes de cours provisoires

par

J.F. DEBONGNIE

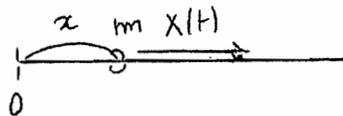
Maître de conférences

1981

Le principe de HAMILTON constitue une formulation de la mécanique basée sur l'étude des mouvements. C'est donc une approche où la cinématique prend le pas sur les considérations d'équilibre. La généralité des méthodes qui en découlent lui donnent un rôle privilégié en mécanique analytique!

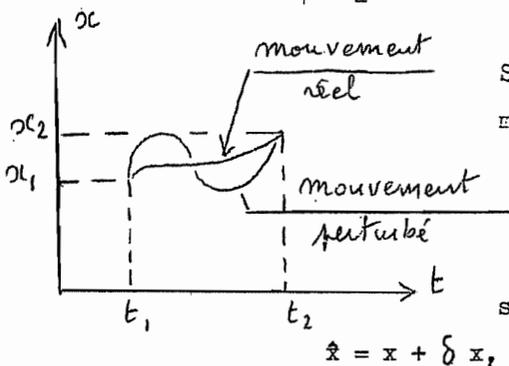
1. Système à un degré de liberté

Soit un point matériel de masse m , astreint à se mouvoir selon une droite si $X(t)$ est la force appliquée à ce point, sa position x sera une certaine



fonction du temps. C'est précisément celle-ci que nous cherchons. Posons-nous le problème suivant :

Supposons que l'on connaisse la position du point aux instants t_1 et t_2 . Comment trouver x dans $]t_1, t_2[$?



Soit donc $x(t)$ le mouvement réel. Tout autre mouvement \hat{x} satisfaisant les relations

$$\begin{aligned} \hat{x}(t_1) &= x_1 \\ \hat{x}(t_2) &= x_2 \end{aligned} \quad (1)$$

sera de la forme

$$\hat{x} = x + \delta x,$$

avec

$$\delta x(t_1) = \delta x(t_2) = 0 \quad (2)$$

La différence δx est appelée variation (du mouvement)! Toute variation vérifiant les conditions (2) est dite admissible.

A cette variation correspond une variation de l'énergie cinétique

$$\begin{aligned} \Delta T &= \frac{1}{2} m (\dot{x} + \delta \dot{x})^2 - \frac{1}{2} m \dot{x}^2 = m \dot{x} \delta \dot{x} + \frac{1}{2} m (\delta \dot{x})^2 \\ &= \delta T + \frac{1}{2} \delta^2 T \end{aligned}$$

Le premier terme est appelé variation première de l'énergie cinétique et le second variation seconde. Plus généralement, étant donné une fonction f suffisamment régulière de x et \dot{x} , on a, par la formule de Taylor,

$$f(x + \delta x, \dot{x} + \delta \dot{x}) = f(x, \dot{x}) + \delta f + \frac{1}{2} \delta^2 f + \frac{1}{3!} \delta^3 f + \dots \quad (3)$$

où les termes

$$\begin{aligned} \delta f &= (\partial f / \partial x) \delta x + (\partial f / \partial \dot{x}) \delta \dot{x} \\ \delta^2 f &= (\partial^2 f / \partial x^2) \delta x^2 + 2(\partial^2 f / \partial x \partial \dot{x}) \delta x \delta \dot{x} + (\partial^2 f / \partial \dot{x}^2) \delta \dot{x}^2 \\ \delta^3 f &= (\partial^3 f / \partial x^3) \delta x^3 + 3(\partial^3 f / \partial x^2 \partial \dot{x}) \delta x^2 \delta \dot{x} + 3(\partial^3 f / \partial x \partial \dot{x}^2) \delta x \delta \dot{x}^2 + (\partial^3 f / \partial \dot{x}^3) \delta \dot{x}^3 \end{aligned} \quad (4)$$

sont appelés respectivement variation première, variation seconde, variation troisième, etc.....

On voit donc que la variation (première) d'une fonction se calcule comme une différentielle.

Cela étant, le principe de HAMILTON stipule que, parmi tous les mouvements admissibles, le mouvement réel est celui qui vérifie l'équation variationnelle

$$\int_{t_1}^{t_2} \{ \delta T + \delta \mathcal{C} \} dt = 0 \quad (5)$$

où T est l'énergie cinétique :

$$T = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 \quad (6)$$

tandis que $\delta \mathcal{C}$ est le travail virtuel de la force X

$$\delta \mathcal{C} = X \delta x \quad (7)$$

Montrons que ce principe entraîne l'équation de NEWTON. Une intégration par parties donne en effet

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta T dt = \int_{t_1}^{t_2} m \dot{x} \delta \dot{x} dt = [m \dot{x} \delta x]_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} m \ddot{x} \delta x dt$$

et, comme $\delta x(t_1) = \delta x(t_2) = 0$, le terme aux limites disparaît, si bien qu'il ne reste plus du principe que

$$\int_{t_1}^{t_2} (-m \ddot{x} + X) \delta x dt = 0 ;$$

l'arbitraire de δx , il en découle

$$m \ddot{x} = X,$$

soit l'équation de NEWTON.

2. Mouvement d'un point matériel dans l'espace

La généralisation au cas d'un point matériel possédant trois degrés de liberté notés x, y, et z est évidente : on a alors

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) \quad (8)$$

$$\delta \mathcal{C} = X \delta x + Y \delta y + Z \delta z$$

et les variations seront admissibles à condition que

$$\begin{aligned} \delta x(t_1) &= \delta x(t_2) = 0 \\ \delta y(t_1) &= \delta y(t_2) = 0 \\ \delta z(t_1) &= \delta z(t_2) = 0 \end{aligned} \quad (9)$$

Le principe de HAMILTON, qui s'écrit toujours sous la forme (5), conduit alors aux trois équations

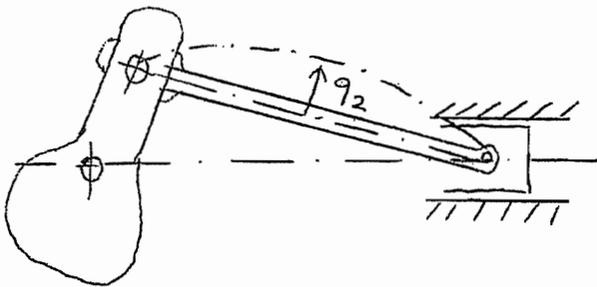
$$X - m\ddot{x} = 0, \quad Y - m\ddot{y} = 0, \quad Z - m\ddot{z} = 0$$

3. Systèmes à nombre infini de particules

La généralisation à un système contenant un nombre quelconque de particules repose sur l'additivité de l'énergie cinétique et du travail virtuel.

On écrira donc toujours le principe de HAMILTON sous la forme (5), mais cette fois T représente l'énergie cinétique de l'ensemble, et δW , le travail virtuel de toutes les forces, extérieures et intérieures. A nouveau, il faut s'interdire de modifier la configuration en t_1 et t_2 .

L'étude rigoureuse de ces systèmes fera l'objet d'un chapitre spécial. Elle mène en général à des équations aux dérivées partielles dont la résolution est très difficile, sinon impossible. Aussi est-on obligé dans la plupart des cas de discrétiser le système, c'est-à-dire de restreindre le nombre de ses degrés de liberté à une quantité finie. Ainsi, par exemple, le système bielle - manivelle représenté ci-dessous possède un nombre infini de degrés de liberté. Cependant,



dans le cadre de l'approximation des corps indéformables, il n'en possède plus qu'un, l'angle de la manivelle. Si l'on s'occupe du fouettement de la bielle, on peut, au lieu de considérer celle-ci comme un corps continu, supposer que sa déformée de flexion a une forme particulière, par exemple, qu'il s'agit d'une parabole. Cela ne nécessitera

qu'un seul degré de liberté supplémentaire, la flèche au milieu de la bielle. Cette méthode consistant à imaginer a priori la déformée est appelée technique de RAYLEIGH - RITZ.

Les systèmes ainsi discrétisés possèdent donc un nombre fini de degrés de liberté décrits par n coordonnées généralisées q_1, \dots, q_n en fonction desquelles peuvent être exprimés les positions de tous leurs points.

Définissons un indice $k \in K$ repérant chaque point du corps. Au point k correspond la masse dm_k , que nous écrivons sous forme différentielle par convention (Il faut l'entendre comme une mesure).

Nous avons donc supposé qu'il est possible de mettre les coordonnées de tout point k sous la forme

$$x_k(t, q_i), \quad y_k(t, q_i), \quad z_k(t, q_i). \quad (10)$$

Des liaisons pouvant s'exprimer de la sorte sont dites holonomes! Nous les supposons toujours telles. Il découle directement de ces relations que les vitesses s'écrivent

$$\begin{cases} u_k = \frac{\partial x_k}{\partial t} + \sum_i \frac{\partial x_k}{\partial q_i} \dot{q}_i \\ v_k = \frac{\partial y_k}{\partial t} + \sum_i \frac{\partial y_k}{\partial q_i} \dot{q}_i \\ w_k = \frac{\partial z_k}{\partial t} + \sum_i \frac{\partial z_k}{\partial q_i} \dot{q}_i \end{cases} \quad (11)$$

Quant aux variations de la position, elles doivent respecter les liaisons (10) et s'écrire

$$\begin{cases} \delta x_k = \sum_i \frac{\partial x_k}{\partial q_i} \delta q_i \\ \delta y_k = \sum_i \frac{\partial y_k}{\partial q_i} \delta q_i \\ \delta z_k = \sum_i \frac{\partial z_k}{\partial q_i} \delta q_i \end{cases} \quad (12)$$

L'énergie cinétique s'écrit alors

$$T = \frac{1}{2} \int_K (u_k^2 + v_k^2 + w_k^2) d\mu_k \quad (13)$$

soit, compte tenu de (11),

$$T = T_0 + T_1 + T_2, \quad (14)$$

où les indices 0,1,2 représentent les degrés d'homogénéité en les q^i . Explicitement

$$\begin{aligned} T_0 &= \frac{1}{2} \int_K \left[\left(\frac{\partial x_k}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial y_k}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial z_k}{\partial t} \right)^2 \right] d\mu_k \\ T_1 &= \sum_i \dot{q}_i \int_K \left[\frac{\partial x_k}{\partial t} \frac{\partial x_k}{\partial q_i} + \frac{\partial y_k}{\partial t} \frac{\partial y_k}{\partial q_i} + \frac{\partial z_k}{\partial t} \frac{\partial z_k}{\partial q_i} \right] d\mu_k \\ T_2 &= \frac{1}{2} \sum_{ij} \int_K \left[\frac{\partial x_k}{\partial q_i} \frac{\partial x_k}{\partial q_j} + \frac{\partial y_k}{\partial q_i} \frac{\partial y_k}{\partial q_j} + \frac{\partial z_k}{\partial q_i} \frac{\partial z_k}{\partial q_j} \right] d\mu_k \end{aligned}$$

Dans le cas où les liaisons ne dépendent pas du temps, les termes T_0 et T_1 sont nuls

Exprimons à présent le travail virtuel $\delta \mathcal{C}$. Les forces appliquées se divisent en forces intérieures, dues aux actions réciproques des diverses parties du système et forces extérieures, appliquées au système par le milieu ambiant.

Le travail virtuel des forces intérieures X_k^i, Y_k^i, Z_k^i appliquées aux divers éléments k s'écrit, en tenant compte de (12),

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{C}^i &= \int_K (X_k^i \delta x_k + Y_k^i \delta y_k + Z_k^i \delta z_k) dk \\ &= \sum_i P_i \delta q_i, \end{aligned} \quad (15)$$

où apparaissent les grandeurs

$$P_i = \int_k \left(X_k^i \frac{\partial x_k}{\partial q_i} + Y_k^i \frac{\partial y_k}{\partial q_i} + Z_k^i \frac{\partial z_k}{\partial q_i} \right) dk \quad (17)$$

appelées forces internes généralisées conjuguées aux δq_i . Il convient de noter : qu'en pratique, le calcul ne se fait jamais de la sorte : on essaie en général d'exprimer directement le travail virtuel sous la forme (16)

De la même façon, le travail virtuel des forces extérieures X_k^e, Y_k^e, Z_k^e s'écrit

$$\delta \mathcal{O}^e = \sum_i Q_i \delta q_i, \quad (18)$$

avec

$$Q_i = \int_k \left(X_k^e \frac{\partial x_k}{\partial q_i} + Y_k^e \frac{\partial y_k}{\partial q_i} + Z_k^e \frac{\partial z_k}{\partial q_i} \right) dk. \quad (19)$$

Le principe de HAMILTON prend alors la forme suivante :

$$\int_{t_1}^{t_2} \left\{ \delta T(t, q_i, \dot{q}_i) + \sum_i P_i \delta q_i + \sum_i Q_i \delta q_i \right\} dt = 0, \quad (20)$$

pour toute variation des q_i vérifiant les conditions

$$\delta q_i(t_1) = \delta q_i(t_2) = 0 \quad (21)$$

On en déduit aisément les équations du mouvement : on a successivement

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum_i \left[\frac{\partial T}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i + P_i \delta q_i + Q_i \delta q_i \right] dt = 0,$$

et

$$\sum_i \left[\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \right]_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} \sum_i \left[- \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) + \frac{\partial T}{\partial q_i} + P_i + Q_i \right] \delta q_i dt;$$

vu la condition (21) et l'arbitraire des variations, on en déduit les équations

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} - P_i - Q_i = 0, \quad (22)$$

connues sous le nom d'équations de LAGRANGE. On y voit apparaître les forces d'inertie généralisées

$$- \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) + \frac{\partial T}{\partial q_i}$$

à l'aide desquelles l'équation (22) peut être interprétée comme une équation d'équilibre à la d'ALEMBERT.

En régime hyperélastique, les forces intérieures sont conservatives, ce qui signifie que $\sum_i P_i \delta q_i$ est une différentielle totale : il existe donc une fonction V^i telle que

$$\sum_j P_j \delta q_j = - \delta V^i(q)$$

On peut d'ailleurs imaginer des potentiels plus généraux dits potentiels lagrangiens $M^i(q, \dot{q})$ vérifiant la condition un peu plus faible

$$\int_{t_1}^{t_2} \left(\sum_j P_j \delta q_j + \delta M^i \right) dt = 0 \quad (25)$$

On vérifie aisément que dans ce cas,

$$P_j = - \frac{\partial M^i}{\partial \dot{q}_j} + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial M^i}{\partial \dot{q}_j} \right) \quad (26)$$

Nous appellerons de telles forces "conservatives au sens lagrangien". Il est à noter que les forces magnétiques entrent dans cette catégorie.

De la même façon, il arrive que les forces extérieures soient conservatives, au sens classique

$$Q_i = - \frac{\partial V^e}{\partial q_i} \quad (27)$$

ou au sens lagrangien :

$$Q_i = - \frac{\partial M^e}{\partial \dot{q}_i} + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial M^e}{\partial \dot{q}_i} \right) \quad (28)$$

Quoi qu'il en soit, le potentiel lagrangien englobant le potentiel classique comme cas particulier, nous nous servirons de lui pour les équations générales.

On a donc un potentiel global

$$M = M^e + M^i, \quad (29)$$

qui permet de donner au principe de HAMILTON sa forme la plus classique

$$\int_{t_1}^{t_2} L dt = 0, \quad L = T - M \quad (30)$$

La fonction $L = T - M$ est appelée lagrangien. Les équations de Lagrange s'écrivent alors

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad (31)$$

soit, dans le cas d'un potentiel classique,

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial V}{\partial q_i} = 0 \quad (32)$$

4. Conservation de l'énergie dans un système conservatif

Appelant pi les impulsions

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}, \quad (33)$$

considérons la fonction

$$H = \sum_i p_i \dot{q}_i - L \quad (34)$$

On a visiblement

$$\frac{\partial H}{\partial \dot{q}_i} = - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}, \quad \frac{\partial H}{\partial t} = - \frac{\partial L}{\partial t}$$

$$\frac{\partial H}{\partial q_i} = 0, \quad \frac{\partial H}{\partial p_i} = \dot{q}_i$$

Cette fonction, qui ne dépend donc que de t , p , q est appelée Hamiltonien.

Multipliant alors les équations de Lagrange par \dot{q}_i , on obtient

$$\sum_i \left(\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \right) \dot{q}_i - \sum_i \frac{\partial L}{\partial q_i} \dot{q}_i = 0 \quad (35)$$

Or, on a par ailleurs

$$\frac{dL}{dt} = \frac{\partial L}{\partial t} + \sum_i \frac{\partial L}{\partial q_i} \dot{q}_i + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \ddot{q}_i,$$

ce qui implique

$$\sum_i \frac{\partial L}{\partial q_i} \dot{q}_i + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \ddot{q}_i - \frac{dL}{dt} = -\frac{\partial L}{\partial t} \quad (36)$$

Additionnant les deux relations (35) et (36), on obtient

$$\frac{d}{dt} \left(\sum_i p_i \dot{q}_i - L \right) = \frac{\partial L}{\partial t}$$

ou encore

$$\boxed{\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t}} \quad (37)$$

Ainsi donc, dans un système dont les liaisons ne dépendent pas du temps, le Hamiltonien se conserve. Or, on a, dans ce cas là,

$$T = T_2$$

Si l'on suppose de plus que le système est conservatif au sens classique, on a donc

$$\begin{aligned} L &= T_2 - V, \\ &= \frac{1}{2} \sum_i p_i \dot{q}_i - V \end{aligned}$$

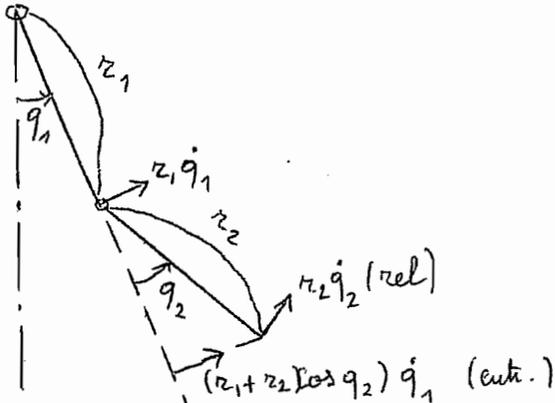
d'où

$$H = \frac{1}{2} \sum_i p_i \dot{q}_i + V = T_2 + V$$

ce qui signifie que le Hamiltonien s'identifie à l'énergie totale $T + V$.

II - PETITES OSCILLATIONS D'UN SYSTEME CONSERVATIF AUTOUR D'UNE CONFIGURATION
D'EQUILIBRE STABLE

1. Nécessité de linéariser



Considérons, pour fixer les idées, le pendule double représenté ci-contre. La vitesse de la masse m_1 a pour grandeur $r_1 \dot{q}_1$. Dans le repère tournant avec la barre 1, la masse m_2 a la vitesse relative $r_2 \dot{q}_2$, dirigée perpendiculairement à la barre 2. Il faut y ajouter la vitesse d'entraînement $(r_1 + r_2 \cos q_2) \dot{q}_1$,

dirigée perpendiculairement à la barre 1, si bien que la vitesse de la barre 2 possède, dans le système relatif, les deux composantes

$$\begin{cases} (r_1 + r_2 \cos q_2) \dot{q}_1 + r_2 \dot{q}_2 \cos q_2 \\ r_2 \dot{q}_2 \sin q_2 \end{cases}$$

L'énergie cinétique de l'ensemble s'écrit donc

$$2T = m_1 r_1^2 \dot{q}_1^2 + m_2 [(r_1 + r_2 \cos q_2) \dot{q}_1 + r_2 \dot{q}_2 \cos q_2]^2 + m_2 r_2^2 \dot{q}_2^2 \sin^2 q_2 ;$$

et l'énergie potentielle due à la pesanteur,

$$V = -m_1 g r_1 \cos q_1 - m_2 g (r_1 \cos q_1 + r_2 \cos(q_1 + q_2))$$

On constate que, déjà pour un système si simple, les équations seront très lourdes. Leur solution nécessite d'ailleurs l'usage des fonctions elliptiques. Mais dans le cas des petites oscillations, il est possible de linéariser ces équations. Pour ce faire, nous noterons que dans l'expression de l'énergie cinétique, on a d'abord

$$\begin{aligned} \cos q_2 &= 1 - \frac{q_2^2}{2} + \dots \\ \sin q_2 &= q_2 - \frac{q_2^3}{6} + \dots \end{aligned}$$

Si nous convenons de nous arrêter au second ordre, il suffira en fait de remplacer ces q_2 par 1 et $\sin q_2$ par 0, car tous les termes contiennent déjà des termes du second degré en les vitesses. On réduit ainsi l'énergie cinétique à

$$\begin{aligned} 2T &\approx m_1 r_1^2 \dot{q}_1^2 + m_2 [(r_1 + r_2)^2 \dot{q}_1^2 + 2(r_1 + r_2) r_2 \dot{q}_1 \dot{q}_2 + r_2^2 \dot{q}_2^2] \\ &= [m_1 r_1^2 + m_2 (r_1 + r_2)^2] \dot{q}_1^2 + 2 m_2 (r_1 + r_2) r_2 \dot{q}_1 \dot{q}_2 + m_2 r_2^2 \dot{q}_2^2 \end{aligned}$$

L'énergie potentielle s'écrit quant à elle, en se limitant encore au second ordre,

$$V \simeq -m_1 g r_1 - m_2 g (r_1 + r_2) + \frac{1}{2} m_1 g r_1 q_1^2 + \frac{1}{2} m_2 g r_1 q_1^2 + \frac{1}{2} m_2 g r_2 (q_1 + q_2)^2,$$

et on notera que le terme constant, ne modifiant en rien les équations de Lagrange peut être omis. On a donc

$$V \simeq V_0 + \frac{1}{2} (m_1 + m_2) g r_1 q_1^2 + \frac{1}{2} m_2 g r_2 (q_1 + q_2)^2$$

Il est alors aisé d'obtenir les équations de Lagrange linéarisées :

$$\begin{cases} [(m_1 r_1^2 + m_2 (r_1 + r_2)^2) \ddot{q}_1 + m_2 (r_1 + r_2) r_2 \ddot{q}_2 + (m_1 + m_2) g r_1 q_1 + m_2 g r_2 (q_1 + q_2) = 0 \\ m_2 (r_1 + r_2) r_2 \ddot{q}_1 + m_2 r_2^2 \ddot{q}_2 + m_2 g r_2 (q_1 + q_2) = 0 \end{cases}$$

Pour les résoudre, on cherche une solution de la forme

$$q_1 = a \sin \omega t, \quad q_2 = b \sin \omega t$$

ce qui mène au système linéaire

$$\begin{aligned} & [(m_1 + m_2) g r_1 + m_2 g r_2 - \omega^2 (m_1 r_1^2 + m_2 (r_1 + r_2)^2)] a \\ & + [m_2 g r_2 - \omega^2 (m_2 r_2 (r_1 + r_2))] b = 0 \end{aligned}$$

$$[m_2 g r_2 - \omega^2 m_2 (r_1 + r_2) r_2] a + [m_2 g r_2 - \omega^2 m_2 r_2^2] b = 0$$

La condition de compatibilité de ce système fournit les pulsations propre ω , au nombre de deux. A chacune d'elles correspond une solution (a, b) correspondant à une oscillation de tous les points à la même fréquence: c'est un mode propre. Nous reviendrons en détail sur ces notions plus loin.

2. Linéarisation des équations des petites oscillations

Généralisons la procédure décrite dans le cas du pendule double.

Tout d'abord, les oscillations se faisant par hypothèse autour d'une position d'équilibre stable, nous poserons par convention $q_i = 0$ dans cette position. Le système sera supposé conservatif au sens classique, avec des liaisons indépendantes du temps. Supposant alors le potentiel V deux fois différentiable, on peut écrire son développement de Taylor

$$V(q_i) = V_0 + \sum_i \left(\frac{\partial V}{\partial q_i} \right)_0 + \frac{1}{2} \sum_{i,j} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_j} \right)_0 q_i q_j + O(q^3) \quad (1)$$

Il nous est loisible de poser $V(0) = 0$, car cela ne modifie en rien les équations de Lagrange. Par ailleurs, il nous reste à expliciter le fait que la position $q_i=0$ correspond à un équilibre stable. Supposons donc le système au repos : on a $T=0$ et les équations de Lagrange se ramènent à

$$\left(\frac{\partial V}{\partial q_i}\right)_0 = 0 \quad (2)$$

Il ne reste donc plus que l'expression

$$V(q_i) = \frac{1}{2} \sum_{ij} K_{ij} q_i q_j, \quad (3)$$

où la matrice

$$K_{ij} = \left(\frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_j}\right)_0 \quad (4)$$

est appelée matrice de raideur. La stabilité de l'équilibre à l'origine va nous permettre de déduire une propriété fondamentale de la matrice de raideur. En effet, la conservation de l'énergie s'applique, et on peut exprimer la stabilité sous cette forme : supposons que le système reçoive, d'une manière quelconque, une certaine énergie cinétique qui lui permet de s'écarter légèrement de sa position d'équilibre. Cette position sera dite stable si ce déplacement tend à diminuer l'énergie cinétique, quel que soit le déplacement, instable sinon. Or cette condition s'écrit

$$\frac{1}{2} \sum_{ij} K_{ij} q_i q_j = -\Delta T > 0 \quad (5)$$

pour tout déplacement généralisé q ,

ce qui signifie que la matrice de raideur doit être définie positive.

Posons alors à l'énergie cinétique. On a

$$2T_2 = \sum_{ij} m_{ij}(q) \dot{q}_i \dot{q}_j \quad (6)$$

et on peut écrire

$$m_{ij}(q) = m_{ij}(0) + O(q) \quad (7)$$

Pour ne garder que les termes du second ordre, il suffit donc de se limiter à limiter à l'ordre 0 pour les m_{ij} , ce qui donne

$$2T \approx \sum_{ij} M_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j \quad (8)$$

où apparaît la matrice des masses

$$M_{ij} = m_{ij}(0) \quad (9)$$

3. Notations matricielles

Les équations s'écriront le plus simplement en faisant usage des notations matricielles. Posant

$$\begin{aligned} \mathbf{q}^T &= (q_1, \dots, q_n), \\ \mathbf{K} &= \{K_{ij}\}, \quad \mathbf{M} = \{M_{ij}\} \\ \mathbf{q}^T &= (q_1, \dots, q_n), \end{aligned} \quad (10)$$

On obtient immédiatement

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{2} \mathbf{q}^T \mathbf{K} \mathbf{q} \\ T &= \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{q}}, \end{aligned} \quad (11)$$

ce qui permet d'écrire le principe de HAMILTON sous la forme

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{q}} - \frac{1}{2} \mathbf{q}^T \mathbf{K} \mathbf{q} \right) dt = 0 \quad (12)$$

Effectuons la variation :

$$\frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} (\delta \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{q}} + \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M} \delta \dot{\mathbf{q}} - \delta \mathbf{q}^T \mathbf{K} \mathbf{q} - \mathbf{q}^T \mathbf{K} \delta \mathbf{q}) = 0.$$

Or, les matrices \mathbf{M} et \mathbf{K} sont symétriques, si bien que les scalaires $\dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M} \delta \mathbf{q}$ et $\mathbf{q}^T \mathbf{K} \delta \mathbf{q}$ s'identifient à leurs symétriques :

$$\delta \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{q}} = \delta \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{q}} \quad \text{et} \quad \delta \mathbf{q}^T \mathbf{K} \mathbf{q} = \delta \mathbf{q}^T \mathbf{K} \mathbf{q},$$

et il ne reste plus que

$$\begin{aligned} &\int_{t_1}^{t_2} (\delta \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{q}} - \delta \mathbf{q}^T \mathbf{K} \mathbf{q}) dt = \\ &[\delta \mathbf{q}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{q}}]_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \delta \mathbf{q}^T (\mathbf{M} \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{K} \mathbf{q}) dt \end{aligned}$$

d'où, en tenant compte des conditions $\delta \mathbf{q}(t_1) = 0$ et $\delta \mathbf{q}(t_2) = 0$ et du caractère arbitraire de $\delta \mathbf{q}$, l'équation

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{K} \mathbf{q} = 0 \quad (13)$$

1. Soit un système défini par l'équation

$$M\ddot{q} + Kq = 0 \quad M \text{ et } K \text{ définies positives (1)}$$

On cherche une solution par séparation des variables spatiales et des variables temporelles: on écrira

$$q(t) = \Phi(t) \cdot x$$

étant une fonction scalaire. Il en découlera

$$\ddot{q} = \ddot{\Phi}(t) \cdot x$$

d'où

$$M\ddot{q} + Kq = \ddot{\Phi} Mx + \Phi Kx$$

Soit

$$\ddot{\Phi} Mx + \Phi Kx = 0$$

Comme Kx ne dépend pas du temps, de même que Mx , il faudra que l'on ait

$$\ddot{\Phi}/\Phi = -w^2, \quad w^2 \text{ scalaire}$$

Nous justifierons plus loin le signe de w^2 . Il vient donc

- pour la partie temporelle

$$\ddot{\Phi} + w^2 \Phi = 0$$

→

solution sinusoïdale (3)

- pour la partie spatiale

$$Kx - w^2 Mx = 0$$

(4)

Il s'agit d'un problème aux valeurs propres à deux matrices. On peut encore écrire cette équation sous la forme homogène

$$(K - w^2 M) x = 0$$

Pour que ce système admette une solution, il faudra donc que

$$\det (K - w^2 M) = 0 \quad (5)$$

Il s'agit d'une équation algébrique de degré n en w^2 .

2. Montrons que les racines de l'équation (5) sont réelles et positives. Supposons on effet w^2 complexe, de même que le mode,

$$x = a + bi$$

Montrons que $b = 0$. L'adjoint x^* de x , est donné par

$$x^* = a^t - ib^t$$

Alors, de $(K - w^2 M) x = 0$, on déduit

$$x^* K a = w^2 x^* M x,$$

soit

$$(a^t - ib^t) K (a + ib) = w^2 (a^t - ib^t) M (a + ib)$$

ce qui qui s'écrit encore

Dès lors, on a

$$w^2 = \frac{a^T K a + b^T K b}{a^T M a + b^T M b} \quad (K \text{ et } M. D.p.)$$

Il découle de cette propriété que

$$K(a + ib) = w^2 M(a + ib)$$

se scinde en deux équations réelles

$$K a = w^2 M a \quad ; \quad K b = w^2 M b,$$

Ce qui implique l'existence d'un mode réel.

Ainsi donc,

Les valeurs propres w^2 sont réelles et positives, et à chacune d'elles correspond aux moins un mode réel

3. Développement en termes des modes propres, lorsque, lorsque les pulsations propres sont toutes distinctes

Lorsque les pulsations propres sont toutes distinctes, soient $x_{(r)}$ et $x_{(s)}$ les formes propres correspondant aux pulsations propres $w_r \neq w_s$. Montrons qu'elles sont orthogonales.

on a en effet d'une part

$$K x_{(r)} = w_r^2 M x_{(r)},$$

d'où

$$x_{(s)}^T K x_{(r)} = w_r^2 x_{(s)}^T M x_{(r)} \quad (a)$$

et, d'autre part,

$$K x_{(s)} = w_s^2 M x_{(s)},$$

d'où

$$x_{(r)}^T K x_{(s)} = w_s^2 x_{(r)}^T M x_{(s)} \quad (b)$$

Soustrayant (a) et (b), on obtient

$$0 = (w_r^2 - w_s^2) x_{(r)}^T M x_{(s)},$$

ce qui entraîne

$$x_{(r)}^T M x_{(s)} = 0 \quad \text{première relation d'orthogonalité (6)}$$

On déduit alors de (a) ou (b) que

$$x_{(r)}^T K x_{(s)} = 0 \quad \text{Deuxième relation d'orthogonalité (7)}$$

Introduisons la notion de masse généralisée du mode

$$\mu_r = x_{(r)}^T M x_{(r)}$$

Ainsi que sa raideur généralisée

$$k_r = x_{(r)}^T K x_{(r)}$$

Ces deux nombres peuvent servir pour fixer la grandeur du mode. Leur racine carrée constitue en effet une norme.

On a alors

$$x_{(r)}^T M x_{(s)} = \mu_r \delta_{rs}$$

$$x_{(r)}^T K x_{(s)} = \gamma_r \delta_{rs} = \mu_r \omega_r^2 \delta_{rs}$$

Ces relations d'orthogonalité impliquent que les n modes propres forment une base de l'espace vectoriel des x ; ce qui signifie que tout x peut être mis sous la forme

$$x = \sum_r \alpha_r x_{(r)}$$

ce développement étant unique. Pour trouver ce développement on notera que

$$x_{(s)}^T M x = \sum_r \alpha_r x_{(s)}^T M x_{(r)} = \sum_r \alpha_r \mu_r \delta_{rs} = \mu_s \alpha_s$$

d'où

$$\alpha_s = \frac{x_{(s)}^T M x}{\mu_s}$$

ce qui entraîne

$$x = \sum_{s=1}^n \frac{x_{(s)}^T M x}{\mu_s} x_{(s)} \quad (8)$$

Jouant sur l'associativité du produit matriciel, on a encore

$$x = \sum_{s=1}^n \frac{x_{(s)} x_{(s)}^T M x}{\mu_s} = \left(\sum_{s=1}^n \frac{x_{(s)} x_{(s)}^T M}{\mu_s} \right) x$$

ce qui fait apparaître le développement spectral ~~spatial~~ de la matrice unité :

$$I = \sum_{s=1}^n \frac{x_{(s)} x_{(s)}^T M}{\mu_s} \quad (9)$$

On peut également déduire de (8) un développement d'une force f satisfaisant la condition d'invariance du travail virtuel :

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{C} &= (\delta x)^T f = \sum_{s=1}^n \frac{(\delta x)^T M x_{(s)}}{\mu_s} x_{(s)}^T f \\ &= (\delta x)^T \sum_{s=1}^n \frac{M x_{(s)} x_{(s)}^T f}{\mu_s} \end{aligned}$$

d'où

$$f = \sum_{s=1}^n \frac{x_{(s)}^T f}{\mu_s} M x_{(s)} \quad (10)$$

4. La solution complète du système linéaire

$$M\ddot{q} + Kq = 0$$

s'obtient par superposition de modes :

$$q(t) = \sum_{r=1}^n (\alpha_r \cos \omega_r t + \beta_r \sin \omega_r t) x_{(r)}$$

La vitesse vaut alors

$$\dot{q}(t) = \sum_{r=1}^n \omega_r (-\alpha_r \sin \omega_r t + \beta_r \cos \omega_r t) x_{(r)}$$

Les conditions initiales s'écrivent alors

$$q(0) = \sum_{r=1}^n \alpha_r x_{(r)} \quad \left[\alpha_r = \frac{x_{(r)}^T M q(0)}{\mu_r} \right] \quad (11)$$

$$\dot{q}(0) = \sum_{r=1}^n \omega_r \beta_r x_{(r)} \quad \left[\beta_r = \frac{x_{(r)}^T M \dot{q}(0)}{\omega_r \mu_r} \right] \quad (12)$$

La solution est ainsi parfaitement définie.

5. Cas des valeurs propres confondues

Dans le cas des valeurs propres confondues, on peut établir le théorème de dégénérescence suivant :

Quand une racine w^2 est m - uple, il existe un sous - espace à m dimensions de formes propres associées.

En d'autres termes, on peut trouver m formes propres linéairement indépendantes associées à cette valeur propre.

Soit en effet w^2 une racine m - uple. Il existe au moins une forme propre, solution de $(K - \omega_\alpha^2 M) x = 0$, puisque $d_m^t (K - \omega_\alpha^2 M) = 0$. Cette solution sera notée $a(1)$.

Il existe (n - 1) vecteurs lin. indépendants $u(2) \dots u(n)$ orthogonaux à $a(1)$:

$$a(1)^T M u(i) = 0 \quad i = 2, \dots, n$$

Considérons alors la matrice

Cette matrice ne peut être singulière, vu l'indépendance de ses colonnes. Dès lors, tout vecteur x peut s'écrire

$$x = Vy \quad y^T = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n),$$

Le paramètre ω_1 dirigeant le vecteur $a_{(1)}$. Le système aux valeurs propres devient donc

$$(K - \omega^2 M) Uy = 0$$

Prémultiplions cette équation par U^T non singulière on obtient donc le système équivalent

$$U^T (K - \omega^2 M) Uy = 0, \quad (13)$$

qui mène à l'équation caractéristique scalaire

$$\det \{ U^T (K - \omega^2 M) U \} = 0$$

équivalente à celle de départ, car le premier membre vaut

$$(\det U)^2 \cdot \det (K - \omega^2 M)$$

$\neq 0$
Développons (13) : elle s'écrit

$$[U^T K U - \omega^2 (U^T M U)] y$$

Or,

$$U^T M U = \begin{bmatrix} a_{(1)}^T M a_{(1)} & a_{(1)}^T M u_{(2)} & \dots & a_{(1)}^T M u_{(n)} \\ u_{(2)}^T M a_{(1)} & \dots & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ \dots & & & u_{(n)}^T M u_{(n)} \end{bmatrix}$$

Mais par construction, les vecteurs $a_{(1)}$ et $u_{(i)}$ sont orthogonaux, si bien que $U^T M U$ est découpée

$$U^T M U = \begin{bmatrix} a_{(1)}^T M a_{(1)} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{u_{(2)}^T M u_{(2)}} & & & \\ 0 & & \dots & & \\ 0 & & & \dots & \\ 0 & & & & \boxed{u_{(n)}^T M u_{(n)}} \end{bmatrix}$$

Si l'on a posé $a_{(1)}^T M a_{(1)} = 1$, ce qui est licite, car on a le choix de la norme, on a

$$U^T M U = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \boxed{M_{n-1}} \end{bmatrix}$$

avec M_{n-1} définie positive. En effet, pour $y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{n-1} \end{bmatrix}$

$$0 < y^T U^T M U y = y_{n-1}^T M_{n-1} y_{n-1}$$

Examinons à présent la structure de $U^T K U$: on a

$$U^T K U = \begin{bmatrix} a_{(1)}^T K a_{(1)} & a_{(1)}^T K u_{(2)} & \dots & a_{(1)}^T K u_{(n)} \\ u_{(2)}^T K a_{(1)} & u_{(2)}^T K u_{(2)} & & \\ \vdots & & & \\ u_{(n)}^T K a_{(1)} & \dots & & u_{(n)}^T K u_{(n)} \end{bmatrix}$$

et, comme $Ka_{(1)} = \omega_\alpha^2 Ma_{(1)}$, on a

$$U^T KU = \begin{bmatrix} \omega_\alpha^2 a_{(1)}^T Ma_{(1)} & \omega_\alpha^2 a_{(1)}^T Mu_{(2)} & \dots & \omega_\alpha^2 a_{(1)}^T Mu_{(m)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \omega_\alpha^2 u_{(m)}^T Ma_{(1)} & \dots & \dots & u_{(n)}^T Ku_{(n)} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \omega_\alpha^2 & 0 \\ 0 & K_{n-1} \end{bmatrix}$$

On obtient dès lors le système

$$\begin{bmatrix} \omega_\alpha^2 & 0 \\ 0 & K_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta_1 \\ y_{n-1} \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & M_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta_1 \\ y_{n-1} \end{bmatrix}$$

qui se scinde en deux systèmes découplés :

$$(\omega_\alpha^2 - \omega^2) \eta_1 = 0 \quad \rightarrow a_{(1)}$$

$$K_{n-1} y_{n-1} - \omega^2 M_{n-1} y_{n-1}$$

Or, le déterminant de ce système s'écrit

$$\det_m [U^T C U - \omega^2 U^T M U] = (\omega_\alpha^2 - \omega^2) \det_m (K_{n-1} - \omega^2 M_{n-1})$$

donc

$$\det_m (K_{n-1} - \omega^2 M_{n-1}) \text{ admet encore } \omega^2 \text{ comme racine de multiplicité } (m-1)$$

On peut donc affirmer l'existence d'un y_{n-1} au moins tel que

$$(K_{n-1} - \omega^2 M_{n-1}) y_{n-1} = 0 \quad (\text{Il y correspond } U \begin{pmatrix} 0 \\ y_{n-1} \end{pmatrix})$$

A partir de ce résultat, on peut recommencer le raisonnement jusqu'à épuiser la multiplicité.

Conclusion : Même dans le cas de valeurs propres multiples, il existe une base de vecteurs propres. A l'intérieur d'un même sous-espace propre, on peut d'ailleurs orthogonaliser les vecteurs par le procédé de SCHMIDT

6. Application des modes propres à l'étude des vibrations forcées

Nous considérons le cas simple d'une force d'excitation ne dépendant que du temps :

$$M \ddot{q} + K q = f(t)$$

Développons q dans le système des modes propres :

$$q = \sum_{r=1}^n \eta_r x_{(r)}$$

Il en découle

$$\ddot{q} = \sum_{r=1}^n \ddot{\eta}_r x_{(r)}$$

d'où l'équation

$$\sum_{r=1}^n (\ddot{\eta}_r M x_{(r)} + \eta_r K x_{(r)}) = f(t)$$

Or, on sait que

$$K x_{(r)} = \omega_r^2 M x_{(r)}$$

d'où

$$\sum_{r=1}^n (\ddot{\eta}_r + \omega_r^2 \eta_r) M x_{(r)} = f(t)$$

Prémultiplions cette équation par $x_{(s)}^T$: du fait des relations d'orthogonalité on est ramené à

$$(\ddot{\eta}_s + \omega_s^2 \eta_s) \mu_s = x_{(s)}^T f(t)$$

Divisons par μ_s et posons

$$\Phi_{I_s}(t) = \frac{x_{(s)}^T f(t)}{\mu_s}$$

On obtient ainsi les n équations découplées

$$\boxed{\ddot{\eta}_s + \omega_s^2 \eta_s = \Phi_{I_s}(t)}$$

Dites équations normales

Cherchons la forme la plus générale de la solution de ces équations. En l'absence de second membre, on a

$$\eta(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t \quad A, B \text{ constantes!}$$

Une solution particulière de l'équation avec second membre s'obtiendra par la méthode de variation des constantes :

$$\dot{\eta} = \dot{A} \cos \omega t + \dot{B} \sin \omega t - \omega A \sin \omega t + \omega B \cos \omega t$$

On impose arbitrairement que

$$\dot{A} \cos \omega t + \dot{B} \sin \omega t = 0 \quad (a)$$

On a alors

$$\ddot{\eta} = -\omega \dot{A} \sin \omega t + \omega \dot{B} \cos \omega t - \omega^2 A \cos \omega t - \omega^2 B \sin \omega t,$$

d'où

$$\ddot{\eta} + \omega^2 \eta = -\omega \dot{A} \sin \omega t + \omega \dot{B} \cos \omega t = \Phi$$

Tenant compte de la relation

$$\dot{A} = -\dot{B} \operatorname{tg} \omega t$$

- 9 -

Il faudra que le saut soit + 1 $\Rightarrow wB = 1, B = \frac{1}{w}$, donc

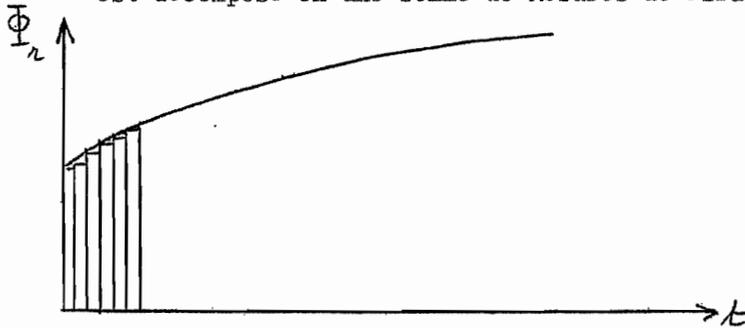
$$e(t) = \begin{cases} 0 & \text{pour } t < 0 \\ \frac{\sin wt}{w} & \text{pour } t > 0 \end{cases}$$

Finalement, la solution sera

$$\varphi_{\text{tr}} = \int_0^t \Phi_n(\tau) \frac{\sin w(t-\tau)}{w} d\tau \quad + \text{Termes initiaux.}$$

Cette méthode mène à l'interprétation suivante :

est décomposé en une somme de mesures de Dirac



Intégrale de Borel

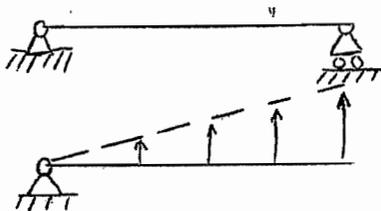
Dans le calcul numérique, on décomposera Φ_n en paraboles petites.

1. Dans le cas d'un équilibre indifférent, la matrice C n'est que semi-définie positive, C.à.d; que

$$V = \frac{1}{2} q^T C q, \quad V \geq 0$$

On pourrait donc avoir $V(q) = 0$ pour certain q non nuls.

Ainsi, une poutre bi-appuyée possède une énergie de déformation définie positive. Mais une poutre articulée d'un seul côté (exemple un levier) possède un déplacement correspondant à une énergie nulle



V d.p.

V s.d.p.

Remarquons tout d'abord que les deux assertions $u^T C u = 0$ et $C u = 0$ sont équivalentes si C est symétrique et semi-définie positive. En effet, si $C u = 0$, on a trivialement $u^T C u = 0$; à l'inverse, si $u^T C u = 0$, posons $C u = a$ on a alors

$$(a - \lambda u)^T C (a - \lambda u) \geq 0$$

ce qui s'écrit encore

$$a^T C a - 2 \lambda a^T C u + \lambda^2 u^T C u \geq 0$$

Or, $u^T C u = 0$ par hypothèse, et $C u = a$ par définition, d'où chaque fois que $\lambda > 0$,

$$a^T C a \geq 2 \lambda a^T a,$$

soit

$$\|a\|^2 \leq \frac{a^T C a}{2 \lambda},$$

qui peut être rendu aussi petit que l'on veut en choisissant λ suffisamment grand. Donc $a = 0$

2. On appelle modes rigides les solutions de $C u = 0$. Comparant à l'équation aux valeurs propres

$$C x = \omega^2 M x,$$

on remarque qu'ils peuvent s'interpréter comme des modes propres associés à $\omega^2 = 0$. D'ailleurs, étant donné un mode propre $x(k)$, on a pour tout mode rigide $u(i)$,

$$\mu_{(i)}^T M x_{(k)} = \frac{1}{\omega_k^2} \mu_{(i)}^T C x_{(k)} = 0,$$

c'est - à - dire que les modes rigides sont orthogonaux aux modes propres. Par ailleurs, on peut toujours les orthogonaliser entre eux, ce que nous supposons fait:

$$\mu_{(i)}^T M \mu_{(j)} = \mu_i \delta_{ij}$$

3. Le développement spatial doit alors être complété par des termes contenant les modes rigides : dans $R^{(m+n)}$,

$$q = \sum_{i=1}^m \xi_i(t) \mu_{(i)} + \sum_{r=1}^n \eta_r(t) \alpha_{(r)}$$

Les η_r vérifient les mêmes équations qu'auparavant. Celle des ξ_i est encore plus simple :

$$\ddot{\xi}_i = \frac{\mu_{(i)}^T f(t)}{\mu_i},$$

puisque sa solution générale est

$$\xi_i = A + B' t$$

et sa solution élémentaire est donnée par une solution de la même forme, avec

$$\xi_i(0) = 0 \quad \dot{\xi}_i(0) = 1 \quad = A = 0, B = 1,$$

soit

$$e_i(t) = t,$$

et

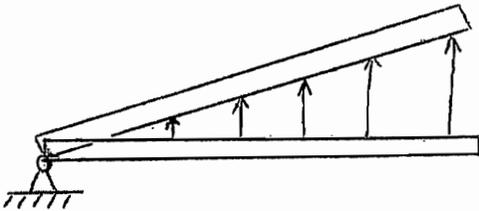
$$\xi_i^{\text{part}} = e_i * \frac{\mu_{(i)}^T f(t)}{\mu_i} = \int_0^t (t-\tau) \frac{\mu_{(i)}^T f(\tau)}{\mu_i} d\tau$$

d'où finalement

$$\xi_i(t) = \xi_i(0) + \dot{\xi}_i(0) t + \int_0^t (t-\tau) \frac{\mu_{(i)}^T f(\tau)}{\mu_i} d\tau$$

Remarque importante : Il convient de prendre bien garde au fait que les modes rigides de rotation doivent rester petits en amplitude. En effet, le mouvement est linéarisé, du seul fait de l'utilisation de l'élasticité linéaire. On néglige

donc les termes centrifuges et d Coriolis. (ce qui ne se justifie que pour les vitesses relativement faibles.)



1. Coefficients de Flexibilité statiques

Considérons le problème statique : il s'écrit

$$Kq = p$$

Où p est la charge statique appliquée au système. Si K n'admet pas de zéro C.à.d; si K n'est pas singulière, on peut écrire la solution sous la forme

$$q = K^{-1} p$$

K^{-1} est la matrice des coefficients d'influence statique. En effet, posant

$$\uparrow \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \leftarrow j$$

On obtiendra les déplacements correspondant à une charge unité en un point C'est d'ailleurs la base d'une méthode de détermination de K^{-1} par inspection (méthode de la force unité)

2. Coefficients d'influence dynamiques

Soit à résoudre l'équation

$$M\ddot{q} + Kq = s \cos \omega t \quad (s, \text{vecteur constant})$$

La solution se compose de deux termes : un terme dépendant des conditions initiales, et un terme dépendant du second membre, dit solution forcée. Nous ne nous intéressons ici qu'au second terme.

Cette solution forcée sera du type

$$q = x \cos \omega t$$

L'inconnue est donc x . Elle vérifie l'équation

$$(K - \omega^2 M) x = s$$

En supposant la matrice $(K - \omega^2 M)$ inversible, on aura

$$x = (K - \omega^2 M)^{-1} s$$

La matrice $(K - \omega^2 M)^{-1}$ est la matrice des coefficients d'influence dynamiques. On notera qu'elle a des pôles. La manière la plus simple de l'étudier est d'en faire un développement spectral.

$$x = \sum_i \alpha_i u_{(i)} + \sum_r \beta_r x_{(r)}$$

les $u_{(i)}$ étant les modes rigides et les $x_{(r)}$, les modes propres.

Dès lors,

$$\begin{aligned} (K - \omega^2 M) x &= \underbrace{\sum_i \alpha_i K u_{(i)}}_0 + \sum_r \beta_r K x_{(r)} - \omega^2 \sum_i \alpha_i M u_{(i)} \\ &= \sum_r \beta_r M x_{(r)} = s \end{aligned}$$

Prémultiplions cette relation par $u_{(j)}^T$: on aura

$$\sum_r \beta_r u_{(j)}^T K x_{(r)} - \omega^2 \sum_i \alpha_i u_{(j)}^T M u_{(i)} - \omega^2 \sum_r \beta_r u_{(j)}^T M x_{(r)} = u_{(j)}^T s$$

Soit

$$\alpha_j = - \frac{u_{(j)}^T s}{\omega^2 \mu_j}$$

Prémultiplions à présent par $x_{(j)}^T$: Il vient

$$\sum_r \beta_r x_{(r)}^T K x_{(r)} - \omega^2 \sum_r \beta_r x_{(r)}^T M x_{(r)} = x_{(j)}^T s,$$

soit

$$(\omega_r^2 - \omega^2) \mu_r \beta_r = x_{(r)}^T s$$

c'est - à - dire

$$\beta_r = \frac{x_{(r)}^T s}{\mu_r (\omega_r^2 - \omega^2)}$$

Au total, on a donc le développement

$$x = -\frac{1}{\omega^2} \sum_j \frac{\mu_{(j)}^T s}{\mu_j} u_{(j)} + \sum_r \frac{x_{(r)}^T s}{\mu_r (\omega_r^2 - \omega^2)} x_{(r)},$$

soit encore

$$x = \left[-\frac{1}{\omega^2} \sum_j \frac{\mu_{(j)} \mu_{(j)}^T}{\mu_j} + \sum_r \frac{x_{(r)} x_{(r)}^T}{\mu_r (\omega_r^2 - \omega^2)} \right] s$$

ce qui revient à dire

$$(K - \omega^2 M)^{-1} = -\frac{1}{\omega^2} \sum_j \frac{\mu_{(j)} \mu_{(j)}^T}{\mu_j} + \sum_r \frac{x_{(r)} x_{(r)}^T}{\mu_r (\omega_r^2 - \omega^2)}$$

Cette matrice fournit la solution du problème dit de la réponse forcée harmonique

On remarque que

- il y a résonance (pôle de la matrice) à fréquence nulle pour les modes rigides
- il y a résonance des modes propres à leur fréquence naturelle
- tous les pôles sont simples.

Rémarque : Dans la réalité, du fait de l'amortissement, on n'a pas réellement passage à l'infini.

3. Etude des transitoires

Pour obtenir les transitoires, il faut ajouter à la solution précédente une solution du problème homogène de manière à satisfaire aux conditions initiales.

La solution complète aura donc la forme

$$q = x \cos \omega t + \sum_i (A_i + B_i t) u_{(i)} + \sum_r (A_r \cos \omega_r t + B_r \sin \omega_r t) x_{(r)}$$

Supposons que les conditions initiales soient le repos

$$q(0) = \dot{q}(0) = 0$$

Il est possible d'obtenir ce résultat en posant

$$A_i = \frac{1}{\omega^2} \frac{u_{(i)}^T s}{\mu_j} \quad B_i = 0$$

$$A_r = - \frac{x_{(r)}^T s}{\mu_r (\omega_r^2 - \omega^2)} \quad B_r = 0$$

La solution devient alors

$$q(t) = \sum_i \frac{u_{(i)}^T s}{\mu_i \omega^2} (1 - \cos \omega t) u_{(i)} + \sum_r \frac{x_{(r)}^T s}{\mu_r (\omega_r^2 - \omega^2)} (\cos \omega t - \cos \omega_r t) x_{(r)}$$

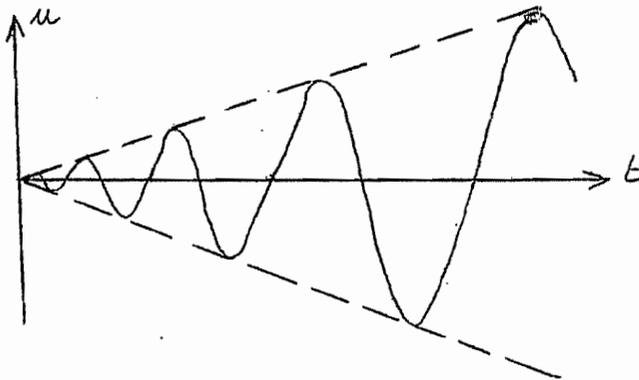
Dans cette expression, les pôles sont remplacés par une indétermination :

$$a) \lim_{\omega^2 \rightarrow 0} \frac{1 - \cos \omega t}{\omega^2} = \frac{t^2}{2}$$

ce qui est logique, car un corps rigide soumis à une force constante, prend un déplacement proportionnel à $\frac{t^2}{2}$, comme l'enseigne la mécanique rationnelle

$$b) \lim_{\omega \rightarrow \omega_r} \frac{\cos \omega t - \cos \omega_r t}{\omega_r^2 - \omega^2} = \lim_{\omega \rightarrow \omega_r} \frac{-t \sin \omega t}{-2\omega} = \frac{t \sin \omega_r t}{2\omega_r}$$

Dans le cas d'une excitation à une fréquence propre non nulle, on obtient une réponse en quadrature avec l'excitation, d'amplitude linéairement croissante dans le temps.



4. Etude des termes diagonaux a_{kk} de $(K - \omega^2 M)^{-1} = (a_{ij})$

On a visiblement

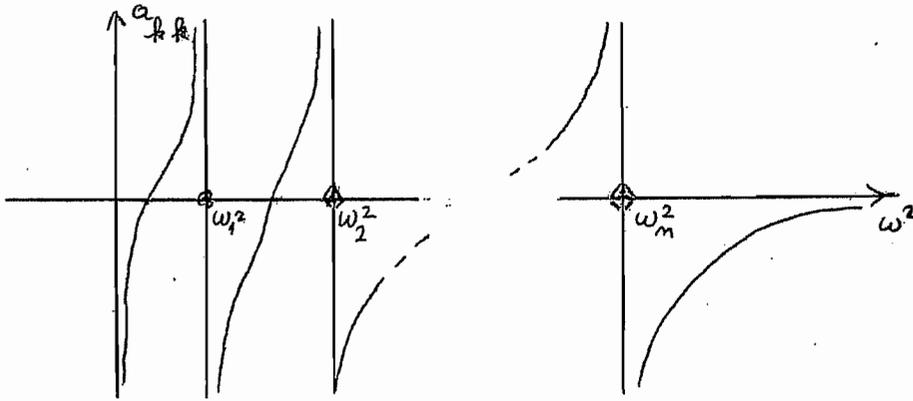
$$a_{kk}(\omega^2) = -\frac{1}{\omega^2} \sum_j \frac{(u_{(j)k})^2}{\mu_j} + \sum_r \frac{(x_{(r)k})^2}{\mu_r (\omega_r^2 - \omega^2)}$$

Ces termes représentent la réponse au point k sous une excitation au même point

La dérivée de cette fonction est toujours positive :

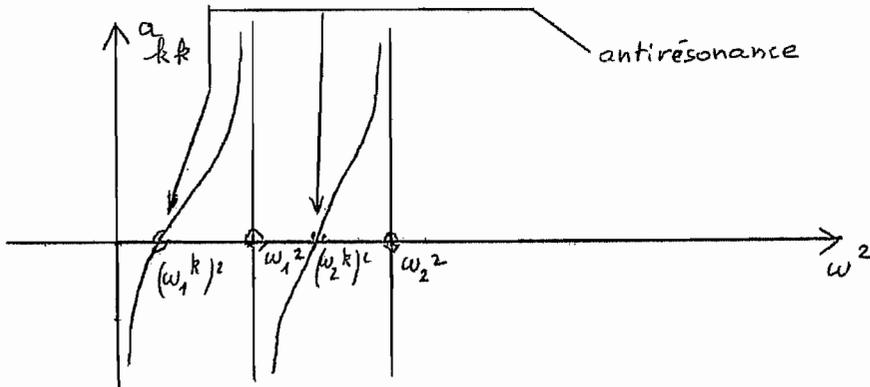
$$\frac{da_{kk}}{d\omega^2} = \frac{1}{\omega^4} \sum_j \frac{(u_{(j)k})^2}{\mu_j} + \sum_r \frac{(x_{(r)k})^2}{\mu_r (\omega_r^2 - \omega^2)^2} > 0$$

La limite pour $\omega^2 = 0$ est $-\infty$, et en chaque fréquence propre ω_k^2 , elle passe de $-\infty$ à $+\infty$

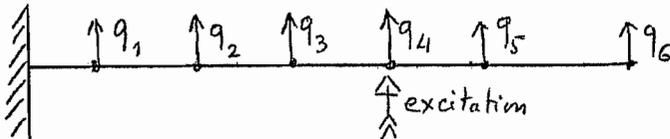


Le graphe de a_{kk} a donc une structure de tangente.

Les points où la courbe $(\omega^2, a_{kk}(\omega^2))$ rencontre l'axe des ω^2 définissent les fréquences d'antirésonance pour le degré de liberté k

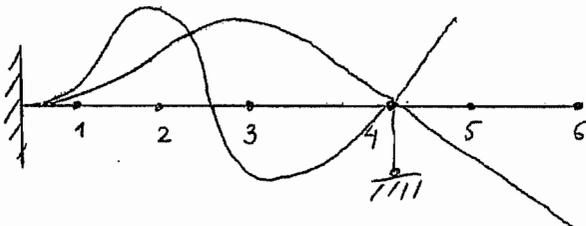


Que se passe-t-il dans ce cas ? Soit un système excité au point 4, comme représenté ci - contre.



Ce point ne bouge pas, malgré son excitation.

On pourrait donc le lier à la fondation. Le système ainsi lié possède alors $(n - 1)$



modes propres : ce sont eux qui correspondent aux fréquences d'antirésonance. Il n'y a pas, malgré l'absence de déplacement,

d'échange d'énergie avec l'extérieur, mais la réaction au point 4 est en cosinus.

On notera que dans un système amorti, le déplacement n'est plus nul, mais il est déphasé de 90° comme lors d'une résonance, si bien que l'apport d'énergie réactive est également nul.

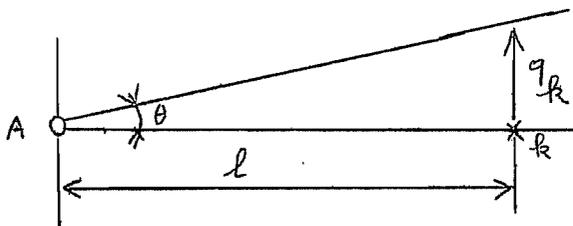
La connaissance des fréquences propres et des fréquences d'antirésonance permet de calculer a_{kk} . En effet, a_{kk} , somme de fonctions à pôles, est représentable comme une fonction rationnelle:

$$a_{kk}(\omega^2) = - \frac{\pi \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_k^2}\right)}{\omega^2 I_{kk} \pi \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_k^2}\right)}$$

La signification de I_{kk} se détermine aisément, car

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} a_{kk}(\omega^2) \frac{f_k}{f_k} (1 - \cos \omega t) = \frac{f_k}{I_{kk}} \lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos \omega t)}{\omega^2} = \frac{f_k}{I_{kk}} \frac{t^2}{2}$$

ce qui signifie que le mode rigide répond à une excitation constante f_k comme une masse concentrée I_{kk}



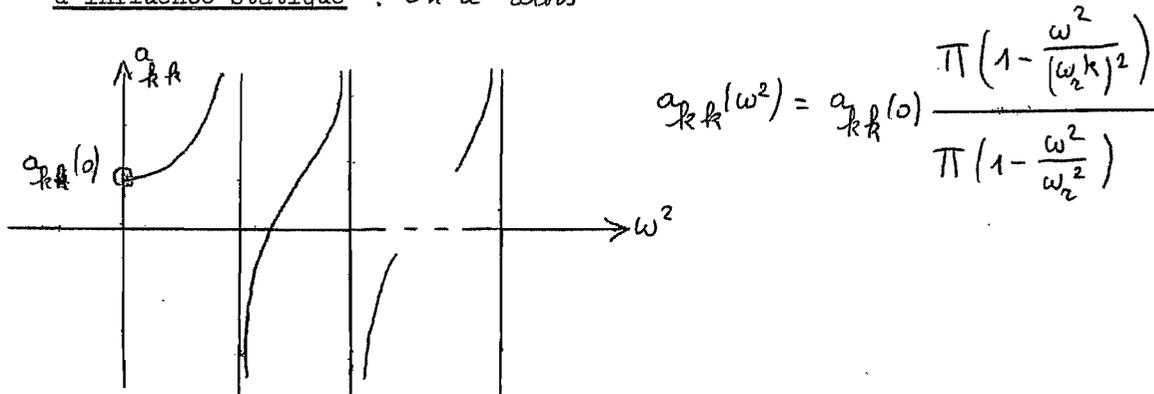
Exemple (fig.)

Si J_A est donné, le déplacement sera donné par l'équation $\theta = \frac{f_k l}{J_A} \frac{t^2}{2}$

Soit

$$q_k = \frac{f_k l^2}{J_A} \frac{t^2}{2} \Rightarrow I_{kk} = \frac{J_A}{l^2}$$

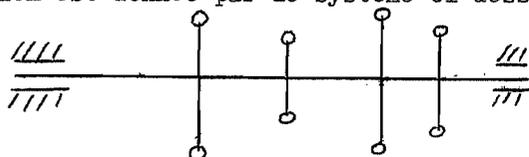
En l'absence de modes rigides, le diagramme ne passe par $\omega^2 = 0$, mais par une valeur finie $a_{kk}(0)$ qui n'est autre que le coefficient d'influence statique. On a alors



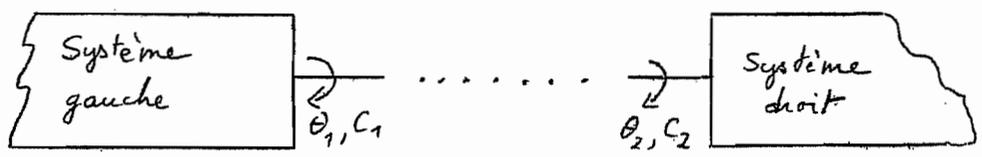
5. Etude des systèmes en chaîne par les matrices de transfert

La théorie des systèmes en chaîne se rapproche très fort de la théorie des quadripôles ou 2n-pôles électriques.

Une chaîne est un ensemble de sous-systèmes ayant chacun n entrées et n sorties, (sauf éventuellement le premier et le dernier), de telle sorte que les sorties de l'un correspondent aux entrées du suivant. Ainsi, une chaîne de torsion est donnée par le système ci-dessous.



Coupant la chaîne en un point donné, on peut définir des couples de valeurs conjuguées :



Ici, les grandeurs θ_1, C_1 et θ_2, C_2 sont des travaux. Le travail sortant du système 1, $-\theta_1, C_1$, doit être égal au travail entrant dans le système 2, $+\theta_2, C_2$. Comme $\theta_1 = \theta_2$, on doit donc avoir $C_1 = -C_2$. Les conditions de jonction sont donc $\theta_1 = \theta_2$ et $C_1 = -C_2$.

Pour une vibration cosinusoidale, on peut écrire

$$C_1(t) = A_1 \text{ ces } w t$$

$$\theta_1(t) = (H_1) \cos w t$$

d'où

$$a_{11}(w^2) = \frac{(H_1)}{A_1}$$

D la même façon, dans le système 2, on aura

$$C_2(t) = A_2 \text{ ces } w t$$

$$\theta_2(t) = (H_2) \text{ ces } w t,$$

et

$$a_{22}(w^2) = \frac{(H_2)}{A_2}$$

Les conditions de liaison étant $\theta_1 = \theta_2$ et $A_1 = -A_2$,

il en découle

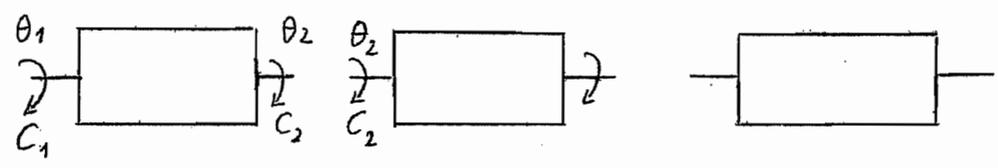
$$\frac{(H_1)}{A_1} + \frac{(H_2)}{A_2} = 0$$

Soit

$$a_{11}(w^2) + a_{22}(w^2) = 0$$

Soit alors un système composé d'une chaîne de boîtes noires mécaniques

Nous compterons positivement les efforts à l'entrée :



Dans une de ces boites, on peut écrire une relation du type

$$\textcircled{H}_1 = a_{11} (w^2) A_1 - a_{12} (w^2) A_2$$

$$\textcircled{H}_2 = a_{12} (w^2) A_1 - a_{22} (w^2) A_2$$

On appelle matrice de transfert la matrice hybride T_{21} définie par

$$\begin{pmatrix} \textcircled{H}_2 \\ A_2 \end{pmatrix} = T_{21} \begin{pmatrix} \textcircled{H}_1 \\ A_1 \end{pmatrix}$$

Pour l'obtenir, on note que

$$A_2 = -\frac{1}{a_{12}} \textcircled{H}_1 + \frac{a_{11}}{a_{12}} A_1,$$

d'où

$$\textcircled{H}_2 = \left(a_{12} - \frac{a_{11} a_{22}}{a_{12}} \right) A_1 + \frac{a_{22}}{a_{12}} \textcircled{H}_1$$

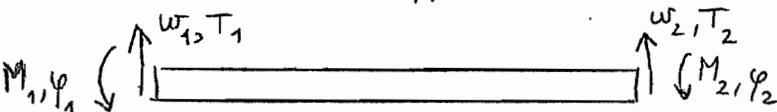
d'où

$$T_{21} = \begin{bmatrix} \frac{a_{22}}{a_{12}} & a_{12} - a_{22} \frac{a_{11}}{a_{12}} \\ -\frac{1}{a_{12}} & \frac{a_{11}}{a_{12}} \end{bmatrix}$$

La matrice de transfert est unimodulaire:

$$\det T_{21} = \frac{a_{22} a_{11}}{a_{12}^2} + 1 - \frac{a_{22} a_{11}}{a_{12}^2} = 1$$

On peut également imaginer des chaînes doubles. Ainsi, une poutre, avec ses déplacements w_1, φ_1 et ses efforts T_1, M_1 ,



forme une chaîne double.

Il y a toujours égalité des déplacements et réciprocity des efforts. Ici, on écrira donc

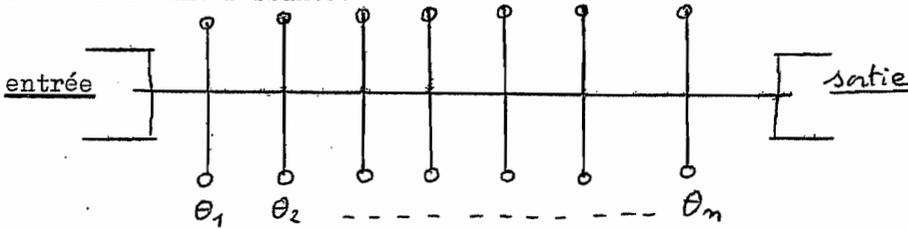
$$\begin{pmatrix} w_2 \\ \varphi_2 \\ T_2 \\ M_2 \end{pmatrix} = T_{21} \begin{pmatrix} w_1 \\ \varphi_1 \\ T_1 \\ M_1 \end{pmatrix}$$

Si l'on y ajoutait la torsion, on obtiendrait une chaîne triple!

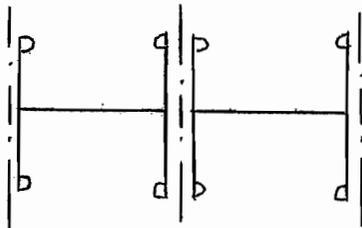
Cette méthode des matrices de transfert est petit à petit abandonnée, car la précision diminue rapidement avec le nombre de boîtes noires.

PROBLEME DU FILTRE MECANIQUE

C'est le seul exemple où la méthode des matrices de transfert semble réellement intéressante.



Le système est composé de $(n - 1)$ éléments identiques, qui seront ici



limités chacun à la moitié d'un disque. Si K est la raideur d'un tronçon, on a pour ce tronçon $V = \frac{K}{2} (\theta_{m+1} - \theta_m)^2$,

tandis que l'énergie cinétique est $T = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} J \dot{\theta}_{m+1}^2 + \frac{1}{2} J \dot{\theta}_m^2 \right)$

Dès lors, pour ce tronçon,

$$K = \begin{pmatrix} k & -k \\ -K & K \end{pmatrix} \quad M = \begin{pmatrix} J/2 & 0 \\ 0 & J/2 \end{pmatrix},$$

et l'équation aux valeurs propres s'écrit

$$\begin{vmatrix} K - \omega^2 \frac{J}{2} & -K \\ -K & K - \omega^2 \frac{J}{2} \end{vmatrix} = 0,$$

Soit

$$0 = K^2 - \omega^2 JK + \omega^4 \frac{J^2}{4} - K^2 = -\omega^2 J \left(K - \omega^2 \frac{J}{4} \right),$$

d'où les deux racines

$$\omega^2 = 0 \quad \text{et} \quad \omega^2 = \frac{4K}{J}$$

La première correspond visiblement au mode rigide $\theta_m = \theta_{m+1}$;

La seconde, au mode propre donné par l'équation

$$(K - 2K) \theta_m + K \theta_{m+1} = 0,$$

Soit

$$\theta_m = -\theta_{m+1}$$

On a alors, en posant $\Omega^2 = 4K/J$

$$(K - \omega^2 M)^{-1} = \frac{1}{\omega^2 J (K - \omega^2 \frac{J}{4})} \begin{bmatrix} k - \omega^2 J/2 & k \\ k & k - \omega^2 J/2 \end{bmatrix} = \frac{1}{\omega^2 J (\omega^2 - \Omega^2)} \begin{bmatrix} \Omega^2 - 2\omega^2 & \Omega^2 \\ -\Omega^2 & \Omega^2 - 2\omega^2 \end{bmatrix}$$

Soit

$$a_{11} = -\frac{\Omega^2 - 2\omega^2}{j\omega^2(\Omega^2 - \omega^2)} = a_{22}$$

$$a_{12} = -\frac{\Omega^2}{j\omega^2(\Omega^2 - \omega^2)}$$

Il vient donc

$$T_{22} = \begin{bmatrix} 1 - 2\frac{\omega^2}{\Omega^2} & -\frac{1}{j\omega^2(1 - \frac{\omega^2}{\Omega^2})} \left[1 - \left(1 - \frac{2\omega^2}{\Omega^2} \right)^2 \right] \\ j\omega^2 \left(1 - \frac{\omega^2}{\Omega^2} \right) & 1 - 2\frac{\omega^2}{\Omega^2} \end{bmatrix}$$

On a encore

$$1 - \left(1 - 2\frac{\omega^2}{\Omega^2} \right)^2 = 1 - 1 + 4\frac{\omega^2}{\Omega^2} - 4\frac{\omega^4}{\Omega^4} = 4\frac{\omega^2}{\Omega^2} \left(1 - \frac{\omega^2}{\Omega^2} \right)$$

d'où

$$T_{21} = \begin{bmatrix} 1 - 2\frac{\omega^2}{\Omega^2} & -\frac{4}{j\Omega^2} \\ j\omega^2 \left(1 - \frac{\omega^2}{\Omega^2} \right) & 1 - 2\frac{\omega^2}{\Omega^2} \end{bmatrix}$$

Cherchons une solution de la forme

$$\begin{pmatrix} H_m \\ A_m \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} \tau \\ \alpha \end{pmatrix} e^{im\mu} \quad \tau, \alpha \quad \text{Nombres complexes à définir}$$

On doit alors avoir

$$\begin{pmatrix} \tau e^{i\mu} \\ \alpha e^{i\mu} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - 2\frac{\omega^2}{\Omega^2} & -\frac{4}{j\Omega^2} \\ j\omega^2 \left(1 - \frac{\omega^2}{\Omega^2} \right) & 1 - 2\frac{\omega^2}{\Omega^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tau \\ \alpha \end{bmatrix},$$

ce qui implique

$$\begin{vmatrix} 1 - 2\frac{\omega^2}{\Omega^2} - e^{i\mu} & -\frac{4}{j\Omega^2} \\ j\omega^2 \left(1 - \frac{\omega^2}{\Omega^2} \right) & 1 - \frac{2\omega^2}{\Omega^2} - e^{i\mu} \end{vmatrix} = 0$$

soit

$$e^{i2\mu} - 2 \left(1 - \frac{2\omega^2}{\Omega^2} \right) e^{i\mu} + 1 = 0$$

d'où

$$e^{i\mu} = 1 - \frac{2\omega^2}{\Omega^2} \pm 2\frac{\omega}{\Omega} \sqrt{\frac{\omega^2}{\Omega^2} - 1}$$

On remarquera effectivement que pour $\frac{\omega^2}{\Omega^2} < 1$, on a

$$\sqrt{\frac{\omega^2}{\Omega^2} - 1} = i \sqrt{1 - \frac{\omega^2}{\Omega^2}}$$

le dernier radical étant réel; de plus,

$$\left(1 - \frac{2\omega^2}{\Omega^2}\right)^2 + 4 \frac{\omega^2}{\Omega^2} \left(1 - \frac{\omega^2}{\Omega^2}\right) = 1,$$

ce qui permet de poser

$$\cos \mu = 1 - \frac{2\omega^2}{\Omega^2} \quad ; \quad \sin \mu = 2 \frac{\omega}{\Omega} \sqrt{1 - \frac{\omega^2}{\Omega^2}}$$

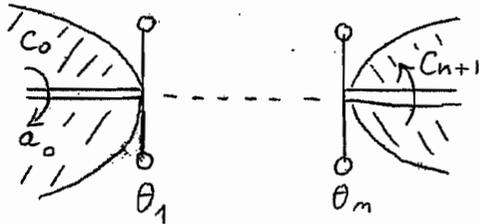
Ces deux relations sont équivalentes. On notera encore que la première implique

$$\frac{2\omega^2}{\Omega^2} = 1 - \cos \mu = 2 \sin^2 \frac{\mu}{2}$$

ou encore

$$\boxed{\frac{\omega}{\Omega} = \sin \frac{\mu}{2}}$$

Examinons à présent les extrémités. L'arbre est attaqué par un coefficient d'influence $a_0 = -\frac{\theta_1}{c_0}$. A l'extrémité, on a $a_{n+1} = \frac{\theta_n}{c_{n+1}}$



On peut alors écrire l'équation suivante pour le premier disque:

$$c_0 = K (\theta_1 - \theta_2) + J \ddot{\theta}_1,$$

et pour

$$\theta_m = R e^{i\mu m} \cos \omega t,$$

il en découlera la relation

$$R \left\{ \tau \left[-\omega^2 J e^{i\mu} + k (e^{i\mu} - e^{i2\mu}) + \frac{e^{i\mu}}{a_0} \right] \right\} = 0$$

Notant que

$$\omega^2 J = \Omega^2 J \sin^2 \frac{\mu}{2} = 4 k \sin^2 \frac{\mu}{2} = 2k(1 - \cos \mu)$$

On obtient

$$R \left\{ k \tau e^{i\mu} \left[-2 + 2 \cos \mu + 1 - \cos \mu - i \sin \mu + \frac{1}{k a_0} \right] \right\} = 0$$

ou encore

$$R \left\{ k \tau e^{i\mu} \left[\left(\frac{1}{k a_0} - 1 \right) + e^{-i\mu} \right] \right\} = 0 \quad (1)$$

c'est-à-dire que l'argument de cette expression doit être égal à $(2k+1) \frac{\pi}{2}$:

$$\arg \tau + \mu + \arg \left[\left(\frac{1}{k a_0} - 1 \right) + e^{-i\mu} \right] = (2l+1) \frac{\pi}{2} \quad (1')$$

De la même façon, l'équation du dernier disque s'écrit

$$k(\theta_{n+1} - \theta_n) = c_{n+1} + J \ddot{\theta}_n,$$

ce qui entraîne

$$R \left\{ \tau [-\omega^2] e^{i n \mu} - k (e^{i(n-1)\mu} - e^{i n \mu}) + \frac{e^{i n \mu}}{a_{m+1}} \right\} = 0$$

soit

$$R \left\{ k \tau e^{i n \mu} \left[-2 + 2 \cos \mu - e^{-i \mu} + 1 + \frac{1}{k a_{m+1}} \right] \right\} = 0$$

ce qui s'écrit encore

$$R \left\{ k \tau e^{i n \mu} \left[-2 + 2 \cos \mu - \cos \mu + i \sin \mu + 1 + \frac{1}{k a_{m+1}} \right] \right\} = 0,$$

c'est-à-dire

$$R \left\{ k \tau e^{i n \mu} \left[\left(\frac{1}{k a_{m+1}} - 1 \right) + e^{i \mu} \right] \right\} = 0 \quad (2)$$

L'argument de cette expression doit donc vérifier

$$\text{Arg } \tau + n \mu + \arg \left[\left(\frac{1}{k a_{m+1}} - 1 \right) + e^{i \mu} \right] = (2l'+1) \frac{\pi}{2} \quad (2')$$

Les relations (1') et (2') fixent toutes deux $\arg \tau$, et pourraient donc incompatibles. La condition de compatibilité s'obtiendra le plus simplement en les soustrayant, ce qui donne

$$(m-1)\mu + \arg \left[\left(\frac{1}{k a_{m+1}} - 1 \right) + e^{i \mu} \right] - \arg \left[\left(\frac{1}{k a_0} - 1 \right) + e^{i \mu} \right] = l'' \pi$$

ou

$$(m-1)\mu + \psi_0 + \psi_{m+1} = l'' \pi$$

avec

$$\psi_0 = -\text{arctg} \frac{-\sin \mu}{\left(\frac{1}{k a_0} - 1 \right) + \cos \mu} = \text{arctg} \left[\frac{\sin \mu}{\frac{1}{k a_0} - 1 + \cos \mu} \right]$$

$$\psi_{m+1} = \text{arctg} \left[\frac{\sin \mu}{\frac{1}{k a_{m+1}} - 1 + \cos \mu} \right]$$

Calculons un de ces deux nombres : on a

$$\sin \mu = \frac{2 \text{tg } \mu / 2}{1 + \text{tg}^2 \mu / 2} \quad \cos \mu = \frac{1 - \text{tg}^2 \mu / 2}{1 + \text{tg}^2 \mu / 2}$$

d'où

$$\text{tg } \psi_0 = \frac{k a_0}{\sqrt{2 k a_0 - 1}} \cdot \frac{2 \sqrt{2 k a_0 - 1} \text{tg } \frac{\mu}{2}}{1 - (2 k a_0 - 1) \text{tg}^2 \mu / 2}$$

soit, en posant $\text{tg } \beta_0 / 2 = \sqrt{2 k a_0 - 1} \text{tg } \mu / 2$,

$$\text{tg } \psi_0 = \frac{k a_0}{\sqrt{2 k a_0 - 1}} \text{tg } \beta_0$$

I METHODES ITERATIVES

Les méthodes itératives sont très anciennes dans leur principe. Jadis, elles étaient surtout utilisées sous leur graphique (Stodola). Les variantes numériques ont apparu avec l'usage croissant de l'ordinateur. La méthode de la puissance de Wilkinson 1965 n'est que la version numérique de la méthode de Stodol. D'autres algorithmes ont fait leur apparition plus récemment. Citons l'itération simultanée de Bauer - Rutishauser, méthode de la puissance, améliorée, et ces derniers temps, un regain d'intérêt pour la méthode de Lanczos.

Dans cet exposé, nous traiterons la méthode de la puissance sous forme numérique, puis nous verrons sa forme graphique. Nous traiterons ensuite le cas d'une structure imparfaitement liée.

1. La méthode de la puissance, dans le cas où K^{-1} existe

1.1 L'équation

$$Kx = w^2 Mx$$

peut encore s'écrire, si K est inversible,

$$x = w^2 K^{-1} Mx,$$

ou encore

$$K^{-1} Mx = \lambda x,$$

avec

$$\lambda = 1/w^2$$

On se ramène ainsi à un problème aux valeurs propres à 1 matrice, à ceci près que la matrice $K^{-1} M$ n'est pas symétrique en général. Nous verrons cependant plus loin qu'il est possible de symétriser le problème, ce qui fait gagner près de la moitié de la mémoire nécessaire.

La méthode de la puissance consiste à partir d'un vecteur arbitraire z.

On procède alors à l'itération suivante :

le vecteur z_1 est la solution de

$$K^{-1} Mz_1 = z_0,$$

c'est-à-dire

$$z_1 = (K^{-1} M)^{-1} z_0,$$

le vecteur z_2 , donné par

$$z_2 = (K^{-1} M)^{-1} z_1,$$

et ainsi de suite. Pour examiner la convergence de cette méthode, développons z_p

en vecteurs propres : $z_p = \sum_{r=1}^n \beta_r^{(p)} x_{(r)}$

On a alors

$$z_{p+1} = \sum_{n=1}^m \beta_n^{(p)} K^{-1} M x_{(n)} = \sum_{n=1}^m \beta_n^{(p)} \lambda_n x_{(n)},$$

car les vecteurs propres vérifient

$$K^{-1} M x_{(n)} = \lambda_n x_{(n)}, \quad \lambda_n = 1/\omega_n^2$$

Dès lors, on a par récurrence

$$z_p = \sum_{n=1}^m \beta_n^{(0)} \lambda_n^p x_{(n)}$$

Nous supposons les valeurs propres rangées par ordre décroissant :

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3 \dots$$

Dès lors, on a encore

$$z_p = \lambda_1^p \left[\beta_1^{(0)} x_{(1)} + \sum_{n=2}^m \left(\frac{\lambda_n}{\lambda_1} \right)^p \beta_n^{(0)} x_{(n)} \right]$$

Je dis que ce vecteur converge angulairement vers $x_{(1)}$ à condition que $\beta_1^{(0)} \neq 0$ et que $(\lambda_n/\lambda_1) < 1$ pour $n \geq 2$. Ceci demande une explication. Etant donné deux vecteurs a et b, le cosinus de leur petit angle est donné par

$$\cos(a, b) = \frac{a^T M b}{\|a\| \|b\|}, \quad \|a\|^2 = a^T M a$$

On en déduit que le sinus du même angle vaut

$$\sin(a, b) = \sqrt{1 - \cos^2(a, b)}$$

Nous dirons donc qu'un vecteur z converge angulairement vers un vecteur y si $\sin(z, y) \rightarrow 0$. On peut montrer que les sinus sont des écarts et définissent donc une structure uniforme.

Cela étant, on a

$$\cos(z_p, x_{(1)}) = \frac{\lambda_1^p \beta_1^{(0)}}{\lambda_1^p \sqrt{(\beta_1^{(0)})^2 + \sum_{n=2}^m \left(\frac{\lambda_n}{\lambda_1} \right)^{2p} (\beta_n^{(0)})^2}}$$

et

$$\sin^2(z_p, x_{(1)}) = \frac{\sum_{n=2}^m \left(\frac{\lambda_n}{\lambda_1} \right)^{2p} (\beta_n^{(0)})^2}{(\beta_1^{(0)})^2 + \sum_{n=2}^m \left(\frac{\lambda_n}{\lambda_1} \right)^{2p} (\beta_n^{(0)})^2} \rightarrow 0$$

Pour déterminer l'ordre de convergence, définissons encore la tangente

par

$$tg(a, b) = \sin(a, b) / \cos(a, b)$$

On a alors

$$tg^2(z_p, x_{(1)}) = \frac{\sum_{n=2}^m \left(\frac{\lambda_n}{\lambda_1} \right)^{2p} (\beta_n^{(0)})^2}{(\beta_1^{(0)})^2} \leq \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right)^{2p} \sum_{n=2}^m (\beta_n^{(0)})^2 = \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right)^{2p} tg^2(z_0, x_{(1)}),$$

c'est-à-dire

$$t_p(z_p, x_{(1)}) \leq \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right)^p t_0(z_0, x_{(1)}).$$

On a alors

$$\sin(\vartheta_p, x_{(1)}) = \frac{\operatorname{tg}(\vartheta_p, x_{(1)})}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2(\vartheta_p, x_{(1)})}} \leq \operatorname{tg}(\vartheta_p, x_{(1)}) \leq \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^p \operatorname{tg}(\vartheta_0, x_{(1)})$$

On constate que la convergence est assurée si $\frac{\lambda_2}{\lambda_1} < 1$ et $\operatorname{tg}(\vartheta_0, x_{(1)})$ fini, c'est-à-dire que z_0 n'est pas orthogonal à $x_{(1)}$. La vitesse de convergence est λ_2/λ_1 .

Pour le calcul de la valeur propre, on notera qu'au voisinage de la solution,

$$z_p \simeq \lambda_1^p \beta_1^{(0)} x_{(1)}$$

d'où

$$z_{p+1} \simeq \lambda_1 z_p$$

et il suffit de calculer

$$\frac{(z_{p+1})_k}{(z_p)_k}$$

K étant choisi de manière que $(z_p)_k$ soit la plus grande composante.

La convergence étant de nature angulaire, on peut à chaque instant multiplier le mode par un nombre quelconque sans altérer la convergence. On tire parti de cette propriété pour garder des composantes raisonnables en ordre de grandeur.

Remarques - 1) Si par malheur, $\beta_1^{(0)} = 0$, ce qui signifie que l'on a par hasard choisi un vecteur de départ orthogonal au mode recherché, l'algorithme converge tout de même, du fait des erreurs d'arrondi. La machine calcule toujours, en effet

$$z_1 = K^{-1} M z_0 + \delta z_1$$

δz_1 étant l'erreur d'arrondi. On a

$$\delta z_1 = \sum_{r=2}^n \delta \beta_r x_{(r)},$$

c'est-à-dire qu'une composante selon le premier mode finit toujours par s'introduire. Dans ce cas, la convergence commence vers le deuxième mode, puis il y a une période de flottement, où les deux modes entrent en compétition, pour converger finalement vers le premier mode.

2) Dans le cas où $\lambda_2/\lambda_1 = 1$ (valeur propre double),

on a

$$z_p = \lambda_1^p (\beta_1^{(0)} x_{(1)} + \beta_2^{(0)} x_{(2)}) + \sum_{r=3}^n \lambda_r^p \beta_r^{(0)} x_{(r)}$$

et on converge vers une combinaison quelconque des deux modes correspondants.

3) Dans le cas où $\lambda_2/\lambda_1 \simeq 1$, la convergence est très lente.

C'est la faiblesse essentielle de la méthode.

1. 2. Recherche des autres éléments propres

En principe, si z_0 est orthogonal à $x_{(1)}$, on a

$$z_0 = \sum_{r=2}^n \beta_r^{(0)} x_{(r)},$$

et la méthode de la puissance devrait mener à

$$z_p = \sum_{n=2}^m \lambda_2^n \beta_2^{(0)} x_{(n)},$$

Si bien que l'on convergerait vers $x_{(2)}$. Le problème se ramènerait donc à construire un tel z_0 . Pour y arriver, on utilise un opérateur de projection, que nous allons construire. Soit donc un vecteur quelconque

$$z = \sum_{n=1}^m \beta_n x_{(n)}$$

Il suffit de calculer le vecteur

$$z_0 = z - \beta_1 x_{(1)} = \sum_{n=2}^m \beta_n x_{(n)}$$

Pour cela, il faut connaître β_1 . Mais précisément, en multipliant z par $x_{(1)}^T M$ on obtient

$$x_{(1)}^T M z = \sum_{n=1}^m \beta_n x_{(1)}^T M x_{(n)} = \beta_1 \mu_1$$

d'où la relation

$$\beta_1 = \frac{1}{\mu_1} x_{(1)}^T M z.$$

Dès lors, on a

$$\begin{aligned} z_0 &= z - \frac{1}{\mu_1} (x_{(1)}^T M z) x_{(1)} \\ &= z - \frac{1}{\mu_1} x_{(1)} x_{(1)}^T M z \\ &= O_1 z, \end{aligned}$$

Où apparaît l'opérateur de projection orthogonale au vecteur $x_{(1)}$:

$$O_1 = \left[I - \frac{x_{(1)} x_{(1)}^T M}{\mu_1} \right].$$

Cet opérateur, comme toute projection orthogonale, jouit des propriétés suivantes:

a) idempotence

$$\begin{aligned} O_1 O_1 &= \left(I - \frac{x_{(1)} x_{(1)}^T M}{\mu_1} \right) \left(I - \frac{x_{(1)} x_{(1)}^T M}{\mu_1} \right) \\ &= I - 2 \frac{x_{(1)} x_{(1)}^T M}{\mu_1} + \frac{x_{(1)} x_{(1)}^T M x_{(1)} x_{(1)}^T M}{\mu_1^2} \\ &= I - \frac{x_{(1)} x_{(1)}^T M}{\mu_1} = O_1 \end{aligned}$$

b) Il en découle directement

$$O_1 (I - O_1) = O_1 - O_1 = 0$$

c) Par ailleurs, si l'on considère deux opérateurs de projection

$$O_1 = I - \frac{x_{(1)} x_{(1)}^T M}{\mu_1}, \quad O_2 = I - \frac{x_{(2)} x_{(2)}^T M}{\mu_2},$$

avec $x_{(1)}$ et $x_{(2)}$ orthogonaux (p.r; à M), ces opérateurs commutent : cela découle directement de la relation

$$\begin{aligned} O_1 O_2 &= \left(I - \frac{x_{(1)} x_{(1)}^T M}{\mu_1} \right) \left(I - \frac{x_{(2)} x_{(2)}^T M}{\mu_2} \right) \\ &= I - \frac{x_{(1)} x_{(1)}^T M}{\mu_1} - \frac{x_{(2)} x_{(2)}^T M}{\mu_2} + \frac{x_{(1)} x_{(1)}^T M x_{(2)} x_{(2)}^T M}{\mu_1 \mu_2} \\ &= O_1 + O_2 - I, \end{aligned}$$

Cette dernière quantité étant visiblement symétrique en O_1 et O_2 .

d) D'autre part, O_1 et $K^{-1}M$ commutent

$$\begin{aligned} \text{En effet,} \\ K^{-1}M O_1 &= K^{-1}M \left(I - \frac{x_{(1)} x_{(1)}^T M}{\mu_1} \right) = K^{-1}M - \frac{K^{-1}M x_{(1)} x_{(1)}^T M}{\mu_1} \\ &= K^{-1}M - \lambda_1 \frac{x_{(1)} x_{(1)}^T M}{\mu_1} \cdot (1/\mu_1) = K^{-1}M - \frac{\lambda_1 x_{(1)} x_{(1)}^T M}{\mu_1} \\ O_2, \lambda_1 x_{(1)}^T &= x_{(1)}^T M^T K^{-T} = x_{(1)}^T M K^{-1} \\ &= K^{-1}M - \frac{x_{(1)} x_{(1)}^T M K^{-1}M}{\mu_1} = \left(I - \frac{x_{(1)} x_{(1)}^T M}{\mu_1} \right) K^{-1}M \\ &= O_1 K^{-1}M. \end{aligned}$$

En principe, il suffirait donc de multiplier le vecteur z_0 de départ par O_1 pour converger vers le second membre. Malheureusement, dans les calculs numériques, il n'en est rien, car les erreurs d'arrondi introduisent toujours des composantes en $x_{(1)}$, si bien que l'itération converge tout de même vers $x_{(1)}$

Mais on remarquera que pour $r \neq 1$,

$$O_1 x_{(r)} = x_{(r)}$$

si bien que

$$K^{-1}M O_1 x_{(r)} = O_1 x_{(r)},$$

ce qui signifie que $x_{(r)}$ est également vecteur propre de la matrice $K^{-1}M O_1$.

Dès lors, on itère avec la matrice projetée $K^{-1}M O_1$. Son calcul est d'ailleurs aisé, car on a

$$\begin{aligned} K^{-1}M O_1 &= K^{-1}M \left(I - \frac{1}{\mu_1} x_{(1)} x_{(1)}^T M \right) \\ &= K^{-1}M - \frac{1}{\mu_1} K^{-1}M x_{(1)} x_{(1)}^T M \\ &= K^{-1}M - \frac{\lambda_1}{\mu_1} x_{(1)} x_{(1)}^T M \end{aligned}$$

Ce dernier procédé de calcul est sensiblement plus simple que le produit de $K^{-1}M O_1$, puisqu'il implique seulement un produit dyadique, à soustraire de $K^{-1}M$.

Pour la troisième valeur propre, on itère avec $K^{-1}M O_1 O_2$, pour la quatrième, avec $K^{-1}M O_1 O_2 O_3$, etc....

2. Symétrisation du problème

La matrice $K^{-1} M$ n'est pas symétrique, et cette propriété est gênante car l'espace nécessaire pour la mettre en mémoire est de ce fait pratiquement doublé. On peut cependant symétriser le problème. En effet, la matrice des masses, symétrique et définie positive, admet une décomposition en deux matrices triangulaires :

$$M = L L^T,$$

par l'algorithme de Choleski. Le problème devient donc

$$K^{-1} L L^T x = \lambda x$$

Considérant alors les variables y définies par

$$y = L^T x,$$

On obtient

$$K^{-1} L y = \lambda L^{-T} y,$$

soit

$$L^T K^{-1} L y = \lambda y$$

Or, la matrice $L^T K^{-1} L$ est symétrique, et de plus, son calcul nécessite moins d'opérations que celui de $K^{-1} M$. En effet, le produit $K^{-1} M$ nécessite n^3 multiplications, la décomposition de Choleski, $\frac{n^3}{3}$ environ, et le produit $L^T K^{-1} L$, dont on ne doit calculer que la moitié des termes; de l'ordre $\frac{n^3}{6}$.

3. Remarque sur le calcul de la fréquence propre : étant donné le mode ou son approximation, on peut écrire

$$w^2 = \frac{x^T K x}{x^T M x}$$

On montrera que cette expression est plus précise que le simple rapport des itérés successifs.

4. Forme graphique : méthode de Stodola

La méthode de Stodola est adaptée au cas des poutres ou des arbres. La méthode de la puissance revient, comme on le sait, à partir d'un déplacement arbitraire, z_0 , puis à résoudre le problème statique

$$K z_1 = M z_0$$

Or, cette opération peut être faite par voie graphique

3. Cas où la matrice K n'est pas inversible

3.1 La méthode de la puissance revient, dans le cas où la matrice de raideur est inversible à résoudre les problèmes statiques successifs

$$Kz_1 = Mz_0, \quad Kz_2 = Mz_1, \text{ etc } \dots$$

où l'on peut considérer les vecteurs Mz_0, Mz_1, \dots comme des forces! Il est donc naturel de se demander ce que devient le problème statique

$$Kq = p$$

Lorsque la matrice K est singulière

Disons tout de suite que dans le cas d'une force quelconque, il n'existe en général pas de ^{solution} ~~liaison~~. Ainsi, une poutre entièrement libre qui serait soumise à une force p arbitraire n'aurait pas de flèche statique définie.



Les seconds membres pour lesquels le problème statique a une solution admettent la caractérisation suivante : une équation matricielle $Aq = p$ admet une solution si et seulement si pour toute solution g du système homogène adjoint $A^T g = 0$, on a $g^T p = 0$

a) la condition est nécessaire. En effet, si $Aq = p$, on a, pour toute solution de $A^T g = 0$,

$$p^T g = q^T A^T g = 0$$

b) la condition est suffisante. Soit $\rho(A)$ le rang de la matrice A de dimension $(m \times n)$. A l'aide de matrices de permutation, on peut amener le noyau dur de A en haut et à gauche :

$$\tilde{A} = PAQ = \begin{bmatrix} \tilde{A}_{11} & \tilde{A}_{12} \\ \tilde{A}_{21} & \tilde{A}_{22} \end{bmatrix},$$

avec \tilde{A}_{11} carrée de dimension $\rho(A)$, $\det \tilde{A}_{11} \neq 0$. Le système $Aq = p$ devient alors successivement

$$PAq = \tilde{p}$$

et

$$PAQ Q^{-1} q = \tilde{p}$$

soit

$$\tilde{A} \tilde{q} = \tilde{p}$$

avec

$$\tilde{q} = Q^{-1} q, \quad \tilde{p} = P p$$

La condition $A^T g = 0$ devient quant à elle

$$0 = Q^T A^T g = Q^T A^T P^T P^{-T} g = \tilde{A}^T \tilde{g}$$

avec

$$\tilde{g} = P^{-T} g$$

Enfin, la condition $g^T p = 0$ devient

$$g^T P^{-1} P p = \tilde{g}^T \tilde{p} = 0.$$

Cela étant (et c'était évident), le système $Aq = p$ s'écrit

$$\begin{cases} \tilde{A}_{11} \tilde{q}_1 + \tilde{A}_{12} \tilde{q}_2 = \tilde{r}_1 \\ \tilde{A}_{21} \tilde{q}_1 + \tilde{A}_{22} \tilde{q}_2 = \tilde{r}_2 \end{cases}$$

et on déduit de la première équation

$$\tilde{q}_1 = \tilde{A}_{11}^{-1} \tilde{r}_1 - \tilde{A}_{11}^{-1} \tilde{A}_{12} \tilde{q}_2$$

Réintroduisant dans la seconde, on obtient

$$(\tilde{A}_{22} - \tilde{A}_{21} \tilde{A}_{11}^{-1} \tilde{A}_{12}) \tilde{q}_2 = \tilde{r}_2 - \tilde{A}_{21} \tilde{A}_{11}^{-1} \tilde{r}_1$$

Or, cette dernière matrice ne peut être qu'identiquement nulle. En effet, dans le cas contraire, il existerait un terme au moins de cette matrice qui ne serait pas nul. Il aurait la forme

$$\tilde{a}_{kk} = \underbrace{\tilde{a}_{k1}}_{\text{ligne}} \tilde{A}_{11}^{-1} \underbrace{\tilde{c}_{1k}}_{\text{colonne}}$$

Or, par la règle de Sarrus - Chur, on aurait alors

$$\det \begin{bmatrix} \tilde{A}_{11} & \tilde{c}_{1k} \\ \tilde{a}_{1k} & \tilde{a}_{kk} \end{bmatrix} = \det \tilde{A}_{11} \det (\tilde{a}_{kk} - \tilde{a}_{1k} \tilde{A}_{11}^{-1} \tilde{c}_{1k})$$

Ce qui contredirait l'hypothèse que \tilde{A}_{11} est la plus grande matrice carrée inversible contenue dans A. Donc, le système sera compatible si et seulement si

$$\tilde{r}_2 - \tilde{A}_{21} \tilde{A}_{11}^{-1} \tilde{r}_1 = 0 \quad (*)$$

Or, la matrice

$$\tilde{C} = \begin{bmatrix} \tilde{A}_{11}^{-T} & \tilde{A}_{21}^{-T} \\ -I & \end{bmatrix} \begin{matrix} \updownarrow p(A) \\ \updownarrow m-p(A) \end{matrix}$$

ses colonnes risiblement linéairement indépendantes; de plus,

$$\tilde{A}^T \tilde{C} = \begin{bmatrix} \tilde{A}_{11}^T & \tilde{A}_{21}^T \\ \tilde{A}_{12}^T & \tilde{A}_{22}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{A}_{11}^{-T} & \tilde{A}_{21}^{-T} \\ -I & \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{A}_{21}^T - \tilde{A}_{21}^T \\ \tilde{A}_{12}^T \tilde{A}_{11}^{-T} \tilde{A}_{21}^T - \tilde{A}_{22}^T \end{pmatrix} = 0$$

puisque $\tilde{A}_{22} - \tilde{A}_{21} \tilde{A}_{11}^{-1} \tilde{A}_{12} = 0$. Elle a donc ses lignes composée des $m-p$ (A) singularités de \tilde{A}^T . Or, la relation (*) revient à dire que p est orthogonal à toute les colonnes de la matrice C, CQFD.

L'interprétation physique de cette condition est la suivante : toute singularité de K^T et donc de K est un mode rigide. La solution existera donc si p vérifie

$$u_{(i)}^T p = 0,$$

équation qui exprime la nullité du travail virtuel pour ces modes, c'est-à-dire l'équilibre au sens de la statique des mécarismes.

Etant donné une solution particulière

$$q = Pp, \text{ part}$$

trouvée à une manière quelconque, on obtiendra la solution générale de

$$K_q = p$$

en y ajoutant une combinaison linéaire quelconque des modes rigides :

$$q = Pp + \sum_i \alpha_i u(i)$$

3.2. On peut à présent se poser la question suivante : étant donné un vecteur p quelconque, comment peut-on le transformer en un vecteur orthogonal aux modes rigides ? Développons p en termes des modes propres. Comme il s'agit d'une force, nous utiliserons la base des Mu et Mx :

$$p = \sum_i \alpha_i M u(i) + \sum_r \beta_r M x(r)$$

Le vecteur transformé sera donc

$$p_{mod} = \sum_r \beta_r M x(r) = p - \sum_i \alpha_i M u(i)$$

Pour déterminer les α_i , prémultiplions par $u(j)^T$:

$$u(j)^T p = \alpha_j \mu_j \Rightarrow \alpha_j = \frac{u(j)^T p}{\mu_j}$$

d'où

$$p_{mod} = p - \sum_j \frac{M u(j) u(j)^T p}{\mu_j}$$

soit encore

$$p_{mod} = A^T p$$

en introduisant la matrice de projection

$$A = I - \sum_j \frac{u(j) u(j)^T M}{\mu_j}$$

Cette matrice a les propriétés suivantes :

- a) $Au(i) = 0$: en effet $Au(i) = u(i) - \sum_j \frac{u(j) u(j)^T M u(i)}{\mu_j} = 0$
- b) $Ax(r) = x(r)$: en effet, $u(j)^T M x(r) = 0$

Dès lors. au problème

$$Kq = p,$$

qui n'admet pas nécessairement de solution, on peut associer le problème

$$Kq = A^T P$$

qui en admet toujours une. Supposons que l'on connaisse une solution particulière $P_0 p$ de ce problème. La solution générale est donc

$$q = P_0 p + \sum_i \alpha_i u(i)$$

On aura alors, quel que soit p ,

$$Kq = KP_0 p + 0 = A^T p,$$

d'où

$$\boxed{KP_0 = A^T}$$

Dès lors, pour tout mode élastique,

$$KP_0 x(r) = A^T x(r) = x(r),$$

Tandis que pour tout mode rigide,

$$KP_0 u(i) = 0$$

P_0 se comporte donc comme une inverse pour les modes élastiques. On dit que c'est une pseudo-inverse.

3.3 Mais une telle pseudo-inverse existe-t-elle nécessairement?

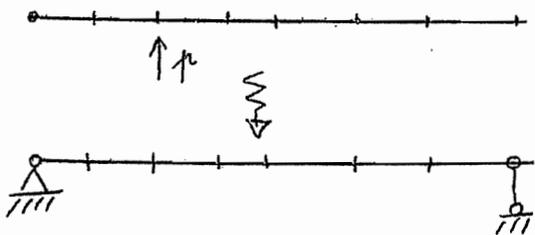
Montrons tout d'abord que s'il en existe une, il en existe une infinité. En effet soit P_0 une telle matrice. Toute matrice de la forme

$$P_1 = P_0 + \sum_i \mu(i) C^T(i)$$

est également pseudo-inverse, car

$$KP_1 = KP_0 + \sum_i K \mu(i) C^T(i) = KP_0 = A^T$$

L'existence d'une matrice P_0 peut alors se faire par construction c'est la méthode des liaisons temporaires de B Fraaijs de Veubeke



$$q = \begin{bmatrix} q_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

d'où

$$\begin{pmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} (A^T p)_1 \\ (A^T p)_2 \end{bmatrix}$$

Cette méthode consiste à ajouter temporairement des liaisons, jusqu'à rendre le système isostatique. On peut alors écrire, en supposant les déplacements fixés rangés en queue des vecteurs,

Or, on doit avoir $(A^T p)_2 = 0$. En effet, les charges appliquées $A^T p$ sont en équilibre, si bien que les réactions d'appui ne sont pas nécessaires! Dès lors, le système se ramène à

$$q_1 = K_{11}^{-1} (A^T p)_1, \quad q_2 = 0$$

ce que l'on peut écrire indifféremment

$$\begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} K_{11}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{G_{iso}} \begin{bmatrix} (A^T p)_1 \\ (A^T p)_2 \end{bmatrix}$$

soit

$$q = G_{iso} A^T p$$

Cela revient à définir la pseudo-inverse P_0 sous la forme

$$P_0 = G_{iso} A^T$$

3.4. La matrice P symétrique

Etant donné un vecteur $p = A^T p$ orthogonal aux modes rigides, nous savons donc calculer une solution q de $Kq = p$. Cette solution q n'est pas unique, mais deux solutions diffèrent d'une combinaison linéaire des modes rigides! Une manière de fixer q est d'imposer qu'il soit orthogonal aux modes rigides.

Or, cela est aisé, car étant donné q , on l'orthogonalise aux modes rigides en le prémultipliant par A : on aura alors

$$q_{orthog} = A G_{iso} A^T p.$$

On vérifie immédiatement que l'on a toujours

$$K q_{orthog} = \underbrace{K A G_{iso}}_K A^T p = A^T p$$

K, car $K u_{(i)} = 0$

et, de plus la matrice

$$G = A G_{iso} A^T$$

est symétrique. Cette matrice ne dépend pas du choix particulier de G_{iso} .

En effet, si

$$P_1 = G_{iso1} A^T, \quad P_2 = G_{iso2} A^T,$$

on a

$$A (P_1 - P_2) p = 0,$$

donc

$$A (P_1 - P_2) p = 0$$

3.5. Itération en présence de modes rigides

Partant de

$$Kx = w^2 Mx$$

ou

$$Mx = \lambda Kx,$$

on obtient

$$G Mx = \lambda GKx = \lambda \underbrace{A^T K}_A x = \lambda A x$$

Si x est combinaison linéaire de V.P., on a donc

$$G Mx = \lambda x$$

Ce problème admet pour solution

- les modes propres : $G Mx_{(r)} = x_{(r)}$

- les modes rigides, avec $\lambda = 0$. En effet,

$$G M u_{(i)} = A G_{i10} \left(I - \sum_j \frac{M u_{(j)} u_{(j)}^T}{\mu_j} \right) M u_{(i)}$$

$$= A G_{i10} (M u_{(i)} - M u_{(i)}) = 0$$

3.5. La matrice G et les coefficient d'influence dynamique

La matrice des coefficients d'influence dynamique s'écrit

$$(K - w^2 M)^{-1} = - \frac{1}{w^2} \sum_j \frac{u_{(j)} u_{(j)}^T}{\mu_j} + \sum_r \frac{1}{\mu_r} \frac{\alpha_{(r)} \alpha_{(r)}^T}{\omega_r^2 - w^2}$$

Pour $w^2 \rightarrow 0$, les premiers termes $\rightarrow \infty$. Pour supprimer cette singularité, nous supprimerons simplement ces termes (= régularisation), ce qui donne

$$\sum_r \frac{1}{\mu_r} \frac{\alpha_{(r)} \alpha_{(r)}^T}{\omega_r^2 - w^2}$$

La limite de cette expression pour $w^2 \rightarrow 0$ est :

$$\tilde{G} = \sum_r \frac{1}{\mu_r} \frac{\alpha_{(r)} \alpha_{(r)}^T}{\omega_r^2}$$

Montrons que c'est bien la même matrice que ci-dessus : $\tilde{G} = G$. On a en effet

$$\tilde{G} K = \sum_r \frac{1}{\mu_r} \frac{\alpha_{(r)} \alpha_{(r)}^T K}{\omega_r^2}$$

d'où

$$\tilde{G} K \alpha_{(s)} = \alpha_{(s)}, \quad \tilde{G} K u_{(i)} = 0 \quad \rightarrow \quad \tilde{G} K = A$$

D'autre part,

$$A \tilde{G} A^T = \tilde{G},$$

Donc

$$G = \tilde{G}.$$

1. Définition

Etant donné un vecteur quelconque q , on appelle quotient de Rayleigh de ce vecteur l'expression

$$p(q) = \frac{q^T K q}{q^T M q}$$

Il na de soi que si q est un mode propre $x(r)$, on a

$$p(x(r)) = \frac{x(r)^T K x(r)}{x(r)^T M x(r)} = \omega_r^2$$

Le quotient de Rayleigh jouit de propriétés remarquables.

2. Principe de meilleur approximation de la valeur propre (principe de Rayleigh)

A une erreur du premier ordre sur le mode propre correspond une erreur du second ordre sur le quotient de Rayleigh

Soit en effet x une approximation du r^e mode :

$$x = x(r) + \varepsilon y.$$

On peut poser

$$x^T M x = x(r)^T M x(r) = y^T M y = 1,$$

ce qui revient à fixer la masse des modes. Alors,

$$x^T M x = x(r)^T M x(r) + 2\varepsilon y^T M x(r) + \varepsilon^2 y^T M y,$$

=

d'où

$$y^T M x(r) = -\varepsilon/2 \cdot y^T M y = -\varepsilon/2$$

et

$$\begin{aligned} p(x) &= \frac{x^T K x}{x^T M x} = \frac{x(r)^T K x(r) + 2\varepsilon x(r)^T K y + \varepsilon^2 y^T K y}{1} \\ &= \omega_r^2 + 2\varepsilon \omega_r x(r)^T M y + \varepsilon^2 y^T K y \\ &= \omega_r^2 + \varepsilon^2 (y^T K y - \omega_r^2 y^T M y), \end{aligned}$$

soit

$$p(x) = \omega_r^2 + \varepsilon^2 (p(y) - \omega_r^2),$$

qui est bien du second ordre en ε .

3. La recherche des valeurs propres en tant que minimisation du quotient de Rayleigh

Convenons de chercher le r^e mode dans le complément orthogonal des $(r-1)$ précédents. Alors, on a

$$y = \sum_{s=r+1}^n \beta_s x(s) \quad \mu_s = x(s)^T M x(s) = 1, \quad \sum_{s=r+1}^n \beta_s^2 = 1$$

$$p(y) = \sum_{s=r+1}^n \beta_s^2 \omega_s^2 \geq \omega_r^2$$

$$p(x) = \omega_r^2 + \varepsilon^2 (p(y) - \omega_r^2) \geq \omega_r^2$$

.../...

Ainsi donc, le minimum du quotient de Rayleigh dans le complément orthogonal aux (r-1) premiers modes est réalisé par le r^e mode.

4. Contraintes additionnelles. Principe de courant

4.1 Ajoutons une liaison au système, de forme

$$f(q_1, \dots, q_n) = 0$$

Cette liaison devra être vérifiée à l'équilibre :

$$f(0, 0, \dots, 0).$$

Comme nous ne nous occupons que des petites oscillations,

nous la linéariserons :

$$\begin{aligned} f(q) &= f(0) + \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \right)_{q_i=0} q_i + O(q^2) \\ &= \mu^T q + O(q^2) = 0. \end{aligned}$$

Nous écrivons donc toujours la liaison sous la forme $\mu^T q = 0$.

4.2 Rechercher les valeurs propres du système lié revient à

minimiser le quotient de Rayleigh dans le complément orthogonal

des μ . Il suffit d'utiliser un opérateur de projection : à tout

vecteur q , on associera

$$\tilde{q} = q - \alpha \mu,$$

α étant choisi pour que $\mu^T \tilde{q} = 0$. Il vient :

$$\mu^T \tilde{q} = \mu^T q - \alpha \mu^T \mu = 0$$

soit
$$\alpha = \frac{\mu^T q}{\mu^T \mu},$$

et
$$\tilde{q} = q - \frac{\mu^T q}{\mu^T \mu} \mu = \left(I - \frac{\mu \mu^T}{\mu^T \mu} \right) q = P q,$$

P étant l'opérateur de projection

$$P = I - \frac{\mu \mu^T}{\mu^T \mu}.$$

Tout vecteur propre du système lié vérifiera

$$x(\omega) = K^{-1} M_x(\omega) x = K^{-1} M P_x(\omega) x;$$

$$P_x(\omega) = x(\omega) = P K^{-1} M P_x(\omega) x.$$

4.3 Principe du minimum de courant

La valeur propre ω^2 est la plus grande valeur que puisse prendre le minimum du quotient de Rayleigh lors de la variation de (r-1) liaisons additionnelles.

.../...

Il faut donc montrer que

$$w_r^2 \equiv \{p_{(1)} \dots p_{(r-1)}\} \left[\begin{array}{l} \min p(q) \\ p_{(i)}^T q = 0 \\ i=1, \dots, r-1 \end{array} \right]$$

Tout d'abord, la valeur w_r^2 est visiblement atteinte pour

$$p_{(i)} \equiv M x_{(i)} :$$

$$w_r^2 = \left[\min_{x_{(i)}^T M q = 0} p(q) \right]$$

comme on l'a déjà vu. Il nous suffit donc de montrer que pour tout autre choix des contraintes, le minimum est plus petit que w_r^2 .

a) supposons d'abord les liaisons telles que la matrice carrée

$$A_{ij} \equiv p_{(i)}^T x_{(j)} \quad , \quad i, j = 1, \dots, (r-1)$$

soit inversible

Ces liaisons étant fixées, nous cherchons le vecteur

$$q = \sum_{j=1}^m d_j x_{(j)}$$

qui minimise

$$p = \left(\sum_{j=1}^m d_j^2 \mu_j w_j^2 \right) / \left(\sum_{j=1}^m \mu_j d_j^2 \right)$$

moyennant les relations

$$p_{(i)}^T \sum_{j=1}^m d_j x_{(j)} = \sum_{j=1}^m d_j \underbrace{p_{(i)}^T x_{(j)}}_{A_{ij}} = 0 \quad (\text{liaisons})$$

Il découle des liaisons

$$\sum_{j=1}^{r-1} A_{ij} d_j = - p_{(i)}^T \sum_{j=r}^m d_j x_{(j)} ,$$

ce qui permet d'exprimer les d_j , $j = 1, \dots, (r-1)$ en termes des suivants :

$$d_j = - \sum_{i=1}^{r-1} A_{ji}^{-1} \left[p_{(i)}^T \sum_{k=r}^m d_k x_{(k)} \right] = \beta_j (\alpha_r, \dots)$$

Le problème se ramène donc à la minimisation de

$$\begin{aligned} p(\alpha_r, \dots) &= \frac{\sum_{i=1}^{r-1} \mu_i w_i^2 \beta_i^2 + \sum_{i=r}^m \mu_i w_i^2 d_i^2}{\sum_{i=1}^{r-1} \mu_i \beta_i^2 + \sum_{i=r}^m \mu_i d_i^2} \leq \frac{w_r^2 \sum_{i=1}^{r-1} \mu_i \beta_i^2 + \sum_{i=r}^m \mu_i w_i^2 d_i^2}{\sum_{i=1}^{r-1} \mu_i \beta_i^2 + \sum_{i=r}^m \mu_i d_i^2} \\ &\leq \frac{w_r^2 \left(\sum_{i=1}^{r-1} \mu_i \beta_i^2 + \sum_{i=r}^m \mu_i d_i^2 \right) + \sum_{i=r}^m \mu_i (w_i^2 - w_r^2) d_i^2}{\sum_{i=1}^{r-1} \mu_i \beta_i^2 + \sum_{i=r}^m \mu_i d_i^2} \\ &\leq w_r^2 + \frac{\sum_{i=r}^m \mu_i (w_i^2 - w_r^2) d_i^2}{\sum_{i=1}^{r-1} \mu_i \beta_i^2 + \sum_{i=r}^m \mu_i d_i^2} \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\min_{\{d_2, \dots, d_n\}} p(d_2, \dots) \leq p(d_2, 0, 0, \dots) = \omega_n^2 + 0$$

ce qui démontre
la thèse de ce cas
particulier

b) Supposons au contraire qu'il existe (au moins) un vecteur non nul

$$z = \sum_{j=1}^{n-1} \alpha_j x_{(j)} \quad \text{tel que} \quad r_{(i)}^T z = 0 \quad i=1, \dots, (n-1)$$

Alors, on a évidemment

$$\min p(q) \leq p(z) = \frac{\sum_{k=1}^{n-1} \omega_k^2 \alpha_k^2 / \mu_k}{\sum_{k=1}^{n-1} \alpha_k^2 / \mu_k} \leq \omega_{n-1}^2 \leq \omega_n^2$$

ce qui achève la démonstration.

4. 4 - Ecriture simplifiée du principe de courant

Posons

$$m(r_{(1)}, \dots, r_{(s)}) = \min_{\substack{r_{(i)}^T q = 0 \\ i=1, \dots, s}} p(q)$$

Alors, le principe de courant s'écrit

$$\omega_n^2 = \max_{r_{(1)} \dots r_{(n-1)}} m(r_{(1)}, \dots, r_{(n-1)})$$

4. 5 - Le principe du minimax de courant n'a qu'un intérêt théorique. Mais il permet de déduire l'important théorème des liaisons supplémentaires de Lord Rayleigh.

5 - Théorème des liaisons supplémentaires de Lord Rayleigh

Soit un système auquel on ajoute s liaisons. Marquons d'un tilde les fréquences propres du système lié, et sans tilde, celles du système libre. On a

$$\boxed{\omega_n^2 \leq \tilde{\omega}_n^2 \leq \omega_{n+s}^2}$$

En effet, en appliquant $p_{(1)}, \dots, p_{(s)}$ les liaisons imposées, on a d'une part

$$\begin{aligned} \tilde{\omega}_n^2 &= \max_{\{r_{s+1}, \dots, r_{s+n-1}\}} m(r_1, \dots, r_s, r_{s+1}, \dots, r_{s+n-1}) \\ &\leq \max_{\{r_1, \dots, r_s, r_{s+1}, \dots, r_{s+n-1}\}} m(r_1, \dots, r_s, r_{s+1}, \dots, r_{s+n-1}) = \omega_{n+s}^2 \end{aligned}$$

puisque le second maximum se cherche sur plus de variables.

D'autre part,

$$\omega_k^2 = \max_{\{r_{s+1}, \dots, r_{s+2-1}\}} m(r_{s+1}, \dots, r_{s+2-1})$$

Or, pour tout ensemble de liaisons $\{r_{s+1}, \dots, r_{s+2-1}\}$, on a

$$m(r_{s+1}, \dots, r_{s+2-1}) \leq m(\underbrace{r_1, \dots, r_s}_{\text{fixés}}, r_{s+1}, \dots, r_{s+2-1})$$

car le second minimum se recherche avec moins de liberté. Dès lors, on a aussi, pour tout $\{r_{s+1}, \dots, r_{s+2-1}\}$

$$m(r_{s+1}, \dots, r_{s+2-1}) \leq \max_{\{r_{s+1}, \dots, r_{s+2-1}\}} m(r_1, \dots, r_s, r_{s+1}, \dots, r_{s+2-1}),$$

et encore

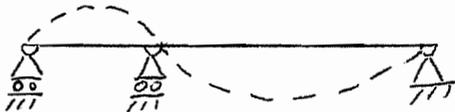
$$\max_{\{r_{s+1}, \dots, r_{s+2-1}\}} m(r_{s+1}, \dots, r_{s+2-1}) \leq \max_{\{r_{s+1}, \dots, r_{s+2-1}\}} m(r_1, \dots, r_s, r_{s+1}, \dots, r_{s+2-1})$$

Exemple - Considérons une poutre sur deux appuis.



Supposons que l'on y ménage un appui supplémentaire. Le premier mode vérifiera

$$\omega_1^2 < \tilde{\omega}_1^2 < \omega_2^2$$



La valeur ω_1^2 sera vérifiée si l'appui supplémentaire vient à se confondre avec un des deux appuis d'extrémité; la valeur ω_2^2 sera vérifiée si l'appui supplémentaire se place au noeud du mode 2.

6. Coefficient de mesure d'erreur de krylov et Boyolioubov

6. 1 Etant donné un vecteur y_0 quelconque, définissons son premier itéré y_1 par la relation

$$y_1 = \rho(y_0) K^{-1} M y_0$$

On en déduit aisément

$$y_1^T K y_1 = \rho(y_0) y_0^T M y_0 = y_0^T K y_0,$$

si bien que, du fait de la positive définition de la raideur,

$$\begin{aligned} 0 \leq (y_1 - y_0)^T K (y_1 - y_0) &= y_1^T K y_1 - 2 y_0^T K y_1 + y_0^T K y_0 \\ &= y_1^T K y_1 - y_0^T K y_0 \end{aligned}$$

On définit alors le coefficient de mesure d'erreur de Krylov et Bogolioubov comme la grandeur

$$\sigma^2 = \frac{(y_1 - y_0)^T K (y_1 - y_0)}{y_0^T K y_0} = \frac{y_1^T K y_1 - y_0^T K y_0}{y_0^T K y_0}$$

Posant

$$y_0 = \sum_{i=1}^n \beta_i \alpha_i,$$

on obtient directement

$$y_1 = \sum_{i=1}^n \rho(y_0) \lambda_i \beta_i \alpha_i$$

d'où

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^n [\lambda_i \rho(x_0) - 1]^2 \beta_i^2 \omega_i^2 \mu_i}{\sum_{i=1}^n \beta_i^2 \omega_i^2 \mu_i} \geq \min_{i=1, \dots, n} (\lambda_i \rho(x_0) - 1)^2$$

Dès lors, si

$$\min_{i=1, \dots, n} |\lambda_i \rho(x_0) - 1| = |\lambda_1 \rho(x_0) - 1|$$

c'est-à-dire si $\rho(x_0)$ est plus proche de $\omega_1^2 = \frac{1}{\lambda_1}$ que des autres valeurs propres, on a

$$\sigma \geq \lambda_1 \rho(x_0) - 1$$

et

$$\omega_1^2 = \frac{1}{\lambda_1} \geq \frac{\rho(x_0)}{1 + \sigma}$$

C'est la borne inf. de Krylov et Bogolioubov

1. Fonction de dissipation de Rayleigh

On sait que les équations de Lagrange ont la forme générale

$$-\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) + \frac{\partial L}{\partial q_i} + Q_i = 0,$$

Q_i étant les forces non conservatives. Parmi celles-ci, certaines admettent l'expression

$$P_i = -\partial \Phi / \partial \dot{q}_i$$

Φ étant une fonction de \dot{q} , que l'on appelle fonction de dissipation de Rayleigh. Si $R_i = Q_i - P_i$, on a donc

$$\boxed{-\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) + \frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}_i} + R_i = 0} \quad (2)$$

2. Conservation de l'énergie en présence d'une fonction de dissipation

Multipliant l'équation (2) par \dot{q}_i , on obtient, après sommation,

$$-\sum_i \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \dot{q}_i + \sum_i \frac{\partial L}{\partial q_i} \dot{q}_i - \sum_i \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i + \sum_i R_i \dot{q}_i = 0 \quad (3)$$

par ailleurs, on a

$$\frac{dL}{dt} = \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \ddot{q}_i + \sum_i \frac{\partial L}{\partial q_i} \dot{q}_i$$

d'où

$$\sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i = \frac{dL}{dt} - \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \ddot{q}_i$$

ce qui permet d'écrire (3) sous la forme

$$\frac{dL}{dt} - \frac{d}{dt} \left(\sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i \right) - \sum_i \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i + \sum_i R_i \dot{q}_i$$

où apparaît le Hamiltonien

$$H = \sum_i p_i \dot{q}_i - L \quad (4)$$

généralisation naturelle de l'énergie total^e. En fonction de cette nouvelle grandeur, on obtient tout simplement

$$\boxed{\frac{dH}{dt} + \sum_i \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i = \sum_i R_i \dot{q}_i} \quad (5)$$

En l'absence d'apport extérieur d'énergie ($R_i=0$), le Hamiltonien ne peut croître; il s'agit là d'une forme particulière du second principe de la thermodynamique; qui s'exprime par la condition que la dissipation est positive:

$$\mathcal{D} = \sum_i \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i \geq 0 \quad (6)$$

3. Classification des différentes formes d'amortissement

On appelle amortissement la propriété des systèmes vibrants de perdre de l'énergie mécanique au cours de leurs vibrations. Cette propriété est évidemment liée à l'inégalité (6). Selon la forme de la fonction de dissipation, on distingue.

a) l'amortissement visqueux ou newtonien, caractérisé par une fonction de dissipation quadratique : on a donc

$$\Phi = \frac{1}{2} \sum_{i,j} B_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j \quad (7)$$

B_{ij} étant une matrice. L'inégalité (6) s'écrit alors

$$\mathcal{D} = \sum_{i,j} B_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j = 2\Phi \geq 0$$

ce qui revient à dire que la matrice d'amortissement B doit être semi-définie positive. La force d'amortissement vaut

$$P_i = \sum_j B_{ij} \dot{q}_j$$

et est donc proportionnelle à la vitesse. Au démarrage, elle est donc nulle

b) L'amortissement par frottement sec ou coulombien, correspondant à une fonction de dissipation de la forme

$$\Phi = \left(\sum_{i,j} B_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j \right)^{1/2} \quad (8)$$

On a alors

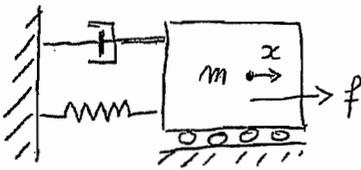
$$\frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\sum_j B_{ij} \dot{q}_j}{\left(\sum_{i,j} B_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j \right)^{1/2}}$$

d'où

$$\sum_i \dot{q}_i \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}_i} = \Phi,$$

ce qui nécessite encore, pour respecter la condition (6), que la matrice B soit semi-définie positive. Dans ce modèle, la force d'amortissement est homogène de degré 0 en les vitesses, ce qui signifie que sa grandeur ne change pas si toutes les vitesses sont multipliées par le même facteur.

c) Il est évidemment possible d'imaginer une foule de fonctions de dissipation particulières.

4. Etude d'un système à un degré de liberté avec amortissement

$$T = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 \quad m > 0$$

$$V = \frac{1}{2} k x^2 \quad k > 0$$

$$\Phi = \frac{1}{2} c \dot{x}^2 \quad c > 0$$

L'équation (2) s'écrit

$$-\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial V}{\partial q_i} - \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}_i} = R_i, \quad (9)$$

soit $m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = f$

ou encore $\ddot{x} + \frac{c}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = \frac{f}{m}$

Posant

$$\Omega^2 = k/m \quad (\Omega, \text{ fréquence naturelle du système conservatif associé})$$

et

$$\frac{c}{m} = 2\varepsilon\Omega, \quad (\varepsilon, \text{ taux d'amortissement})$$

On obtient

$$\ddot{x} + 2\varepsilon\Omega\dot{x} + \Omega^2x = f/m \quad (10)$$

Solution de l'équation homogène: l'équation caractéristique s'écrit

$$z^2 + 2\varepsilon\Omega z + \Omega^2 = 0,$$

et ses racines sont donc

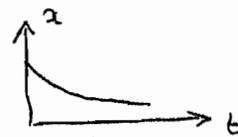
$$z = -\Omega [-\varepsilon \pm \sqrt{\varepsilon^2 - 1}]$$

Trois cas sont à distinguer, selon les valeurs du taux d'amortissement

- a) $\varepsilon > 1$: dans ce cas, les solutions de l'équation caractéristique sont réelles:

$$z_1 = -\Omega (\sqrt{\varepsilon^2 - 1} - \varepsilon) < 0$$

$$z_2 = -\Omega (-\varepsilon - \sqrt{\varepsilon^2 - 1}) < 0,$$



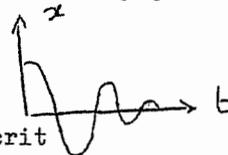
et on obtient une combinaison de solutions décroissantes

$$x = e^{-\varepsilon\Omega t} [A \operatorname{ch}(\sqrt{\varepsilon^2 - 1} \Omega t) + B \operatorname{sh}(\sqrt{\varepsilon^2 - 1} \Omega t)]$$

- b) $\varepsilon < 1$: le radical est imaginaire et

$$x = e^{-\varepsilon\Omega t} [A \cos(\sqrt{1 - \varepsilon^2} \Omega t) + B \sin(\sqrt{1 - \varepsilon^2} \Omega t)]$$

oscillations décroissantes



- c) $\varepsilon = 1$: alors, l'équation s'écrit

$$\ddot{x} + 2\Omega\dot{x} + \Omega^2x = 0$$

Une solution est

$$x = A e^{-\Omega t}$$

car cette fonction vérifie

$$(\Omega^2 - 2\Omega^2 + \Omega^2) A e^{-\Omega t} = 0$$

on obtient une deuxième solution sous la forme

$$x = B(t) e^{-\Omega t}$$

car

$$\begin{aligned} \Omega^2 x &= \Omega^2 B e^{-\Omega t} \\ 2\Omega \dot{x} &= 2\Omega \dot{B} e^{-\Omega t} - 2\Omega^2 B e^{-\Omega t} \\ \ddot{x} &= \ddot{B} e^{-\Omega t} - 2\Omega \dot{B} e^{-\Omega t} + \Omega^2 B e^{-\Omega t} \\ \hline 0 &= \ddot{B} e^{-\Omega t} \end{aligned}$$

soit

$$B = Ct + D$$

Finalement, la solution a la forme

$$x(t) = (Ct + D) e^{-\Omega t}$$

(amortissement rapide). On dit qu'il s'agit de l'amortissement critique

Cherchons à présent la solution élémentaire de l'équation. On doit avoir, si E est cette solution,

$$E(t) = 0 \quad \text{dans }]-\infty, 0[$$

$$E(0) = 0$$

$$E'(0) = 1,$$

ce qui donne, selon la valeur du taux d'amortissement :

a) $\varepsilon > 1$ (supercritique)

$$E = A e^{\beta_1 t} + B e^{\beta_2 t}$$

$$E(0) = A + B = 0 \rightarrow B = -A$$

$$E'(0) = A\beta_1 + B\beta_2 = 1 \rightarrow A = 1/(\beta_1 - \beta_2) = \frac{1}{2\Omega\sqrt{\varepsilon^2 - 1}}$$

soit

$$E(t) = \frac{1}{2\Omega\sqrt{\varepsilon^2 - 1}} \left[e^{-\Omega(\sqrt{\varepsilon^2 - 1} - \varepsilon)t} - e^{-\Omega(\sqrt{\varepsilon^2 - 1} + \varepsilon)t} \right]$$

$$E(t) = \frac{e^{-\varepsilon t}}{\Omega\sqrt{\varepsilon^2 - 1}} \operatorname{sh}(\Omega\sqrt{\varepsilon^2 - 1}t)$$

b) $\varepsilon < 1$ (subcritique)

$$E(t) = \frac{e^{-\varepsilon t}}{2i\Omega\sqrt{1 - \varepsilon^2}} \left[e^{i\Omega\sqrt{1 - \varepsilon^2}t} - e^{-i\Omega\sqrt{1 - \varepsilon^2}t} \right]$$

$$E(t) = \frac{e^{-\varepsilon t}}{\Omega\sqrt{1 - \varepsilon^2}} \sin(\Omega\sqrt{1 - \varepsilon^2}t)$$

c) $\varepsilon = 1$ (critique)

On note que pour $\varepsilon \rightarrow 1$,

$$\frac{\sin(\Omega\sqrt{1 - \varepsilon^2}t)}{\Omega\sqrt{1 - \varepsilon^2}} \rightarrow t,$$

si bien que

$$E(t) = t e^{-\varepsilon t}$$

La solution générale de l'équation

$$\ddot{x} + 2\varepsilon\Omega \dot{x} + \Omega^2 x = \frac{f(t)}{m}$$

est donc, selon le taux d'amortissement

a) $\varepsilon > 1$ (supercritique)

$$x = e^{-\varepsilon t} (A \operatorname{ch}(\Omega \sqrt{\varepsilon^2 - 1} t) + B \operatorname{sh}(\Omega \sqrt{\varepsilon^2 - 1} t)) + \int_0^t \frac{e^{-\varepsilon \tau}}{\Omega \sqrt{\varepsilon^2 - 1}} \operatorname{sh}(\Omega \sqrt{\varepsilon^2 - 1} \tau) \frac{f(t-\tau)}{m} d\tau$$

b) (subcritique)

$$x = e^{-\varepsilon t} (A \cos(\Omega \sqrt{1 - \varepsilon^2} t) + B \sin(\Omega \sqrt{1 - \varepsilon^2} t)) + \int_0^t \frac{e^{-\varepsilon \tau}}{\Omega \sqrt{1 - \varepsilon^2}} \sin(\Omega \sqrt{1 - \varepsilon^2} \tau) \frac{f(t-\tau)}{m} d\tau$$

c) (critique)

$$x = e^{-\varepsilon t} (At + B) + \int_0^t \frac{\tau e^{-\varepsilon \tau}}{\Omega} \cdot \frac{f(t-\tau)}{m} d\tau$$

5. Réponse harmonique d'un système à 1 ddl avec amortissement visqueux

Pour $f(t) = g \cos \omega t$,

on obtient l'équation

$$\ddot{x} + 2\varepsilon\Omega \dot{x} + \Omega^2 x = \frac{g}{m} \cos \omega t.$$

On simplifie très fort le problème en notant que, comme

$$\cos \omega t = \operatorname{Re} e^{i\omega t},$$

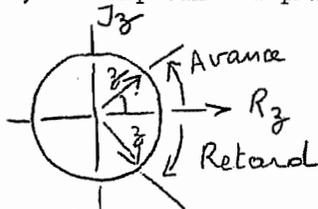
il suffit de chercher x sous la forme

$$x = \operatorname{Re} (z e^{i\omega t})$$

z étant un nombre complexe. On aura alors

$$x = \operatorname{Re} z \cos \omega t - \operatorname{Im} z \sin \omega t,$$

la première partie représentant la composante de x en phase avec le signal, et la seconde, la composante déphasée de 90°



On a alors l'équation complexe

$$(z e^{i\omega t})'' + 2\varepsilon\Omega (z e^{i\omega t})' + \Omega^2 z e^{i\omega t} = \frac{g}{m} e^{i\omega t},$$

soit

$$(-\omega^2 + 2i\varepsilon\Omega\omega + \Omega^2) z = g/m$$

ou encore,

$$z = \frac{g/(\Omega^2 m)}{1 - \frac{\omega^2}{\Omega^2} + 2i\varepsilon \frac{\omega}{\Omega}}$$

L'amplitude du mouvement est donc

$$|z| = \frac{g}{\Omega^2 m} \cdot \Phi, \quad \Phi = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\Omega^2}\right)^2 + 4\varepsilon^2 \frac{\omega^2}{\Omega^2}}}$$

est appelé facteur dynamique.
et la phase vaut

$$\arg z = \arctg \frac{-\varepsilon \frac{\omega}{\Omega}}{1 - \frac{\omega^2}{\Omega^2}}$$

Examinons les variations de ces deux grandeurs. On notera que

$$\frac{g}{\Omega^2 m} = \frac{f}{k}$$

est la réponse statique. On a

$$\frac{d}{d\left(\frac{\omega^2}{\Omega^2}\right)} \left(\frac{1}{\Phi^2} \right) = 2 \left(\frac{\omega^2}{\Omega^2} - 1 \right) + 4\varepsilon^2,$$

et cette grandeur s'annule pour

$$\frac{\omega^2}{\Omega^2} = 1 - 2\varepsilon^2$$

En deçà de cette valeur, elle est négative, et au delà, positive! Donc, z croît depuis $\frac{\omega}{\Omega} = 0$ jusqu'à la résonance d'amplitude qui se produit en

$$\frac{\omega}{\Omega} = \sqrt{1 - 2\varepsilon^2}$$

soit un peu avant $\omega = \Omega$. Pour cette valeur, qui n'existe que si $\varepsilon < \frac{1}{\sqrt{2}}$ pour les valeurs supérieures, la réponse décroît toujours lorsque la fréquence d'excitation croît - on obtient

$$\frac{1}{\Phi^2} = 4\varepsilon^4 + 4\varepsilon^2(1 - 2\varepsilon^2) = 4\varepsilon^2(1 - \varepsilon^2)$$

soit

$$\Phi_{\max} = \frac{1}{2\varepsilon \sqrt{1 - \varepsilon^2}}$$

On remarquera que pour $\varepsilon = 0$, $(z)_{\max} = \infty$, et que l'amplitude décroît à mesure que ε croît

A l'infini, $(z) \rightarrow 0$ comme $\frac{\Omega^2}{\omega^2}$

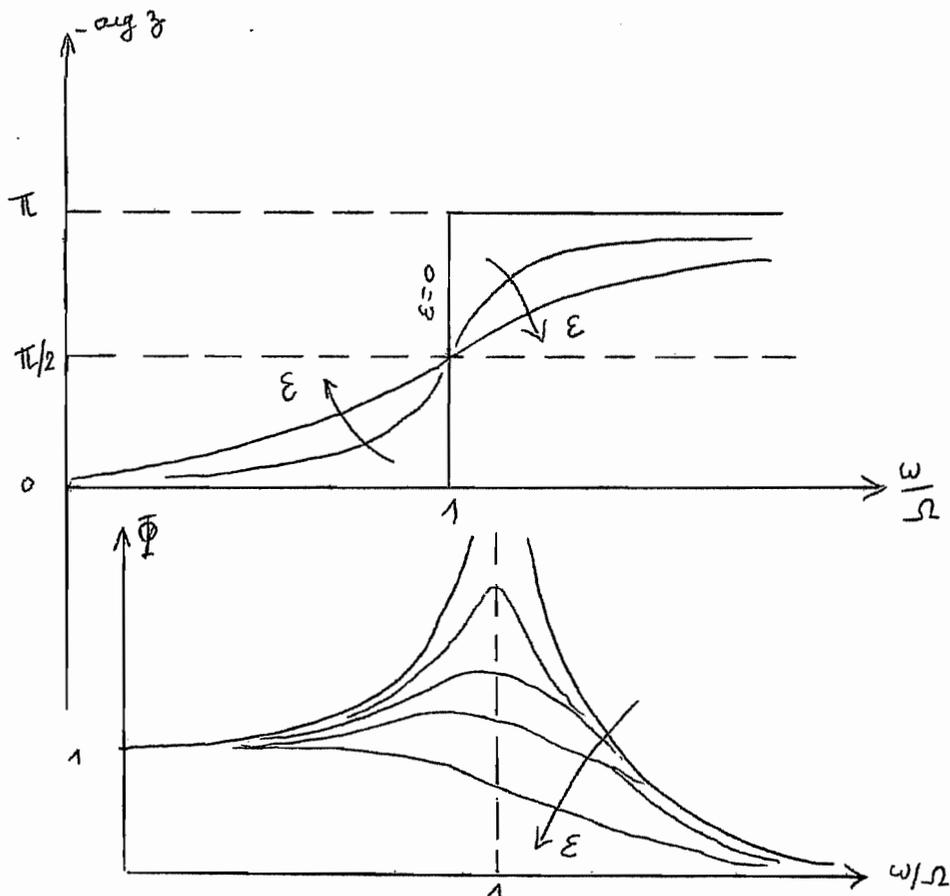
Passons aux phases. Pour $\frac{\omega}{\Omega} = 0$, on a $\arg z = 0$, et la réponse est en phase. Pour $\frac{\omega}{\Omega} = 1$, on a $\arg z = -\pi/2$, ce qui signifie que la réponse est en quadrature de phase pour la fréquence propre du système conservatif associé.

C'est ce que l'on appelle la résonance de phase. A la résonance de phase, l'amplitude vaut

$$|z|_{R.P.} = \frac{g/(\Omega^2 m)}{2\varepsilon} = \frac{|z|_{\text{stat}}}{2\varepsilon}$$

soit l'amplitude statique divisée par le double du taux d'amortissement

On peut donc déterminer celui-ci par comparaison des amplitudes statique et de résonance de phase. Enfin, pour $\frac{\omega}{\Omega} \rightarrow \infty$, $\arg z$ tend vers $-\pi$.



Examinons encore l'accélération. Sa grandeur est

$$a = \omega^2 |z| = \frac{g}{m} \frac{\omega^2}{\Omega^2} \Phi$$

En $\omega \approx 0$, on a

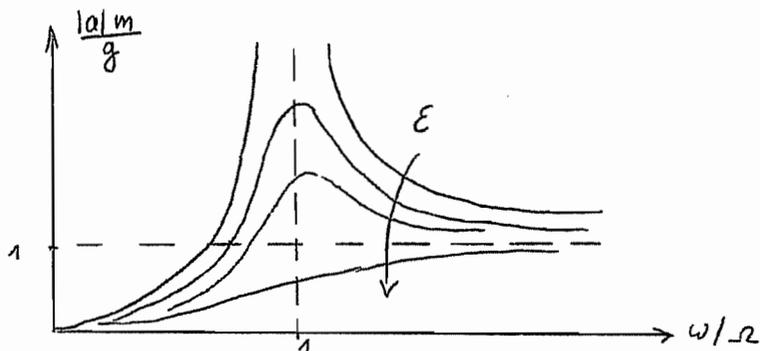
$$|a| \approx \frac{g}{m} \frac{\omega^2}{\Omega^2};$$

en $\omega \approx \Omega$

$$|a| \approx \frac{g}{m} \frac{\omega^2 / \Omega^2}{2\varepsilon \omega / \Omega} \approx g / (2\varepsilon m)$$

et enfin, en $\omega \rightarrow \infty$,

$$|a| \approx \frac{g}{m} \frac{\omega^2 / \Omega^2}{\omega^2 / \Omega^2} \approx g / m$$



La vitesse, enfin, a pour grandeur

$$|v| = \omega |z| = \frac{g}{\Omega m} \frac{\omega}{\Omega} \Phi$$

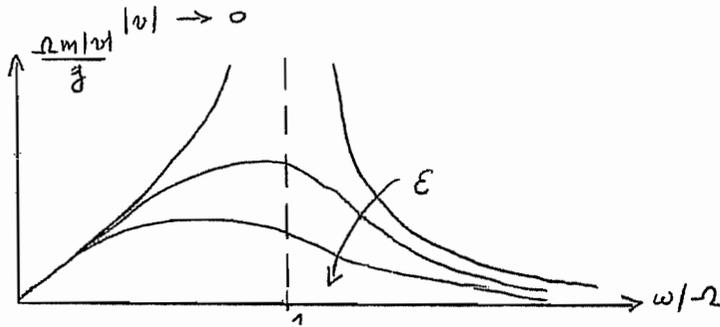
Pour $\omega \approx 0$, on a

$$|v| \approx \frac{g}{\Omega m} \frac{\omega}{\Omega};$$

pour $\omega \approx \Omega$,

$$|v| \approx \frac{g}{2\varepsilon\Omega m}$$

et enfin, pour $\omega \rightarrow \infty$,



6. Aspect énergétique de la réponse harmonique

Examinons le travail de la force appliquée. On a

$$Q_3 = \frac{g}{k} \Phi^2 \left(1 - \frac{\omega^2}{\Omega^2}\right)$$

$$J_3 = -\frac{g}{k} \Phi^2 \cdot 2\varepsilon\Omega$$

avec

$$\Phi = \left[\left(1 - \frac{\omega^2}{\Omega^2}\right)^2 + 4\varepsilon^2 \frac{\omega^2}{\Omega^2} \right]^{-1/2}$$

On a donc

$$x = \frac{g}{k} \Phi^2 \left[\left(1 - \frac{\omega^2}{\Omega^2}\right) \cos \omega t + 2\varepsilon \frac{\omega}{\Omega} \sin \omega t \right]$$

$$\dot{x} = \frac{g\omega}{k} \Phi^2 \left[-\left(1 - \frac{\omega^2}{\Omega^2}\right) \sin \omega t + 2\varepsilon \frac{\omega}{\Omega} \cos \omega t \right],$$

et la puissance dissipée vaut :

$$\begin{aligned} \dot{x} \dot{x} &= \frac{g^2 \omega}{k} \Phi^2 \left[-\left(1 - \frac{\omega^2}{\Omega^2}\right) \sin \omega t \cos \omega t + 2\varepsilon \frac{\omega}{\Omega} \cos^2 \omega t \right] \\ &= \frac{g^2 \omega}{k} \Phi^2 \left[\varepsilon \frac{\omega}{\Omega} + \varepsilon \frac{\omega}{\Omega} \cos 2\omega t - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\omega^2}{\Omega^2}\right) \sin 2\omega t \right] \end{aligned}$$

La puissance fluctue donc avec une pulsation 2ω , autour d'une moyenne qui vaut

$$\boxed{\frac{g^2 \omega}{k} \Phi^2 \varepsilon \frac{\omega}{\Omega}} \quad \text{(puissance active)}$$

On peut aussi obtenir ce résultat en calculant la puissance complexe

$$\boxed{\mathcal{P}_c = \frac{1}{2} i \omega \dot{x} x = \frac{1}{2} \frac{g^2 \omega}{k} \Phi^2 \left[i \left(1 - \frac{\omega^2}{\Omega^2}\right) + 2\varepsilon \frac{\omega}{\Omega} \right]},$$

ce qui définit

- la puissance active

$$\mathcal{P}_a = \mathcal{R} \mathcal{P}_c = \frac{g^2 \omega}{k} \Phi^2 \varepsilon \frac{\omega}{\Omega}$$

la puissance réactive

$$\mathcal{P}_r = \mathcal{J} \mathcal{P}_c = \frac{g^2 \omega}{k} \Phi^2 \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\omega^2}{\Omega^2}\right)$$

- La puissance instantanée s'écrit

$$\mathcal{P}(t) = \mathcal{P}_a (1 + \cos 2\omega t) + \mathcal{P}_r \sin 2\omega t$$

On notera que la puissance active, à la résonance de phase, vaut $\frac{g^2 \omega}{k}$

$$P_a = \frac{g^2 \omega}{k} \cdot \frac{1}{2 \varepsilon \frac{\omega}{\Omega}} \cdot \varepsilon \frac{\omega}{\Omega} = \frac{g^2 \omega}{k}$$

tandis que la puissance réactive s'y annule. Cette valeur de la puissance active conditionne la dépense d'énergie nécessaire à entretenir la vibration.

7. Etude des systèmes amortis n degrés de liberté dans le cadre de l'hypothèse de Rayleigh - Basile

En général, l'équation d'un système amorti à n degrés de liberté s'écrit

$$M \ddot{q} + B \dot{q} + Kq = f(t)$$

Dans le cas d'une excitation harmonique on a $f(x) = g e^{i\omega t}$ et, pour une réponse de la forme

$$q(t) = z e^{i\omega t}$$

On obtient l'équation

$$(K - \omega^2 M + i\omega B) z = g$$

Malheureusement, en dehors du cas où l'amortissement a été expressément prévu, à l'aide d'amortisseurs, la matrice B n'est pas connue, car l'amortissement naît de causes aussi diverses que peu chiffrables: hystérésis, frottements dans les assemblages, dissipation dans l'air ambiant, etc... On doit donc souvent déterminer l'amortissement à l'aide d'expériences. Celles-ci consistent en général à exciter un mode donné et à mesurer son décrétement dans le temps.

Face à cette difficulté, Basile a proposé l'hypothèse que la matrice d'amortissement B est découplée dans la base des modes propres du système conservatif associé, en d'autres termes, que

$$x_{(i)}^T B x_{(j)} = 2 \varepsilon_i \mu_i \omega_i \delta_{ij},$$

ε_i étant le taux d'amortissement modal. L'avantage de cette hypothèse est énorme. En effet, développant q en modes propres :

$$q = \sum_j \alpha_j(t) x_{(j)},$$

on obtient

$$\sum_j (\ddot{\alpha}_j M x_{(j)} + \dot{\alpha}_j B x_{(j)} + \alpha_j K x_{(j)}) = f(t),$$

soit, après prémultiplication par $x_{(i)}^T$,

$$\mu_i (\ddot{\alpha}_i + 2 \varepsilon_i \omega_i \dot{\alpha}_i + \omega_i^2 \alpha_i) = x_{(i)}^T f(t)$$

ce qui constitue n équations différentielles découplées.

Dans le cas de la réponse harmonique, on aura

$$x_{(i)}^T f = \varphi_i e^{i\omega t}$$

$$\alpha_i(t) = S_i e^{i\omega t},$$

d'où les équations découplées

$$(\omega_i^2 - \omega^2 + 2i \varepsilon_i \omega_i \omega) \mu_i S_i = \varphi_i,$$

soit

$$S_2 = \frac{Y_2}{\omega_2^2 - \omega^2 + 2i\epsilon_2 \omega_2}$$

exactement comme dans le cas d'un seul degré de liberté. Il suffit alors de recombinaison pour obtenir la solution. Il semble qu'en fait, cette hypothèse était déjà présente dans les travaux de Rayleigh.

L'hypothèse de Rayleigh Basile a été vivement critiquée par certains auteurs. Il existe une autre méthode, parfaitement rigoureuse, due à FRAEIJIS de VEUBEKE : c'est la méthode des déphasages caractéristiques!

Dans le cas général, il est malaisé, sinon impossible de calculer exactement la réponse d'un grand système. Il faut donc avoir recours à des méthodes numériques.

1. Méthode des déplacements modaux

Cette méthode suppose que l'on connaît les modes propres $x(r)$. Elle n'est vraiment avantageuse que dans le cadre de l'hypothèse de Basile.

On sait que la solution générale est alors de la forme

$$x = \sum_{i=1}^m \alpha_i x_{(i)} \quad (1)$$

Les α_i vérifiant les équations modales

$$\ddot{\alpha}_i + 2 \varepsilon_i \omega_i \dot{\alpha}_i + \omega_i^2 \alpha_i = \frac{x_{(i)}^T f(t)}{\mu_i} \quad (2)$$

Etant donné le second membre, on peut résoudre exactement chacune des équations modales, du moins pour quelques types classiques de variation de la force dans le temps, au besoin, on intègre numériquement. Mais lorsque les modes sont nombreux, c'est-à-dire, lorsque le système est grand, les équations sont trop nombreuses, et on se contente de superposer un nombre m de modes inférieur à n , c'est-à-dire que l'on écrit

$$x \approx \sum_{i=1}^m \alpha_i x_{(i)} \quad (i), \quad (3)$$

avec $m < n$ et souvent, $m \ll n$.

On peut justifier cette méthode de la manière suivante :

La force f peut être décomposée en intégrale de Fourier dans le temps, ce qui ramène à une somme de réponses élémentaires de type sinusoïdal. Pour celles-ci, on sait que l'on a en général (voir chapitre précédent)

$$|\alpha_i| \leq \frac{x_{(i)}^T f}{2 \omega_i^2 \mu_i \varepsilon_i \sqrt{1 - \varepsilon_i^2}} \quad \varepsilon_i \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (4)$$

Dans le cas d'un amortissement $\varepsilon_i \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$. Dès lors, la norme des modes négligés s'écrit

$$\left| \sum_{i=m+1}^n \mu_i \alpha_i^2 \right| \leq \sum_{i=m+1}^n \mu_i \frac{|x_{(i)}^T f|^2}{4 \mu_i^2 \omega_i^4 \varepsilon_i^2 (1 - \varepsilon_i^2)}$$

Or, on a, pour

$$f = \sum_j \beta_j M x(j),$$

la relation

$$x_{(i)}^T f = \beta_i \mu_i,$$

soit

$$f = \sum_j \frac{x_{(j)}^T f}{\mu_j} M x(j),$$

ce qui s'écrit encore

$$M^{-1} f = \sum_j \frac{x_{(j)}^T f}{\mu_j} x(j),$$

relation qui entraîne

$$f^T M^{-1} f = f^T M^{-1} M M^{-1} f = \sum_j \frac{|x_{(j)}^T f|^2}{\mu_j}$$

...

.../...

Il en découle que

$$\sum_{i=m+1}^m \mu_i \alpha_i^2 \leq \frac{1}{4 \omega_{m+1}^4 [\varepsilon^2 (1-\varepsilon^2)]_{\min}} \mathbf{f}^T \mathbf{M}^{-1} \mathbf{f} \quad (5)$$

ce qui montre que la masse de l'erreur décroît comme $\frac{1}{\omega_{m+1}^4}$,
quelle que soit la fréquence d'excitation.

Pour les excitations dont le spectre décroît rapidement avec la fréquence, la situation est même plus favorable, car un mode excité à basse fréquence répond de manière quasi-statique, ce qui permet de supprimer le facteur en ε . Même chose si l'amortissement est supercritique.

2. Méthode des accélérations modales. (Rayleigh - Williams)

On améliore encore les choses en notant que les modes excités très en-deçà de leur fréquence propre ont une réponse quasi-statique. Si donc on arrête le développement à une fréquence à partir de laquelle le spectre de l'excitation devient négligeable, il est préférable d'écrire pour les modes supérieurs

$$\alpha_i = \frac{1}{\omega_i^2} \frac{\alpha_i^T \mathbf{f}}{\mu_i} \quad i = m+1, \dots, n \quad (6)$$

Cela revient évidemment à ajouter à la solution de la méthode des déplacements modaux

$$\Delta \mathbf{q} = \mathbf{K}^{-1} \sum_{i=m+1}^m \frac{\alpha_i^T \mathbf{f}}{\mu_i} \mathbf{M} \alpha_i \quad (i)$$

Mais précisément, on veut s'éviter le calcul des modes de fréquence trop élevée. On y arrive en remarquant que

$$\sum_{i=m+1}^m \frac{\alpha_i^T \mathbf{f}}{\mu_i} \mathbf{M} \alpha_i = \mathbf{f} - \sum_{i=1}^m \frac{\alpha_i^T \mathbf{f}}{\mu_i} \mathbf{M} \alpha_i = \left(\mathbf{I} - \sum_{i=1}^m \frac{\alpha_i \alpha_i^T \mathbf{M}}{\mu_i} \right) \mathbf{f},$$

où l'on retrouve l'opérateur de projection orthogonale défini pour la recherche des modes supérieurs, si bien que la correction de Rayleigh-Williams s'écrit

$$\Delta \mathbf{q} = \mathbf{K} \left(\mathbf{I} - \sum_{i=1}^m \frac{\alpha_i \alpha_i^T \mathbf{M}}{\mu_i} \right) \mathbf{f} = \mathbf{K} \mathbf{O}_1 \dots \mathbf{O}_m \mathbf{f}$$

Comme on peut s'y attendre, des études détaillées ont montré le gain lié à cette correction est très important lorsque le spectre de l'excitation décroît rapidement vers zéro pour $\omega \rightarrow \infty$, très faible ou négatif dans le cas contraire. Il n'en reste pas moins que la majoration (5) reste d'application.

.../...

3. Intégration directe

Dans le cas général, on peut utiliser une méthode d'intégration directe. On entend par là une méthode numérique pas à pas. Contrairement à une opinion répandue, ces méthodes ne sont pas une panacée, et comme l'a montré HUCK, les méthodes de superposition modale fournissent souvent des résultats comparables pour un moindre temps de calcul.

L'arsenal des méthodes directes est très fourni. Parmi les très nombreuses méthodes que l'on trouve dans la littérature, nous ne retiendrons que l'algorithme de NEWMARK, que nous introduirons par le biais de la condition de conservation de l'énergie.

Utiliser une méthode pas-à-pas, c'est remplacer l'équation à intégrer par une équation aux différences. Cette étape est extrêmement délicate, car la solution approchée peut diverger ou être par trop imprécise. Par divergence, il faut entendre que la solution numérique croît sans cesse ou oscille avec des amplitudes de plus en plus grandes, du fait des erreurs inhérentes à l'algorithme.

Dans le cas d'un système mécanique, on peut donner à la stabilité de l'algorithme une signification très simple: L'énergie calculée à chaque pas doit rester constante en l'absence d'amortissement. On pourra même parfois désirer un très léger amortissement dû à l'algorithme, de manière à mater les erreurs d'arrondi.

L'énergie s'écrit, comme chacun sait,

$$= T + V = \frac{1}{2} \dot{q}^T M_q \dot{q} + \frac{1}{2} q^T K_q . \quad (8)$$

Au lieu d'essayer de résoudre l'équation

$$M_q \ddot{q} + B_q \dot{q} + K_q q = f ,$$

il est plus pratique d'utiliser des équations dédoublées où l'on distingue la vitesse v :

$$\begin{aligned} M \dot{v} + B_q v + K_q q &= f \\ M_q \dot{q} - M_v v &= 0 \end{aligned} \quad (9)$$

ce qui fournit un système de deux équations du premier ordre. Proposons nous, entre instants t_1 et t_2 , de résoudre ces équations par la méthode de Galerkin :

$$\begin{cases} \int_{t_1}^{t_2} a^T (M \dot{v} + B_q v + K_q q) dt = \int_{t_1}^{t_2} a^T f dt \\ \dots \int_{t_1}^{t_2} b^T (M_q \dot{q} - M_v v) dt = 0 \end{cases} \quad (10)$$

a et b étant des vecteurs de pondération à choisir de manière appropriée. On notera que l'équation de conservation de l'énergie s'écrit, pour l'intervalle $]t_1, t_2[$,

$$\mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_1 = \int_{t_1}^{t_2} (\dot{q}^T f - \dot{q}^T B_q \dot{q}) dt \quad (11)$$

Choisissant des représentations pour q et v , par exemple linéaires :

$$\begin{aligned} q &= (1-\theta) q_1 + \theta q_2 \\ v &= (1-\theta) v_1 + \theta v_2 \end{aligned} , \quad \theta = \frac{t - t_1}{t_2 - t_1}$$

.../...

dans quelles conditions la conservation sera-t-elle réalisée ?

On vérifie qu'il suffit de pouvoir poser $a = \dot{q}$, $b = \dot{v}$,
 ce qui donne
$$\begin{cases} \int_{t_1}^{t_2} (\dot{q}^T M \dot{q} + \dot{q}^T B \dot{q} + \dot{q}^T K q) dt = \int_{t_1}^{t_2} \dot{q}^T f \\ \int_{t_1}^{t_2} (\dot{v}^T M \dot{v} - \dot{v}^T M v) dt = 0, \end{cases}$$

soit, par soustraction,

$$\int_{t_1}^{t_2} (\dot{v}^T M v + \dot{q}^T K q) dt = \int_{t_1}^{t_2} (\dot{q}^T f - \dot{q}^T B \dot{q}) dt$$

ce qui équivaut bien à

$$\frac{1}{2} (v_2^T M v_2 + q_2^T K q_2) - \frac{1}{2} (v_1^T M v_1 + q_1^T K q_1) = \int_{t_1}^{t_2} (\dot{q}^T f - \dot{q}^T B \dot{q}) dt$$

L'algorithme conservatif de Newmark correspond précisément à des approximations linéaires, donc à des poids constants. Les équations (10) deviennent alors, pour

$$h = (t_2 - t_1)$$

$$M (v_2 - v_1) + B (q_2 - q_1) + K h \frac{q_1 + q_2}{2} = \int_{t_1}^{t_2} f dt \approx \frac{f_1 + f_2}{2} h$$

$$M (q_2 - q_1) - M h \frac{v_1 + v_2}{2} = 0$$

soit

$$(B + \frac{Kh}{2}) q_2 + M v_2 = (B - \frac{Kh}{2}) q_1 + M v_1 + \frac{f_1 + f_2}{2} h$$

$$M q_2 = \frac{Mh}{2} v_2 = M q_1 + \frac{Mh}{2} v_1,$$

ce qui s'écrit matriciellement

$$\begin{bmatrix} B + Kh/2 & M \\ M & -Mh/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_2 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B - Kh/2 & M \\ M & Mh/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ v_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{f_1 + f_2}{2} h \\ 0 \end{bmatrix}$$

On peut d'ailleurs vérifier directement la conservation de l'énergie : en multipliant la première équation par $\frac{1}{h} (q_2 - q_1)^T$, la seconde par $\frac{1}{h} (v_2 - v_1)^T$, puis en soustrayant, on obtient

$$\frac{1}{h} (q_2 - q_1)^T B (q_2 - q_1) + \frac{1}{2} (q_2^T K q_2 - q_1^T K q_1) + \frac{1}{2} (v_2^T M v_2 - v_1^T M v_1) = \frac{1}{2} (q_2 - q_1)^T (f_1 + f_2)$$

L'énergie est donc bien conservée, ce qui implique que l'algorithme est inconditionnellement stable (quel que soit h) Par ailleurs, on peut obtenir un amortissement d'algorithme en ajoutant à l'éventuelle matrice B des termes amortisseurs de la forme de Rayleigh

$$B_{\text{suppl}} = \alpha K + \beta M;$$

qui vérifient d'ailleurs visiblement l'hypothèse de Rayleigh - Basile.

Le terme βM provoquera un amortissement décroissant des modes, tandis que le terme αK amortira surtout les modes de haute fréquence.

En effet, on a alors pour un mode $x(i)$

$$\begin{aligned} 2 \mathcal{D} &= \alpha x(i)^T K x(i) + \beta x(i)^T M x(i) \\ &= \mu_i (\alpha \omega_i^2 + \beta) \\ &= 2 \varepsilon_i \omega_i \mu_i, \end{aligned}$$

.../...

d'où

$$2\varepsilon_i = \frac{\beta}{\omega_i} + \alpha\omega_i$$

Terminons cette brève incursion dans l'intégration directe en signalant que même si l'énergie se conserve, elle se redistribue entre les différents modes, ce qui se manifeste en général par un certain allongement de la période. Il s'agit d'une forme de l'erreur de précision. Plus ou moins grande selon les algorithmes, cette erreur est cependant inévitable.

1. Introduction : Les phénomènes que nous nous proposons d'étudier concernent les arbres tournant autour de leur axe. Ces arbres seront supposés chargés d'un certain nombre de disques représentant les masses en rotation.

L'expérience montre qu'à certaines vitesses, il naît des instabilités et des vibrations de forte amplitude. L'instabilité fondamentale se caractérise par un mouvement de précession sans déformation, comparable à celui d'une corde à danser. D'autres mouvements de forte amplitude peuvent naître, sous l'effet de la force centrifuge ou d'une anisotropie de raideur des paliers.

2. Présentation élémentaire

Avant d'entamer une étude détaillée du mouvement, nous nous attacherons à montrer que des instabilités peuvent naître. Considérons à cet effet un arbre tournant sur deux appuis, dépourvu de masse propre et portant en son milieu un volant de masse m . Supposons que, par une cause fortuite, l'arbre prenne une

flèche y ; Il en résultera

- une force de rappel élastique

$$F_e = \frac{48EI}{l^3} y,$$

centripète ;

- une force centrifuge

$$F_c = mw^2 y.$$

Tout se passe sans problème tant que $F_c < F_e$,

ce qui a lieu pour

$$\omega^2 < \frac{48EI}{ml^3}$$

Mais pour $\omega^2 = \frac{48EI}{ml^3}$, les deux forces sont en équilibre quelle que soit la position : il y a donc instabilité. Cette instabilité est appelée vitesse critique. Elle se caractérise par un mouvement comparable à celui d'une corde à danser.

3. Mouvement d'un système à un disque concentré

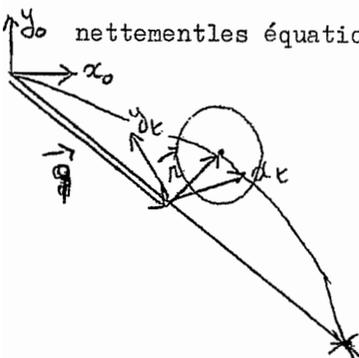
Nous supposons d'abord les disques concentrés, c'est-à-dire que leur extension radiale n'est pas trop grande et que l'on peut les assimiler à de masses concentrées sur l'axe de l'arbre. Cette approximation simplifie très nettement les équations. Le vecteur-position \vec{a} du centre du disque s'écrit alors

$$\vec{a} = \vec{q} + \vec{r} \quad (1)$$

où q serait le vecteur-position du même point s'il était au repos, et r est son déplacement.

Nous utiliserons deux repères.

- un repère galiléen (x_0, y_0) , dans lequel on a

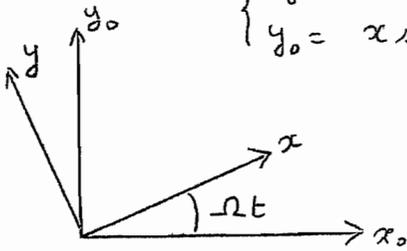


- un repère tournant avec la vitesse Ω , dans lequel

$$a = \cancel{g} + \Omega \times r \quad (3)$$

on a évidemment

$$\begin{cases} x_0 = x \cos \Omega t - y \sin \Omega t \\ y_0 = x \sin \Omega t + y \cos \Omega t \end{cases} \quad (4)$$



La vitesse s'écrit donc

$$\begin{cases} \dot{x}_0 = \dot{x} \cos \Omega t - \dot{y} \sin \Omega t - \Omega (x \sin \Omega t + y \cos \Omega t) \\ \dot{y}_0 = \dot{x} \sin \Omega t + \dot{y} \cos \Omega t + \Omega (x \cos \Omega t - y \sin \Omega t) \end{cases} \quad (5)$$

ce qui donne pour l'énergie cinétique

$$|\dot{v}|^2 = \underbrace{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}_{\text{relative}} + \underbrace{\Omega^2 (x^2 + y^2)}_{\text{centrifuge}} + 2 \underbrace{\Omega (x\dot{y} - \dot{x}y)}_{\text{gyroscopique}} \quad (6)$$

d'où

$$2T = m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + m\Omega^2(x^2 + y^2) + 2m\Omega(x\dot{y} - \dot{x}y) \quad (7)$$

L'énergie de déformation est celle d'un arbre circulaire :

$$2V_1 = k(x^2 + y^2) \quad (8)$$

Il faut encore y ajouter l'énergie due à la pesanteur :

$$2V_2 = mg y_0^2 = mg(x \sin \Omega t + y \cos \Omega t) \quad (9)$$

Les équations du mouvement s'obtiennent alors de l'expression générale de Lagrange

$$-\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) + \frac{\partial T}{\partial q_i} = \frac{\partial V}{\partial q_i} = 0,$$

soit ici :

$$\left. \begin{aligned} -m\ddot{x} + 2m\Omega\dot{y} + m\Omega^2x - kx &= mg \sin \Omega t \\ -m\ddot{y} - 2m\Omega\dot{x} + m\Omega^2y - ky &= mg \cos \Omega t \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

On constate que la pesanteur constitue une excitation sinusoïdale. Mais avant d'étudier son effet, examinons d'abord le système homogène associé. Cherchons une solution de la forme

$$\begin{cases} x = X \cos \omega t \\ y = Y \sin \omega t, \end{cases}$$

et posant $p^2 = k/m$, on obtient le système algébrique

$$\begin{cases} (p^2 - \Omega^2 - \omega^2)X - 2\Omega\omega Y = 0 \\ -2\Omega\omega X + (p^2 - \Omega^2 - \omega^2)Y = 0, \end{cases} \quad (11)$$

qui n'est compatible que si son déterminant est nul, ce qui s'écrit

$$(\omega^2 + \Omega^2 - p^2)^2 - 4 \Omega^2 \omega^2 = 0,$$

ou encore,

$$(\omega^2 + \Omega^2 - p^2)^2 - 4 \Omega^2 (\omega^2 + \Omega^2 - p^2) + 4 \Omega^2 (\Omega^2 - p^2) = 0.$$

Les solutions de cette équation sont

$$\begin{aligned} \omega^2 + \Omega^2 - p^2 &= 2 \Omega^2 \pm \sqrt{4 \Omega^4 - 4 \Omega^4 + 4 p^2 \Omega^2}, \\ &= 2 \Omega^2 \pm 2 p \Omega, \end{aligned}$$

ce qui revient à dire

$$\omega^2 = p^2 + \Omega^2 \pm 2 p \Omega = (p \pm \Omega)^2$$

Ainsi donc, le système a deux fréquences propres, données par $\omega_2 = (p + \Omega)$ et $\omega_1 = |p - \Omega|$. On remarque immédiatement que pour $\Omega = p$, $\omega_2 = 0$, ce qui doit impliquer une instabilité. De fait, dans ce cas, les équations (10) s'écrivent, dans le cas homogène

$$\begin{cases} \ddot{x} - 2 \Omega \dot{y} = 0 \\ \ddot{y} + 2 \Omega \dot{x} = 0. \end{cases} \quad (12)$$

On déduit de la première

$$\dot{y} = \frac{\dot{x}}{2 \Omega}, \quad (13)$$

et en réintroduisant ce résultat dans la seconde, on obtient

$$\ddot{x} + 4 \Omega^2 \dot{x} = 0,$$

équation qui admet pour solution générale

$$x = A_1 + A_2 \cos 2 \Omega t + A_3 \sin 2 \Omega t. \quad (14)$$

Il en découle

$$\dot{x} = -4 \Omega^2 A_2 \cos 2 \Omega t - 4 \Omega^2 A_3 \sin 2 \Omega t,$$

d'où, par (13),

$$\dot{y} = -2 \Omega A_2 \cos 2 \Omega t - 2 \Omega A_3 \sin 2 \Omega t,$$

ce qui entraîne

$$y = B_1 - A_2 \sin 2 \Omega t + A_3 \cos 2 \Omega t \quad (15)$$

On constate donc que pour $\Omega = p$, fréquence propre de vibration de flexion du système au repos, le mouvement se décompose dans les axes tournants, en

- Une déformée constante indéterminée, dite instabilité principale (mouvement de corde à danser)
- Une déformée de précession à la vitesse - 2 Ω

Dans des axes fixes, le premier mouvement est une précession directe de vitesse Ω et le second, une précession rétrograde de vitesse $(-\Omega)$

C'est pourquoi la vitesse $\Omega = p$ est appelée vitesse critique principale de flexion de l'arbre

Examinons à présent la forme des modes dans le cas général. Dans le cas subcritique ($\Omega < p$), on a

$$\left\{ \begin{array}{l} \omega_2 \\ \omega_1 \end{array} \right\} = p \pm \Omega, \quad (16)$$

d'où, par (11),

$$\begin{aligned} \frac{y}{x} &= \frac{2\Omega(p \pm \Omega)}{p^2 - \Omega^2 - p^2 - \Omega^2 \pm 2p\Omega} \\ &= \frac{p \pm \Omega}{-\Omega \mp p} = \mp \frac{p \pm \Omega}{\pm \Omega + p} = \mp 1 \end{aligned} \quad (17)$$

ce qui signifie que la première fréquence propre correspond à une précession relative directe, de vitesse $(p - \Omega)$, et la seconde, à une précession relative inverse, de vitesse $(p + \Omega)$. Dans le domaine supercritique ($\Omega > p$), les relations (16) doivent être remplacées par

$$\left\{ \begin{array}{l} \omega_2 \\ \omega_1 \end{array} \right\} = \Omega \pm p,$$

ce qui donne

$$\frac{y}{x} = \frac{2\Omega(\Omega \pm p)}{-\Omega \mp p} = -1, \quad (18)$$

si bien qu'il s'agit d'une précession rétrograde dans les deux cas. Dans le système d'axes absolu, il s'agit toujours d'une précession de vitesse p , directe ou rétrograde.

Revenant au fait que la pesanteur constitue une excitation en Ωt , il est utile de s'interroger sur la possibilité d'une résonance à la fréquence. De fait, dans le cas subcritique, on peut avoir

$$\omega_1 = p - \Omega = \Omega \quad (19)$$

pour $\Omega = p/2$. Il y a donc une résonance due à la pesanteur pour une vitesse égale à la moitié de la vitesse critique principale. Cette vitesse critique secondaire se manifeste sous la forme d'une précession de vitesse Ω dans le système tournant, soit 2Ω pour un observateur fixe.

Notons enfin qu'un faux-rond aux paliers s'exprime en première approximation par une erreur de forme

$$\Delta r = \varepsilon \cos 2\theta \quad (20)$$

Quant à l'énergie de déformation, elle a la forme
 $2 V_1 = q^T K q,$

avec K de la forme

$$K = \begin{bmatrix} \hat{K} & | & 0 \\ \hline 0 & | & \hat{K} \end{bmatrix}$$

Le problème des vitesses critiques revient alors, comme dans le cas d'un disque, à chercher les solutions de l'équation

$$- M \ddot{q} + \Omega^2 N q + 2 \Omega G \dot{q} - K q = 0,$$

ce qui s'écrit encore, en termes des vecteurs x et y,

$$\begin{aligned} - \hat{M} \ddot{x} + \Omega^2 \hat{M} x + 2 \Omega \hat{M} \dot{y} - \hat{K} x &= 0 \\ - \hat{M} \ddot{y} + \Omega^2 \hat{M} y - 2 \Omega \hat{M} \dot{x} - \hat{K} y &= 0 \end{aligned} \quad (23)$$

A nouveau, on cherchera une solution du type

$$\begin{cases} x = a \cos \lambda \Omega t \\ y = b \sin \lambda \Omega t \end{cases} \quad (24)$$

ce qui, mène au système matriciel symétrique

$$\begin{aligned} (\hat{K} - (\lambda^2 + 1) \Omega^2 \hat{M}) x - 2 \lambda \Omega^2 \hat{M} y &= 0 \\ - 2 \lambda \Omega^2 \hat{M} x + (\hat{K} - (\lambda^2 + 1) \Omega^2 \hat{M}) y &= 0 \end{aligned} \quad (25)$$

Les vitesses critiques principales correspondent à $\lambda = 0$, soit au système découplé

$$\begin{cases} (\hat{K} - \Omega^2 \hat{M}) x = 0 \\ (\hat{K} - \Omega^2 \hat{M}) y = 0 \end{cases}$$

dont les deux équations, d'ailleurs identiques, se résolent comme un problème classique de vibration et coïncident d'ailleurs avec la recherche des fréquences propres de flexion plane du système au repos.

Les vitesses critiques secondaires dues à la pesanteur correspondent à $\lambda = 1$. On obtient le système

$$\begin{cases} (\hat{K} - 2 \Omega^2 \hat{M}) x - 2 \Omega^2 \hat{M} y = 0 \\ - 2 \Omega^2 \hat{M} x + (\hat{K} - 2 \Omega^2 \hat{M}) y = 0 \end{cases}$$

dont il est aisé de trouver la solution. En effet, la différence des deux équations s'écrit

$$\hat{K} x - \hat{K} y = 0$$

ce qui entraîne $x = y$; leur somme vaut alors

$$(\hat{K} - 4 \Omega^2 \hat{M}) x + (\hat{K} - 4 \Omega^2 \hat{M}) y = 0$$

et entraîne donc

$$(\hat{K} - 4 \Omega^2 \hat{M}) x = 0,$$

ce qui est précisément l'équation des vitesses critiques principales, sauf à remplacer Ω par 2Ω . Ainsi donc, les vitesses critiques secondaires se produisent encore à des vitesses égales aux moitiés des vitesses critiques principales

Enfin, pour $\lambda = 2$, on obtient le système

$$\begin{cases} (\hat{K} - 5 \Omega^2 \hat{M}) x - 4 \Omega^2 \hat{M} y = 0 \\ - 4 \Omega^2 \hat{M} x + (\hat{K} - 5 \Omega^2 \hat{M}) y = 0 \end{cases}$$

qui admet la solution $x = y$ pour

$$(\hat{K} - 9 \Omega^2 \hat{M}) x = 0,$$

ce qui mène à des vitesses critiques pour des vitesses trois fois plus faibles, et la solution $x = -y$ pour

$$(\hat{K} - \Omega^2 \hat{M}) x = 0.$$

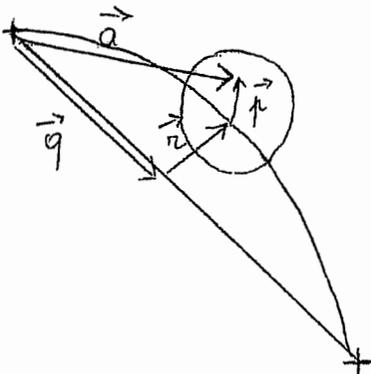
Il existe à nouveau des précessions rétrogrades à la vitesse critique principale.

La conclusion de tout ceci est que les méthodes permettant de calculer les fréquences propres de flexion plane des arbres au repos permettent également de calculer les vitesses critiques. Tel est en particulier le cas de la méthode de STODOLA, d'ailleurs construite dans ce but.

5. Influence des moments gyroscopiques dans le cas de grands disques

Dans le cas de grands disques, il faut tenir compte de l'énergie cinétique de rotation. Nous examinerons le cas d'un disque. Un point du disque est alors défini par le vecteur

$$\vec{a} = \vec{q} + \vec{r} + \vec{p}$$



Il est commode d'introduire ici trois repères.

- un repère galiléen, où

$$a_0 = q_0 + r_0 + p_0 \quad (27)$$

- un repère tournant à la vitesse Ω , dans lequel

$$a_t = q_t + r_t + p_t \quad (28)$$

- le repère du disque, où

$$a_d = q_d + r_d + p_d \quad (29)$$

Les transformations seront écrites

$$a_0 = S_1 a_t, \quad a_t = Q a_d, \quad a_0 = T a_d \quad (30)$$

où S_1 et T sont deux matrices orthonormales :

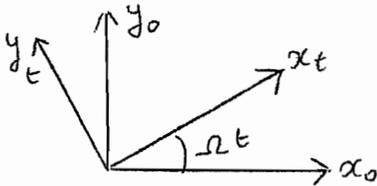
Etant donné que q_0 est constant, de même que p_d , l'expression la plus simple de a_0 est.

$$a_0 = q_0 + S_1 r_t + T p_d \quad (32)$$

Exprimons les deux matrices de transformation S_1 et T .

a) calcul de S_1

On a visiblement



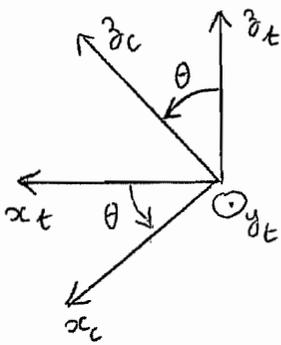
$$\begin{cases} x_0 = x_t \cos \Omega t - y_t \sin \Omega t \\ y_0 = x_t \sin \Omega t + y_t \cos \Omega t \\ z_0 = z_t \end{cases}$$

d'où

$$S_1 = \begin{bmatrix} \cos \Omega t & -\sin \Omega t & 0 \\ \sin \Omega t & \cos \Omega t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (33)$$

b) Calcul de T

On a $T = S_1 Q = S_1 S_2 S_3$, où S_2 représente une rotation d'angle θ autour de l'axe y_t :



$$\begin{cases} x_t = x_c \cos \theta + z_c \sin \theta \\ z_t = -x_c \sin \theta + z_c \cos \theta \\ y_t = y_c \end{cases}$$

d'où

$$S_2 = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix} \quad (34)$$

Quant à S_3 , il s'agit d'une rotation d'angle φ autour de l'axe des x :

$$\begin{cases} x_c = x_d \\ y_c = y_d \cos \varphi - z_d \sin \varphi \\ z_c = x_d \sin \varphi + z_d \cos \varphi \end{cases}$$

d'où

$$S_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & -\sin \varphi \\ 0 & \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} \quad (35)$$

On a évidemment

$$S_2^T S_2 = I \quad \text{et} \quad S_3^T S_3 = I \quad (36)$$

Les vitesses valent donc, par dérivation de (32),

$$\dot{a}_0 = S_1 \dot{r}_t + \dot{S}_1 r_t + \dot{T} p_d,$$

d'où

$$\begin{aligned} v^2 = & \dot{r}_t^T S_1^T S_1 \dot{r}_t + r_t^T \dot{S}_1^T \dot{S}_1 r_t + p_d^T \dot{T}^T \dot{T} p_d \\ & + 2 r_t^T \dot{S}_1^T \dot{S}_1 r_t + 2 \dot{r}_t^T S_1^T \dot{T} p_d + 2 r_t^T S_1^T \dot{T} p_d, \end{aligned}$$

ce qui permet de calculer l'énergie cinétique par

$$2T = \int_V v^2 dm$$

On peut d'emblée simplifier cette expression en notant que seul p_d varie dans le disque ; de plus, comme nous supposons celui-ci symétrique, on a

$$\int_V dm = m \quad \int_V p_d dm = 0$$

et, en posant $p_d^T = (a, b, c)$,

$$\int_V a b dm = \int_V b e dm = \int_V a c dm = 0$$

$$A = \int_V (b^2 + c^2) dm, \quad B = \int_V (a^2 + c^2) dm, \quad C = \int_V (a^2 + b^2) dm,$$

si bien que les seuls termes restants sont

$$\begin{aligned} 2T = & m \left[\dot{r}_t^T S_1^T S_1 \dot{r}_t + r_t^T \dot{S}_1^T \dot{S}_1 r_t + 2 r_t^T \dot{S}_1^T S_1 \dot{r}_t \right] \\ & + \int_V (p_d^T \dot{T}^T \dot{T} p_d) dm. \end{aligned}$$

Les trois premiers se réduisent aisément en notant que

$$S_1^T S_1 = I,$$

ce qui entraîne d'ailleurs que la matrice

$$R_1 = S_1^T \dot{S}_1$$

est antisymétrique, puisque

$$0 = \frac{d}{dt} (S_1^T S_1) = \dot{S}_1^T S_1 + S_1^T \dot{S}_1 = R_1^T + R_1$$

De plus, on a

$$S_1^T S_1 = S_1^T S_1 S_1^T S_1 = R_1^T R_1$$

Or, la matrice R_1 est d'un calcul aisé ; on a tout simplement

$$R_1 = \begin{bmatrix} 0 & -\Omega & 0 \\ \Omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

d'où

$$R_1^T R_1 = \begin{bmatrix} \Omega^2 & 0 & 0 \\ 0 & \Omega^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

ce qui ramène les trois premiers termes de l'énergie cinétique à

$$2T_1 = m(\dot{x}_E^2 + \dot{y}_E^2) + \Omega^2 m(x_E^2 + y_E^2) - 2\Omega m(\dot{x}_E y_E - x_E \dot{y}_E)$$

où l'on retrouve les termes des paragraphes précédents. Ce sont les autres qui marquent l'effet des couples gyroscopiques. Pour ceux-ci, on notera que, comme

$$T^T T = \mathbf{I}$$

on a

$$\dot{T}^T \dot{T} = \dot{T}^T T T^T \dot{T}$$

comme, par ailleurs,

$$T = S_1 S_2 S_3$$

on a

$$\dot{T} = \dot{S}_1 S_2 S_3 + S_1 \dot{S}_2 S_3 + S_1 S_2 \dot{S}_3$$

si bien que

$$\begin{aligned} T^T \dot{T} &= S_3^T S_2^T S_1^T (\dot{S}_1 S_2 S_3 + S_1 \dot{S}_2 S_3 + S_1 S_2 \dot{S}_3) \\ &= S_3^T S_2^T R_1 S_2 S_3 + S_3^T R_2 S_3 + R_3 \end{aligned}$$

avec

$$R_1 = S_1^T \dot{S}_1, \quad R_2 = S_2^T \dot{S}_2, \quad R_3 = S_3^T \dot{S}_3.$$

R_1 est déjà connu; quant à R_2 et R_3 , ils s'écrivent respectivement

$$R_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dot{\theta} \\ 0 & 0 & 0 \\ -\dot{\theta} & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad R_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\dot{\psi} \\ \dot{\psi} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

On calcule alors

$$S_3^T A_2 S_3 = \begin{bmatrix} 0 & \dot{\theta} \sin \varphi & \dot{\theta} \cos \varphi \\ -\dot{\theta} \sin \varphi & 0 & 0 \\ -\dot{\theta} \cos \varphi & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

et

$$S_3^T S_2^T A_1 S_2 S_3 = \begin{bmatrix} 0 & -\Omega \cos \theta \cos \varphi & -\Omega \cos \theta \sin \varphi \\ -\Omega \sin \theta \cos \varphi & 0 & -\Omega \sin \theta \\ -\Omega \sin \theta \sin \varphi & -\Omega \sin \theta & 0 \end{bmatrix}$$

Le résultat final est :

$$T^T \dot{T} = \begin{bmatrix} 0 & \dot{\theta} \sin \varphi - \Omega \cos \theta \cos \varphi & \dot{\theta} \cos \varphi + \Omega \cos \theta \sin \varphi \\ -\dot{\theta} \sin \varphi + \Omega \cos \theta \cos \varphi & 0 & \Omega \sin \theta - \dot{\varphi} \\ -\dot{\theta} \cos \varphi - \Omega \cos \theta \sin \varphi & -\Omega \sin \theta + \dot{\varphi} & 0 \end{bmatrix}$$

Du fait des relations d'orthogonalité (40), nous ne devons calculer que les termes diagonaux du carré $P = \dot{T}^T \dot{T}$.

Ils s'écrivent

$$P_{11} = \dot{\theta}^2 + \Omega^2 \cos^2 \theta$$

$$P_{22} = \dot{\theta}^2 \sin^2 \varphi + \Omega^2 (1 - \cos^2 \theta \sin^2 \varphi) - 2 \Omega \dot{\theta} \sin \varphi \cos \varphi \cos \theta + \dot{\varphi}^2 - 2 \Omega \dot{\varphi} \sin \theta$$

$$P_{33} = \dot{\theta}^2 \cos^2 \varphi + \Omega^2 (1 - \cos^2 \theta \cos^2 \varphi) + 2 \Omega \dot{\theta} \cos \theta \sin \varphi \cos \varphi + \dot{\varphi}^2 - 2 \Omega \dot{\varphi} \sin \theta$$

La réponse linéarisée s'obtiendra en limitant en termes à l'ordre deux en les déplacements et les vitesses, ce qui donne :

$$P_{11} \approx \dot{\theta}^2 + \Omega^2 (1 - \theta^2/2)$$

$$P_{22} \approx \dot{\varphi}^2 + 2 \Omega (\dot{\varphi} \theta + \varphi \dot{\theta}) + \Omega^2 (1 - \varphi^2)$$

$$P_{33} \approx \dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 + 2 \Omega (\dot{\theta} \varphi - \varphi \dot{\theta}) + \Omega^2 (\theta^2 + \varphi^2)$$

L'énergie cinétique de rotation s'écrit donc

$$2T_2 = \Omega^2 \int (a^2 + b^2) dm + \dot{\theta}^2 \int (a^2 + c^2) dm + \dot{\varphi}^2 \int (b^2 + c^2) dm \\ + \Omega^2 \theta^2 \int (c^2 - a^2) dm + \Omega^2 \varphi^2 \int (c^2 - b^2) dm \\ + 2 \Omega (\varphi \dot{\theta} - \theta \dot{\varphi}) \int c^2 dm - 2 \Omega \int b^2 dm (\varphi \dot{\theta} + \dot{\varphi} \theta)$$

ou encore

$$2T_2 = \Omega^2 C + B \dot{\theta}^2 + A \dot{\varphi}^2 + (A - C) \Omega^2 \theta^2 + (B - C) \Omega^2 \varphi^2 \\ + \Omega (A + B - C) (\varphi \dot{\theta} - \theta \dot{\varphi}) - \Omega (A + C - B) (\varphi \dot{\theta} + \dot{\varphi} \theta)$$

Essayons de comparer l'ordre de grandeur de T_2 à celui de T_1 ! On notera d'abord que l'on a

$$C = m \rho^2 \quad \rho = \text{rayon de giration;}$$

par ailleurs, on a, en se donnant une épaisseur moyenne h du disque,

$$A = \int (b^2 + c^2) dm \approx \frac{1}{2} m \rho^2 + \frac{1}{12} m h^2 = \frac{1}{2} m \rho^2 \left(1 + \frac{1}{6} \frac{h^2}{\rho^2} \right)$$

valeur qui, dans le cas d'un disque relativement mince, diffère peu de $C/2$

Dès lors, on a approximativement

$$A - C \approx -\frac{1}{2} m \rho^2 \approx B - C$$

$$A + B - C \approx \frac{1}{6} m \rho^2 \frac{h^2}{\rho^2} \approx \frac{1}{6} C \frac{h^2}{\rho^2}$$

Enfin, le dernier terme de $2T_2$ peut être omis, car il ne produit pas de forces d'inertie.

Notons alors que l'on a

$$\theta = O\left(\frac{\pi \lambda t}{l}\right), \quad \lambda = \frac{1}{2} \text{ longueur d'onde du mode}$$

$$\varphi = O\left(\frac{\pi \lambda t}{l}\right), \quad \lambda = \frac{1}{2} \dots$$

d'où

$$\left\{ \begin{array}{l} B\dot{\theta}^2 = O\left(\frac{1}{2} m \frac{\pi^2 p^2}{l^2} \dot{x}_t^2\right) \\ A\dot{\varphi}^2 = O\left(\frac{1}{2} m \frac{\pi^2 p^2}{l^2} \dot{y}_t^2\right) \\ (A-C)\Omega^2\theta^2 = O\left(\frac{1}{2} m \frac{\pi^2 p^2}{l^2} \Omega^2 x_t^2\right) \\ (B-C)\Omega^2\theta^2 = O\left(\frac{1}{2} m \frac{\pi^2 p^2}{l^2} \Omega^2 y_t^2\right) \\ \Omega(A+B-C)(\varphi\dot{\theta} - \theta\dot{\varphi}) = O\left(\frac{1}{6} m h^2 \Omega \frac{\pi^2}{l^2} (|\dot{x}_t y_t| + |x_t \dot{y}_t|)\right) \end{array} \right.$$

On remarque donc que les termes de T_2 seront négligeables devant ceux de T_1 chaque fois que

$$\frac{1}{2} \frac{\pi^2 p^2}{l^2} \ll 1$$

soit

$$\frac{p^2}{l^2} \ll \frac{2}{\pi^2}$$

Ainsi par exemple, l'erreur ne dépassera pas 5% à condition que

$$\frac{1}{2} \frac{\pi^2 p^2}{l^2} \leq 0,05,$$

soit

$$p/l \leq \frac{\sqrt{0,1}}{\pi} = 0,1$$

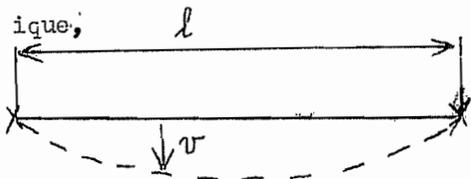
On obtient donc une erreur inférieure à 5% en négligeant l'inertie de rotation, chaque fois que le rayon de giration des disques est inférieur à 10% de la demi-longueur d'onde du mode. En général, l'erreur est $O\left(\frac{1}{2} \frac{\pi^2 p^2}{l^2}\right)$.

Il découle de cette analyse que l'erreur est plus forte pour les vitesses critiques supérieures que pour la première.

La mise en oeuvre d'un algorithme prenant en compte les termes rotatifs a été décrite par GERADIN (+)

1. Généralités et premiers exemples

Jusqu'à présent, nous avons toujours supposé les systèmes discrets. Nous examinerons ici le cas des systèmes continus. Les principes de base restent les mêmes ainsi que nous le montrerons d'abord dans le cas d'un arbre sur deux appuis, fléchissant dans sa configuration de repos pour la rotation. Si u sa masse linéique,



on a
$$2T = \int_0^l \mu \dot{v}^2 dx \quad (1)$$

tandis que l'énergie de déformation

s'écrit

$$2V = \int_0^l EI v''^2 dx, \quad v'' = \frac{d^2 v}{dx^2} \quad (2)$$

Le principe de HAMILTON s'écrit alors

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (T - V) dt = 0 \quad \text{pour } v(t_1) = v(t_2) = 0 \quad (3)$$

Pour faire apparaître la notion de modes propres, considérons un mouvement de la forme

$$v(x, t) = u(x) \sin \omega t \quad (4)$$

entre $t_1 = 0$ et $t_2 = \frac{2\pi}{\omega} = T$. Tenant compte des relations

$$\int_0^{2\pi/\omega} \sin^2 \omega t dt = \int_0^{2\pi/\omega} \cos^2 \omega t dt = \frac{T}{2} \quad (5)$$

On ramène le principe de HAMILTON à la forme spatiale

$$\frac{1}{2} \delta \left\{ \omega^2 \int_0^l \mu u^2 dx - \int_0^l EI u''^2 dx \right\} = 0 \quad (6)$$

quel que soit la variation δu cinématiquement admissible, c'est-à-dire vérifiant les liaisons au temps t . Dans le cas d'une poutre bi-appuyée, ces liaisons impliquent

$$\delta u(0) = \delta u(l) = 0.$$

Cherchons donc la variation première du principe (6). On aura :

$$0 = \omega^2 \int_0^l \mu u \delta u dx - \int_0^l EI u'' \delta u'' dx$$

et le dernier terme peut être intégré par parties :

$$- \int_0^l EI u'' \delta u'' dx = - [EI u'' \delta u']_0^l + \int_0^l (EI u''')' \delta u' dx$$

Une seconde intégration par parties est nécessaire pour se ramener à sous le signe somme : on obtient alors

$$- [EI u'' \delta u']_0^l + [(EI u''')' \delta u]_0^l - \int_0^l (EI u'''' - \mu \omega^2) \delta u dx.$$

Ainsi donc, la variation première se ramène à

$$0 = \int_0^l [\omega^2 \mu u - (EI u'')'] \delta u \, dx - [EI u'' \delta u']_0^l + [(EI u'')' \delta u]_0^l \quad (7)$$

Comme nous l'avons dit, $\delta u(0) = \delta u(l) = 0$, ce qui annule le dernier terme. En vertu du théorème fondamental du calcul des variations, on annule séparément les coefficients de δu sous le signe somme et les coefficients de δu et $\delta u'$ aux limites, ce qui mène aux équations.

$$(EI u'')'' - \omega^2 \mu u = 0 \quad \text{dans }]0, l[\quad (8)$$

$$EI u''(0) = EI u''(l) = 0 \quad (9)$$

Les relations (9) signifient que les moments sont nuls aux extrémités. L'équation (8) est l'équation différentielle du problème. Elle s'interprète comme suit : sous l'effet du mouvement, il naît en chaque élément de longueur dx une force d'inertie $-\mu dx \cdot \ddot{v}$. \dot{v} = L'effort tranchant

vérifie donc

$$\frac{dT}{dx} = \mu \ddot{v}$$

Le moment, compté positivement si $v'' > 0$,

vaut

$$M = EI v''$$

et on a

$$\frac{dM}{dx} = -T$$

d'où

$$\frac{d^2 M}{dx^2} = -\mu \ddot{v}$$

ou encore,

$$(EI v'')'' + \mu v'' = 0$$

équation qui, moyennant l'hypothèse (4), se ramène à (8).

Cherchons les solutions des équations (8) et (9), dans le cas $EI = \text{etc}$

L'équation (8) s'écrit alors

$$\mu^{IV} - \omega^2 \frac{\mu}{EI} \mu = 0$$

ou encore

$$\mu^{IV} - \beta^4 \mu = 0 \quad (10)$$

en posant

$$\beta^4 = \omega^2 \frac{\mu}{EI} \quad (11)$$

L'équation caractéristique associée à (10) s'écrit

$$z^4 - \beta^4 = 0$$

soit

$$(z^2 - \beta^2)(z^2 + \beta^2) = 0,$$

ce qui montre à l'évidence que ses racines sont

$$z = \pm \beta \quad \text{et} \quad z = \pm i\beta$$

La solution générale est donc

$$u = A \cos \beta x + B \sin \beta x + C \operatorname{ch} \beta x + D \operatorname{sh} \beta x \quad (12)$$

On remarquera que la fréquence est a priori indéterminée, et il en est de même de β . Ce sont les conditions aux limites qui fixeront les fréquences propres. Exprimons d'abord la nullité du déplacement et du moment en $x = 0$:

on a d'abord

$$0 = u(0) = A + C \quad (13)$$

et d'autre part,

$$0 = u''(0) = \beta^2 (C - A) \quad (14)$$

Notant que le cas $\beta = 0$ est sans intérêt, car combiné avec la relation (13), il impliquerait $u = 0$, on est amené, en comparant (13) et (14), à écrire

$$A = C = 0,$$

soit

$$u = B \sin \beta x + D \operatorname{sh} \beta x. \quad (15)$$

De la même façon, le déplacement et le moment s'annulent à l'extrémité : on a donc

$$\begin{aligned} u(l) &= B \sin \beta l + D \operatorname{sh} \beta l = 0 \\ u''(l) &= -\beta^2 B \sin \beta l + \beta^2 D \operatorname{sh} \beta l = 0 \end{aligned} \quad (16)$$

Il s'agit d'un système homogène de deux équations en B et D. Pour que ce système admette une solution non nulle, il faut que son déterminant s'annule, ce qui s'écrit

$$2 \beta^2 \sin \beta l \operatorname{sh} \beta l = 0 \quad (17)$$

Or, nous avons vu que β n'est pas nul, ce qui implique $\operatorname{sh} \beta l \neq 0$. Les seules solutions correspondent donc à $\sin \beta l = 0$,

soit

$$\beta l = n \pi \quad (18)$$

Cette équation fixe les fréquences propres. En effet, on en déduit, en tenant compte de la définition (11) de β :

$$\beta^4 = \frac{\omega^2 \mu}{EI} = \frac{n^4 \pi^4}{l^4} \quad (19)$$

d'où

$$\omega = \frac{n^2 \pi^2}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{\mu}} \quad (19)$$

Ainsi qu'on peut le constater, il y a une infinité de solutions, correspondant aux différentes valeurs de $n \in \mathbb{N}^+$. Les modes propres correspondant sont de la forme

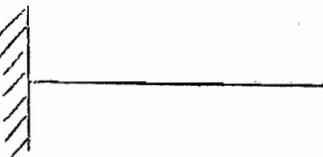
$$u = B \sin \frac{n\pi x}{l} \quad (20)$$

Pour bien faire sentir l'effet des conditions aux limites, examinons en quoi le problème serait modifié si, ou bien d'une poutre sur deux appuis, il s'agissait d'une poutre console. Dans ce cas, on aurait

$$u(0) = u'(0) = 0,$$

et les termes aux limites de l'expression (7) deviendraient

$$- [EI u'' \delta u']_{x=0} + [(EI u'')' \delta u]_{x=l},$$



ce qui conduit aux conditions

$$u''(l) = u'''(l) = 0,$$

signifiant la nullité du mouvement et de l'effort tranchant, respectivement.

Pour le reste, la solution (12) reste valable. Exprimons -y nos nouvelles conditions aux limites : on a

$$0 = u(0) = A + C$$

$$0 = u'(0) = \beta(B + D),$$

d'où l'expression

$$u = A(\cos \beta x - \operatorname{ch} \beta x) + B(\sin \beta x - \operatorname{sh} \beta x),$$

étant entendu que $\beta \neq 0$, sous peine de nullité du déplacement. A l'extrémité, on a

$$u''(l) = -A\beta^2(\cos \beta l + \operatorname{ch} \beta l) - B\beta^2(\sin \beta l + \operatorname{sh} \beta l) = 0$$

$$u'''(l) = A\beta^3(\sin \beta l - \operatorname{sh} \beta l) - B\beta^3(\cos \beta l + \operatorname{ch} \beta l) = 0.$$

La compatibilité de ce système, en dehors de la solution nulle, exige que

$$\beta^5 [(\cos \beta l + \operatorname{ch} \beta l)^2 + (\sin^2 \beta l - \operatorname{sh}^2 \beta l)] = 0,$$

soit

$$\cos^2 \beta l + \operatorname{ch}^2 \beta l + 2 \operatorname{ch} \beta l \cos \beta l + \sin^2 \beta l - \operatorname{sh}^2 \beta l = 0,$$

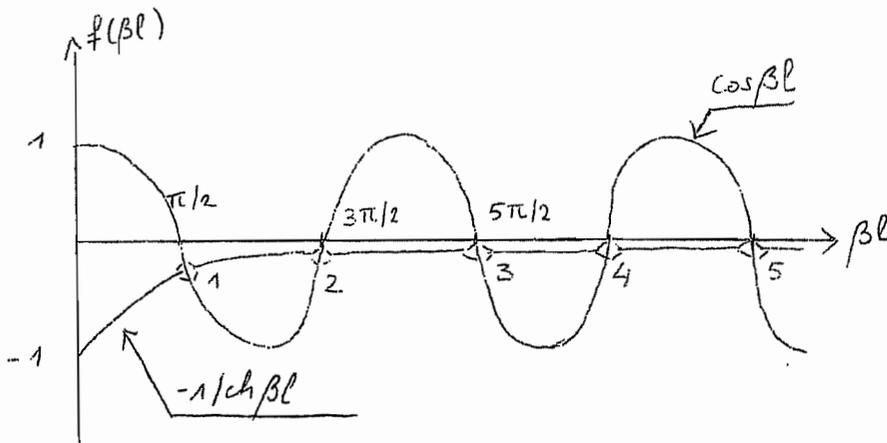
ou encore,

$$2 \cos \beta l \operatorname{ch} \beta l + 2 = 0,$$

c'est-à-dire

$$\cos \beta l = -\frac{1}{\operatorname{ch} \beta l} \quad (21)$$

Cette équation est, malheureusement, moins simple que l'équation (17). Cependant, la superposition des graphes de ces deux fonctions permet de situer les racines sans problème :



En dehors des quelques premières, elles sont données approximativement par

$$\beta_n l \approx (2n-1) \frac{\pi}{2}$$

Pour une meilleure précision, on peut faire les calculs par une voie itérative portant de la valeur précédente de $y = \beta l$, on calcule l'itéré y_k par

$$\cos y_k = -\frac{1}{\operatorname{ch} y_{k-1}}$$

soit, pour recherche le zéro numéro n ,

$$y_k = (n-1)\pi + \arccos\left(-\frac{1}{\operatorname{ch} y_{k-1}}\right)$$

(Se rappeler que la fonction arcos a ses valeurs entre 0 et π). La convergence est assurée, car

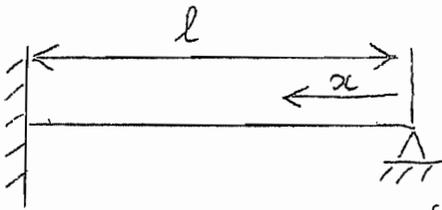
$$\frac{d}{dy} \left[\arccos\left(-\frac{1}{\operatorname{ch} y}\right) \right] = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{\operatorname{ch}^2 y}}} \cdot \left(\frac{1}{\operatorname{ch}^2 y}\right) \cdot \operatorname{sh} y = \frac{1}{\operatorname{ch} y}$$

de module inférieur à 1

valeurs de $y = \beta l$				
n	1	2	3	4
$\beta \frac{Bl}{n}$	1,8751	4,7300	7,8548	10,996
$(2n-1) \frac{\pi}{2}$	1,5708	4,7124	7,8540	10,996

2. Poutre appuyée - encastree

21 - 6



La solution générale est la même que pour la poutre bi-appuyée. Mais les conditions aux limites sont ici

$$\begin{cases} u(0) = u''(0) = 0 \\ u(l) = u''(l) = 0 \end{cases}$$

Pourtant donc de

$$u = A \operatorname{ch} \beta x + B \operatorname{sh} \beta x + C \operatorname{ces} \beta x + D \sin \beta x,$$

avec

$$\beta^4 = \frac{\omega^2 \mu}{EI},$$

on a d'abord, en $x = 0$,

$$0 = u(0) = A + C$$

$$0 = u''(0) = \beta^2 (A - C)$$

d'où pour $\beta \neq 0$, $A = C = 0$ et

$$u = B \operatorname{sh} \beta x + D \sin \beta x$$

Les conditions en $x = l$ sont alors

$$0 = u(l) = B \operatorname{sh} \beta l + D \sin \beta l$$

$$0 = u'(l) = \beta (B \operatorname{ch} \beta l + D \operatorname{ces} \beta l)$$

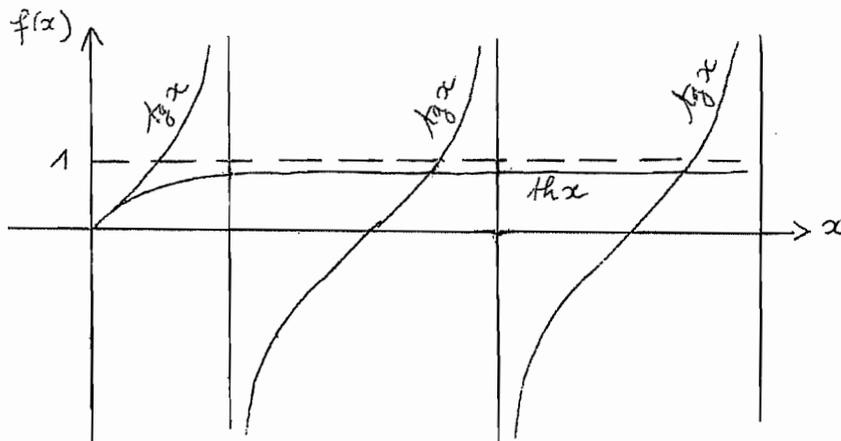
Toujours en supposant $\beta \neq 0$, ce système n'a de solution non triviale que lorsque son déterminant est non nul, c.à.d. si

$$\operatorname{sh} \beta l \operatorname{ces} \beta l - \operatorname{ch} \beta l \sin \beta l = 0$$

soit si

$$\boxed{\operatorname{tg} \beta l = \operatorname{th} \beta l}$$

Il est assez aisé de trouver une approximation des solutions de cette équation en faisant un graphe de ces deux fonctions :



Comme la fonction $\text{th}x$ est très voisine de l'unité pour Bl suffisamment grand les solutions vérifient à peu près

$$\text{tg } \beta l = 1,$$

sauf $\beta l = \frac{\pi}{4}$ Ce sont donc

$$\beta_1 l \approx \frac{5\pi}{4}, \quad \beta_2 l \approx \frac{9\pi}{4}, \dots$$

soit

$$\beta_m l = \frac{\pi}{4} + m\pi$$

Partant de ces solutions approchées, on peut les améliorer par le processus itératif

$$x_{m+1} = \text{arctg}(\text{th} x_m)$$

car

$$\frac{d}{dx} [\text{arctg}(\text{th} x)] = \frac{1}{1 + \text{th}^2 x} (1 - \text{th}^2 x) < 1$$

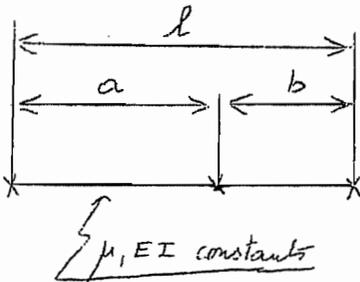
(et même très proche de zéro)

n	1	2	3
$\frac{\pi}{4} + n\pi$	3,9269908	7,0685834	10,210176
$\beta_n l$	3,9266023	7,0685827	10,210176

On a alors

$$\omega^2 = \frac{EI\beta^4}{\mu} \approx \frac{\pi^4 EI}{\mu l^4} \cdot \left(m + \frac{1}{4}\right)^4$$

3. Poutre sur 3 appuis



Dans ce cas, il faut écrire le principe de manière à faire apparaître les conditions en $x=a$:

on écrira donc

$$\frac{1}{2} \left\{ \left(\int_0^a + \int_a^l \right) EI u''^2 dx - \omega^2 \left(\int_0^a + \int_a^l \right) \mu u^2 dx \right\} \text{stat},$$

Lors des intégrations par parties, il convient de distinguer a_+ et a_- on a donc

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^a EI u'' \delta u' dx + \int_a^l EI u'' \delta u' dx - \omega^2 \left[\int_0^a \mu u \delta u dx + \int_a^l \mu u \delta u dx \right] \\ &= [EI u'' \delta u']_0^{a_-} + [EI u'' \delta u']_{a_+}^l - [EI u'' \delta u]_0^{a_-} - [EI u'' \delta u]_{a_+}^l \\ &\quad + \left(\int_0^a + \int_a^l \right) (EI u'' - \omega^2 \mu u) \delta u dx. \end{aligned}$$

Les variations Su et Su' doivent être identiques en a - et a +. Par conséquent, on obtient les résultats suivants :

$$EI u'''' - \omega^2 \mu u = 0 \text{ dans }]0, a[\cup]a, l[\quad \dots \quad (1)$$

$$EI u''(0) \delta u'(0) = EI u''(l) \delta u'(l) = 0 \quad \dots \quad (2)$$

$$[EI u''(a_-) - EI u''(a_+)] \delta u'(a) = 0 \quad (3)$$

$$EI u'''(0) \delta u(0) = EI u'''(l) \delta u(l) = 0 \quad (4)$$

$$[EI u'''(a_+) - EI u'''(a_-)] \delta u(a) = 0 \quad (5)$$

Les conditions (4) et (5) n'apportent rien, car Su (0) = Su (a) = Su (l) = 0. Par contre, les conditions (2) entraînent

$$0 = EI u'' (0) = EI u'' (l), \quad (6)$$

ce qui exprime la nullité du moment aux extrémités. Quant à la condition (3) elle conduit à

$$EI u'' (a) - EI u'' (a+) = 0 \quad (7)$$

ce qui est une expression de l'équilibre des moments au droit de l'appui.

Pour la résolution, on posera à nouveau

$$\beta^4 = \frac{\omega^2 \mu}{EI} \quad (8)$$

La solution s'écrit alors pour chacune des travées sous la forme

$$u = A \operatorname{ch} \beta x + B \operatorname{sh} \beta x + C \cos \beta x + D \sin \beta x \quad (9)$$

les constantes A,B,C,D différant d'une travée à l'autre. On obtiendrait par cette méthode huit constantes à déterminer par les conditions aux limites x = 0 et x = l et les conditions de transition en x = a.

Il existe cependant un procédé plus simple : dans l'intervalle on pose

$$u = u_1 = A_1 \operatorname{ch} \beta x + B_1 \operatorname{sh} \beta x + C_1 \cos \beta x + D_1 \sin \beta x ;$$

on impose que $u_1(0) = u_1(a) = 0$, et $u_1''(0) = 0$; dans l'intervalle $]a, l[$, on écrit

$$u = u_1 + u_2,$$

u_2 étant la fonction de type (9) qui s'annule avec sa dérivée et sa dérivée seconde en x = a. (de manière à vérifier les conditions de transition). On écrit enfin que $u(l) = u'(l) = 0$. De cette manière, la détermination des constantes est grandement simplifiée.

a) détermination de u_1

Tout d'abord, on a

$$u_1 (0) = A_1 + C_1 = 0$$

$$u_1'' (0) = \beta^2 (A_1 - C_1) = 0$$

et comme $\beta = 0$ correspond, vu les conditions d'appui, à la solution triviale $u = 0$, on doit avoir $\beta \neq 0$ et

$$A_1 = C_1 = 0$$

On a ensuite

$$u_1(a) = B_1 \operatorname{sh} \beta a + D_1 \sin \beta a,$$

d'où

$$B_1 = - D_1 \frac{\sin \beta a}{\operatorname{sh} \beta a}$$

et

$$u_1(x) = D_1 \left[\sin \beta x - \frac{\sin \beta a}{\operatorname{sh} \beta a} \operatorname{sh} \beta x \right]$$

b) détermination de u_2

On peut donner à u_2 la forme pratique suivante :

$$u_2 = A_2 \operatorname{ch} \beta(x-a) + B_2 \operatorname{sh} \beta(x-a) + C_2 \cos \beta(x-a) + D_2 \sin \beta(x-a).$$

Alors,

$$0 = u_2(a) = A_2 + C_2$$

$$0 = u_2'(a) = \beta (B_2 + D_2)$$

$$0 = u_2''(a) = \beta^2 (A_2 - C_2)$$

comme on peut supposer $\beta \neq 0$, il vient

$$A_2 = C_2 = 0$$

$$B_2 = - D_2,$$

d'où

$$u_2(x) = D_2 [\sin \beta(x-a) - \operatorname{sh} \beta(x-a)]$$

c) conditions aux limites en $x = 1$

En $x > a$, on a

$$u(x) = D_1 \left[\sin \beta x - \frac{\sin \beta a}{\operatorname{sh} \beta a} \operatorname{sh} \beta x \right] + D_2 [\sin \beta(x-a) - \operatorname{sh} \beta(x-a)],$$

d'où, en posant $b = 1 - a$,

$$u(1) = D_1 \left[\sin \beta l - \frac{\sin \beta a}{\operatorname{sh} \beta a} \operatorname{sh} \beta l \right] + D_2 (\sin \beta b - \operatorname{sh} \beta b) = 0$$

$$u''(1) = \beta^2 \left[D_1 \left(-\sin \beta l - \frac{\sin \beta a}{\operatorname{sh} \beta a} \operatorname{sh} \beta l \right) + D_2 (-\sin \beta b - \operatorname{sh} \beta b) \right] = 0$$

Divisons la seconde équation par β^2 , puis considérons les équations provenant de la demi-somme et la demi-différence des deux équations obtenues. Il vient

$$\begin{cases} D_1 \sin \beta l + D_2 \sin \beta b = 0 \\ D_1 \frac{\sin \beta a}{\operatorname{sh} \beta a} \operatorname{sh} \beta l + D_2 \operatorname{sh} \beta b = 0 \end{cases}$$

Ce système n'admet une solution non nulle que si son détermination^{nt} est nulle

$$\Delta = \sin \beta l \operatorname{sh} \beta b - \frac{\sin \beta a}{\operatorname{sh} \beta a} \operatorname{sh} \beta l \sin \beta b$$

est nul, soit, puisque $\beta a \neq 0$, pour

$$\operatorname{sh} \beta a \sin \beta l \operatorname{sh} \beta b - \sin \beta a \operatorname{sh} \beta l \sin \beta b = 0$$

C'est une équation en β . Posant

$$\xi = \frac{b}{l}, \quad \gamma = \beta l$$

On obtient

$$\operatorname{sh} \gamma \xi \sin \gamma \operatorname{sh} \gamma (1-\xi) - \sin \gamma \xi \operatorname{sh} \gamma \sin \gamma (1-\xi) = 0$$

La résolution de cette équation est difficile dans le cas général. Etudions d'abord le cas particulier $\xi \rightarrow 0$. A cet effet, nous écrivons l'équation aux fréquences propres sous la forme

$$\frac{\operatorname{sh} \gamma \xi \operatorname{sh} \gamma (1-\xi)}{\operatorname{sh} \gamma} = \frac{\sin \gamma \xi \sin \gamma (1-\xi)}{\sin \gamma}$$

On a alors, au voisinage de zéro,

$$\operatorname{sh} \gamma \xi \approx \gamma \xi, \quad \operatorname{sh} \gamma (1-\xi) \approx \operatorname{sh} \gamma - \gamma \xi \operatorname{ch} \gamma$$

d'où

$$\frac{\operatorname{sh} \gamma \xi \operatorname{sh} \gamma (1-\xi)}{\operatorname{sh} \gamma} \approx \gamma \xi \left[1 - \frac{\gamma \xi}{\operatorname{th} \gamma} \right]$$

et, de la même façon,

$$\sin \gamma \xi \approx \gamma \xi, \quad \sin \gamma (1-\xi) \approx \sin \gamma - \gamma \xi \cos \gamma,$$

d'où

$$\frac{\sin \gamma \xi \sin \gamma (1-\xi)}{\sin \gamma} \approx \gamma \xi \left[1 - \frac{\gamma \xi}{\operatorname{tg} \gamma} \right]$$

ce qui mène à l'équation

$$\gamma \xi \left[1 - \frac{\gamma \xi}{\operatorname{th} \gamma} \right] = \gamma \xi \left[1 - \frac{\gamma \xi}{\operatorname{tg} \gamma} \right]$$

qui équivaut à

$$\operatorname{th} \gamma = \operatorname{tg} \gamma$$

On retrouve l'équation de la poutre encastree, dont les solutions sont données en première approximation, par

$$\gamma \approx \left(m + \frac{1}{4} \right) \pi$$

Passons alors au cas général $0 < \xi \leq 0,5$. Le cas $\xi = 0,5$ correspond à une poutre sur trois appuis, en deux travées égales. L'expression

$$\xi = \frac{\text{sh } \gamma \xi \text{ sh } \gamma (1-\xi)}{\text{sh } \gamma}$$

étant lourde à manipuler, nous la simplifierons comme suit :

on a

$$\xi = \frac{(e^{\gamma \xi} - e^{-\gamma \xi})(e^{\gamma(1-\xi)} - e^{-\gamma(1-\xi)})}{2(e^{\gamma} - e^{-\gamma})}$$

et compte tenu de la petitesse de $e^{-2\gamma}$ et $e^{-2\gamma(1-\xi)}$, elle se simplifie approximativement en

$$\xi \approx \frac{1}{2} (1 - e^{-2\gamma \xi})$$

Cela étant, l'équation à résoudre peut s'écrire

$$\sin \gamma = \frac{1}{2} (1 - e^{-2\gamma \xi}) \sin \gamma \xi \sin \gamma (1-\xi)$$

Il suffit donc de tracer sur un même diagramme la fonction $\sin \gamma$ et la fonction du second membre, et de rechercher leurs points de rencontre, qui sont les solutions cherchées. On obtient de cette manière les valeurs suivantes :

		Racines γ/π			
ordre ξ		1	2	3	4
0		1,25	2,25	3,25	4,25
0,1		1,35	2,40	3,54	4,63
0,2		1,48	2,68	3,88	5,00
0,3		1,60	2,85	3,75	4,55
0,4		1,83	2,78	3,60	5
0,5		2	2,5	4	4,5

Conformément au principe d'addition des contraintes de Rayleigh, ces valeurs doivent toutes s'intercaler entre les valeurs de la poutre sur deux appuis

$$(\omega_1)_{2app} \leq (\omega_1)_{3app} \leq (\omega_2)_{2app},$$

etc... C'est bien le cas, puisque la poutre sur deux appuis correspond à

$$\frac{\gamma_n}{\pi} = n$$

4 - Equations générales d'un système élastique vibrant.

Soit un corps vibrant de volume V. Son énergie de déformation s'écrit (dans les notations indicielles - voir cours d'élasticité)

$$V = \frac{1}{2} \int_V C_{ijkl} \epsilon_{ij}(u) \epsilon_{kl}(u) dV$$

et son énergie cinétique,

$$T = \frac{1}{2} \int_V \rho \dot{u}_i \dot{u}_i dV$$

Pour un mouvement sinusoïdal,

$$u_i = v_i \sin \omega t$$

et en intégrant entre 0 et T = $\frac{2\pi}{\omega}$, le principe de HAMILTON prend la forme du problème aux valeurs propres

$$\delta \left\{ \frac{1}{2} \int_V C_{ijkl} \epsilon_{ij} \epsilon_{kl} dV - \frac{\omega^2}{2} \int_V \rho u_i u_i dV \right\}$$

Les équations d'Euler - Lagrange de ce principe variationnel déterminent les modes propres. Cherchons - les : on a

$$\int_V C_{ijkl} \epsilon_{kl} \delta \left(\frac{1}{2} (D_i v_j + D_j v_i) \right) dV = \int_V C_{ijkl} D_j \delta v_i dV$$

$$= \int_{S_2} C_{ijkl} \epsilon_{kl} m_j \delta v_i dS - \int_V D_j (C_{ijkl} \epsilon_{kl}) dV,$$

étant entendu que l'on a parti la frontière en une portion S₁ où les déplacements sont fixés et une portion S₂ libre de toute action. Comme, de toute évidence,

$$- \delta \left[\frac{\omega^2}{2} \int_V \rho v_i v_i dV \right] = - \omega^2 \int_V \rho v_i \delta v_i dV,$$

on est conduit aux équations aux dérivées partielles ($\sigma_{ij} = C_{ijkl} \epsilon_{kl}$)

$$D_j \sigma_{ji} + \omega^2 \rho v_i = 0 \quad (\text{dans } V)$$

auxquelles sont associées les conditions aux limites

$$\begin{cases} v_i = 0 & \text{sur } S_1 \\ m_j \sigma_{ji} = 0 & \text{sur } S_2 \end{cases}$$

Ce sont les équations générales des modes propres.

Les équations aux modes propres sont compliquées et, en dehors de cas très particuliers (poutres simples, plaques circulaires, coques cylindriques librement appuyées...), il est très ^{rare} de pouvoir les résoudre analytiquement il est donc nécessaire de consentir à des approximations. Toutes consistent à restreindre le nombre de degrés de liberté à une valeur finie ou au moins, "plus faible". Pour arriver à ce résultat, diverses méthodes sont possibles.

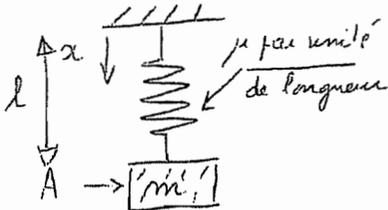
5.1 - Méthode de Rayleigh

La méthode de Rayleigh consiste à présupposer la forme du mode, et à calculer sa fréquence à partir du quotient de Rayleigh

$$\omega^2 = \rho(u) = \frac{U(u)}{T_1(u)}$$

T_1 étant l'énergie cinétique pour $\dot{w} = 1$. La justification de cette méthode se trouve dans le principe de Rayleigh.

Soit par exemple à calculer la fréquence propre d'un ressort pesant auquel est attaché une masse, ^{Si le ressort n'avait pas de masse,} sa déformée serait linéaire. On fait l'hypothèse



que cette déformée constitue encore une bonne approximation dans le cas où le ressort possède une masse non négligeable

On a donc

$$u(x) = u_A x/l$$

d'où

$$2T_1 = m u_A^2 + \int_0^l \mu u_A^2 \frac{x^2}{l^2} dx = (m + \frac{1}{3} \mu l) u_A^2$$

Quant à l'énergie de déformation, elle s'écrit toujours

$$2U = k u_A^2,$$

ce qui donne

$$\omega^2 = \frac{2U}{2T_1} = \frac{k u_A^2}{(m + \frac{1}{3} \mu l) u_A^2} = \frac{k}{m + \frac{1}{3} \mu l}$$

Voici un tableau comparant ces valeurs aux pulsations exactes calculées à partir des équations différentielles :

Tableau de $B^2 = \omega^2 ul/K$										
$\mu l/m$	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1	2	5	10	
β_{exact}	0	0,433	0,593	0,705	0,791	0,860	1,08	1,32	1,44	1,57
β_{app}	0	0,433	0,594	0,707	0,795	0,866	1,10	1,37	1,52	1,73

On constate que, même pour les grandes valeurs de $\frac{\mu l}{m}$, la correspondance reste très bonne.

5. 2 - Méthode de Rayleigh - Ritz

C'est une amélioration de la précédente. On se donne non plus une forme, mais un ensemble de formes dépendant de k paramètres α_i .

$$u = \sum_{i=1}^k \alpha_i u(i)$$

$u(i)$ étant des formes arbitraires, si ce n'est que les conditions aux limites portant sur les déplacements doivent être respectées. Les fonctionnelles U et T_1 sont ainsi transformées en des fonctions de k variables $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ et le principe de HAMILTON s'écrit

$$\delta \{ U(\alpha_1, \dots, \alpha_k) - \omega^2 T_1(\alpha_1, \dots, \alpha_k) \} = 0,$$

les variations portant sur les k variables en question. On obtient ainsi les k équations globales

$$\frac{\partial U}{\partial \alpha_i} - \omega^2 \frac{\partial T_1}{\partial \alpha_i} = 0, \quad i = 1, \dots, k$$

qui forment un système linéaire homogène de k équations à k inconnues de la forme

$$Kq - \omega^2 Mq = 0$$

Ainsi, par exemple, soit un arbre pesant sur deux appuis, portant en son milieu un disque de masse M. Cherchons une solution de la forme



$$u = A \sin \frac{\pi x}{l} + B \sin \frac{2\pi x}{l}$$

Les conditions d'appui sont visiblement vérifiées.

On a

$$2U = \int_0^l EI u''^2 dx = \frac{\pi^4 EI}{l^4} A^2 \frac{l}{2} + \frac{16\pi^4 EI}{l^4} B^2 \frac{l}{2}$$

et

$$2T_1 = \int_0^l \mu u^2 dx + MA^2 = \mu A^2 \frac{l}{2} + \mu B^2 \frac{l}{2} + MA^2,$$

ce qui mène au système matriciel

$$\begin{bmatrix} \frac{\pi^4 EI}{2l^3} - \omega^2 (M + \mu \frac{l}{2}) & 0 \\ 0 & \frac{8\pi^4 EI}{l^3} - \omega^2 \mu \frac{l}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = 0$$

(ici diagonal), menant aux pulsations propres

$$\omega_1^2 = \frac{\pi^4 EI}{2(M + \mu \frac{l}{2})l^3}$$

$$\omega_2^2 = \frac{8\pi^4 EI}{\mu \frac{l}{2} \cdot l^3}$$

Une variante intéressante de la méthode de Rayleigh-Ritz est fournie par la méthode des éléments finis, où l'approximation est locale, tout en respectant les conditions de raccordement minimales. A ce sujet, nous renvoyons le lecteur aux cours spécialisés.

5.3 - Méthode de Dunkerley

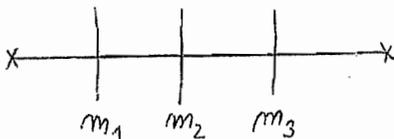
du principe de Rayleigh.

C'est une application déguisée

. Etant donné, par

exemple, un arbre portant plusieurs masses, dont éventuellement, l'une continue, supposons que les déformées sous chacune de ces masses prise séparément, diffèrent

peu. Soit u la déformée sous toutes les masses et appelons u_i la déformée ^{dynamique} sous la masse i : On a donc



$$\omega^2 = \rho(u) = \frac{U(u)}{T_{1(1)}(u) + T_{1(2)}(u) + \dots + T_{1(n)}(u)}$$

$T_{1(i)}$ représentant les contributions de chacune des masses. Donc,

$$\frac{1}{\omega^2} = \frac{T_{1(1)}(u) + T_{1(2)}(u) + \dots + T_{1(n)}(u)}{U}$$

Or, on a nécessairement, par la propriété de minimum du quotient de Rayleigh,

$$\frac{1}{\omega_i^2} = \frac{T_{1(i)}(u_i)}{U(u_i)} \geq \frac{T_{1(i)}(u)}{U(u)}, \text{ mais peu différent (princ. de Rayleigh)}$$

ce qui implique

$$\frac{1}{\omega^2} \leq \sum_i \frac{1}{\omega_i^2},$$

soit

$$\omega^2 \geq \frac{1}{\sum_i \frac{1}{\omega_i^2}}, \text{ mais peu différent.}$$

Cette ~~borne~~ ^{borne} inférieure de la valeur propre constitue l'approximation de Dunkerley. Ainsi, par exemple; dans le cas de l'arbre décrit en 5.2, sous la charge répartie on a

$$\omega_1^2 = \frac{\pi^4 EI}{2(\mu \frac{l}{2})l^3}$$

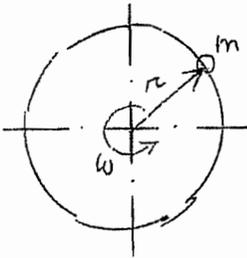
et, sous le volant,

$$\omega_2^2 = \frac{48 EI}{M l^3}$$

ce qui donne

$$\omega_1^2 \geq \frac{\pi^4 EI}{2(1,015 M + \mu l/2)}$$

1 - Introduction



Considérons pour commencer une masse en tournant au bout d'un fil de longueur r . La force centrifuge s'écrit

$$F = m \omega^2 r. \quad (1)$$

Cette force provoque sur le centre une action périodique qui peut être gênante à bien des points de vue; elle provoque en effet des vibrations et, dans les cas extrêmes, elle peut déséquilibrer l'ensemble. La formule (1) montre que cette force dépend de deux facteurs essentiels : la vitesse de rotation, qui intervient au carré, et le groupement

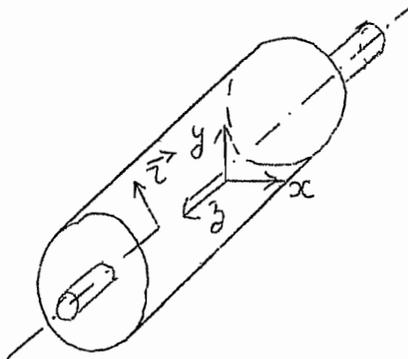
$$b = mr \quad (2)$$

que l'on appelle balourd.

Dans les applications pratiques, un balourd est par exemple provoqué par le mauvais centrage d'un moyen sur un arbre. De tels déséquilibres peuvent avoir des conséquences catastrophiques sur la fiabilité des organes de machines. En effet, outre des vibrations souvent gênantes, ne fût-ce que par le bruit qu'elles engendrent, les réactions aux paliers s'en trouvent augmentées, avec toutes les conséquences qui peuvent en résulter. Notant que, d'une part, l'effet des balourds croît fortement avec la vitesse et, d'autre part, les grandes vitesses font approcher les fréquences propres du bâti, on peut dire qu'il est nécessaire d'équilibrer un rotor si l'on veut le faire tourner vite.

2. Principes fondamentaux de l'équilibrage des rotors rigides

2. 1 - Considérons un corps rigide en rotation autour d'un axe donné. Chaque élément de masse dm de ce corps induit un balourd élémentaire $r \, dm$ auquel correspond une force centrifuge $\omega^2 r \, dm$ perpendiculaire à l'axe de rotation. Choisissons des axes liés au rotor,



on a

$$d\vec{F}_c = \omega^2 \vec{r} \, dm \quad (3)$$

Le rotor sera équilibré autour de l'axe de rotation Oz si tous les balourds élémentaires forment un système en équilibre, ce qui implique la nullité de la résultante et du moment de ces forces. Comme toutes les forces sont

radiales, l'équilibre de translation selon Oz et l'équilibre de rotation autour de cet axe sont vérifiés a priori. Il ne reste plus qu'à vérifier la nullité de la résultante parallèle au plan oxy , ce qui s'écrit

$$\vec{R} = \int \vec{r} \, dm \quad (4)$$

et la nullité des moments autour de Ox et Oy , ce qui s'écrit

ou, globalement, en posant $M^* = (M_2, -M_1)$,

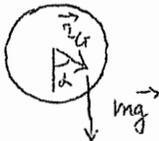
$$M^* = \int_V \gamma \vec{r} \, dm = 0 \quad (5)$$

L'opération consistant à annuler ce torseur (\vec{R}, \vec{M}^*) s'appelle équilibre dynamique. On parle parfois d'une opération plus simple, l'équilibrage statique, consistant à annuler la résultante R seule. Cette opération est en effet très aisée, car le centre de gravité du rotor est défini par

$$m \vec{r}_G = \int_V \vec{r} \, dm$$

Laissant donc le rotor tourner sous son propre poids, on aura un moment $mg \, r_G \sin \alpha$

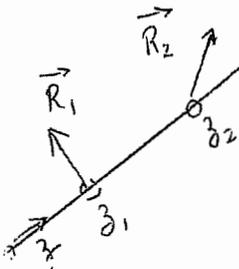
. Le rotor s'arrêtera donc lorsque le centre de gravité sera situé en-dessous de l'axe. Fixant une masse additionnelle au sommet du rotor, on recommencera, et il est possible de définir des cycles convergents.



Composant avec la condition d'équilibre dynamique, il est aisé de voir que l'équilibrage statique ne convient que pour les rotors très minces (le moment est alors nécessairement faible)

2. 2 - Réduction des balourds à deux plans

Le torseur des balourds (R, M) peut être représenté par deux résultantes en des plans différents de coordonnées Z_1 et Z_2 arbitrairement choisis. Il suffira pour assurer l'équivalence



$$\begin{cases} \text{que} \\ \vec{R}_1 + \vec{R}_2 = \vec{R} \\ \vec{R}_1 z_1 + \vec{R}_2 z_2 = \vec{M}^* \end{cases}$$

De la première équation, on déduit

$$\vec{R}_2 = \vec{R} - \vec{R}_1,$$

et en réintroduisant cette valeur dans la seconde, on obtient

$$\vec{R}_1 (z_1 - z_2) = \vec{M}^* - \vec{R} z_2$$

soit

$$\vec{R}_1 = \frac{\vec{M}^* - \vec{R} z_2}{z_1 - z_2}$$

et

$$\vec{R}_2 = \vec{R} - \vec{R}_1 = \frac{\vec{M}^* - \vec{R} z_1}{z_2 - z_1}$$

Cette propriété est capitale, car elle permet de ramener le problème à celui de l'équilibrage de deux plans distincts pris séparément.

2.3 - Méthodes d'équilibrage

Les méthodes d'équilibrage consistent en général à placer le rotor sur les paliers élastiques. Elles se distinguent par la manière de séparer les deux plans d'équilibrage. On peut distinguer trois procédés classiques:

- (i) : immobilisation d'un plan d'équilibrage à la fois
- (ii) : immobilisation d'un palier à la fois
- (iii) : aucune immobilisation

La mise en oeuvre de ces méthodes sera étudiée plus loin

2.4 - Conditions d'équilibrage

On mesure en général le déplacement ou l'accélération. Le système a une équation de la forme

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = b\omega^2 Re^{i\omega t} \quad (b = \text{balourd})$$

soit

$$\ddot{x} + 2\varepsilon p \dot{x} + p^2 x = \frac{b\omega^2}{m} Re^{i\omega t}, \quad \text{où } p = \sqrt{k/m}$$

est la pulsation propre du système. Pour une réponse de la forme

$$x = R(z e^{i\omega t}),$$

on obtient

$$(p^2 - \omega^2 + 2i\varepsilon\omega p)z = \frac{b\omega^2}{m}$$

soit

$$z = \frac{b\omega^2/m}{p^2 - \omega^2 + 2i\varepsilon\omega p}$$

L'amplitude est donc

$$\frac{b\omega^2/m}{\sqrt{(p^2 - \omega^2)^2 + 4\varepsilon^2\omega^2 p^2}}$$

$$|z| = \frac{b\omega^2/m}{\sqrt{(p^2 - \omega^2)^2 + 4\varepsilon^2\omega^2 p^2}}$$

et la phase (retard) est donnée par

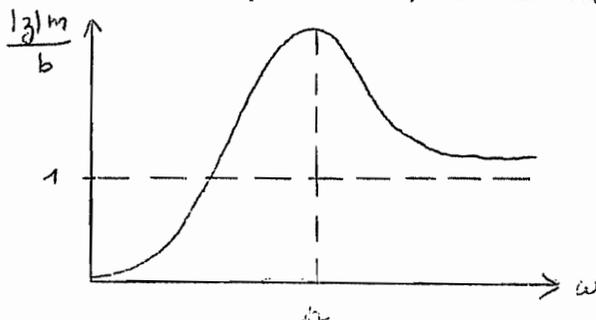
$$\text{tg } \varphi = \frac{2\varepsilon\omega p}{p^2 - \omega^2}$$

A l'inverse de ce qui se passe dans le cas d'une excitation d'amplitude indépendante de la fréquence, on a

$$\lim_{\omega^2 \rightarrow \infty} \frac{|z|m}{b} = 1$$

$$\lim_{\omega^2 \rightarrow 0} \frac{|z|m}{b} = 0$$

L'amplitude devient donc à peu près indépendante de la fréquence pour les vitesses suffisantes. Plus précisément, on a un diagramme de la forme ci-dessous:



On aura, pour η petit,

$$\frac{|z|_m}{b} < 1 + \eta$$

pour

$$\frac{\omega^2}{\rho^2} < (1 + \eta) \sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\rho^2}\right)^2 + 4 \epsilon^2}$$

soit

$$\frac{\omega^4}{\rho^4} < (1 + \eta)^2 \left(1 - 2 \frac{\omega^2}{\rho^2} + \frac{\omega^4}{\rho^4} + 4 \epsilon^2\right)$$

ou encore

$$\frac{\omega^4}{\rho^4} (2\eta + \eta^2) - 2(1 + \eta)^2 \frac{\omega^2}{\rho^2} + (1 + 4\epsilon^2)(1 + \eta)^2 > 0.$$

Vu la petitesse de η , nous simplifierons cette relation en

$$2\eta \frac{\omega^4}{\rho^4} - 2 \frac{\omega^2}{\rho^2} + (1 + 4\epsilon^2) > 0$$

Les racines de ce trinôme sont

$$\frac{\omega^2}{\rho^2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 2\eta(1 + 4\epsilon^2)}}{2\eta}$$

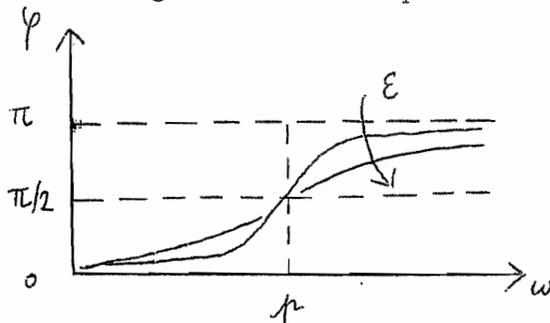
Il s'agit de se trouver à droite de la plus grande, soit

$$\frac{\omega^2}{\rho^2} > \frac{1 + \sqrt{1 - 2\eta(1 + 4\epsilon^2)}}{2\eta} \approx \frac{1}{\eta} - \frac{1}{2}(1 + 4\epsilon^2) \approx \frac{1}{\eta}$$

Ainsi par exemple, un système très faiblement amorti aura une valeur du coefficient $|z|_m/b$ inférieure à 1,05 pour

$$\frac{\omega^2}{\rho^2} > 20, \quad \text{soit} \quad \omega/\rho > 4,5$$

Moyennant cette précaution, on se trouve dans une zone où l'amplitude varie peu lors d'une fluctuation de la vitesse de rotation. Pour ce qui est de la phase, son diagramme est classique. Elle variera peu au voisinage de π si



$$\text{tg } \varphi = \frac{2\epsilon\omega\rho}{\omega^2 - \rho^2} < \eta,$$

soit

$$2\epsilon\omega\rho < \eta(\omega^2 - \rho^2)$$

ce qui conduit à l'inégalité

$$\frac{\omega^2}{\rho^2} - 2 \frac{\epsilon}{\eta} \frac{\omega}{\rho} - 1 > 0$$

Les racines du trinôme sont données par

$$\frac{\omega}{\rho} = \frac{\epsilon}{\eta} \pm \sqrt{\left(\frac{\epsilon}{\eta}\right)^2 + 1}$$

Il s'agit de se trouver à l'extérieur des racines, ce qui aura lieu pour

$$\frac{\omega}{\rho} > \frac{\epsilon}{\eta} + \sqrt{\left(\frac{\epsilon}{\eta}\right)^2 + 1}$$

Ainsi, pour $n = 0,05$ il faudra vérifier

$$\frac{\omega}{\rho} > 20 \varepsilon + \sqrt{1 + (20\varepsilon)^2}$$

ce qui donne

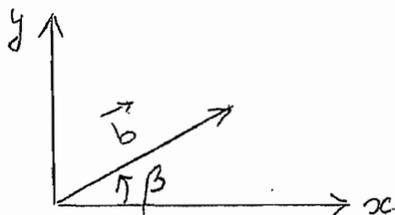
ε	0,01	0,05	0,1
ω/ρ	1,22	2,41	4,24

En résumé, on a obtenu les résultats suivants :

à condition de se placer à une vitesse égale à 5 à 6 fois au moins la fréquence propre de vibration du système, l'amplitude est proportionnelle au balourd et la phase indépendante de celui-ci

3. Equilibrage d'un plan

On suppose donc que les dispositions sont prises pour qu'un seul plan de vibration soit libre. La question est à présent de déterminer l'amplitude et la phase de son balourd. Pour ce faire, considérons une référence quelconque (xOy). Le balourd y est représenté par un vecteur $b = mr$. Il est équivalent,



et plus pratique de considérer le nombre complexe

$$b = |b| e^{i\beta}$$

L'image de ce balourd, sous forme d'amplitudes sera décrite par un second nombre complexe

$$a = |a| e^{i\alpha}$$

La relation entre ces deux nombres s'écrit

$$a = y b,$$

où

$$y = |y| e^{i\varphi}$$

est l'admittance. Ce nombre complexe est inconnu a priori, mais les considérations qui précèdent montrent qu'il ne dépend pas du balourd. Le problème de l'équilibrage du plan équivaut en fait à déterminer expérimentalement l'admittance, puisqu'elle permet de trouver b à partir de a . On notera que dans ces conditions, les amplitudes ne doivent être mesurées qu'à une constante multiplicative près

3. 1. Premier procédé : mesures d'amplitudes et d'angles, avec rotation dans les deux sens

a) On effectue une première mesure dans le sens direct, ce qui donne une réponse

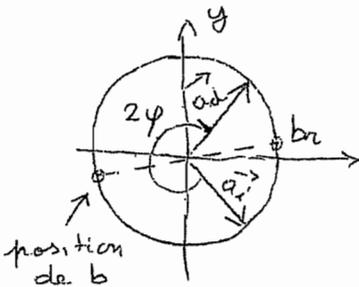
$$a_d = y b = |y| e^{i\varphi} \cdot b$$

b) On fait une seconde mesure dans le sens inverse, d'où une réponse

$$a_i = \bar{y} b = |y| e^{-i\varphi} \cdot b$$

En effet, le déphasage temporel reste le même, si bien que le déphasage angulaire s'inverse. On en déduit aisément φ par division des deux équations ;

$$e^{2i\varphi} = \frac{a_d}{a_i}$$



ce qui signifie que φ est la moitié de l'angle compris entre a_d et a_i . En principe, φ n'est connu qu'à un multiple de π près. Mais nous savons que $-\pi \leq \varphi \leq 0$, ce qui détermine le problème!

c) Pour déterminer l'amplitude de b , il faut une troisième expérience. Dans celle-ci, on placera un balourd b_r à l'opposé de b . Alors, dans le sens direct, on aura

$$a_3 = y(b - b_r) = |y| e^{i\varphi} (|b| - |b_r|) e^{i\beta}$$

ce qui entraîne

$$\frac{|a_3|}{|a_d|} = \frac{|b| - |b_r|}{|b|}$$

d'où

$$|b| - |b_r| = |b| \frac{|a_3|}{|a_d|}$$

soit encore

$$|b| = \frac{|b_r|}{1 - \frac{|a_3|}{|a_d|}}$$

(on notera en effet que $\frac{|a_3|}{|a_d|} < 1$)

3. 2. Deuxième procédé - Mesures d'amplitudes et d'angles - Rotation dans un seul sens

a) On lance le rotor et on note la réponse

$$a = yb$$

b) On ajoute un balourd additionnel b_r dans une position quelconque

$$b_r = |b_r| e^{i\beta_r}$$

et on mesure la réponse, qui s'écrit évidemment

$$a_2 = y(b + b_r)$$

Il en découle

$$\frac{a}{a_2} = \frac{b}{b + b_r}$$

ce qui entraîne successivement

$$\frac{a}{a_2 - a} = \frac{b}{b_r}$$

et

$$b = b_r \frac{a}{a_r - a}$$

c'est-à-dire

$$\begin{cases} |b| = |b_r| \frac{|a|}{|a_r - a|} \\ \arg b = \arg b_r + \arg a - \arg (a_r - a) \end{cases}$$

3. 3. Troisième procédé mesure d'amplitudes seulement

Variante 1 : 4 courses

Les quatre courses sont :

Course	Balourd additionnel	Réponse
1	0	$a = y b$
2	$b_1 = b_r e^{i\beta_1}$	$a_1 = y(b + b_1) = a + y b_1$
3	$b_2 = b_r e^{i\beta_2}$	$a_2 = y(b + b_2) = a + y b_2$
4	$b_3 = b_r e^{i\beta_3}$	$a_3 = y(b + b_3) = a + y b_3$

Quand rien ne s'y oppose, on prend $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ à 120° les uns des autres.

Pour exploiter ces résultats, on notera que pour $k = 1, 2, 3$, on a

$$a_k = a + y \cdot b_k$$

d'où

$$a = a_k - y \cdot b_k$$

soit, en passant aux complexes conjugués,

$$a = \bar{a}_k - \bar{y} \cdot \bar{b}_k$$

Multipliant ces relations par $e^{i(\alpha + \beta_k)}$ et notant que

$$\bar{a} = |a| e^{-i\alpha}, \quad \text{on obtient}$$

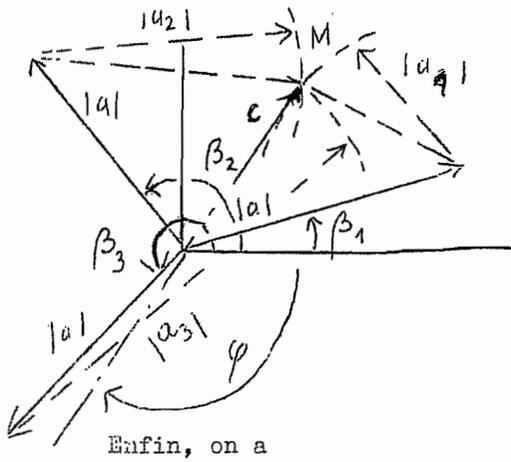
$$|a| e^{i\beta_k} = \bar{a}_k e^{i(\alpha + \beta_k)} - \bar{y} |b_r| e^{i\alpha}$$

Ces relations suggèrent une construction graphique, due à SOMMERVILLE : on dessine des vecteurs de longueur $|a|$ aux angles β_1, β_2 et β_3 . Par les extrémités de ces vecteurs prises comme centres, on porte des arcs de cercles de rayon respectifs $|a_1|, |a_2|$ et $|a_3|$. Ces arcs de cercle se rejoignent en un point M

alors; le vecteur $c = OM$ n'est autre que

$$c = -\bar{y} |b_r| e^{i\alpha}$$

d'où



$$|c|/|b_2| = |y| \quad \text{XII-8}$$

et

$$\arg \epsilon = -\varphi + \pi + \alpha = \beta + \pi$$

soit

$$\beta = \arg \epsilon - \pi \quad (\text{modulo } 2\pi)$$

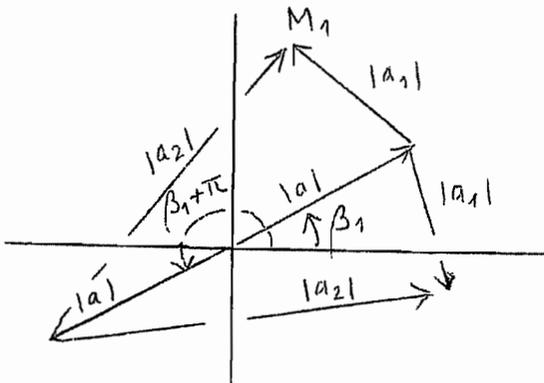
Enfin, on a

$$|b| = \frac{|a|}{|y|} = \frac{|a| |b_2|}{|c|}$$

Variante 2 : 3 courses

Les trois courses sont :

- course 1 : b seul
- course 2 : $b + |b_2| e^{i\beta_1}$
- course 2 : $b + |b_2| e^{i(\beta_1 + \pi)}$

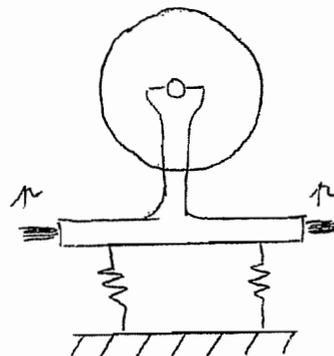
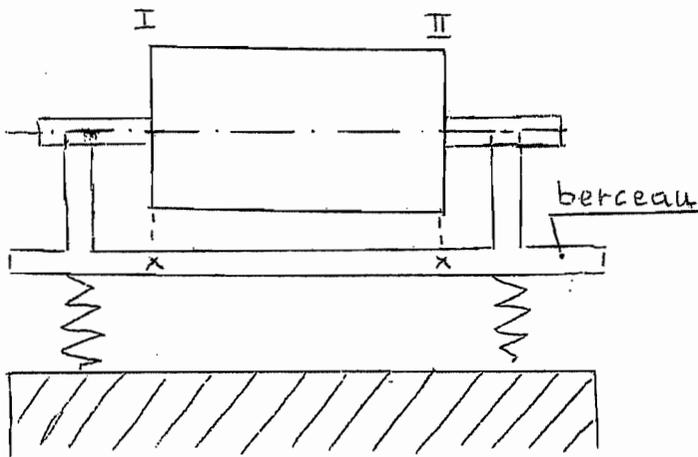


Dans la construction de Sommerville, on a alors le choix entre deux position M_1 et M_2 . Il en découlera une indétermination sur l'angle B. Pour la lever, on essaie une des deux déterminations, en faisant tourner. Si l'équilibre n'es pas réalisé, c'est l'autre détermination qui est la bonne.

4. Méthodes d'équilibrage proprement dites

4. 1. Méthode du berceau

C'est la méthode la plus directe



Le rotor est posé sur un berceau mobile. Deux pointes p, solidaires du bâti, immobilisent un des plans I et II. En immobilisant le plan I, on peut mesurer le balourd du plan II.

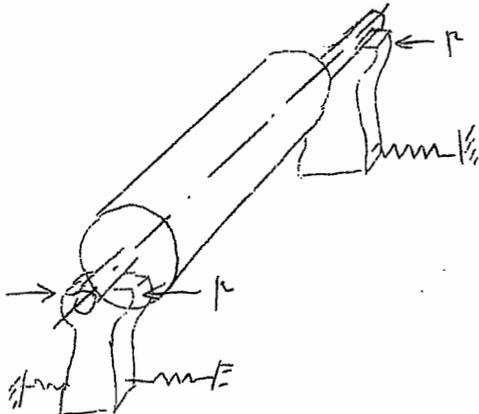
Avantage : méthode évidente

Inconvénients :-ne s'applique qu'aux gros rotors, car le berceau a lui - même une assez grande masse!

- construction malaisée.

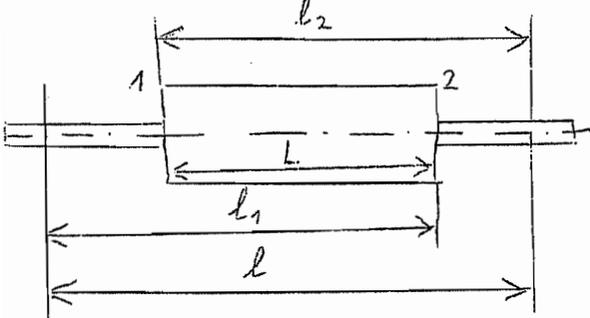
4. 2. Méthode des paliers élastiques successivement bloqués

Cette méthode est plus simple à réaliser, mais elle est moins directe



Les deux paliers sont indépendants. C'est sur ces paliers que l'on fait les mesures. Mais, à la différence de la méthode du berceau, la correction ne peut évidemment se faire au droit des paliers. Ainsi, on doit équilibrer sur deux plans différents des plans de mesure. Il en découle que la vibration du palier 1, par exemple, dépend des balourds de 2 plans.

Examinons ce problème de plus près. Le palier 2 étant bloqué, un balourd b_1 dans le plan d'équilibrage 1 équivaut à un balourd



le plan d'équilibrage 1 équivaut à un balourd

$$b_1 \frac{l_2}{l}$$

dans le plan du palier 1. De même, un

balourd b_2 dans le plan d'équilibrage 2

équivaut à un balourd

$$b_2 \frac{l-l_1}{l}$$

dans le plan du palier 1. On a donc en général

$$a_1 = \frac{y_1}{l} [l_2 b_1 + (l-l_1) b_2]$$

et, d'une manière analogue, lorsque le palier 1 est bloqué,

$$a_2 = \frac{y_2}{l} [(l-l_2) b_1 + l_1 b_2]$$

cela étant, on procède en 2 temps

1e étape : on annule la vibration a_1 à l'aide d'un balourd additionnel

dans le plan d'éqil. On aura donc, après cette opération,

$$l_2 (b_1 + r_1) + (l-l_2) b_2 = 0$$

2e étape : on annule la vibration a_2 à l'aide d'un nouveau balourd additionnel dans le plan d'éq 2. On aura donc alors

$$(l-l_2)(b_1+v_1) + l_1(b_2+v_2) = 0$$

soit

$$(l-l_2)(b_1+v_1) + l_1 b_2 = -l_1 v_2$$

Or, on a

$$b_1 + v_1 = -\frac{l-l_1}{l_2} b_2$$

d'où

$$\left[l_1 - \frac{(l-l_1)(l-l_2)}{l_2} \right] b_2 = -l_1 v_2$$

soit

$$\frac{l_1 l_2 - l^2 + (l_1 + l_2)l - l_1 l_2}{l_1 l_2} b_2 = -v_2$$

et, comme

$$l_1 + l_2 = l + L,$$

$$b_2 = -v_2 \frac{l_1 l_2}{l L}$$

Il en découle

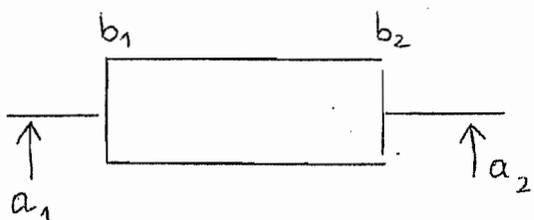
$$b_1 + v_1 = \frac{l_1(l-l_1)}{l L} v_2$$

ou encore

$$b_1 = -v_1 + v_2 \frac{l_1(l-l_1)}{l L}$$

Les corrections définitives sont évidemment $c_1 = -b_1$ et $c_2 = -b_2$

4. 3. Méthode d'équilibrage sur plaiers élastiques vibrant simultanément



Ici, on se base entièrement sur la linéarité entre l'amplitude et le balourd. On écrira en général

$$\begin{cases} a_1 = y_{11} b_1 + y_{12} b_2 \\ a_2 = y_{21} b_1 + y_{22} b_2 \end{cases}$$

on fait trois courses

1e course : dans l'état initial

mesure amplitudes et phases

$$\begin{cases} a_{10} = y_{11} b_1 + y_{12} b_2 \\ a_{20} = y_{21} b_1 + y_{22} b_2 \end{cases}$$

2e course : addition d'un balourd v dans le plan d'éq.1

$$\begin{cases} a_{1v} = y_{11} (b_1 + v) + y_{12} b_2 \\ a_{2v} = y_{21} (b_1 + v) + y_{22} b_2 \end{cases}$$

3e course : addition d'1 balourd w dans le plan d'éq.2

$$\begin{cases} a_{1w} = y_{11} b_1 + y_{12} (b_2 + w) \\ a_{2w} = y_{21} b_1 + y_{22} (b_2 + w) \end{cases}$$

On a donc

$$\begin{cases} a_{1v} - a_{10} = y_{11} v \rightarrow y_{11} = \frac{a_{1v} - a_{10}}{v} \\ a_{2v} - a_{20} = y_{21} v \rightarrow y_{21} = \frac{a_{2v} - a_{20}}{v} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_{1w} - a_{10} = y_{12} w \rightarrow y_{12} = \frac{a_{1w} - a_{10}}{w} \\ a_{2w} - a_{20} = y_{22} w \rightarrow y_{22} = \frac{a_{2w} - a_{20}}{w} \end{cases}$$

Posant alors

$$\Delta = y_{11} y_{22} - y_{12} y_{21}$$

on a

$$\begin{cases} b_1 = \frac{1}{\Delta} (y_{22} a_{10} - y_{12} a_{20}) \\ b_2 = \frac{1}{\Delta} (-y_{21} a_{10} + y_{11} a_{20}) \end{cases}$$

Exercice - Soit à équilibrer un rotor sur deux paliers élastiques vibrant simultanément. On fait les courses suivantes

course	Balourd add.		Palier 1		Palier 2	
	plan 1	plan 2	ampl.	phase	ampl.	phase
1	-	-	60 μm	205°	75 μm	98°
2	18g	110°	70 μm	300°	42 μm	60°
3		12g	32 μm	220°	50 μm	25°

Quels sont les balourds des plan 1 et 2 ?

Réponse :

Plan 1 :	11,09g à 14°
Plan 2 :	14,42g à 314° 30'

BIBLIOGRAPHIE

- (1) B. FRAEIJIS de VEUBEKE - " Application des équations de LAGRANGE au calcul des forces de liaison dans les moteurs en étoile".
Bulletin 22 du Service Technique de l'Aéronautique, BRUXELLES, 1949.
- (2) B. FRAEIJIS de VEUBEKE - "Iteration in semi-définite eigenvalue problems"
Journal of Aéronautical Sciences, october 1955
- (3) B. FRAEIJIS de VEUBEKE - " Matrices de projection et techniques d'itération"
Annales de la société scientifique de BRUXELLES, 70-1, 195
- (4) B. FRAEIJIS de VEUBEKE - " Déphasages caractéristiques et vibrations forcées d'un système amorti ".
Académie Royale de BELGIQUE, Bulletin de la classe des Sciences, XXXIV - 5, 1948
- (5) B. FRAEIJIS de VEUBEKE - "A variational approach to pure mode excitation based on characteristic phase lag theory"
Rapport 39 de groupe de Travail Matériaux et structures de l'AGARD, WASHINGTON D.C. 1956.
- (6) B. FRAEIJIS de VEUBEKE - " Les grandes méthodes de calcul des modes et fréquences propres dans les structures complexes ".
Revue Universelle des Mines, février 1962
- (7) M. GERADIN - "Analyse dynamique duale par la méthode des éléments finis".
Coll - Pub. Fac. Sc. Appli. Univ. Liège, n° 26, 1971
- (8) M. GERADIN - "A Classification and discussion of integration operators for transient structural response".
AIAA Paper n° 74 - 105
- (9) M. GERADIN - "Eigenvalue analysis by matrix iteration in the presence of kinematical modes ".
Shock and vibration Digest, vol. 6, n°3, march 1974.
- (10) B. FRAEIJIS de VEUBEKE - " Effet gyroscopique des rotors sur les vitesses critiques de flexion ".
Bulletin technique des Ingénieurs de Louvain, 1942, pp. 63 - 76

- (11) A. HUCK - "Méthodes numériques en réponse dynamique avec amortissement structural".
Rapport LT AS VF - 30, Univ. de Liège.
- (12) M. GERADIN - "Sur les vitesses critiques de lignes d'arbres"
Revue M, vol. 25 n°2
- (13) Lord RAYLEIGH - " Theory of Sound".
- (14) S. TIMOSHENKO - "Théorie des Vibrations".
Librairie Polytechnique ch. Béranger, Paris et Liège, 1939
- (15) J. P. Den HARTOG - " Vibrations et mouvements vibratoires, DUNOD, Paris, 1936
- (16) - A. STODOLA - "Turbines à vapeur et à gaz "
DUNOD, Paris, 1924
- (17) L. BOREL - "Vitesses critiques des arbres en rotation"
Imprimerie de la concorde, Lausanne, 1954.