

UNIVERSITE DE LIEGE
FACULTE DES SCIENCES APPLIQUEES

1
APPLICATION DE LA METHODE
DES ELEMENTS FINIS
EN MECANIQUE DES FLUIDES
1

ANNEE ACADEMIQUE
1972 - 1973

TRAVAIL DE FIN D'ETUDES
PRESENTE PAR
DEBONGNIE Jean-François
POUR L'OBTENTION
DU GRADE D'INGENIEUR
CIVIL ELECTRO-MECANICIEN
(Tendance Mécanique)

Je tiens à exprimer ici une vive reconnaissance au professeur FRAEIJIS de VEUBEKE. L'accueil dont il m'a honoré et les conseils qu'il m'a prodigués ont été pour moi de réels encouragements.

Je remercie aussi spécialement Messieurs M.GERADIN et M.HOGGE qui ont bien voulu m'aider tout au long de l'année, notamment pour la construction d'un élément fini et le contact avec le programme ASEF.

Enfin, Madame M.L. WEELEN, dont le secours m'a été précieux bien des fois lors de l'utilisation des programmes.

I N T R O D U C T I O N

L'hypothèse des fluides incompressibles est fréquemment utilisée dans l'étude des écoulements. Cependant, une telle hypothèse ne va pas sans poser des problèmes. Notamment, la pression perd son sens thermodynamique. Elle disparaît du bilan énergétique, base des principes variationnels. Quel sens faut-il lui attribuer? On verra qu'elle réapparaît lorsqu'on désire faire rentrer l'incompressibilité dans les conditions naturelles du principe. Les chapitres 2 à 7 étudient ainsi les fluides parfaits et les écoulements de STOKES.

La plupart de ces écoulements sont justifiables d'une analyse duale, dans le sens bien précis que l'on donne à cette expression en Statique. Ce fait a un intérêt considérable puisqu'il rend possible de mesurer la convergence de la solution.

Au chapitre 7, on traite les écoulements plans de fluide parfait. Un **exemple d'analyse duale** d'un écoulement connu théoriquement permet une confrontation intéressante. Le chapitre qui suit donne les bases d'une analyse duale des problèmes de la lubrification stationnaire. Enfin, le chapitre 9 étudie une analogie entre les écoulements de STOKES plans et la théorie des plaques de KIRCHHOFF. Un exemple est traité, illustrant l'application d'un élément fini de plaques à un écoulement à frontière crénelée.

En appendice, on trouvera une note sur la construction d'un écoulement de fluide parfait, permettant une étude duale par le potentiel des vitesses et la fonction de courant.

CHAPITRE 1 - DESCRIPTIONS LAGRANGIENNE ET EULERIENNE

1.1-Définitions

Dans la description de LAGRANGE, une particule est déterminée par le quadruplet (a_1, a_2, a_3, t) , noté (a, t) . Les a_i sont des paramètres fixant la particule, par exemple ses coordonnées en $t=0$.

Dans la description d'EULER, on détermine une particule au temps t par le quadruplet (x_1, x_2, x_3, t) , noté (x, t) . Les x_i sont les coordonnées de la particule au temps t .

Nous noterons:

$$\partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i} \quad D_i = \frac{\partial}{\partial a_i}$$

D_t = dérivée par rapport au temps dans la description de LAGRANGE

∂_t = idem dans la description d'EULER

1.2-Transformation

On a: $x_i = x_i(a, t)$
 $t = t$

La matrice jacobienne de la transformation est:

$$\frac{D(x, t)}{D(a, t)} = \begin{pmatrix} D_1 x_1 & \dots & D_n x_1 & D_t x_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ D_1 x_n & \dots & D_n x_n & D_t x_n \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Posant $\mathcal{J} = \frac{D(x)}{D(a)}$ et $J = \text{dtm } \mathcal{J}$, $\frac{D(x, t)}{D(a, t)} = \left(\begin{array}{c|c} \mathcal{J} & \partial_t \vec{x} \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right) \quad (2.1)$

Si on écrit $\partial_4 = \partial_t$, on a: $\boxed{D_i = \sum_{j=1}^4 \left[\frac{D(x, t)}{D(a, t)} \right]_{ij} \partial_j = \tilde{\mathcal{J}}_{ij} \partial_j} \quad (2.2)$

$\boxed{D_t = \sum_{j=1}^4 \left[\frac{D(x, t)}{D(a, t)} \right]_{4j} \partial_j = \partial_t + D_t x_i \partial_i} \quad (2.3)$

Transformation inverse

$$\begin{aligned} \frac{D(a, t)}{D(x, t)} &= \begin{pmatrix} \partial_1 a_1 & \dots & \partial_n a_1 & \partial_t a_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \partial_1 a_n & \dots & \partial_n a_n & \partial_t a_n \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \left(\begin{array}{c|c} \tilde{\mathcal{J}}^{-1} & \partial_t \vec{a} \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right) \end{aligned} \quad (2.4)$$

Le déterminant de la matrice jacobienne inverse est $1/\tilde{J}$

$$\text{On a: } \begin{cases} \partial_i = \sum_{j=1}^4 \left[\frac{\partial D(a,t)}{\partial x_j} \right]_{ij} D_j = \tilde{J}^{-1}_{ij} D_j \\ \partial_t = \sum_{j=1}^4 \left[\frac{\partial D(a,t)}{\partial t} \right]_{4j} D_j = D_t + \partial_t a_i D_i \end{cases} \quad (2.5)$$

$$\partial_t = \sum_{j=1}^4 \left[\frac{\partial D(a,t)}{\partial t} \right]_{4j} D_j = D_t + \partial_t a_i D_i \quad (2.6)$$

Rapprochant (2.3) de (2.6), on obtient:

$$u_i \partial_i = -\partial_t a_i D_i$$

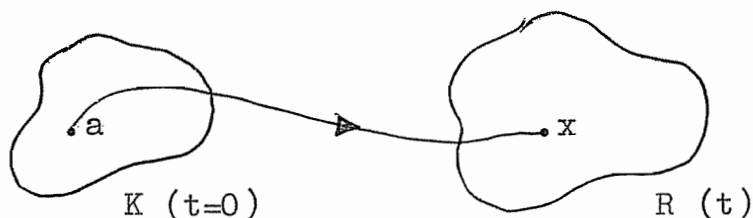
ou encore en utilisant (2.5) : $u_i \partial_i = u_i \tilde{J}^{-1}_{ij} D_j = \tilde{J}^{-1}_{ij} u_i D_j$, d'où:

$$u_i = -\tilde{J}^{-1}_{ij} \partial_t a_i$$

Dans ce qui suit, nous parlerons de coordonnées matérielles pour la description de LAGRANGE, spatiales pour celle d'EULER.

1.3-Correspondance des intégrales

Soit un ensemble de particules occupant en $t=0$ un ensemble K de points repérés par les coordonnées a_i . Au temps t , elles occupent un volume R , et sont repérées par leurs coordonnées x_i .



$$\text{Alors, } \int_R f(x) dR = \int_K f(x(a)) |J| dK$$

$|J| dK$ est l'élément de volume spatial, dK étant l'élément de volume "matériel". La masse s'écrit: $\int_R \rho dR$. La conservation de la masse donne:

$$D_t \int_R \rho dR = 0 \quad ; \quad \int_{t_1}^t d\mathbb{T} D_{\mathbb{T}} \left[\int_R \rho dR \right] = C$$

$$\text{ou: } \left[\int_R \rho dR \right]_{t_1}^t = \int_{R(t)} \rho dR - \int_K \rho_0 dK = \int_K (\rho |J| - \rho_0) dK = C$$

pour $t=0$, on a: $\rho |J| = \rho_0$, d'où $C=0$ et $\int_K (\rho |J| - \rho_0) dK = 0$

Ceci est vrai pour tout volume, d'où $\rho |J| = \rho_0$

Par conséquent, J ne peut s'annuler. Si les coordonnées x_i sont continûment différentiables de a_i et t , J ne peut changer de signe sans s'annuler. Donc J est positif, car il vaut 1 en $t=0$.

1.4-Expressions de la conservation de la masse; dérivées de intégrales.

1.4.1- La masse des particules contenues dans R se conserve:

$$D_t \int_R \rho \, dR = D_t \int_R \rho J \, dK = 0$$

ou:

$$\int_K D_t(\rho J) \, dK = 0, \text{ quel que soit } K.$$

$$\text{Donc } \boxed{D_t(\rho J) = 0} \quad (4.1)$$

$$\begin{aligned} \text{Calculons } D_t J : \quad D_t J &= \frac{\partial J}{\partial J_{ij}} D_t J_{ij} \\ &= \min_{ij} J \cdot D_t D_j x_i = J \tilde{J}'_{ij} D_j D_t x_i = \\ &= J \tilde{J}'_{ij} D_j u_i = J \partial_i u_i \end{aligned}$$

$$\text{Donc } \boxed{D_t J = J \partial_i u_i} \quad (4.2)$$

Dès lors, $D_t(\rho J) = J(D_t \rho + \rho \partial_i u_i)$, d'où:

$$\boxed{D_t \rho + \rho \partial_i u_i = 0} \quad (4.3)$$

Notant que $D_t \rho = \partial_t \rho + u_i \partial_i \rho$, (4.3) devient:

$$\boxed{\partial_t \rho + \partial_i(\rho u_i) = 0} \quad (4.4)$$

1.4.2- Notons encore que l'incompressibilité s'exprime de la façon suivante:

$$D_t \int_R dR = D_t \int_K J \, dK = 0, \quad \forall K,$$

$$\text{d'où: } \boxed{D_t J = 0}, \quad (4.5)$$

$$\text{ou } J \partial_i u_i = 0, \text{ soit } \boxed{\partial_i u_i = 0} \quad (4.6)$$

Les formules ci-dessus sont fréquemment employées.

1.4.3- Calculons:

$$\begin{aligned} \boxed{D_t \int_R f \, dR} &= D_t \int_K f J \, dK = \int_K (J D_t f + f D_t J) \, dK = \\ &= \int_K J (D_t f + f \partial_i u_i) \, dK = \int_R (D_t f + f \partial_i u_i) \, dR \\ &= \int_R (\partial_t f + \partial_i (f u_i)) \, dR \end{aligned}$$

$$= \int_R \partial_t f \, dR + \int_S f n_i u_i \, dS \quad \text{1.4-}$$

$$(4.7)$$

On a donc aussi :

$$\int_{t_1}^{t_2} (D_t \int_R f \, dR) \, dt = \left[\int_R f \, dR \right]_{t_1}^{t_2} = \begin{cases} \int_{t_1}^{t_2} \int_R (D_t f + f \partial_i u_i) \, dR \\ \int_{t_1}^{t_2} \int_R (\partial_t f + \partial_i (f u_i)) \, dR \\ \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \int_R \partial_t f \, dR + \int_S f n_i u_i \, dS \right\} \end{cases}$$

$$(4.8)$$

E.5-Variations

Soit une fonction f . Considérons une série de paramètres ε_i définissant l'évolution. L'évolution naturelle a lieu pour $\varepsilon_i = 0$. La variation lagrangienne Δf de $f(a, t, \varepsilon)$ est

$$\Delta f = \left[\frac{\partial f(a, t, \varepsilon)}{\partial \varepsilon_i} \right]_{\varepsilon_i=0} \varepsilon_i$$

La variation eulérienne δf de $f(x, t, \varepsilon)$ est:

$$\delta f = \left[\frac{\partial f(x, t, \varepsilon)}{\partial \varepsilon_i} \right]_{\varepsilon_i=0} \varepsilon_i$$

Or,

$$\frac{\partial f(a, t, \varepsilon)}{\partial \varepsilon_i} = \frac{\partial f(x, t, \varepsilon)}{\partial \varepsilon_i} + \frac{\partial f(x, t, \varepsilon)}{\partial x_j} \frac{\partial x_j}{\partial \varepsilon_i}$$

Donc: $\Delta f = \delta f + \partial_i f \Delta x_i$ (5.1)

On voit que les variations se calculent de façon formellement identique aux dérivées par rapport au temps. Il va de soi que les variations lagrangiennes commutent avec les dérivées lagrangiennes qui en sont indépendantes. De même pour les variations et dérivées eulériennes. Mais cela cesse d'être vrai entre variations et dérivées des deux descriptions.

Notons encore que

$$\Delta J = J \partial_i \Delta x_i, \text{ résultat à mettre en parallèle avec (4.2).}$$

CHAPITRE 2 - PRINCIPES VARIATIONNELS POUR L'ÉCOULEMENT
ISENTROPIQUE D'UN FLUIDE INCOMPRESSIBLE.

Introduction

Il existe des principes variationnels lagrangiens et eulériens. Les principes lagrangiens dépendent en général du principe de HAMILTON. Mais souvent, on préfère une description eulérienne, qui se place en un point fixe et qui donne une forme linéaire à la conservation de la masse. Les principes eulériens les plus connus sont ceux de BATEMAN [4]. La dérivation d'un principe eulérien plus général, englobant ceux de BATEMAN, à partir du principe de HAMILTON, a été faite par FRAEIJIS de VEUBEKE [8]. Dans l'un et l'autre cas, la pression est définie à partir de l'énergie interne et de la masse volumique. Pour un fluide incompressible, ces deux quantités sont constantes et la pression perd son sens thermodynamique.

Dans ce chapitre, on verra que la pression apparaît comme dérivée d'un multiplicateur lagrangien responsable de l'incompressibilité. Le passage à une formulation eulérienne introduit, comme pour les fluides compressibles, un vecteur à circulation constante. On obtient alors un principe général, d'où découlent deux principes semblables à ceux énoncés par BATEMAN.

De là, on établit facilement un principe valable pour un écoulement irrotationnel, exprimé uniquement en termes du potentiel des vitesses. Dans ce dernier cas, on montre clairement comment imposer des conditions aux limites.

2.1- Formulation du principe de HAMILTON

En admettant à priori la conservation de la masse:

$$\rho^J = \rho_0$$

et l'incompressibilité:

$$J = \text{constante},$$

on a pour l'énergie interne:

$$dU = \frac{p}{\rho^2} d\rho = 0, \text{ d'où } U = c^{\text{te}}$$

On peut prendre $U = 0$. On ne peut donc plus définir la pression par $p = \rho^2 \left(\frac{\partial U}{\partial \rho} \right)_S$, l'énergie interne n'ayant plus de sens physique.

L'énergie cinétique est:

$$\int_R \frac{1}{2} \rho u_i u_i dR = \int_K \frac{1}{2} J \rho u_i u_i dK.$$

Le travail virtuel des forces de pesanteur s'écrit:

$$\int_K \rho g_i \Delta x_i dK = \Delta \int_K \rho g_i x_i dK$$

vu la conservation de la masse.

Sur la surface, on distingue: S_1 où la pression est imposée, et S_2 , où les déplacements sont imposés. Les valeurs imposées seront surlignées.

On a donc le principe:

$$\Delta \int_{t_1}^{t_2} dt \int_K \left(\rho \frac{u_i u_i}{2} + \rho g_i x_i \right) dK - \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{S_1} \bar{p} m_i \Delta x_i dS = 0.$$

Les déplacements étant liés, on ne peut déduire directement les équations d'Euler.

2.2-Elargissement du principe

Libérons-nous des deux conditions essentielles par les potentiels de dislocation:

$$\mathcal{D}_1 = \int_{t_1}^{t_2} dt \int_K \lambda D_t(\rho J) dK$$

, qui libère ρ (conservation de la masse)

$$\mathcal{D}_2 = - \int_{t_1}^{t_2} dt \int_K \mu D_t J dK$$

, qui libère d de l'incompressibilité.

On peut d'emblée intégrer par parties, ce qui donne, en supposant a priori $\Delta \lambda$, $\Delta \mu$, $\Delta \rho = 0$ en t_1 et t_2 :

$$\mathcal{D}_1 = - \int_{t_1}^{t_2} dt \int_K \rho D_t \lambda dK$$

$$\mathcal{D}_2 = \int_{t_1}^{t_2} dt \int_K J D_t \mu dK$$

On obtient ainsi un principe lagrangien général:

$$\Delta \int_{t_1}^{t_2} dt \int_K \left(\rho \frac{u_i u_i}{2} + \rho g_i x_i - \rho D_t \lambda + D_t \mu \right) dK - \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{S_1} \bar{p} m_i \Delta x_i dS = 0 \quad (2.1)$$

Les variations vont nous permettre de saisir la signification des multiplicateurs:

$$\Delta \rho \Leftrightarrow J \left[\left(\frac{u_i u_i}{2} \right) + g_i x_i - D_t \lambda \right] = 0 \quad (2.2)$$

$$\Delta x_i \Leftrightarrow \int_{t_1}^{t_2} dt \int_K \left\{ \rho u_i \Delta u_i + \rho g_i \Delta x_i + \left[\rho \frac{u_i u_i}{2} + \rho g_i x_i - \rho D_t \lambda + D_t \mu \right] \Delta J \right\} dK - \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{S_1} \bar{p} m_i \Delta x_i dS = 0.$$

Vu (2.2) et puisque $\Delta J = J \partial_i \Delta x_i$, il vient:

$$-D_t(\rho u_i) + \rho g_i - \rho \partial_i(D_t \mu) = 0 \quad \text{sur } R \quad (2.3)$$

$$D_t \mu - \bar{p} = 0 \quad \text{sur } S_i \quad (2.4)$$

Les équations (2.3) et (2.4) montrent clairement que

$$D_t \mu = \bar{p}$$

Ainsi donc, la pression apparaît comme la dérivée temporelle d'un multiplicateur de Lagrange lié à l'incompressibilité.

2.3- Passage à un principe eulérien

Par la formule

$$\Delta \int_{t_1}^{t_2} dt \int_R f dR = \delta \int_{t_1}^{t_2} dt \int_R f dR + \int_{t_1}^{t_2} dt \int_S f m_i \Delta x_i dS,$$

on peut transformer (2.1) en:

$$\begin{aligned} \delta \int_{t_1}^{t_2} dt \int_R \left(\frac{\rho u_i u_i}{2} + \rho g_i x_i - \rho \partial_t \lambda - \rho \mu_i \partial_i \lambda + \partial_t \mu + \mu_i \partial_i \mu \right) dR \\ - \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{S_i} \bar{p} m_i \Delta x_i dS + \int_{t_1}^{t_2} dt \int_S L m_i \Delta x_i dS \end{aligned} \quad (3.1)$$

L étant la densité de l'intégrale de volume.

La variation des vitesses, en tant que dérivées de déplacements, ne peut plus exister dans un principe eulérien.

On est donc amené à libérer u_i de \dot{x}_i par un nouveau potentiel de dislocation:

$$J_3 = \int_R \rho \psi_i (\dot{x}_i - \mu_i) \quad (3.2)$$

Examinons alors les variations:

$$\delta \mu_i \Leftrightarrow \rho \mu_i - \rho \partial_i \lambda + \partial_i \mu = \rho \psi_i \quad \text{sur } R. \quad (3.3)$$

$$\delta \lambda \Leftrightarrow \partial_t \rho + \partial_i (\rho u_i) = 0 \quad \text{sur } R. \quad (3.4)$$

$$\delta \mu \Leftrightarrow \partial_i \mu_i = 0 \quad \text{sur } R \quad (3.5)$$

$$\delta \dot{x}_i = \Delta x_i - \partial_j \dot{x}_j \Delta x_j, \quad \text{ce qui donne:}$$

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \int_R \rho \psi_i (\Delta \dot{x}_i - \partial_j \dot{x}_j \Delta x_j) dR = 0.$$

$$\text{d'où} \quad D_t (\rho \psi_i) + \rho \psi_i \partial_i \dot{x}_j = 0. \quad (3.6)$$

Comme l'a fait remarquer FRAEIJIS de VEUBEKE [8], l'équation (3.6), multipliée par dx_i , devient:

$$D_t (\rho \psi_i) dx_i + \rho \psi_i d\dot{x}_i = 0$$

ou $D_t (\rho \psi_i dx_i) = 0$ et comme, par (3.4), on a $D_t (\rho) = 0$,

$$D_t(\psi; dx_i) = 0. \quad (3.7)$$

La circulation du vecteur $\vec{\psi}$ sur un segment quelconque se conserve quand le segment est emporté par les flots. Cela signifie que $\psi_i dx_i$ ne dépend que des coordonnées matérielles. On peut donc écrire:

$$\psi_i dx_i = \psi_i \frac{\partial x_i}{\partial a_k} da_k = A_k da_k.$$

Mettons cette forme de Pfaff sous une forme canonique:

$$A_k da_k = d\Gamma(a) + A(a) dB(a).$$

Dans la description eulérienne, cela se traduit:

$$\begin{aligned} \psi_i dx_i &= d\gamma + \alpha d\beta, \quad \text{avec} \\ D_t \gamma &= 0; \quad D_t \alpha = 0; \quad D_t \beta = 0. \end{aligned} \quad (3.8)$$

et
$$\psi_i = \partial_i \gamma + \alpha \partial_i \beta. \quad (3.9)$$

Restituons (3.9) dans le principe. Par (3.8),

$$\rho \dot{x}_i \psi_i = \rho \dot{x}_i \partial_i \gamma + \rho \alpha \dot{x}_i \partial_i \beta = -\rho \partial_t \gamma - \rho \alpha \partial_t \beta. \quad (3.10)$$

La variable \dot{x}_i disparaît ainsi de l'intégrale de volume.

On détruit alors les dernières variations lagrangiennes en imposant $D_t \mu = \bar{\mu}$ sur S_1 , à priori.

Il reste alors:

$$\begin{aligned} \delta \int_{t_1}^{t_2} dt \int_R \left(\frac{\rho u_i u_i}{2} + \rho g_i x_i - \rho \partial_t \lambda - \rho \mu_i \partial_i \lambda - \rho \partial_t \gamma - \rho \mu_i \partial_i \gamma - \rho \alpha \partial_t \beta \right. \\ \left. - \rho \alpha u_i \partial_i \beta + \partial_t \mu + u_i \partial_i \mu \right) dR = 0. \end{aligned}$$

On notera que λ et γ ont le même rôle dans le principe.

On peut donc ne considérer que la somme

$$\varphi = \lambda + \gamma \quad (3.11)$$

Ce qui donne: $\delta F = 0$, avec

$$F = \int_{t_1}^{t_2} dt \int_R \left\{ \frac{\rho u_i u_i}{2} + \rho g_i x_i - \rho \partial_t \varphi - \rho \mu_i \partial_i \varphi - \rho \alpha \partial_t \beta - \rho \alpha u_i \partial_i \beta + \partial_t \mu + u_i \partial_i \mu \right\} dR \quad (3.12)$$

Les équations d'Euler de ce principe sont:

$$\delta p \boxplus \frac{\mu_i u_i}{2} + g_i x_i - \partial_t \varphi - \mu_i \partial_i \varphi - \alpha \partial_t \beta - \alpha u_i \partial_i \beta = 0. \quad (E1)$$

$$\delta u_i \text{ E } \rho u_i = \rho \partial_i \varphi + \rho \alpha \partial_i \beta + \partial_i \mu \quad (\text{E2})$$

$$\delta \varphi \text{ E } \partial_t \rho + \partial_i (\rho u_i) = 0 \quad (\text{E3})$$

$$\delta \beta \text{ E } \partial_t (\rho \alpha) + \partial_i (\rho \alpha u_i) = 0 \quad (\text{E4})$$

$$\delta \mu \text{ E } \partial_i u_i = 0. \quad (\text{E5})$$

$$\delta \alpha \text{ E } \partial_t \beta + u_i \partial_i \beta = 0. \quad (\text{E6})$$

(E1) donne la conservation de l'énergie.

(E2) montre que c'est $(\rho u_i - \partial_i \mu)$ qui répond à une description de CLEBSCH lorsque le fluide est incompressible.

(E3) donne la conservation de la masse.

(E5) donne l'incompressibilité.

(E6) exprime que $D_t \beta = 0$

(E4) et (E5) donnent $D_t \alpha = 0$

Conditions naturelles de surface

On utilise la formule

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \int_R \partial_t \mu dR = - \int_{t_1}^{t_2} dt \int_B \mu n_i \hat{x}_i d\mathcal{E} + \left[\int_R \mu dR \right]_{t_1}^{t_2}.$$

Ici, cela donne:

$$\delta \mu \text{ E } \mu n_i u_i - \mu n_i \hat{x}_i = 0 \quad \text{sur } S \quad (\text{S1})$$

$$\delta \varphi \text{ E } \mu n_i \rho u_i - \rho \mu n_i \hat{x}_i = 0 \quad \text{sur } S. \quad (\text{S2})$$

$$\delta \beta \text{ E } \mu \alpha n_i \rho u_i - \mu \alpha n_i \rho \hat{x}_i = 0 \quad \text{sur } S. \quad (\text{S3})$$

Nous verrons plus loin, dans un cas simple, ce qu'il faut faire pour obtenir mieux.

2.4-Simplifications- Les principes de BATEMAN.

2. 4.1- Si l'on suppose la condition (E1) satisfaite à priori, F devient:

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \int_R (\partial_t \mu + u_i \partial_i \mu) dR$$

soit sous forme concise:

$$B1 = \int_{t_1}^{t_2} dt \int_R p dR$$

On retrouve le premier principe de BATEMAN [4] . Rappelons qu'il écrivait

$$p = \rho f'(\rho) - f(\rho)$$

ce qui perd tout son sens pour un fluide incompressible.

2.4.2- Lorsque (E2) est vérifiée à priori, il reste:

$$B2 = \int_{t_1}^{t_2} dt \int_R \left\{ \rho g_i x_i - \rho \partial_t \varphi - \rho \alpha \partial_t \beta + \partial_t \mu - \rho \frac{(\partial_i \varphi + \alpha \partial_i \beta + \frac{\partial_i \mu}{\rho})(\partial_i \varphi + \alpha \partial_i \beta + \frac{\partial_i \mu}{\rho})}{2} \right\} dR$$

ce qui, pour le régime stationnaire, peut se mettre sous la forme concise:

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \int_R \left\{ \rho g_i x_i - \rho \frac{u_i u_i}{2} \right\} dR ,$$

où l'on retrouve le second principe de BATEMAN, compte tenu de la nullité de l'énergie interne.

2.5-Cas particulier: écoulement irrotationnel

Partons du second principe de BATEMAN. Admettons à priori que $\rho = c^{te}$. Alors,

$$\frac{\partial_i \mu}{\rho} = \partial_i \left(\frac{\mu}{\rho} \right) ; \quad u_i = \partial_i \varphi + \alpha \partial_i \beta + \frac{\partial_i \mu}{\rho} = \partial_i \left(\varphi + \frac{\mu}{\rho} \right) + \alpha \partial_i \beta$$

$$u_i = \partial_i \Phi + \alpha \partial_i \beta .$$

Cette transformation est permise, car pour $\rho = c^{te}$, conservation de la masse et incompressibilité se confondent; or ce sont les responsabilités respectives de φ et μ .

On écrit à priori l'absence de rotation: $\alpha = 0$

$$(\text{rot } \vec{u} = \text{grad } \alpha \wedge \text{grad } \beta)$$

D'où:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} dt \int_R \left\{ \rho g_i x_i - \rho \partial_t \varphi - \rho \frac{\partial_i \Phi \partial_i \Phi}{2} \right\} dR = 0 .$$

ρ n'étant pas varié, le terme de pesanteur devient inutile. Intégrons par parties la dérivée temporelle:

$$- \int_{t_1}^{t_2} dt \int_R \rho \partial_t \varphi dR = \left[- \int_R \rho \Phi dR \right]_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} dt \int_S \rho \Phi m_i \dot{x}_i dS + \int_{t_1}^{t_2} dt \int_R \Phi \partial_t \rho dR$$

Distinguons sur S: \int_{S_1} où $\Phi = \bar{\Phi}$

$$\left\{ \begin{array}{l} S_2 \text{ où } m_i \alpha_i = \bar{u}_m \end{array} \right.$$

Puisque $\delta \Phi = 0$ sur t_1 et t_2 , le terme aux limites tombe.

Vu que ρ est constant, $\partial_t \rho = 0$.

Il reste:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} dt \left\{ \int_{S_1} \rho \bar{u}_m \Phi \, dS - \int_R \rho \frac{\partial_i \Phi \partial_i \Phi}{2} \, dR \right\} = 0.$$

Pour un écoulement stationnaire, l'intégration sur le temps devient inutile, d'où la fonctionnelle:

$$J_1 = \int_{S_1} \rho \bar{u}_m \Phi \, dS - \int_R \rho \frac{\partial_i \Phi \partial_i \Phi}{2} \, dR$$

$\delta J_1 = 0$. Le résultat est la conservation de la masse.

2.6- De la même façon, chaque fois que l'on impose $\rho = c^{te}$ à priori, la conservation de la masse et la condition $\text{div } \vec{u} = 0$ se confondent. Dans ce cas, F se transforme en écrivant:

$$\Phi = \varphi + \frac{\mu}{\rho}$$

ce qui donne la fonctionnelle:

$$G = \int_{t_1}^{t_2} dt \int_R \left\{ \frac{\rho \mu_i \mu_i}{2} + \rho g_i \alpha_i - \rho \partial_t \Phi - \rho \mu_i \partial_i \Phi - \rho \alpha \partial_t \beta - \rho \alpha \mu_i \partial_i \beta \right\} dR$$

Les équations d'Eulér sont alors celles de F, sauf (E5) qui disparaît et (E2) qui devient:

$$\rho \mu_i = \rho \partial_i \Phi + \rho \alpha \partial_i \beta.$$

On retrouve la formulation de CLEBSCH pour la vitesse.

- - -

CHAPITRE 3- PRINCIPES VARIATIONNELS POUR L'ÉCOULEMENT
IRROTATIONNEL D'UN FLUIDE INCOMPRESSIBLE (Cas stationnaire)

3.1- Principe en φ

Considérons le potentiel scalaire des vitesses .
On a obtenu au chapitre 2, paragr. 5 le principe:

$$\delta J_1 = 0 \quad \boxed{J_1 = \int_R \rho \frac{\partial_i \varphi \partial_i \varphi}{2} dR - \int_{S_2} \rho \bar{u}_n \varphi dS}$$

Avec: $\left. \begin{array}{l} \rho = \text{constante} \\ \varphi = \bar{\varphi} \text{ sur } S_1 \end{array} \right\} \text{ à priori.}$

L'équation d' Euler de ce principe est:

$$\rho \partial_{ii} \varphi = 0 \text{ sur } R$$

Comme condition naturelle de surface, on a:

$$\rho m_i \partial_i \varphi = \rho \bar{u}_n \text{ sur } S_2$$

3.2- Principe canonique

Libérons-nous des conditions d'absence de rotation et de valeur de φ sur S_1 , par les deux potentiels de dislocation:

$$D_1 = - \int_R \lambda_i (u_i - \partial_i \varphi) dR$$

$$D_2 = - \int_{S_1} \mu (\varphi - \bar{\varphi}) dS$$

On peut alors écrire l'énergie cinétique sous la forme

$$\rho \frac{u_i u_i}{2}$$

La variation de φ donne sur S_1 : $\mu = m_i \lambda_i$, valeur que nous restituons. D'où:

$$\delta J_2 = 0 \quad \boxed{J_2 = \int_R [\lambda_i \partial_i \varphi - \lambda_i u_i + \frac{\rho u_i u_i}{2}] dR - \int_{S_1} m_i \lambda_i (\varphi - \bar{\varphi}) dS - \int_{S_2} \rho \bar{u}_n \varphi dS}$$

(Principe canonique)

Variations:

$$\delta \lambda_i \text{ } \begin{cases} u_i = \partial_i \varphi & \text{sur } R \\ \varphi = \bar{\varphi} & \text{sur } S_1 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{(absence de rotation)} \\ \text{(continuité de } \varphi \text{ sur } S_1) \end{array} \quad \begin{array}{l} (2.1) \\ (2.2) \end{array}$$

$$\delta u_i \text{ } \begin{cases} \lambda_i = \rho u_i & \text{sur } R \end{cases} \quad \text{(Equations constitutives)} \quad (2.3)$$

$$\delta \varphi \text{ } \begin{cases} \partial_i \lambda_i = 0 & \text{sur } R \end{cases} \quad \text{(Conservation de la masse)} \quad (2.4)$$

$$m_i \lambda_i - m_i \lambda_i = 0 \text{ sur } S_1 \quad (2.5)$$

$$m_i \lambda_i - \rho \bar{u}_n = 0 \text{ sur } S_2 \text{ (continuité du flux massique sur } S_2) \quad (2.6)$$

3.3- Principe à deux champs $(\vec{\lambda}, \varphi)$

Restituons $\rho u_i = \lambda_i$, résultat de la variation de u_i
On obtient :

$$\delta J_3 = 0 \quad J_3 = \int_R \left[\lambda_i \partial_i \varphi - \frac{\lambda_i \lambda_i}{2\rho} \right] dR - \int_{S_1} m_i \lambda_i (\varphi - \bar{\varphi}) dS - \int_{S_2} \rho \bar{u}_n \varphi dS.$$

Les équations d' Euler sont:

$$\delta \lambda_i \Leftrightarrow \frac{\lambda_i}{\rho} = \partial_i \varphi \quad (\text{absence de rotation}) \quad (3.1)$$

$$\delta \varphi \Leftrightarrow \partial_i \lambda_i = 0 \quad (\text{conservation de la masse}) \quad (3.2)$$

Les conditions naturelles de surface sont:

$$\delta \lambda_i \Leftrightarrow \varphi = \bar{\varphi} \quad \text{sur } S_1 \quad (\text{cont. superf. de } \varphi)$$

$$\delta \varphi \Leftrightarrow m_i \lambda_i = \rho \bar{u}_n \quad \text{sur } S_2 \quad (\text{cont. superf. de } \vec{\lambda})$$

3.4- Introduction d'un potentiel vecteur

3.4.1- Dans J_2 , imposons à priori la condition sur $\vec{\lambda}$:

$$\partial_i \lambda_i = 0$$

Une manière de le faire consiste à écrire:

$$\lambda_i = \epsilon_{ijk} \partial_j A_k$$

ce qui permet de garder la conservation de la masse dans les équations d' Euler. On a:

$$\int_R \epsilon_{ijk} \partial_j A_k \partial_i \varphi dR = \int_{S_1} m_i \epsilon_{ijk} \partial_j A_k \varphi dS - \int_R \underbrace{\epsilon_{ijk} \partial_{ij} A_k}_{0} dR$$

J_2 devient alors:

$$\int_R \left(\frac{\rho u_i u_i}{2} - m_i \epsilon_{ijk} \partial_j A_k \right) dR + \int_{S_1} \bar{\varphi} m_i \epsilon_{ijk} \partial_j A_k dS + \int_{S_2} \varphi [m_i \epsilon_{ijk} \partial_j A_k - \rho \bar{u}_n] dS$$

Transformons les intégrales superficielles:

$$\begin{aligned} \int_{S_1} \bar{\varphi} m_i \epsilon_{ijk} \partial_j A_k dS &= \int_{S_1} m_i \epsilon_{ijk} \partial_j (\bar{\varphi} A_k) dS - \int_{S_1} m_i \epsilon_{ijk} A_k \partial_j \bar{\varphi} dS \\ &= \int_{S_1} \underbrace{\vec{n} \cdot \text{rot}(\bar{\varphi} \vec{A})}_{\downarrow} dS - \int_{S_1} \underbrace{(\vec{n} \wedge \text{grad} \bar{\varphi}) \cdot \vec{A}}_{\rightarrow \text{Vitesse tangentielle } \vec{u}_t} dS \end{aligned}$$

$$\int_{\mathcal{C}_1} \bar{\varphi} \vec{A} \cdot d\vec{s} - \int_{S_1} \vec{u}_t \cdot \vec{A} dS$$

\mathcal{C}_1 étant l'ensemble des contours de S_1 , parcourus selon la règle du tire-bouchon pour la normale de S_1 .

$$\text{De même, } \int_{S_2} \varphi m_i \epsilon_{ijk} \partial_j A_k dS = \int_{\mathcal{C}_2} \varphi \vec{A} \cdot d\vec{s} - \int_{S_2} m_i \epsilon_{ijk} A_k \partial_j \varphi dS$$

\mathcal{C}_2 étant l'ensemble des contours ci-dessus, mais parcourus en sens inverse.

Sur \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_2 , on a, si l'on admet la continuité de φ à priori, $\varphi = \bar{\varphi}$, d'où

$$\int_{\mathcal{L}_1} \bar{\varphi} \vec{A} \cdot d\vec{s} + \int_{\mathcal{L}_2} \varphi \vec{A} \cdot d\vec{s} = 0.$$

Dès lors, J_2 se transforme en:

$$\delta \left\{ \int_R \left(\frac{\rho u_i u_i}{2} - \mu_i \epsilon_{ijk} \partial_j A_k \right) dR - \int_{S_1} \vec{\mu}_t \cdot \vec{A} dS - \int_{S_2} m_i \epsilon_{ijk} \partial_j \varphi A_k dS - \int_{S_2} \rho \bar{u}_n \varphi dS \right\} = 0. \quad (4.1)$$

La variation de φ donne:

$$\begin{aligned} & - \int_{S_2} m_i \epsilon_{ijk} \partial_j \delta \varphi A_k dS - \int_{S_2} \rho \bar{u}_n \delta \varphi dS = \\ & - \int_{S_2} m_i \epsilon_{ijk} \partial_j (A_k \delta \varphi) dS - \int_{S_2} \rho \bar{u}_n \delta \varphi dS + \int_{S_2} m_i \epsilon_{ijk} \partial_j A_k \delta \varphi dS \\ & = - \int_{\mathcal{L}_2} \delta \varphi \cdot \vec{A} \cdot d\vec{s} - \int_{S_2} \rho \bar{u}_n \delta \varphi dS + \int_{S_2} m_i \epsilon_{ijk} \partial_j A_k \delta \varphi dS \\ & \quad \downarrow \\ & \delta \varphi = 0 \text{ car } \varphi = \bar{\varphi} \text{ par continuité} \end{aligned}$$

D'où:

$$\rho \bar{u}_n = m_i \epsilon_{ijk} \partial_j A_k.$$

3.4.2- Souvent, on préférera imposer d'autres conditions aux limites sur S_2 . Imposons sur S_2 une distribution $\vec{\bar{A}}$ du potentiel telle que $\rho \bar{u}_n = \epsilon_{ijk} \partial_j A_k$

Alors,

$$- \int_{S_2} \rho \bar{u}_n \varphi dS = - \int_{S_2} m_i \epsilon_{ijk} \partial_j \bar{A}_k \varphi dS = - \int_{\mathcal{L}_2} \varphi \vec{\bar{A}} \cdot d\vec{s} + \int_{S_2} m_i \epsilon_{ijk} \partial_j \varphi \bar{A}_k dS.$$

Sur \mathcal{L}_2 , $\varphi = \bar{\varphi}$ par continuité et la circulation est invariante.

Il reste donc:

$$\int_{S_2} m_i \epsilon_{ijk} \partial_j \varphi (\bar{A}_k - A_k) dS$$

Variant $\vec{\bar{A}}$, on trouve sur S_2 :

$$- \epsilon_{ijk} m_j \mu_i - \epsilon_{ijk} m_i \partial_j \varphi = 0, \quad \text{d'où } \vec{m} \wedge \vec{u} = \vec{m} \wedge \text{grad } \varphi$$

Restituant cette valeur dans J_2 , on obtient finalement:

$$\delta J_4 = 0 \quad J_4 = \int_R \left(\frac{\rho \vec{u} \cdot \vec{u}}{2} - \vec{u} \cdot \text{rot } \vec{A} \right) dR - \int_{S_1} \vec{\mu}_t \cdot \vec{A} dS - \int_{S_2} (\vec{m} \wedge \vec{u}) \cdot (\vec{A} - \vec{\bar{A}}) dS \quad (4.21)$$

Equations d'Euler:

$$\delta u_i \vec{E} \quad \rho \vec{u} - \text{rot } \vec{A} = 0. \quad (\text{conservation de la masse}) \quad (4.3)$$

$$\delta \vec{A} \vec{E} \quad - \epsilon_{ijk} \partial_j \mu_i = 0 \quad \text{ou } \text{rot } \vec{u} = 0 \quad (\text{absence de rotation}) \quad (4.4)$$

Conditions naturelles de surface:

$$\delta u_i \in \vec{n} \wedge (\vec{A} - \vec{A}') = 0 \quad \text{sur } S_2 \quad (4.5)$$

$$\delta \vec{A} \in \vec{n} \wedge \vec{u} = \vec{u}' \quad \text{sur } S_1 \quad (4.6)$$

3.5- Principe de variation du potentiel vecteur

Imposant à priori les relations (4.3) et (4.5) dans J_4 , on fait disparaître \vec{u} ; changeant de signe, on obtient:

$$\delta J_5 = 0 \quad J_5 = \int_R \frac{\text{rot } \vec{A} \cdot \text{rot } \vec{A}}{2\rho} dR + \int_{S_1} \vec{u}' \cdot \vec{A} dS.$$

Ce principe est le dual de J_1 . Nous verrons plus loin que ces deux principes utilisés simultanément permettent de mesurer la qualité d'une théorie approchée.

Les équations d'Euler du principe sont:

$$\text{rot } \vec{A} \cdot \text{rot } \vec{A} = 0 \quad \text{sur } R \quad (\text{absence de rotation})$$

$$\vec{n} \wedge \text{rot } \vec{A} = \vec{u}' \quad \text{sur } S_1 \quad (\text{continuité de rot } A)$$

3.6- Principe de variation des vitesses

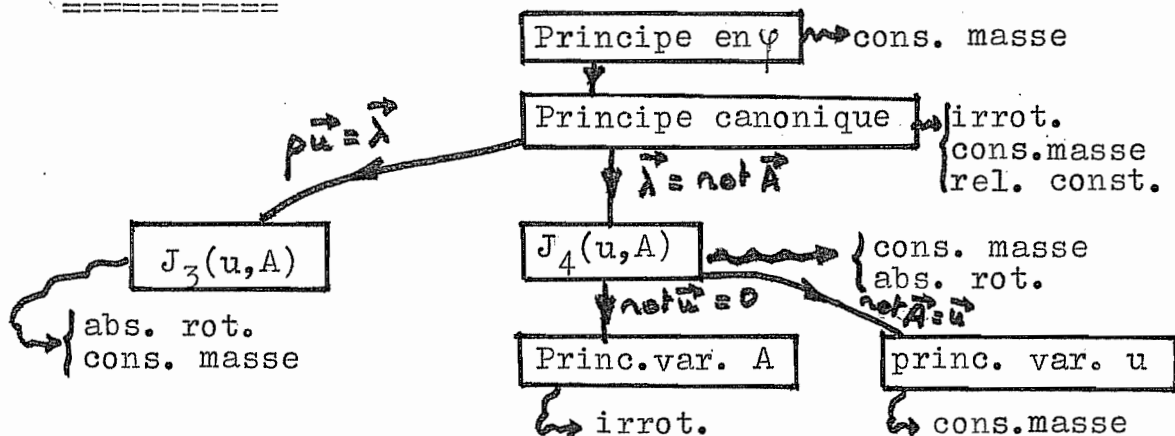
Imposant dans J_4 les relations (4.4) et (4.6), il vient:

$$\begin{aligned} - \int_R u_i \epsilon_{ijk} \partial_j A_k dR &= - \int_S u_i \epsilon_{ijk} n_j A_k dS + \int_R \underbrace{A_k \epsilon_{ijk}}_0 \partial_j u_i dR \\ &= - \int_S \vec{u} \cdot (\vec{n} \wedge \vec{A}) = \int_S (\vec{n} \wedge \vec{u}) \cdot \vec{A} dS \end{aligned}$$

d'où: $J_6 = \int_R \frac{\rho \vec{u} \cdot \vec{u}}{2} dR + \int_{S_2} \vec{A} \cdot (\vec{n} \wedge \vec{u}) dS. \quad \delta J_6 = 0$

On ne peut tirer directement les équations d'Euler, vu les conditions à priori (4.4). Ce principe prend sous sa responsabilité la conservation de la masse.

R E S U M E



CHAPITRE 4 - PRINCIPES VARIATIONNELS POUR L'ÉCOULEMENT
LAMINAIRE D'UN FLUIDE VISQUEUX (Forces d'inertie négligées). (Écoulement de Stokes)

Dans ce chapitre, nous donnons des principes variationnels s'appliquant aux fluides visqueux et incompressibles, lorsque les forces d'inertie sont négligeables.

Les forces sont écrites sous forme tensorielles. Partant de Navier-Stokes, on obtient alors une formulation analogue à celle des principes variationnels de la Théorie des Structures. Lorsqu'on veut s'affranchir de la condition d'incompressibilité, on voit apparaître la pression, sous la forme d'un multiplicateur de Lagrange. La pression prend donc dans les fluides incompressibles une signification particulière: celle n'apparaît que pour empêcher le fluide de changer de volume.

Au chapitre 6, nous verrons que la formulation ci-dessous permet d'encadrer l'énergie cinétique, ce qui donne un intérêt particulier aux principes à un champ.

On obtient d'autre part un principe $R(u, \sigma, p)$, l'analogue du principe de REISSNER en Structures, qui présente un grand intérêt pour les applications théoriques.

4.1- La fonction de dissipation F

-Nous appellerons fonction de dissipation F la fonction définie comme suit:

$$2F = \sigma_{ij} \theta_{ij}$$

Pour un fluide Newtonien, la fonction de dissipation est homogène d'ordre 2 des dérivées des vitesses. Une rotation d'ensemble ne pouvant donner de dissipation par frottement, $2F$ ne peut dépendre que du tenseur θ_{ij} , partie symétrique de $(D_i u_j)$.

L'homogénéité entraîne:

$$2F = \frac{\partial F}{\partial \theta_{ij}} \theta_{ij}$$

où l'on distingue θ_{ij} de θ_{ji} .

Donc $\sigma_{ij} = \frac{\partial F}{\partial \theta_{ij}}$, à condition d'ignorer que $\theta_{ij} = \theta_{ji}$.

4.2- Principe de variation des vitesses

L'équation de Navier-Stokes, où l'on néglige les accélérations, s'écrit:

$$\rho g_i - \partial_i p + \partial_j \sigma_{ji} = 0$$

Pour des variations de vitesses, on a donc:

$$\rho g_i \delta u_i - \partial_i p \delta u_i + \partial_j \sigma_{ji} \delta u_i = 0$$

et

$$\int_R \rho g_i \delta u_i dR - \int_R \partial_i p \delta u_i dR + \int_R \partial_j \sigma_{ji} \delta u_i dR = 0$$

ou:

$$\int_R \rho g_i \delta u_i dR - \int_S m_i p \delta u_i dS + \int_R \rho \partial_i \delta u_i dR + \int_S m_j \sigma_{ji} \delta u_i dS - \int_R \sigma_{ji} \partial_j \delta u_i dR = 0$$

Si l'on impose à priori que $\partial_i u_i = 0$, $\partial_i \delta u_i = 0$.

D'autre part, $\sigma_{ji} \partial_j \delta u_i = \sigma_{ji} \cdot \frac{1}{2} (\partial_j \delta u_i + \partial_i \delta u_j) =$

$$\sigma_{ji} \delta \theta_{ij} = \delta F$$

Sur S , nous distinguerons:

$$S_1 \text{ où } \delta u_i = 0$$

$$S_2 \text{ où } (m_j \sigma_{ji} - m_i p) = \bar{T}_i$$

Alors, le principe s'écrit:

$$\delta U = 0,$$

$$U(u) = \int_{S_2} \bar{T}_i u_i dS + \int_R (\rho g_i u_i - F(Du)) dR$$

(Principe de variation des vitesses)

Remarque: Forme de F .

Pour un fluide newtonien compressible,

$$\sigma_{ij} = 2\mu \left(\theta_{ij} - \frac{1}{3} \theta_{kk} \delta_{ij} \right) + \lambda \theta_{kk} \delta_{ij}$$

Pour un fluide newtonien incompressible, on a simplement:

$$\sigma_{ij} = 2\mu \theta_{ij}$$

Dès lors, puisque $\frac{\partial F}{\partial \theta_{ij}} = \sigma_{ij}$, $2F = \frac{\partial F}{\partial \theta_{ij}} \theta_{ij} = 2\mu \theta_{ij} \theta_{ij}$.

4.3- Principe canonique

Transformons à la Friedrichs: introduisons les trois potentiels de dislocation:

$$\mathcal{D}_1 = \int_R \beta \partial_i u_i \, dR \quad (\text{incompressibilité})$$

$$\mathcal{D}_2 = \int_R \lambda_{ij} \left[\theta_{ij} - \frac{1}{2} (\partial_i u_j + \partial_j u_i) \right] \, dR \quad (\text{compatibilité en volume})$$

(λ_{ij} est pris symétrique)

$$\mathcal{D}_3 = \int_{S_1} d_i (\mu_i - \bar{\mu}_i) \, dS \quad (\text{compatibilité superficielle})$$

On pose alors $C = \mathcal{U} + \mathcal{D}_1 + \mathcal{D}_2 + \mathcal{D}_3$, où l'on écrit $F(\theta_{ij})$ et non plus $F(Du)$ dans \mathcal{U} :

$$C(\mu, \theta, \lambda, d, \beta) = \int_{S_1} d_i (\mu_i - \bar{\mu}_i) \, dS + \int_{S_2} \bar{F}_i \mu_i \, dS + \int_R [\rho g_i u_i - F + \lambda_{ij} \theta_{ij} - \frac{1}{2} \lambda_{ij} (\partial_i u_j + \partial_j u_i) + \beta \partial_i u_i] \, dR$$

Examinons les résultats des variations:

$$\delta u \begin{cases} \text{sur } R: & \rho g_i - \partial_i \beta + \partial_j \left(\frac{1}{2} \lambda_{ij} + \frac{1}{2} \lambda_{ji} \right) = 0. & (1) \\ \text{sur } S_1: & d_i = \frac{1}{2} (\lambda_{ij} + \lambda_{ji}) m_j - m_i \beta & (2) \\ \text{sur } S_2: & \bar{F}_i = m_i \beta - \frac{1}{2} (\lambda_{ij} + \lambda_{ji}) & (3) \end{cases}$$

$$\delta \theta_{ij} \begin{cases} - \frac{\partial F}{\partial \theta_{ij}} + \lambda_{ij} = 0 & (4) \end{cases}$$

$$\delta \lambda_{ij} \begin{cases} \theta_{ij} - \frac{1}{2} (\partial_i u_j + \partial_j u_i) = 0. & (5) \end{cases}$$

$$\delta \beta \begin{cases} \partial_i u_i = 0 & (6) \end{cases}$$

$$\delta d_i \begin{cases} \mu_i = \bar{\mu}_i \text{ sur } S_1 & (7) \end{cases}$$

L'équation (4) montre que λ_{ij} n'est autre que σ_{ij} . Cependant, nous ne l'écrirons effectivement σ_{ij} que lorsque l'équation (4) sera satisfaite a priori.

Les équations (1), (2), (3) permettent d'identifier β : Il s'agit de la pression. La pression apparaît ainsi comme un multiplicateur de Lagrange associé à la condition d'incompressibilité. C'est en quelque sorte une réaction à toute force tendant à faire varier le volume. Restituons

cette signification dans C. On peut, d'autre part, restituer à t_i sa signification de force de surface t_i . Ce qui donne:

$$C^*(u, \theta, \lambda, t, p) = \int_{S_1} t_i (u_i - \bar{u}_i) dS + \int_{S_2} \bar{t}_i u_i dS + \int_R [\rho g_i u_i - F + \lambda_{ij} \theta_{ij} - \frac{1}{2} \lambda_{ij} (\partial_i u_j + \partial_j u_i) + p \partial_i u_i] dR$$

Les conditions naturelles de ce principe sont:

$\delta u_i \in$	$\left\{ \begin{array}{l} t_i - m_j \lambda_{ij} + m_i p = 0 \text{ sur } S_1 \\ \bar{t}_i - m_j \lambda_{ij} + m_i p = 0 \text{ sur } S_2 \\ \rho g_i + \partial_j \lambda_{ji} - \partial_i p = 0 \text{ sur } R \end{array} \right.$	Equilibre
$\delta \theta_{ij} \in$	$-\frac{\partial F}{\partial \theta_{ij}} + \lambda_{ij} = 0 \text{ sur } R$	Eq. constitutives
$\delta \lambda_{ij} \in$	$\theta_{ij} - \frac{1}{2} (\partial_i u_j + \partial_j u_i) = 0 \text{ sur } R$	Compatibilité en volume
$\delta t_i \in$	$u_i = \bar{u}_i \text{ sur } S_1$	Compat. superf.
$\delta p \in$	$\partial_i u_i = 0 \text{ sur } R.$	Incompress.

4.4- Principe R(u, σ , p)

Dans C^* , imposons que $\lambda_{ij} = \frac{\partial F}{\partial \theta_{ij}}$ à priori: nous noterons σ_{ij} .
 $t_i = m_j \sigma_{ji} - m_i p$.

Ce qui donne: $\int_{S_1} m_j \sigma_{ji} (u_i - \bar{u}_i) dS + \int_{S_2} \bar{t}_i u_i dS + \int_R [\sigma_{ij} \theta_{ij} - F - \frac{1}{2} \sigma_{ij} (\partial_i u_j + \partial_j u_i) + p \partial_i u_i + \rho g_i u_i] dR$

Posons: $H(\sigma) = \sigma_{ij} \theta_{ij} - F$ (Transformation de Legendre)
 soit ici: $H(\sigma) = \frac{\sigma_{ij} \sigma_{ij}}{2\mu}$

Cette transformation est possible car $\sigma_{ij} = 2\mu \theta_{ij}$, relation s'inversant par la formule $\theta_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{2\mu}$

On obtient:

$$R(u, \sigma, p) = \int_{S_1} (m_j \sigma_{ji} - m_i p) (u_i - \bar{u}_i) dS + \int_{S_2} \bar{t}_i u_i dS + \int_R [H(\sigma) - \frac{1}{2} \sigma_{ij} (\partial_i u_j + \partial_j u_i) + p \partial_i u_i + \rho g_i u_i] dR$$

La recherche de l'extremum mène aux équations:

$\delta u_i \in$	$\left\{ \begin{array}{l} m_j \sigma_{ji} - m_i p = m_j \sigma_{ji} - m_i p \text{ sur } S_1 \\ \bar{t}_i = m_j \sigma_{ji} - m_i p \text{ sur } S_2 \\ \partial_j \sigma_{ji} - \partial_i p + \rho g_i = 0 \text{ sur } R \end{array} \right.$	Equilibre
------------------	--	-----------

$$\delta \sigma_{ij} \left\{ \begin{array}{l} m_j (\mu_i - \bar{\mu}_i) = 0 \quad \text{sur } S_1 \\ \partial_i u_j + \partial_j u_i = 0 \quad \text{sur } R \end{array} \right\} \quad \text{Compatibilité}$$

$$\delta p \left\{ \begin{array}{l} -m_i (\mu_i - \bar{\mu}_i) = 0 \quad \text{sur } S_1 \\ \partial_i u_i = 0 \quad \text{sur } R \end{array} \right\} \quad \text{Incompressibilité}$$

4.5- Principe $F(\lambda, \theta, p)$

Supposons à priori vérifiées les équations d'équilibre:

$$\text{Sur } S_1: \quad t_i = m_j \lambda_{ij} - m_i p$$

$$S_2: \quad \bar{t}_i = m_j \lambda_{ij} - m_i p$$

$$R: \quad \rho g_i - \partial_i p + \partial_j \lambda_{ji} = 0.$$

Intégrant par parties $\frac{1}{2} \lambda_{ij} \partial_j u_i$ et $p \partial_i u_i$, il vient:

$$\int_{S_1} (t_i - m_j \lambda_{ij} + m_i p) \mu_i dS - \int_{S_2} (m_j \lambda_{ji} - m_i p) \bar{\mu}_i dS + \int_{\mathcal{E}} (\bar{t}_i - m_j \lambda_{ij} + m_i p) dS \\ + \int_R [\rho g_i u_i - F + \lambda_{ij} \theta_{ij} + \partial_j \lambda_{ji} u_i - \partial_i p u_i] dR.$$

La variable p disparaît de l'intégrale de volume. Les termes en p de l'intégrale de surface doivent donc tomber:

$$\boxed{F(\lambda, \theta) = \int_R (\lambda_{ij} \theta_{ij} - F) dR - \int_{S_1} m_j \lambda_{ij} \bar{\mu}_i dS} \quad \underline{\delta F = 0}$$

Résultats des variations:

$$\delta \theta_{ij} \left\{ \lambda_{ij} = + \frac{\partial F}{\partial \theta_{ij}} \right.$$

$\delta \lambda_{ij}$: entravé par des conditions essentielles.

4.6- Principe de variation des tensions

Dans F , supposons la relation constitutive vérifiée à priori:

$$\lambda_{ij} = \frac{\partial F}{\partial \theta_{ij}} \quad \text{et} \quad \lambda_{ij} \theta_{ij} - F = H(\sigma).$$

λ_{ij} devient donc σ_{ij} . D'où le principe: $\delta S = 0$.

$$\boxed{S(\sigma, p) = \int_R H(\sigma) dR - \int_{S_1} m_j \sigma_{ji} \bar{\mu}_i dS}$$

(principe de variation des tensions de viscosité)

4.7 - Supposons la compatibilité vérifiée à priori en volume.

C^* devient:

$$K(u, t, p) = \int_{S_1} t_i (\mu_i - \bar{\mu}_i) dS + \int_{S_2} \bar{t}_i \mu_i dS + \int_R [\rho g_i u_i - F(u) + p \partial_i u_i] dR$$

Si l'on suppose la compatibilité superficielle elle aussi vérifiée, on obtient: ($u_i = \bar{u}_i$ à priori)

$$U^*(u, p) = \int_{S_2} \bar{\lambda}_i u_i ds + \int_R [\rho g_i u_i - F(\partial u) + \rho \partial_i u_i] dR,$$

qui est une amélioration de U .

Les variations donnent:

$$\delta u_i \ni \int_{S_2} \bar{\lambda}_i \delta u_i ds + \int_R [\rho g_i \delta u_i - \frac{1}{2} \frac{\partial F}{\partial \epsilon_j} \delta (\partial_i u_j + \partial_j u_i) + \rho \partial_i \delta u_i] dR =$$

$$\int_{S_2} (\bar{\lambda}_i - m_j \sigma_{ji} + m_i p) \delta u_i ds + \int_{S_1} 0 \cdot ds + \int_R [\rho g_i + \partial_j \sigma_{ji} - \partial_i p] \delta u_i dR$$

$$\text{sur } S_2: \quad \bar{\lambda}_i = m_j \sigma_{ji} - m_i p$$

$$\text{sur } R: \quad \rho g_i + \partial_j \sigma_{ji} - \partial_i p = 0.$$

$$\delta p \ni \partial_i u_i = 0.$$

L'analogie avec la théorie des structures est frappante:

<u>STRUCTURES</u>	<u>ECT de STOKES</u>
Energie interne	Fonction de dissipation
Déplacements	Vitesses
Tensions	Tensions

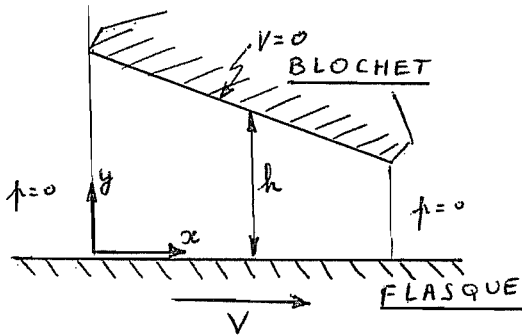
Mais dans l'écoulement laminaire de fluide incompressible, la moyenne des tensions normales (pression) ne travaille pas. C'est pour cela que la pression perd sa signification thermodynamique.

Une application du principe $R(\mathbf{U}, \sigma, p)$ en lubrification:

BLOCHET de DIMENSION FINIE

$$R = \int_{S_1} (m_j \sigma_{ji} - m_i p) (u_i - \bar{u}_i) dS + \int_{S_2} \bar{r}_i u_i dS + \int_R [\mu(\sigma) - \frac{1}{2} \sigma_{ij} (\partial_i u_j + \partial_j u_i) + p \partial_i u_i + \rho g_i u_i] dR.$$

On pose $\vec{g} = 0$; $u_i = \bar{u}_i$ à priori sur S_1



On utilise les hypothèses classiques de la lubrification: (cf. par ex. LELOUP [11])

- p est supposée constante sur toute la hauteur h .

- σ_{12} et σ_{23} sont seuls considérés.

- On ne considère que

$$\partial_1 u_1, \partial_1 u_3, \partial_2 u_1, \partial_2 u_3,$$

$\partial_3 u_1, \partial_3 u_3$, les autres dérivées étant supposées négligeables.

Il reste: $\delta \int_0^L dx \int_0^L dy \int_0^h \left[\frac{\sigma_{12}^2 + \sigma_{23}^2}{2\mu} - \sigma_{12} \partial_2 u_1 - \sigma_{23} \partial_2 u_3 + p (\partial_1 u_1 + \partial_3 u_3) \right] dy = 0$,
principe dont les variations donnent:

$$\delta \sigma_{12} \Leftrightarrow \frac{\sigma_{12}}{\mu} - \partial_2 u_1 = 0 \quad (1)$$

$$\delta \sigma_{23} \Leftrightarrow \frac{\sigma_{23}}{\mu} - \partial_2 u_3 = 0 \quad (2)$$

$$\delta p \Leftrightarrow \int_0^h (\partial_1 u_1 + \partial_3 u_3) dy = 0 \quad (3)$$

$$\delta u_1 \Leftrightarrow \partial_2 \sigma_{12} - \partial_1 p = 0. \quad (4)$$

$$\delta u_3 \Leftrightarrow \partial_2 \sigma_{23} - \partial_3 p = 0 \quad (5)$$

De (4), on tire:

$$\sigma_{12} = y \partial_1 p + A(x, z)$$

Par (1), cela donne:

$$\frac{y^2}{2} \partial_1 p + y A(x, z) = \mu u_1 + B(x, z)$$

En $y=0$, $B = -\mu V$

$$y=h, \quad \frac{h^2}{2} \partial_1 p + h A = -\mu V$$

$$\text{D'où } A = -\mu \frac{V}{h} - \frac{h}{2} \partial_1 p$$

Dès lors,

$$u_1 = -\frac{Vy}{h} - \frac{hy}{2\mu} \partial_1 p + \frac{y^2}{2\mu} \partial_1 p + V$$

$$\partial_1 u_1 = \partial_1 \left(\frac{y^2 - hy}{2\mu} \right) \partial_1 p + \frac{Vy}{h} \partial_1 h$$

$$\begin{aligned}
 \int_0^h \partial_1 u_1 dy &= \int_0^h \left[\partial_1 \left(\frac{y^2 - hy}{2\mu} \partial_1 p \right) + \frac{V y}{h^2} \partial_1 h \right] dy = \\
 & \partial_1 \left(\frac{1}{2\mu} \partial_1 p \right) \frac{h^3}{6} - \partial_1 \left(\frac{h}{2\mu} \partial_1 p \right) \frac{h^2}{4} + \frac{V}{2} \partial_1 h = \\
 & \partial_1 \left(\frac{h^3}{6\mu} \partial_1 p - \frac{h^2}{4\mu} \partial_1 p \right) - \frac{h}{2\mu} \partial_1 p \partial_1 \left(\frac{h^3}{6} \right) + \frac{h}{2\mu} \partial_1 p \partial_1 \left(\frac{h^2}{4} \right) + \frac{V}{2} \partial_1 h = \\
 \int_0^h \partial_1 u_1 dy &= -\partial_1 \left(\frac{h^3}{12\mu} \partial_1 p \right) - \frac{h^2}{4\mu} \partial_1 p \partial_1 h + \frac{h^2}{4\mu} \partial_1 p \partial_1 h + \frac{V}{2} \partial_1 h
 \end{aligned} \tag{6}$$

De même, par (5), $\sigma_{23} = y \partial_3 p + C(x, z)$
 et par (2) : $y \partial_3 p + C(x, z) = \mu \partial_2 u_3$
 d'où $\frac{y^2}{2} \partial_3 p + y C = \mu u_3 + D(x, z)$.

En $y = 0$, on trouve $D = 0$;

En $y = h$, $\frac{h^2}{2} \partial_3 p + C h = 0$, d'où $C = -\frac{h}{2} \partial_3 p$

Dès lors,

$$\begin{aligned}
 u_3 &= -\frac{hy}{2\mu} \partial_3 p + \frac{y^2}{2\mu} \partial_3 p \\
 \partial_3 u_3 &= \partial_3 \left[\frac{y^2}{2\mu} \partial_3 p - \frac{hy}{2\mu} \partial_3 p \right] \\
 \int_0^h \partial_3 u_3 dy &= \int_0^h \left[y^2 \partial_3 \left(\frac{1}{2\mu} \partial_3 p \right) - y \partial_3 \frac{h}{2\mu} \partial_3 p \right] dy \\
 &= \frac{h^3}{3} \partial_3 \left(\frac{1}{2\mu} \partial_3 p \right) - \frac{h^2}{2} \partial_3 \left(\frac{h}{2\mu} \partial_3 p \right) \\
 \int_0^h \partial_3 u_3 dy &= \partial_3 \left(\frac{h^3}{6\mu} \partial_3 p - \frac{h^2}{4\mu} \partial_3 p \right) - \frac{h}{2\mu} \partial_3 p h^2 \partial_3 h + \frac{h}{2\mu} \partial_3 p h^2 \partial_3 h
 \end{aligned} \tag{7}$$

Par (6), (7) et (3), on obtient :

$$\partial_1 \left(\frac{h^2}{6\mu} \partial_1 p \right) + \partial_3 \left(\frac{h^2}{6\mu} \partial_3 p \right) = V \partial_1 h$$

C'est l'équation de REYNOLDS, bien connue en Lubrification.

Les tensions de viscosité au flasque sont données par :

$$\sigma_{12}(0) = A(x, z) = -\mu \frac{V}{h} - \frac{h}{2} \partial_1 p$$

A noter que la distribution de h est quelconque, aussi bien dans la direction z que dans la direction x . (Et non nécessairement linéaire comme pourrait le faire croire la figure)

Chapitre 5- Ecoulement laminaire d'un fluide visqueux

(Ecoulement de Stokes) - Formulation vectorielle.

5.1- L'équation de Navier-Stokes s'écrit sous forme vectorielle:

$$\rho g_i - \partial_i p - \mu \varepsilon_{ijk} \partial_j \varepsilon_{krs} \partial_r u_s = 0$$

$$\int_R [\rho g_i \delta u_i - \partial_i p \delta u_i - \mu \varepsilon_{ijk} \partial_j \varepsilon_{krs} \partial_r u_s \delta u_i] dR = 0$$

$$\int_R [\rho g_i \delta u_i + p \partial_i \delta u_i + \mu \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{krs} \partial_r u_s \partial_j \delta u_i] dR - \int_S n_i p \delta u_i dS - \int_S \mu \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{krs} \partial_r u_s \delta u_i dS = 0$$

Posant $\partial_i u_i = 0$ a priori, et distinguant sur S:

$$S_1 \text{ où } \vec{\omega} = \vec{\bar{\omega}}, \quad p = \bar{p}, \quad (\vec{\omega} = \text{rot } \vec{u})$$

$$S_2 \text{ où } \delta u_i = 0,$$

il vient:

$$\delta \left\{ \int_R (\rho \vec{g} \cdot \vec{u} - \mu \frac{\vec{\omega} \cdot \vec{\omega}}{2}) dR - \int_{S_1} \vec{u} \cdot (\bar{p} \vec{n} + \bar{\mu} \vec{n} \wedge \vec{\bar{\omega}}) dS \right\} = 0$$

où $\vec{\omega} = \text{rot } \vec{u}$ a priori

$\text{div } \vec{u} = 0$ a priori.

C'est le principe de variation des vitesses.

5.2-Principe canonique

Libérons-nous de l'incompressibilité par le potentiel de dislocation:

$$\int_R \beta \partial_i u_i dR \quad ;$$

de la condition $\vec{\omega} = \text{rot } \vec{u}$ par le second potentiel

$$\int_R \psi_i (\omega_i - \varepsilon_{ijk} \partial_j u_k) dR \quad ;$$

de la condition de surface sur S_2 :

$$\int_{S_2} \lambda_i (\bar{u}_i - u_i) dS$$

On obtient alors le principe:

$$\delta \left\{ \int_R [\rho g_i u_i - \frac{\mu \omega_i \omega_i}{2} + \beta \partial_i u_i - \psi_i (\varepsilon_{ijk} \partial_j u_k - \omega_i)] dR - \int_{S_1} u_i (\bar{p} n_i + \varepsilon_{ijk} n_j \bar{\omega}_k) dS + \int_{S_2} \lambda_i (\bar{u}_i - u_i) dS \right\} = 0$$

Les variations vont nous permettre de simplifier:

$$\delta u_i \Leftrightarrow \rho g_i - \partial_i \beta + \varepsilon_{kji} \partial_j \psi_k = 0 \quad (1)$$

$$\delta \omega_i \Leftrightarrow -\mu \omega_i + \psi_i = 0 \quad (2)$$

$$\delta \psi_i \Leftrightarrow \omega_i = \varepsilon_{ijk} \partial_j u_k \quad (3)$$

Rassemblant (1), (2), (3), on obtient:

$$\rho g_i - \partial_i \beta - \varepsilon_{ijk} \partial_j \varepsilon_{krs} \partial_r u_s = 0$$

Le sens de β apparaît donc clairement: $\beta = p$. La pression

apparaît à nouveau comme un multiplicateur lagrangien lié à l'incompressibilité. Variant u_i sur S_2 , il vient:

$$\lambda_2 = \bar{\rho} n_i + \epsilon_{ijk} n_j \omega_k$$

Ecrivait p à la place de λ_2 et restituant le sens de $\vec{\omega}$,

on obtient: $\delta C = 0$

$$C = \int_R \left[\rho \vec{g} \cdot \vec{u} - \frac{\mu \vec{\omega} \cdot \vec{\omega}}{2} + \rho \operatorname{div} \vec{u} + \vec{f} \cdot (\operatorname{rot} \vec{u} - \vec{\omega}) \right] dR \\ - \int_{S_1} \vec{u} \cdot (\bar{\rho} \vec{n} + \mu \vec{n} \wedge \vec{\omega}) dS + \int_{S_2} (\bar{\rho} \vec{n} + \mu \vec{n} \wedge \vec{\omega}) \cdot (\vec{u} - \bar{u}) dS$$

(Principe canonique)

5.3-Principe à trois champs (, ,)

Restituant l'équation $\vec{f} = \mu \vec{\omega}$ obtenue par variation de $\vec{\omega}$, on obtient le principe: $\delta R = 0$

$$R = \int_R \left[\rho \vec{g} \cdot \vec{u} + \frac{\mu \vec{\omega} \cdot \vec{\omega}}{2} + \rho \operatorname{div} \vec{u} - \mu \vec{\omega} \cdot \operatorname{rot} \vec{u} \right] dR \\ - \int_{S_1} \vec{u} \cdot (\bar{\rho} \vec{n} + \mu \vec{n} \wedge \vec{\omega}) dS + \int_{S_2} (\bar{\rho} \vec{n} + \mu \vec{n} \wedge \vec{\omega}) \cdot (\vec{u} - \bar{u}) dS$$

Les variations donnent les résultats suivants:

$$\delta u_i \in \left\{ \begin{array}{ll} \rho g_i - \partial_j p + \mu \epsilon_{kji} \partial_j \omega_k = 0 & \text{sur } R \\ n_i p - \mu \epsilon_{kji} n_j \omega_k = \bar{\rho} n_i + \mu \epsilon_{ijk} n_j \bar{\omega}_k & \text{sur } S_1 \end{array} \right. \quad \text{Equil.}$$

$$\delta \omega_i \in \left\{ \begin{array}{ll} \mu \omega_i - \mu \epsilon_{ijk} \partial_j u_k = 0 & \text{sur } R \text{ (compatibilité interne)} \\ \mu \epsilon_{ijk} n_j (\bar{\omega}_k - \omega_k) = 0 & \text{sur } S_2 \text{ (compat. superficielle)} \end{array} \right.$$

$$\delta p \in \left\{ \begin{array}{ll} \partial_i u_i = 0 & \text{sur } R \text{ (incompressibilité)} \\ n_i (\bar{u}_i - u_i) = 0 & \text{sur } S_2 \text{ (continuité des vit. normales)} \end{array} \right.$$

5.4- Principe de variation de la vorticité

Restituons l'équilibre dans le principe R:

$$\rho \vec{g} - \operatorname{grad} p - \mu \operatorname{rot} \vec{\omega} = 0 \quad \text{dans } R$$

$$\bar{\rho} \vec{n} + \mu \vec{n} \wedge \vec{\omega} = \bar{\rho} \vec{n} + \mu \vec{n} \wedge \vec{\omega} \quad \text{sur } S_1$$

Intégrant alors par parties, on trouve:

$$\int_R \left[\rho \vec{g} \cdot \vec{u} + \frac{\mu \omega_i \omega_i}{2} - \partial_j p u_j + \epsilon_{kji} \partial_j (\mu \omega_k) u_i \right] dR \\ + \int_{S_1} u_i (\bar{\rho} n_i + \mu \epsilon_{ijk} n_j \bar{\omega}_k - \bar{\rho} n_i - \mu \epsilon_{ijk} n_j \bar{\omega}_k) dS \\ + \int_{S_2} \bar{u}_i (\bar{\rho} n_i + \mu \epsilon_{ijk} n_j \bar{\omega}_k) dS$$

La pression disparaît de l'intégrale de volume. On la lais-

sera donc tomber en surface, d'où le principe:

$$\underline{\delta D = 0} \quad \boxed{D = \int_R \frac{\mu \vec{\omega} \cdot \vec{\omega}}{2} dR + \int_{S_2} (\mu \vec{n} \wedge \vec{\omega}) \cdot \vec{\mu} dS}$$

5.5- Analyse des conditions aux limites

Quelle est la relation entre le terme $\mu \vec{n} \wedge \vec{\omega}$ et le terme

$n_j \sigma_{ji}$ trouvé dans le chapitre précédent?

On a:

$$* \quad \sigma_{ji} = 2\mu \theta_{ji} = \mu (\partial_j u_i + \partial_i u_j)$$

$$n_j \sigma_{ji} = \mu n_j (\partial_j u_i + \partial_i u_j)$$

$$* \quad \begin{aligned} \mu (\vec{n} \wedge \text{rot } \vec{u})_i &= \mu \epsilon_{ijk} n_j \epsilon_{kno} \partial_n u_o = \mu n_j \partial_n u_o (\delta_{in} \delta_{jo} - \delta_{io} \delta_{jn}) \\ &= \mu n_j \partial_i u_j - \mu n_j \partial_j u_i = \mu n_j (\partial_i u_j + \partial_j u_i) - 2\mu n_j \partial_j u_i \end{aligned}$$

Donc

$$\boxed{\mu (\vec{n} \wedge \text{rot } \vec{u})_i = n_j \sigma_{ji} - 2\mu n_j \partial_j u_i}$$

Le terme $\mu \vec{n} \wedge \text{rot } \vec{u}$ = tensions de viscosité - 2 . gradient normal de la vitesse.

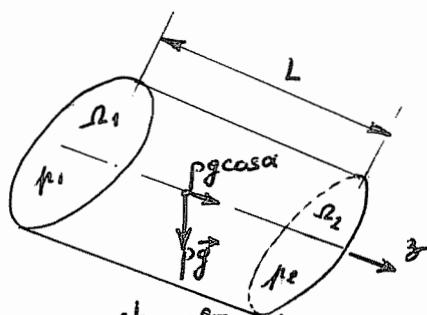
Cette formulation est plus simple que la précédente pour l'emploi de coordonnées curvilignes.

A noter que si l'on veut garder p mais non $\vec{\omega}$, il suffit de restituer $\vec{\omega} = \text{rot } \vec{u}$ dans le principe R: ($\vec{\omega} = \text{rot } \vec{u}$ à priori)

$$\boxed{U^* = \int_R [p \vec{g} \cdot \vec{\mu} - \mu \frac{\vec{\omega} \cdot \vec{\omega}}{2} + \rho \text{div } \vec{u}] dR - \int_{S_1} \vec{\mu} \cdot (\bar{p} \vec{n} + \mu \vec{n} \wedge \vec{\omega}) dS + \int_{S_2} (\mu \vec{n} + \mu \vec{n} \wedge \vec{\omega}) \cdot (\vec{\mu} - \bar{\mu}) dS}$$

C'est une généralisation du principe de variation des vitesses. Cette dernière forme peut être avantageuse dans les applications théoriques.

Une application simple: Ecoulement laminaire dans une conduite rectiligne



Hypothèses sur les vitesses:

$$u_r = 0 ; u_\theta = 0 ; D_\theta u_z = 0$$

$$\text{div } \vec{u} = \frac{1}{2} D_z \frac{r^2}{1} u_z = D_z u_z$$

$$\text{rot } \vec{u} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} \vec{e}_r & r\vec{e}_\theta & \vec{e}_z \\ D_r & D_\theta & D_z \\ 0 & 0 & u_z \end{vmatrix} = (0, -D_r u_z, 0)$$

$$R = \int_0^L dz \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R r \left\{ \rho g \cos \alpha + \mu \frac{\omega_r^2 + \omega_\theta^2 + \omega_z^2}{2} + \mu D_z u_z + \mu \omega_\theta D_r u_z \right\} dr$$

$$- \int_{\Omega_1} \rho_1 u(0) d\Omega + \int_{\Omega_2} \rho_2 u(L) d\Omega$$

Varions \vec{u} , $\vec{\omega}$, ρ :

$$\delta \mu \Leftrightarrow \rho g \cos \alpha - D_z \rho + D_\theta \left(\frac{\mu \omega_\theta}{r} \right) - D_r (\mu \omega_\theta) = 0 \quad (1)$$

$$\delta \omega_r \Leftrightarrow \omega_r = 0 \quad (2)$$

$$\delta \omega_\theta \Leftrightarrow \omega_\theta = -D_r u_z \quad (3)$$

$$\delta \omega_z \Leftrightarrow \omega_z = 0 \quad (4)$$

$$\delta \rho \Leftrightarrow D_z u_z = 0 \quad (5)$$

(1), (2), (3) permettent d'écrire:

$$\rho g \cos \alpha - D_z \rho + \mu D_{rr} u_z = 0$$

$$\mu D_{rr} u_z = D_z \rho - \rho g \cos \alpha$$

$$\mu u_z = (D_z \rho - \rho g \cos \alpha) r^2 + Ar + B$$

Le terme Ar introduit une discontinuité de $D_r u_z$. Il convient donc d'annuler A . Sur les surfaces latérales, $u_z = 0$. On a donc

$$B = -(D_z \rho - \rho g \cos \alpha) R^2$$

Dès lors,

$$u_z = \frac{\rho g \cos \alpha - D_z \rho}{\mu} (R^2 - r^2)$$

profil des vitesses parabolique.

Par (5), $D_z u_z = 0$. On a donc $D_{zz} \rho = 0$: ρ décroît linéairement.

Notant les conditions d'extrémité sur ρ , on voit que

$$u_z = \frac{\rho g \cos \alpha + \rho_1 - \rho_2}{\mu} (R^2 - r^2)$$

où l'on retrouve un résultat bien connu.

CHAPITRE 6 - BORNES SUPERIEURE ET INFERIEURE

Introduction

En Théorie des Structures,^[3] on montre que le principe de variation des déplacements et le principe de variation des tensions encadrent l'énergie potentielle. Plus précisément, si l'on fait une approximation sur les déplacements d'une part, sur les tensions d'autre part, les énergies potentielles obtenues dans les deux cas sont différentes, mais on peut affirmer que l'une est plus petite, l'autre plus grande que l'énergie potentielle exacte.

Dans ce chapitre, nous allons rappeler cette théorie, mais sous une présentation élargie, qui nous permettra de l'appliquer à plusieurs problèmes décrits par une formulation similaire. Nous examinerons ensuite l'application de cette théorie aux principes énoncés dans les chapitres précédents.

6.1- Soit $F(u_i)$ une fonction homogène d'ordre deux des variables u_i . Définissons alors les "impulsions" p_i par

$$p_i = \frac{\partial F}{\partial u_i}$$

Considérons alors la transformation de Legendre

$$H(p_i) = p_i u_i - F(u_i)$$

Du fait de l'homogénéité d'ordre 2, on peut écrire par un théorème d'Euler

$$2F = p_i u_i \quad \text{et} \quad F = \frac{1}{2} p_i u_i \quad .$$

Les p_i sont des fonctions homogènes d'ordre 1 des u_i .

Il va de soi que pour un volume quelconque,

$$\int_R p_i u_i dR > 0 \quad \text{si } u \neq 0$$

Dès lors, si nous considérons deux champs (1) et (2) caractérisés par

$$u_i^{(1)}, p_i^{(1)} : \text{champ } a_1$$

$$u_i^{(2)}, p_i^{(2)} : \text{champ } a_2 \quad ,$$

La quantité $(a_1, a_2) = \int_R p_i^{(1)} u_i^{(2)} dR$

est bilinéaire, définie positive, commutative. Elle vérifie donc les axiomes d'un produit scalaire et confère à l'espace

\mathcal{E} des champs considérés une topologie préhilbertienne.

6.2- Supposons que l'on puisse trouver des sous-espaces vectoriels de \mathcal{E} , soit C et A , tels que les relations $c \in C$ et $a \in A$ entraînent $(c, a) = 0$ (Sous-espaces orthogonaux). c_0 et a_0 étant deux fonctions de \mathcal{E} , supposons que les espaces translatés $c_0 + C$ et $a_0 + A$ aient leur intersection réduite à un seul point. Pour trouver ce point, cherchons les fonctions c et a qui rendent minimum la distance $d(c_0 + C, a_0 + A)$ déduite du produit scalaire.

$$\begin{aligned} d^2(c_0 + c, a_0 + a) &= (c_0 + c - (a_0 + a), c_0 + c - (a_0 + a)) = \\ &= (c_0 + c, c_0 + c) + (a_0 + a, a_0 + a) - 2(c_0, a_0) - 2(c, a_0) \\ &\quad - 2(a_0, c) - 2(c, a). \end{aligned}$$

Evidemment (c_0, a_0) est invariant
 (c, a) est nul.

Séparons la condition sur a de celle sur c . On obtient le système:

$$* (c_0 + c, c_0 + c) - 2(c, a_0) \quad \text{min.} \quad (\text{Problème 1})$$

$$* (a_0 + a, a_0 + a) - 2(a, c_0) \quad \text{min.} \quad (\text{Problème 2})$$

6.3- Soient alors des solutions approchées par restriction de l'espace à l'enveloppe linéaire d'un nombre fini de fonctions linéairement indépendantes:

$$\begin{aligned} a &= \sum_i \lambda_i a_i \in \langle \{a_i\} \rangle && \text{, enveloppe linéaire} \\ &&& \text{de l'ensemble des } a_i \\ c &= \sum_i \mu_i c_i \in \langle \{c_i\} \rangle \end{aligned}$$

Raisonnons sur le problème 1

$$(c_0 + \sum_i \mu_i c_i, c_0 + \sum_i \mu_i c_i) - 2(\sum_i \mu_i c_i, a_0) = \text{min.}$$

$$\sum_{i,j} \mu_i \mu_j (c_i, c_j) + 2 \sum_i \mu_i (c_i, c_0) + (c_0, c_0) - 2(\sum_i \mu_i c_i, a_0) \quad \text{min.}$$

Le minimum s'obtient en variant μ_i :

$$\delta \mu_i \quad \boxed{\sum_j \mu_j (c_i, c_j) = (c_i, a_0 - c_0)} \quad (1)$$

C'est un système matriciel définissant les μ_j , car la matrice (c_i, c_j) est non-singulière. En effet, sa singularité entraînerait l'existence d'une combinaison linéaire

$$\sum_i \alpha_i (c_i, c_j) = 0 \quad \forall j, \text{ soit } (\sum_i \alpha_i c_i, c_j) = 0 \quad \forall j$$

Mais les c_j sont des vecteurs indépendants en nombre égal

à la dimension de l'espace formé par leur enveloppe linéaire. Ils forment donc une base complète, ce qui signifie que la relation

$$\left(\sum_i a_i c_i, c_j \right) = 0 \quad \forall j$$

entraîne $\sum_i a_i c_i = 0$, ce qui est contraire à l'hypothèse d'indépendance linéaire. La solution approchée obtenue pour les valeurs $\hat{\mu}_j$ définies par (1) sera appelée \hat{s} .

Considérons à présent la solution exacte $s = c_{\text{exact}} + c_0$

La solution exacte sans contrainte est celle pour laquelle $s = c + c_0 = a + a_0$, c'est à dire celle qui annule la distance $d(c + c_0, a + a_0)$. On a donc:

$$s - c_0 \in C$$

$$s - a_0 \in A$$

et $(s - c_0, s - a_0) = 0$, ce qui peut s'écrire:

$$(s, s) - (s, a_0 + c_0) + (a_0, c_0) = 0 \quad (2)$$

Considérons alors deux cas:

$$a) \quad c_0 = 0$$

$$\text{Alors, } \hat{s} = c_0 + \sum_i \hat{\mu}_i c_i = \sum_i \hat{\mu}_i c_i$$

En vertu de (1),

$$\sum_j \hat{\mu}_j (c_i, c_j) = (c_i, a_0)$$

Prémultipliant par $\hat{\mu}_i$ et faisant la somme sur i , on obtient:

$$\left(\sum_i \hat{\mu}_i c_i, \sum_j \hat{\mu}_j c_j \right) = \left(\sum_i \hat{\mu}_i c_i, a_0 \right)$$

$$\text{ou: } (\hat{s}, \hat{s}) = (\hat{s}, a_0) \quad (3)$$

En vertu de (2), on a aussi:

$$(\hat{s}, s) = (s, a_0) \quad (4)$$

Comme \hat{s} est un minimum lié, tandis que s varie librement, le problème (1) mène à

$$(\hat{s}, \hat{s}) - 2(\hat{s}, a_0) \geq (s, s) - 2(s, a_0)$$

et, par (3) et (4):

$$-(\hat{s}, \hat{s}) \geq -(s, s)$$

soit, finalement,

$$\boxed{(\hat{s}, \hat{s}) \leq (s, s)}$$

La norme du champ approché est plus petite que celle du champ exact.

$$\underline{b) a_0 = 0}$$

Alors, $\hat{s} \in A$, $\hat{s} - c_0 \in C$. Donc,

$$(\hat{s}, \hat{s} - c_0) = 0 = (\hat{s}, \hat{s}) - (\hat{s}, c_0)$$

soit:

$$(\hat{s}, \hat{s}) = (\hat{s}, c_0) \quad (5)$$

et (2) devient:

$$(s, s) = (s, c_0).$$

Le problème 1 mène alors à

$$\boxed{(\hat{s}, \hat{s}) \geq (s, s)}$$

La norme du champ approché est plus grande que celle du champ exact.

On peut faire le même raisonnement pour le deuxième problème, mais les inégalités s'inversent.

En résumé, on obtient le tableau suivant:

$$\underline{c_0 = 0}$$

$$(\hat{c}, \hat{c}) \leq (s, s) \leq (a_0 + a, a_0 + a)$$

ou encore, par les égalités vues plus haut:

$$(\hat{c}, a_0) \leq (s, a_0) \leq (a_0 + a, a_0)$$

$$\underline{a_0 = 0}$$

$$(c_0 + \hat{c}, c_0 + c) \geq (s, s) \geq (\hat{a}, \hat{a})$$

ou encore,

$$(c_0 + \hat{c}, c_0) \geq (s, c_0) \geq (\hat{a}, c_0)$$

6.3- Application à la description duale $\psi - \vec{A}$ du chapitre 3

La fonction bilinéaire est $\frac{1}{2} \rho u_i u_i = T$. Les impulsions sont définies par $p_i = \frac{\partial T}{\partial u_i} = \rho u_i$.
Le produit scalaire de deux champs $u(1)$ et $u(2)$ est

$$\int_R \frac{\rho \vec{u}(1) \cdot \vec{u}(2)}{2}$$

Définissons alors l'espace A des champs irrotationnels homogènes:

$$\begin{aligned} * \quad \vec{u} &= \text{grad } \psi \\ * \quad \psi &= 0 \text{ sur } S_1 \end{aligned}$$

Soit C l'espace des champs incompressibles homogènes, qui vérifient les relations:

$$\begin{aligned} * \vec{p} &= \text{rot } \vec{A} \\ * \vec{A} &= 0 \text{ sur } S_2 \end{aligned}$$

Pour $a \in A$ et $c \in C$, on a:

$$\begin{aligned} (a, c) &= \int_R \partial_i \varphi \varepsilon_{ijk} \partial_j A_k dR = \\ &= \int_S \underbrace{m_i \varphi \varepsilon_{ijk} \partial_j A_k}_{\downarrow} dS - \int_R \underbrace{\varphi \varepsilon_{ijk} \partial_j A_k}_0 dR \\ &= \int_{S_1} \underbrace{m_i \varphi \varepsilon_{ijk} \partial_j A_k}_{\text{car } \varphi=0} dS + \int_{S_2} m_i \varphi \varepsilon_{ijk} \partial_j A_k dS \\ &= \int_{S_2} \underbrace{m_i \varepsilon_{ijk} \partial_j (\varphi A_k)}_{\downarrow} dS - \int_{S_2} \underbrace{\varepsilon_{ijk} A_k \partial_j \varphi}_{\substack{\downarrow \\ A_k=0}} dS \\ &= \int_{S_2} \underbrace{\varphi \vec{A} \cdot d\vec{s}}_{\downarrow} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Donc les sous-espaces A et C sont orthogonaux. Du fait de la linéarité, la solution réelle est du type $c_0 + c$ ou $a_0 + a$, avec $-c_0 =$ champ incompressible non-homogène, c.-à-d. du type:

$$\begin{cases} \vec{p} = \text{rot } \vec{A} \\ \vec{A} = \vec{A} \text{ sur } S_2 \end{cases}$$

$-a_0 =$ champ irrotationnel non-homogène, c.-à-d. du type:

$$\begin{cases} \vec{u} = \text{grad } \varphi \\ \varphi = \bar{\varphi} \text{ sur } S_1 \end{cases}$$

On a :

$$\begin{aligned} (c, a_0) &= \int_R \partial_i \varphi \varepsilon_{ijk} \partial_j A_k dR = - \int_R \varphi \varepsilon_{ijk} \partial_{ij} A_k dR \\ &= \int_{S_1} \underbrace{m_i \bar{\varphi} \varepsilon_{ijk} \partial_j A_k}_{\downarrow} dS + \int_{S_2} \varphi \vec{A} \cdot d\vec{s} - \int_{S_2} m_i A_k \varepsilon_{ijk} \partial_j \varphi dS \\ &= \int_{S_1} \bar{\varphi} \vec{A} \cdot d\vec{s} - \int_{S_1} m_i \varepsilon_{ijk} \partial_j \bar{\varphi} A_k dS \\ (c, a_0) &= - \int_{S_1} m_i A_k \varepsilon_{ijk} \partial_j \bar{\varphi} dS = - \int_{S_1} \underbrace{\vec{u}_t \cdot \vec{A}}_{\downarrow} dS. \end{aligned}$$

De même,

$$(a, c_0) = \int_S m_i \varphi \varepsilon_{ijk} \partial_j A_k dS + \int_{S_2} m_i \varphi \varepsilon_{ijk} \partial_j \bar{A}_k$$

$$(a, c_0) = \int_{S_2} \bar{r}_m \psi \, dS$$

On voit aisément que le problème

$$(a+a_0, a+a_0) - 2(a, c_0) \quad \text{minimum}$$

n'est autre que le principe en . De même, le problème

$$(c+c_0, c+c_0) - 2(a_0, c) \quad \text{minimum}$$

revient à écrire le principe de variation du potentiel vecteur. On en conclut le tableau suivant:

$$* \quad \bar{\psi} = 0 \text{ sur } S_1$$

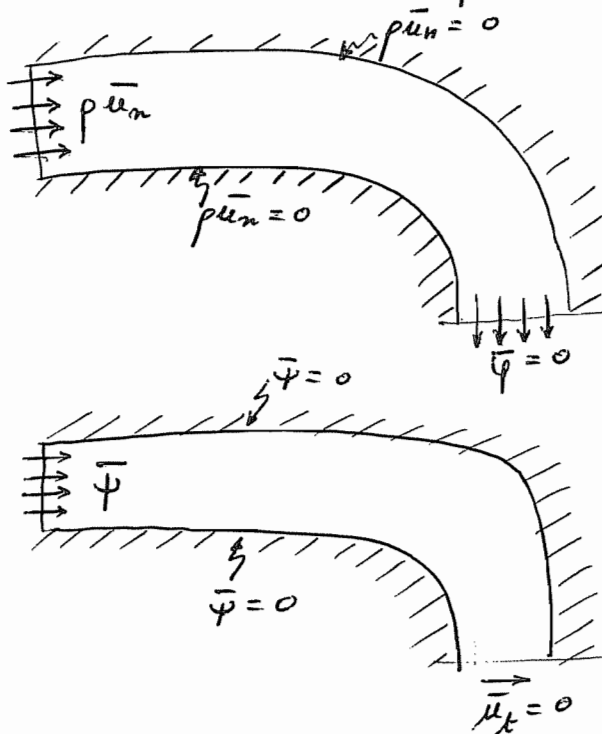
$$\int_R \frac{\rho \partial_i \psi \partial_i \psi}{2} \, dR \leq \int_R T_{\text{exact}} \, dR \leq \int_R \frac{\text{rot } \vec{A} \cdot \text{rot } \vec{A}}{2\rho} \, dR$$

$$* \quad \vec{A} = 0 \text{ sur } S_2$$

$$\int_R \frac{\text{rot } \vec{A} \cdot \text{rot } \vec{A}}{2\rho} \, dR \leq \int_R T_{\text{exact}} \, dR \leq \int_R \frac{\rho \partial_i \psi \partial_i \psi}{2} \, dR$$

Exemple d'application pour un problème plan

Pour un problème plan, le potentiel vecteur se réduit à la fonction de courant ψ .



Variation de ψ
Energie cinétique
trop petite.

Variation de ψ
Energie cinétique
trop grande.

6.4- Application à l'étude de l'écoulement laminaire du chapitre 4

La fonction F est quadratique; les impulsions sont les tensions de viscosité $\sigma_{ij} = \frac{\partial F}{\partial \theta_{ij}}$

On définit la transformée de Legendre $H(\sigma) = \sigma_{ij} \theta_{ij} - F(\theta)$. Le produit scalaire sera donc

$$\int_R \sigma_{ij}(1) \theta_{ij}(2) dR$$

On définit alors les deux sous-espaces suivants:

- * C = espace des champs incompressibles, compatibles et homogènes, ce qui signifie:

$$\begin{cases} \mu_i = 0 \text{ sur } S_1 \\ \theta_{ij} = \frac{1}{2} (\partial_i u_j + \partial_j u_i) \\ \partial_i u_i = 0 \end{cases}$$

C'est bien un sous-espace vectoriel, vu les conditions homogènes ou linéaires.

- * A = espace des champs sans forces de viscosité, c'est-à-dire vérifiant les relations:

$$\begin{cases} \partial_j \sigma_{ji} = 0 \\ n_j \sigma_{ji} = 0 \text{ sur } S_2 \end{cases}$$

Ajoutons que σ_{ij} est supposé symétrique. Il s'agit d'un sous-espace vectoriel car les conditions sont toutes homogènes.

Pour deux champs $c \in C$ et $a \in A$, on a:

$$\begin{aligned} (c, a) &= \int_R \sigma_{ij} \partial_i u_j dR = \int_S \sigma_{ij} n_j u_i dS - \int_R \mu_j \underbrace{\partial_j \sigma_{ji}}_0 dR \\ &= \int_S \mu_i (n_j \sigma_{ji}) dS = \int_{S_1} \underbrace{\mu_i}_0 (n_j \sigma_{ji}) dS + \int_{S_2} \underbrace{\mu_i}_0 (n_j \sigma_{ji}) dS = 0 \end{aligned}$$

L'orthogonalité est donc bien vérifiée.

Considérons alors une solution particulière c_0

$$c_0: \begin{cases} \theta_{ij} = \frac{1}{2} (\partial_i u_j + \partial_j u_i) \\ \mu_i = \bar{\mu}_i \text{ sur } S_1 \\ \partial_i u_i = 0 \end{cases}$$

et une seconde solution particulière a_0 .

$$a_0: \begin{cases} \partial_j \sigma_{ji} = -\rho g_i + \partial_i p \\ n_j (\sigma_{ji} - \mu \delta_{ji}) = \bar{f}_i \text{ sur } S_2 \end{cases}$$

La solution du problème est l'unique intersection des ensembles $c_0 + C$ et $a_0 + A$. On a, d'autre part,

$$\begin{aligned}(a_0, c) &= \int_R \sigma_{ij} \partial_i u_j = \int_S \sigma_{ij} m_j u_j - \int_R u_j \partial_i \sigma_{ij} dR \\ &= \int_S m_i \sigma_{ij} u_j dS + \int_R p g_i u_i dR - \int_R u_i \partial_i p dR \\ &= \int_S m_i \sigma_{ij} u_j dS - \int_S p n_i u_i dS + \int_R p g_i u_i dR\end{aligned}$$

$$(a_0, c) = \int_{S_2} \bar{t}_i u_i dS + \int_R p g_i u_i dR$$

De plus,

$$\begin{aligned}(a, c_0) &= \int_R \sigma_{ij} \partial_i u_j dR = \int_S \sigma_{ij} m_j u_j dS - \int_R u_j \partial_i \sigma_{ij} dR \\ &= \int_S \sigma_{ij} m_j u_j dS\end{aligned}$$

$$(a, c_0) = \int_{S_1} n_j \sigma_{ij} \bar{u}_i dS$$

On se convaincra aisément du fait que

$$1) (c + c_0, c + c_0) - 2(c, a_0) = 2 \int_R F(Du) dR - 2 \int_R p g_i u_i dR - 2 \int_{S_2} \bar{t}_i u_i dS$$

(Principe de variation des vitesses ou de la puissance extrême)

$$2) (a + a_0, a + a_0) - 2(a, c_0) = 2 \int_R H(\sigma) dR - 2 \int_{S_1} n_j \sigma_{ij} \bar{u}_i dS$$

(Principe de variation des tensions ou de la puissance complémentaire extrême)

En conclusion, on peut établir le tableau ci-dessous:

$$1) \underline{p g_i = 0 \text{ et } \bar{t}_i = 0 \text{ sur } S_2}$$

$$\text{Alors, } \int_R F(Du) dR \geq \text{fct de diss.} \geq \int_R H(\sigma) dR$$

$$2) \underline{\bar{u}_i = 0 \text{ sur } S_1}$$

$$\text{Alors, } \int_R F(Du) dR \leq \text{fct de diss.} \leq \int_R H(\sigma) dR$$

6.5- Application aux principes du chapitre 5

Ici, le produit scalaire est $\int_R \mu \vec{\omega} \cdot \vec{\omega} dR$

$$= 2 \int_R F dR \quad ;$$

on a $\frac{\partial F}{\partial \omega_i} = \mu \omega_i = \lambda_i$; $H = \frac{1}{2} \frac{\lambda_i \lambda_i}{\mu} \quad (= \frac{1}{2} \mu \vec{\omega} \cdot \vec{\omega})$

On considérera les deux sous-espaces

- * C= sous-espace des champs incompressibles, homogènes, où $\vec{\omega} = \text{rot } \vec{u}$, c'est-à-dire l'ensemble des champs ω tels que:

$$\begin{cases} \bar{u}_i = 0 \text{ sur } S_2 \\ \vec{\omega} = \text{rot } \vec{u} \\ \text{div } \vec{u} = 0 \end{cases}$$

- * A= sous-espace des champs sans tourbillon. Ils vérifient les relations:

$$\begin{cases} \mu \text{rot } \vec{\omega} = 0 \\ \vec{n} \wedge \vec{\omega} = 0 \text{ sur } S_1 \end{cases}$$

On a

$$\begin{aligned} (c, a) &= \int_R \mu \text{rot } \vec{u} \cdot \vec{\omega} dR = \int_R \mu \epsilon_{ijk} \partial_j u_k \omega_i dR = \\ &= \int_S \mu \epsilon_{ijk} n_j u_k \omega_i dS - \int_R \mu \epsilon_{ijk} \omega_k \partial_j \omega_i dR = 0 \end{aligned}$$

\downarrow sur S_1 : $\vec{n} \wedge \vec{\omega} = 0$ \downarrow rot $\vec{\omega} = 0$
 S_2 : $\vec{u} = 0$

Considérons alors les champs c_0 et a_0 répondant aux conditions suivantes:

$$c_0: \begin{cases} u_i = \bar{u}_i \text{ sur } S_2 \\ \vec{\omega} = \text{rot } \vec{u} \\ \text{div } \vec{u} = 0 \end{cases}$$

$$a_0: \begin{cases} -\mu \text{rot } \vec{\omega} = \text{grad } p - \rho \vec{g} \\ \vec{n} \wedge \vec{\omega} = \vec{n} \wedge \vec{\omega} \text{ sur } S_1 \\ \mu = \bar{\mu} \text{ sur } S_1 \end{cases}$$

On peut alors calculer

$$\begin{aligned} * (c_0, a) &= \int_R \mu \text{rot } \vec{u} \cdot \vec{\omega} dR = \int_R \mu \omega_i \epsilon_{ijk} \partial_j u_k dR \\ &= \int_S \mu \omega_i \epsilon_{ijk} n_j u_k dS - \int_R \mu u_k \epsilon_{ijk} \partial_j \omega_k dR \\ &= - \int_{S_1} \bar{\mu} \cdot \mu \vec{n} \wedge \vec{\omega} dS + \int_R \mu \cdot \mu \text{rot } \vec{\omega} dR \end{aligned}$$

$$(c_0, a) = - \int_{S_1} \vec{u} \cdot \mu \vec{n} \wedge \vec{\omega} \, dS$$

$$\begin{aligned} * (c, a_0) &= \int_R \mu \operatorname{rot} \vec{u} \cdot \vec{\omega} \, dR = - \int_{S_2} \vec{u} \cdot \mu \vec{n} \wedge \vec{\omega} \, dS + \int_R \vec{u} \cdot \mu \operatorname{rot} \vec{\omega} \, dR \\ &= - \int_{S_2} \vec{u} \cdot \mu \vec{n} \wedge \vec{\omega} \, dS + \int_R p \vec{g} \cdot \vec{u} \, dR - \int_R \operatorname{grad} p \cdot \vec{u} \, dR \\ &= - \int_{S_2} \vec{u} \cdot (\bar{\mu} \vec{n} + \mu \vec{n} \wedge \vec{\omega}) \, dS + \int_R p \vec{g} \cdot \vec{u} \, dR \end{aligned}$$

Dès lors, on reconnaîtra facilement les deux principes duaux:

$$1) \quad \frac{1}{2} (c+c_0, c+c_0) - (c, a_0) = \int_R \frac{\mu \operatorname{rot} \vec{u} \cdot \operatorname{rot} \vec{u}}{2} \, dR - \int_R p \vec{g} \cdot \vec{u} \, dR + \int_{S_2} \vec{u} \cdot (\bar{\mu} \vec{n} + \mu \vec{n} \wedge \vec{\omega}) \, dS$$

(Principe de variation des vitesses)

$$2) \quad \frac{1}{2} (a+a_0, a+a_0) - (a, c_0) = \int_R \frac{\mu \vec{\omega} \cdot \vec{\omega}}{2} \, dR + \int_{S_1} \vec{u} \cdot \mu \vec{n} \wedge \vec{\omega} \, dS$$

(Principe de variation de la vorticité)

En conclusion, on peut affirmer:

$$1) \quad \underline{p \vec{g} = 0, \quad \bar{p} = 0, \quad \vec{n} \wedge \vec{\omega} = 0 \quad \text{sur } S_2}$$

$$\text{Alors, } \int_R \frac{\mu \operatorname{rot} \vec{u} \cdot \operatorname{rot} \vec{u}}{2} \, dR \geq \text{"fct de tourbillon"} \geq \int_R \frac{\mu \vec{\omega} \cdot \vec{\omega}}{2} \, dR$$

$$2) \quad \underline{= 0 \quad \text{sur } S_1}$$

$$\text{Alors, } \int_R \frac{\mu \operatorname{rot} \vec{u} \cdot \operatorname{rot} \vec{u}}{2} \, dR \leq \text{"fct de tourbillon"} \leq \int_R \frac{\mu \vec{\omega} \cdot \vec{\omega}}{2} \, dR.$$

CHAPITRE 7 - Écoulements plans de fluide parfait

Dans ce chapitre, nous nous proposons de discuter l'application de la formulation du chapitre 3 aux écoulements plans.

7.1- Dégenérescence du potentiel vecteur

Pour un écoulement plan, le potentiel vecteur peut être réduit à une seule composante. En effet, on a, par définition

$$\begin{aligned}\rho u_1 &= \partial_2 A_3 - \partial_3 A_2 \\ \rho u_2 &= \partial_3 A_1 - \partial_1 A_3 \\ \rho u_3 &= \partial_1 A_2 - \partial_2 A_1\end{aligned}$$

Pour un écoulement plan, \vec{A} ne peut dépendre de la cote z . On a donc

$$\partial_3 A_2 = 0 \quad \text{et} \quad \partial_3 A_1 = 0$$

D'autre part, A_2 ne peut dépendre de x_1 , ni A_3 de x_2 sans quoi une variation de \vec{A} entraînerait la naissance de vitesses u_3 .

On peut donc écrire :

$$\vec{A} = (0, 0, A_3) + ((A_1(x_1), A_2(x_2), 0))$$

Le second vecteur est visiblement un gradient de fonction scalaire et on peut le supprimer sans altérer le mouvement ("invariance de jauge"). Alors,

$$\vec{A} = (0, 0, \psi) \quad \text{et} \quad \rho u_1 = \partial_2 \psi ; \quad \rho u_2 = -\partial_1 \psi .$$

La fonction ψ est communément appelée fonction de courant. Mais ce qu'il importe de remarquer, c'est que la dégenérescence du potentiel vecteur, elle conserve la propriété de borner l'énergie cinétique.

En termes de la fonction de courant, la fonctionnelle J_5 du chapitre 3 s'écrit:

$$J_5^{\mu} = \int_R \frac{\partial_i \psi \partial_i \psi}{2\rho} dS + \int_{S_1} \bar{u}_t \psi dS$$

Quant à J_1 , elle garde sa forme :

$$J_1 = \int_R \rho \frac{\partial_i \psi \partial_i \psi}{2} dS - \int_{S_2} \rho \bar{u}_n \psi dS$$

On voit que les deux formes sont tout à fait similaires. Dans les applications pratiques, on peut diviser les fonctionnelles par ρ et redéfinir ψ par les relations

$$u_1 = \partial_2 \psi \quad \text{et} \quad u_2 = -\partial_1 \psi$$

$$\text{Alors,} \quad J_5^u = \int_R \frac{\partial_i \psi \partial_i \psi}{2} dR + \int_{S_1} \bar{u}_t \psi dS$$

$$J_1^u = \int_R \frac{\partial_i \psi \partial_i \psi}{2} dR - \int_{S_2} \bar{u}_n \psi dS$$

Cela revient à choisir un système d'unités où la masse volumique serait égale à 1. Sous cette forme, les deux problèmes peuvent être traités par le même élément fini, à condition de changer l'ordre des vitesses par la correspondance:

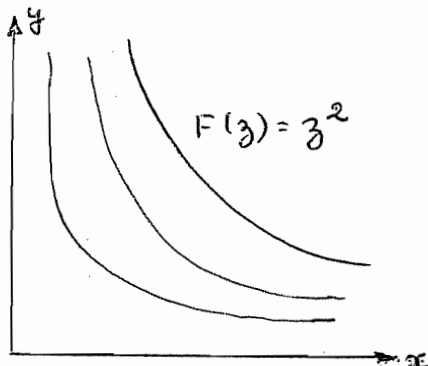
ψ	Ψ
u_1	$-u_2$
u_2	u_1
u_n	$-u_t$

Rappelons que u_t désigne la vitesse tangentielle, prise dans le sens de parcours "aire à gauche".

Nous avons construit un élément fini triangulaire de degré variable pour ces deux principes. On en trouvera une description dans l'annexe. Il est conçu pour s'intégrer dans le programme ASEP du LTAS.

7.2- Application à l'étude d'un écoulement en canal courbe

Ce problème nous a été proposé par M. le professeur SMOLDEREN. Il s'agit de montrer les résultats que l'on peut obtenir en utilisant un modèle simple: éléments triangulaires en petit nombre. On choisit un écoulement particulier, celui autour d'un angle droit, caractérisé par la fonction complexe: $F(z) = z^2$, dont on prend une portion entre deux lignes de courant. Tous les



noeuds ont été pris approximativement au croisement d'équipotentiels et de lignes de courant, ce qui permet une vérification simple des résultats. On trouvera ci-contre un schéma de l'écoulement considéré. Les conditions aux limites sont représentées ci-dessous.

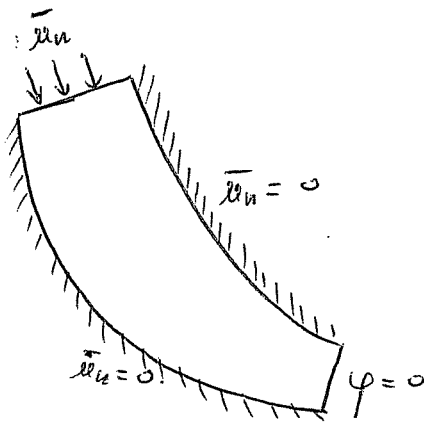


fig. 1

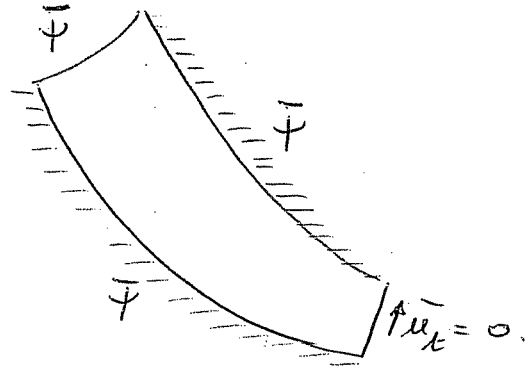


fig. 2

Pour l'approche par la fonction de courant, on pose $\bar{u}_t = 0$, et $\bar{\psi}$ est imposé sur les surfaces latérales. A l'entrée, il faut imposer la vitesse normale par le biais de ψ . Cela signifie que si l'on ne connaît que les vitesses, il faut évaluer la fonction de courant par un moyen d'intégration quelconque. Dans notre cas, on a imposé les valeurs théoriques de la fonction de courant.

Avec le potentiel des vitesses, il faut imposer $\psi = 0$ à l'extrémité (condition homogène); $\bar{u}_n = 0$ sur les contours latéraux; la vitesse normale est imposée à l'entrée. Ces vitesses sont concentrées par le programme en espèces de sources énergétiquement équivalentes au droit des noeuds du modèle. (cfr; annexe).

On vérifiera aisément que les conditions sont remplies pour avoir une bornation de l'énergie cinétique. On trouvera:

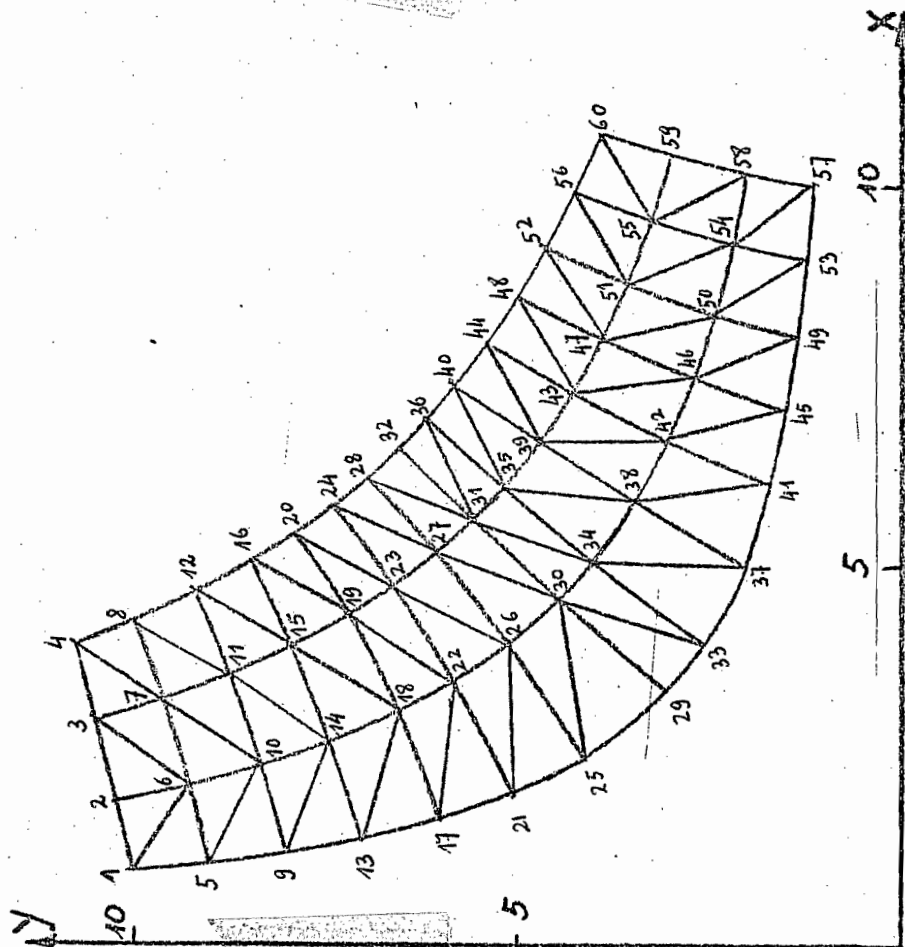
$$T(\psi) \geq T \geq T(\bar{\psi}) .$$

La différence donnera une mesure de la qualité des deux approches.

Le lecteur trouvera, page 7.4, le modèle par éléments finis. Les pages 7.5 à 7.19 contiennent les résultats obtenus. Le programme général de résolution ASEP ayant été conçu pour le calcul des structures, on ne s'étonnera pas de trouver des titres comme " contraintes " ou " déplacements " . (voir correspondance en annexe). Pour ne pas alourdir, nous ne donnons qu'une partie des résultats.

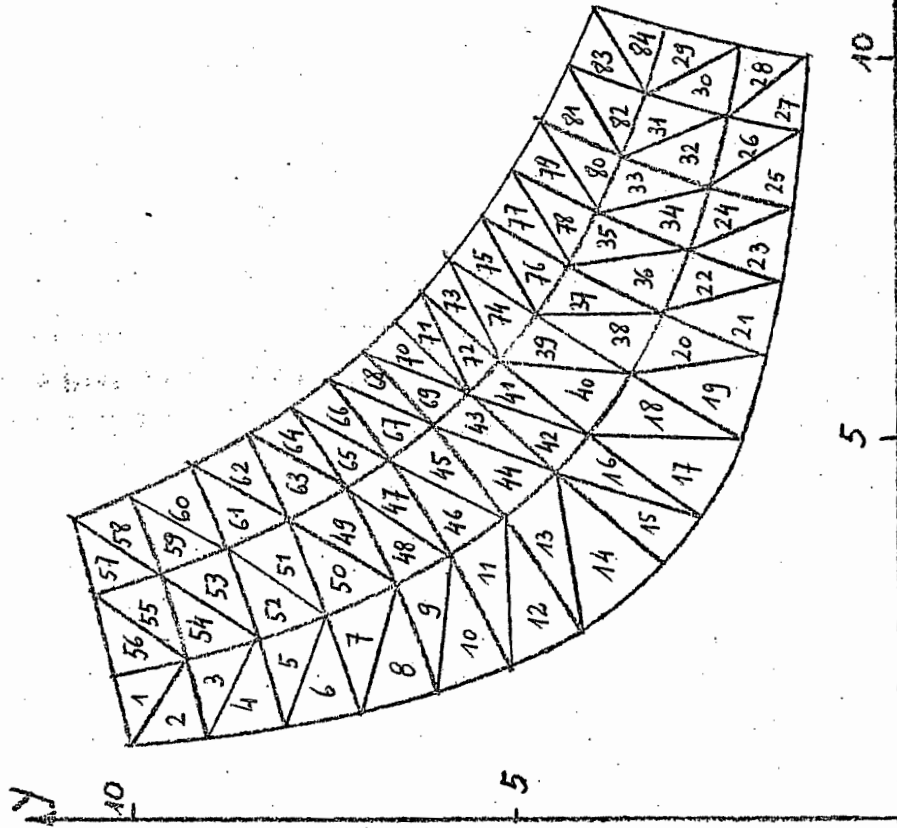
CANALISATION COURBE

ANALYSE DUALE ψ/ψ
60 NOEUDS . 84 ELTS.



CANALISATION COURBE

ANALYSE DUALE ψ/ψ
60 NOEUDS . 84 ELTS.



NOMBRE DE CAS DE CHARGE IPAN 1
 OPTION D IMPRESSIONS DE CONTROLE IOP 0
 OPTION D IMPRESSION DES CONTRAINTES ISTRES GENERAL 0

 CONTRAINTES POUR LE CAS DE CHARGE NR 1

ELMT NO	NOEUDS			TYPE	$-u_y(\psi)$	$u_x(\psi)$
1	2	1	5	40	20.2626	2.24913
2	1	5	6	40	18.2096	2.02125
3	5	10	6	40	17.7422	4.68320
4	5	9	10	40	16.4010	2.27975
5	9	14	10	40	15.7958	5.19659
6	9	13	14	40	14.7622	2.64244
7	13	18	14	40	13.8246	5.76644
8	13	17	18	40	13.0974	3.11719
9	17	22	18	40	11.8866	6.34147
10	17	21	22	40	11.5842	3.85754
11	21	26	22	40	10.0384	6.87939
12	21	25	26	40	10.1115	5.05576
13	25	30	26	40	8.46180	7.33938
14	25	29	30	40	8.71792	6.50591
15	29	33	30	40	7.00354	8.43800
16	33	34	30	40	7.52088	8.33403
17	33	37	34	40	5.05480	10.1096
18	37	38	34	40	6.92004	10.0350
19	37	41	38	40	3.84381	11.5430
20	41	42	38	40	6.36567	11.8814
21	41	45	42	40	3.12389	13.1256

=====
CALCUL DES CONTRAINTES
=====

NOMBRE DE CAS DE CHARGE IPAN 1
 OPTION C IMPRESSIONS DE CONTROLE IOP 0
 OPTION D IMPRESSION DES CONTRAINTES LISTRES GENERAL 0

CONTRAINTES POUR LE CAS DE CHARGE NR 1

ELMT NO	NOEUDS				TYPE	$\mu_x(\varphi)$	$\mu_y(\varphi)$
1	2	1	5	40	-7.61006	-14.6972	
2	1	5	6	40	5.63679	-13.2268	
3	5	10	6	40	6.11803	-15.9674	
4	5	9	10	40	4.92881	-18.0985	
5	9	14	10	40	4.39576	-15.5292	
6	9	13	14	40	4.67574	-14.8373	
7	13	18	14	40	4.52402	-14.3319	
8	13	17	18	40	5.03638	-12.4651	
9	17	22	18	40	5.23157	-12.9849	
10	17	21	22	40	5.55983	-10.2888	
11	21	26	22	40	6.25655	-11.6508	
12	21	25	26	40	6.12183	-8.29111	
13	25	30	26	40	7.60082	-10.3384	
14	25	29	30	40	6.48577	-6.70976	
15	29	33	30	40	6.61684	-6.85748	
16	33	34	30	40	10.3079	-7.59923	
17	33	37	34	40	8.25936	-6.12427	
18	37	38	34	40	11.6663	-6.26054	
19	37	41	38	40	10.2560	-5.56926	
20	41	42	38	40	13.0054	-5.20032	
21	41	45	42	40	12.3678	-4.95562	

CAS DE CHARGE NR 1

ENERGIE POTENTIELLE TOTALE

1.310447 DOH

7.7

DEPLACEMENTS AUX NOEUDS

DANS LES AXES STRUCTURAUX

NOEUD	COMPOSANTE	D.D.L.	DEPLACEMENT φ	CHARGE OU REACTIO μm
1	1	1	-1.939969D 02	-1.025344D 01
2	1	2	-2.038116D 02	-2.116629D 01
3	1	3	-1.988870D 02	-2.253363D 01
4	1	4	-1.971570D 02	-1.176603D 01
5	1	5	-1.801445D 02	2.819966D-14
6	1	6	-1.763695D 02	5.384182D-14
7	1	7	-1.801997D 02	1.311884D-13
8	1	8	-1.766689D 02	-1.540990D-13
9	1	9	-1.613609D 02	-2.491340D-13
10	1	10	-1.599463D 02	2.073897D-13
11	1	11	-1.606689D 02	-8.526513D-14
12	1	12	-1.605408D 02	-4.256595D-13
13	1	13	-1.456866D 02	-3.692602D-13
14	1	14	-1.453941D 02	3.042011D-14
15	1	15	-1.450947D 02	3.126388D-13
16	1	16	-1.449953D 02	-7.505108D-14
17	1	17	-1.320229D 02	-1.612044D-13
18	1	18	-1.315117D 02	3.685940D-14
19	1	19	-1.316411D 02	-1.776357D-14
20	1	20	-1.316726D 02	-9.703349D-14
21	1	21	-1.198827D 02	-2.322587D-13

1.311690 D 04.

7.8

DEPLACEMENTS AUX NOEUDS

ψ

DANS LES AXES STRUCTURAUX

NOEUD	COMPOSANTE	D.D.L.	DEPLACEMENT ψ	CHARGE CU REACTION μt
1	1	1	2.000000D 01	-1.132112D 01
2	1	2	4.060000D 01	-2.523128D-01
3	1	3	6.234000D 01	2.000102D-01
4	1	4	8.580000D 01	1.113972D 01
5	1	5	2.000000D 01	-1.773615D 01
6	1	6	4.114502D 01	-1.427747D-13
7	1	7	6.213145D 01	-1.776357D-14
8	1	8	8.580000D 01	1.833609D 01
9	1	9	2.000000D 01	-1.636541D 01
10	1	10	4.033314D 01	5.995204D-15
11	1	11	6.221960D 01	-4.618528D-14
12	1	12	8.580000D 01	1.576770D 01
13	1	13	2.000000D 01	-1.468380D 01
14	1	14	4.047085D 01	-5.329071D-14
15	1	15	6.223489D 01	4.218847D-14
16	1	16	8.580000D 01	1.454009D 01
17	1	17	2.000000D 01	-1.303804D 01
18	1	18	4.051738D 01	1.820766D-14
19	1	19	6.222814D 01	-4.596323D-14
20	1	20	8.580000D 01	-1.271875D 01

7.4- Etude des résultats

7.4.1 - L'énergie cinétique donne bien les relations

$$T(\psi) \geq T(\varphi) ; T(\psi) \approx T(\varphi).$$

Les deux approches sont donc suffisantes. On notera cependant que la valeur trouvée est dans les deux cas supérieure à la valeur théorique. Cela est dû à la polygonalisation des contours du modèle qui a pour effet notamment de rétrécir légèrement la section de passage. Mais dans le cadre du modèle choisi, on a encadrement de l'énergie.

Les vitesses moyennes diffèrent assez sensiblement d'une approche à l'autre. Cela est dû au découpage triangulaire.

7.4.2 - Etude des aberrations de découpage, dans le cas des éléments linéaires.

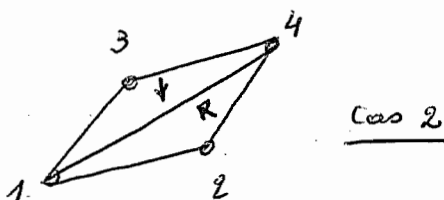
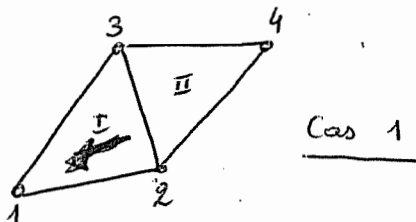
Il y a, en fait, deux phénomènes distincts:

- 1) Les valeurs de φ ou ψ étant imposées aux sommets d'un quadrilatère, les vitesses diffèrent selon que l'on découpe le quadrilatère selon l'une ou l'autre diagonale. C'est l'anisotropie de dérivation.
- 2) La matrice de raideur elle-même diffère d'un cas à l'autre: c'est l'anisotropie de raideur.

7.4.2.1- Etude de l'anisotropie de dérivation

Il n'est pas indifférent, du point de vue des vitesses moyennes dans les éléments, de découper un quadrilatère comme dans la figure 1 ou comme dans la figure 2. Dans ces figures, les flèches représentent les vitesses pour

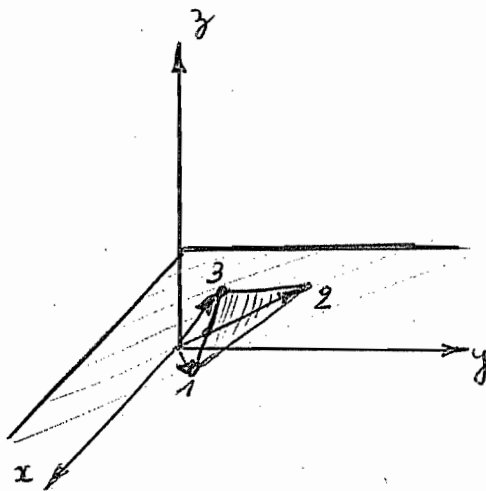
$\varphi_1 = 1$; $\varphi_2 = 0$; $\varphi_3 = 0$; $\varphi_4 = 0$. On voit que c'est fort différent. Mais lorsqu'on prend la moyenne des deux triangles, pondérée par les aires respectives, soit



$$\frac{S_I \vec{u}_I + S_{II} \vec{u}_{II}}{S_I + S_{II}}$$

les résultats sont identiques dans les deux cas, pour des éléments linéaires. Pour le montrer, utilisons les "coordonnées triangulaires" définies par:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ 1 \end{pmatrix}$$



$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_A \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix}$$

dtm $A = \pm 2S$ ($S =$ aire du triangle)

La signature du déterminant est $(+)$ si le trièdre est drotier, ce qui a lieu si les points

1, 2, 3 sont numérotés lors d'un parcours "aire à gauche". Les dérivées se correspondent par la formule:

$$\partial_i \varphi = \tilde{A}_{ij}^{-1} \frac{\partial \varphi}{\partial \lambda_j}$$

avec

$$\tilde{A}_{ij}^{-1} = \frac{1}{2S} \begin{pmatrix} y_2 - y_3 & y_3 - y_1 & y_1 - y_2 \\ x_2 - x_3 & x_3 - x_1 & x_1 - x_2 \\ x_1 y_3 - x_3 y_1 & x_3 y_1 - x_1 y_3 & x_1 y_2 - x_2 y_1 \end{pmatrix}$$

Pour φ linéaire,

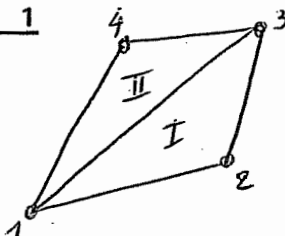
$$\varphi = \lambda_1 \varphi_1 + \lambda_2 \varphi_2 + \lambda_3 \varphi_3$$

et:

$$\begin{pmatrix} \partial_1 \varphi \\ \partial_2 \varphi \end{pmatrix} = \frac{1}{2S} \begin{pmatrix} y_2 - y_3 & y_3 - y_1 & y_1 - y_2 \\ x_2 - x_3 & x_3 - x_1 & x_1 - x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \end{pmatrix}$$

Considérons alors deux cas :

CAS 1



Triangle 1 (1, 2, 3)

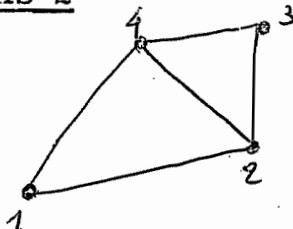
$$\text{grad } \varphi = \frac{1}{2S_1} \begin{pmatrix} y_2 - y_3 & y_3 - y_1 & y_1 - y_2 & 0 \\ x_2 - x_3 & x_3 - x_1 & x_1 - x_2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \\ \varphi_4 \end{pmatrix}$$

Triangle 2 (1, 3, 4)

$$\text{grad } \varphi = \frac{1}{2S_2} \begin{pmatrix} y_3 - y_4 & 0 & y_4 - y_1 & y_1 - y_3 \\ x_3 - x_4 & 0 & x_4 - x_1 & x_1 - x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \\ \varphi_4 \end{pmatrix}$$

La moyenne pondérée est donc: $\frac{1}{2S} \begin{pmatrix} y_2 - y_4 & y_3 - y_1 & y_4 - y_2 & y_1 - y_3 \\ x_2 - x_4 & x_3 - x_1 & x_4 - x_2 & x_1 - x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \\ \varphi_4 \end{pmatrix}$

CAS 2



Triangle 1 (1, 2, 4)

$$\text{grad } \varphi = \frac{1}{2S_1} \begin{pmatrix} y_2 - y_4 & y_4 - y_1 & 0 & y_1 - y_2 \\ x_2 - x_4 & x_4 - x_1 & 0 & x_1 - x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \\ \varphi_4 \end{pmatrix}$$

Triangle 2 (2, 3, 4)

$$\text{grad } \varphi = \frac{1}{2S_2} \begin{pmatrix} 0 & y_3 - y_4 & y_4 - y_2 & y_2 - y_3 \\ 0 & x_3 - x_4 & x_4 - x_2 & x_2 - x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \\ \varphi_4 \end{pmatrix}$$

La moyenne pondérée est donc: $\frac{1}{2S} \begin{pmatrix} y_2 - y_4 & y_3 - y_1 & y_4 - y_2 & y_1 - y_3 \\ x_2 - x_4 & x_3 - x_1 & x_4 - x_2 & x_1 - x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \\ \varphi_4 \end{pmatrix}$

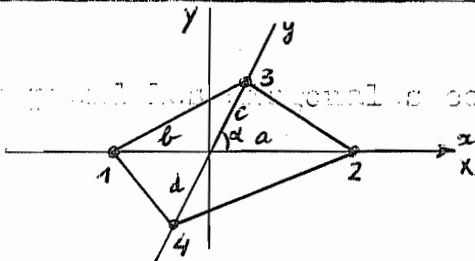
Ainsi, la moyenne pondérée par les aires est invariante.

C'est donc cette seule quantité qui peut servir de base pour la comparaison. Lorsque $S_1 \neq S_2$, on peut simplifier en prenant

$$(\text{grad } \varphi)_{\text{moy}} \approx \frac{\text{grad } \varphi(1) + \text{grad } \varphi(2)}{2}$$

L'erreur est très faible si les cellules quadrangulaires sont approximativement des parallélogrammes.

7. 4.2.2 - Anisotropie de raideur



Soit un quadrilatère, dont on prend les diagonales comme axes. Les composantes de ces axes dans un système orthonormé dont le premier axe coïncide avec le précédent sont données par :

$$\vec{E}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} ; \quad \vec{E}_2 = \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix}$$

La transformation est linéaire. La matrice jacobienne s'écrit

$$J = \begin{pmatrix} 1 & \cos \alpha & 0 \\ 0 & \sin \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et son déterminant vaut $\sin \alpha$. Les dérivées du système orthonormé se transforment par la formule classique

$$\partial_i \varphi = \tilde{J}_{ij}^{-1} \partial_j \varphi$$

Définissons des coordonnées triangulaires dans le système orthogonal :

$$\vec{X} = \lambda_1 \vec{X}_1 + \lambda_2 \vec{X}_2 + \lambda_3 \vec{X}_3$$

On a aussi

$$J^{-1} \vec{X} = \lambda_1 J^{-1} \vec{X}_1 + \lambda_2 J^{-1} \vec{X}_2 + \lambda_3 J^{-1} \vec{X}_3$$

soit $\vec{x} = \lambda_1 \vec{x}_1 + \lambda_2 \vec{x}_2 + \lambda_3 \vec{x}_3 = (\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3) \vec{\lambda} = A \vec{\lambda}$

Les coordonnées triangulaires gardent donc la même définition en axes obliques. Les dérivées peuvent donc se calculer par

$$\partial_i \varphi = \tilde{J}_{ij}^{-1} \partial_j \varphi = \tilde{J}_{ij}^{-1} \tilde{A}_{jk}^{-1} \frac{\partial \varphi}{\partial \lambda_k} = [\tilde{J}A]^{-1}_{ik} \frac{\partial \varphi}{\partial \lambda_k}$$

avec

$$JA = \begin{pmatrix} 1 & \cos \alpha & 0 \\ 0 & \sin \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Pour le triangle (1,2,3),

$$J = \begin{pmatrix} -a & b & 0 \\ a & 0 & c \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

et

$$JA = \begin{pmatrix} -a & b & c \cos \alpha \\ 0 & 0 & c \sin \alpha \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Ce qui donne

$$[\widetilde{JA}]' = \frac{1}{(a+b)c \sin \alpha} \begin{pmatrix} -c \sin \alpha & c \sin \alpha & 0 \\ -b + c \cos \alpha & -c \cos \alpha - a & a+b \\ b c \sin \alpha & a c \sin \alpha & 0 \end{pmatrix}$$

et

$$\begin{pmatrix} \partial_1 \varphi \\ \partial_2 \varphi \end{pmatrix} = \frac{1}{(a+b)c \sin \alpha} \begin{pmatrix} -c \sin \alpha & c \sin \alpha & 0 \\ c \cos \alpha - b & -c \cos \alpha - a & 0 \end{pmatrix}$$

L'interpolation linéaire de φ peut s'écrire

$$\varphi = \lambda_1 q_1 + \lambda_2 q_2 + \lambda_3 q_3$$

Par conséquent,

$$\partial_i \varphi \partial_j \varphi = (q_1 \ q_2 \ q_3) \frac{1}{(a+b)^2 c^2 \sin^2 \alpha} \begin{pmatrix} -c \sin \alpha & c \cos \alpha - b \\ c \sin \alpha & -(c \cos \alpha + a) \\ 0 & a+b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -c \sin \alpha & c \sin \alpha & 0 \\ (c \cos \alpha - b) & -(c \cos \alpha + a) & a+b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix}$$

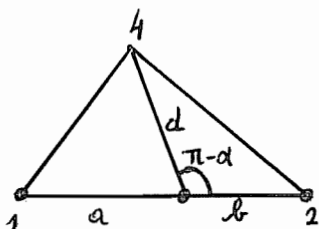
soit

$$\partial_i \varphi \partial_j \varphi = q' K q.$$

K est la matrice de raideur de l'élément. Pour l'assemblage dans le quadrilatère, il suffit de la gonfler au moyen de zéros :

$$K^{(1)} = \frac{1}{(a+b)^2 c^2 \sin^2 \alpha} \begin{pmatrix} b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha & -c^2 + ab - (a-b)c \cos \alpha & (a+b)(c \cos \alpha - b) & 0 \\ a^2 + c^2 + 2acc \cos \alpha & -(a+b)(a + c \cos \alpha) & 0 & 0 \\ \text{SYM.} & (a+b)^2 & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La matrice de raideur du triangle (1,2,4) s'obtient à partir de la première, en notant que



$$\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha$$

$$\cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha$$

et en considérant la figure ci-contre. (Remarquons que l'énergie cinétique est indépendante de la direction de la vitesse

et donc aussi de l'orientation du triangle)

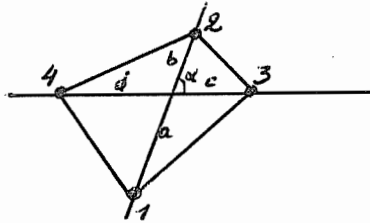
On obtient

$$K^{(2)} = \frac{1}{(a+b)^2 d^2 \sin^2 \alpha} \begin{pmatrix} b^2 + d^2 + 2bd \cos \alpha & ab + (a-b)d \cos \alpha - d^2 & 0 & -(a+b)(d \cos \alpha + b) \\ a^2 + d^2 - 2ad \cos \alpha & & 0 & -(a+b)(a - d \cos \alpha) \\ \text{SYM.} & & 0 & (a+b)^2 \end{pmatrix}$$

La matrice de raideur du quadrilatère est donnée par

$$K = K^{(1)} + K^{(2)} = \begin{pmatrix} \frac{2c^2 d^2 + b^2(c^2 + d^2) + 2 \cos \alpha bcd(c-b)}{c^2 d^2 (a+b)^2 \sin^2 \alpha} & \frac{ab(c^2 + d^2) + (a-b)(c-d)c d \cos \alpha - 2c^2 d^2}{(a+b)^2 c^2 d^2 \sin^2 \alpha} & \frac{c \cos \alpha - b}{(a+b)c^2 \sin^2 \alpha} & \frac{b - d \cos \alpha}{(a+b)d^2 \sin^2 \alpha} \\ \text{SYM.} & \frac{2c^2 d^2 + a^2(c^2 + d^2) + 2 \cos \alpha acd(d-c)}{c^2 d^2 (a+b)^2 \sin^2 \alpha} & \frac{a + c \cos \alpha}{c^2 (a+b) \sin^2 \alpha} & \frac{d \cos \alpha - a}{d^2 (a+b) \sin^2 \alpha} \\ & & \frac{1}{c^2 \sin^2 \alpha} & 0 \\ & & & \frac{1}{d^2 \sin^2 \alpha} \end{pmatrix}$$

Le cas où l'on coupe par la diagonale 4-3 est équivalent au problème représenté ci-dessous:



On retrouve le problème précédent moyennant les correspondances

$$\begin{array}{ll} a \rightarrow d & 1 \rightarrow 4 \\ c \rightarrow b & 2 \rightarrow 3 \\ b \rightarrow c & 3 \rightarrow 2 \\ d \rightarrow a & 4 \rightarrow 1 \end{array} ;$$

La matrice de raideur s'écrit donc

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{a^2 \sin^2 \alpha} & 0 & \frac{a \cos \alpha - d}{a^2 (c+d) \sin^2 \alpha} & \frac{a \cos \alpha + c}{a^2 (c+d) \sin^2 \alpha} \\ \frac{1}{b^2 \sin^2 \alpha} & -\frac{d + b \cos \alpha}{b^2 (c+d) \sin^2 \alpha} & \frac{b \cos \alpha - c}{(c+d) b^2 \sin^2 \alpha} & \frac{b \cos \alpha - c}{(c+d) b^2 \sin^2 \alpha} \\ \text{SYM.} & \frac{2a^2 b^2 + d^2(a^2 + b^2) + 2 \cos \alpha abd(a-b)}{a^2 b^2 (c+d)^2 \sin^2 \alpha} & \frac{dc(a^2 + b^2) + (d-c)(b-a)ab \cos \alpha - 2a^2 b^2}{(c+d)^2 ab \sin^2 \alpha} & \frac{2a^2 b^2 + c^2(a^2 + b^2) + 2 \cos \alpha abc(b-a)}{a^2 b^2 (c+d)^2 \sin^2 \alpha} \end{pmatrix}$$

L'anisotropie est nulle si les deux matrices sont égales.

Considérons d'abord le cas particulier où $\alpha = \frac{\pi}{2}$.

* L'égalité des composantes (1,3) exige

$$-\frac{b}{(a+b)c^2} = -\frac{d}{a^2(c+d)} \quad (1)$$

* Pour les composantes (1,4), il faut:

$$\frac{b}{(a+b)d^2} = \frac{c}{a^2(c+d)} \quad (2)$$

Divisant les équations (1) et (2) membre à membre, on obtient $c/d = 1$, soit $\boxed{c=d}$.

L'égalité des composantes (2,3) entraîne:

$$-\frac{a}{c^2(a+b)} = -\frac{d}{b^2(c+d)} \quad (3)$$

Divisant les relations (1) et (3) membre à membre, on trouve

$$\boxed{b=a.}$$

L'égalité des composantes (1.2) s'écrit, si l'on tient compte des relations $c=d$ et $a=b$:

$$2a^2c^2 - 2c^4 = 0, \text{ d'où } \underline{c=a}$$

On obtient donc $a = b = c = d$. (Carré)

Il est facile de vérifier que l'égalité des autres composantes sous cette condition. C'est évidemment la seule condition indépendante de α qui puisse convenir. Or pour α quelconque, $a = b = c = d$ donne

$$K = \frac{1}{4a^2 \sin^2 \alpha} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2(\cos \alpha - 1) & -2(\cos \alpha + 1) \\ & 4 & -2(1 + \cos \alpha) & +2(\cos \alpha - 1) \\ & \text{SYM} & 4 & 0 \\ & & & 4 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{dans les} \\ \underline{2 \text{ cas}} \end{array}$$

dans les deux cas de découpage. (Rectangle)

7.4.2.3 - Conclusion

Les cellules rectangulaires sont insensibles au sens de découpage. On s'arrangera donc pour avoir un découpage sensiblement rectangulaire. Dans ce cas, on fera la moyenne arithmétique des vitesses sur les deux éléments d'une cellule.

Nous avons suivi cette méthode pour établir les diagrammes de vitesses ci-dessous. En abscisse, il s'agit d'une coordonnée arbitraire correspondant aux numéros d'éléments. Chaque courbe correspond à un "couloir" d'éléments.

7.4.3-Comparaison des vitesses $u(\psi)$ et $u(\varphi)$ et $u(\text{exact})$

Les diagrammes qui suivent sont suffisamment parlants: les vitesses sont très voisines, sauf dans le voisinage immédiat de l'entrée du canal. La raison de cette différence est à rechercher dans les conditions aux limites. Pour la fonction de courant, on impose la valeur de ψ , calculée au besoin par

$$\psi(x_1) = \psi(x_0) - \int_{x_0}^{x_1} u_n dx$$

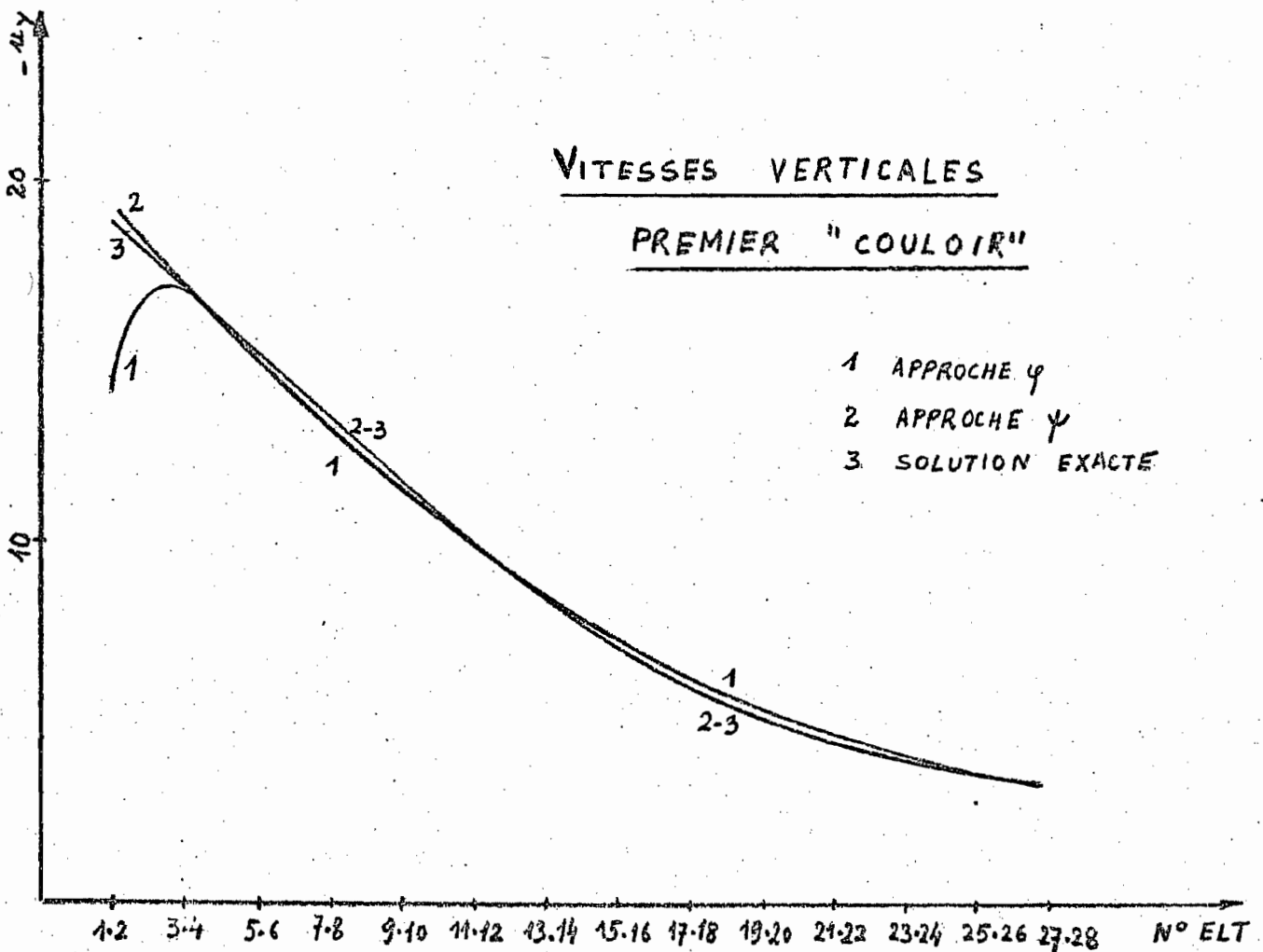
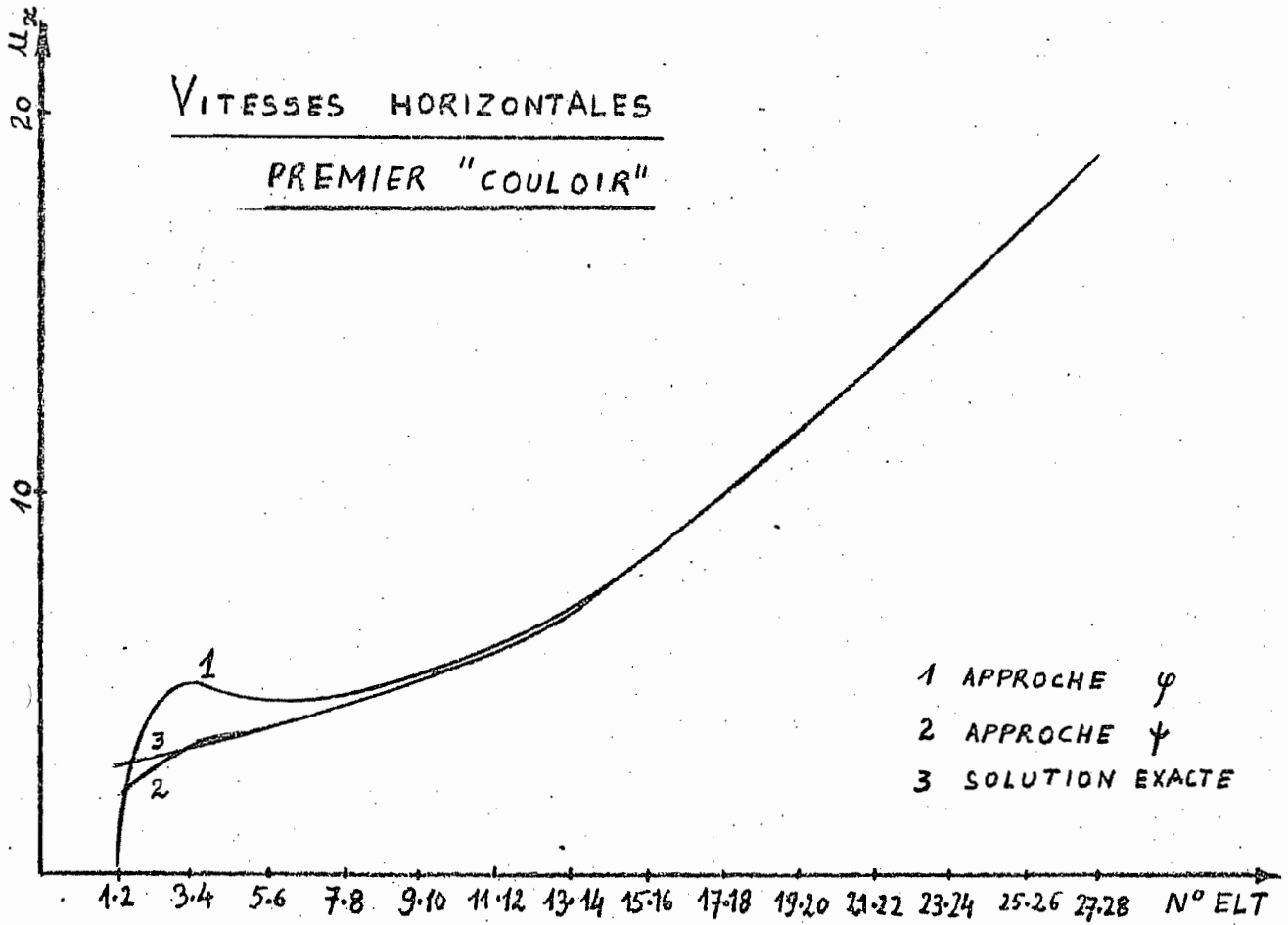
Éléments	$-\mu_y(\psi)$	$-\mu_y^{calc.}$	$-\mu_y(\varphi)$	Éléments	$-\mu_y(\psi)$	$-\mu_y^{calc.}$	$-\mu_y(\varphi)$
1.2	19,2361	19,1167	13,9620	43.44	10,7096	10,6633	10,57885
3.4	17,0716	17,2333	17,0329	45.46	11,8552	11,7050	11,5889
5.6	15,2795	15,3467	15,1832	47.48	13,1272	13,0267	12,9310
7.8	13,4160	13,4917	13,4985	49.50	14,5853	14,495	14,3750
9.10	11,7354	11,6967	11,6368	51.52	16,1949	16,1000	15,9677
11.12	10,0749	9,97833	9,97095	53.54	18,0249	17,8667	17,6129
13.14	8,58986	8,53000	8,52408	55.56	19,6323	19,6533	23,9712
15.16	7,26221	7,17000	7,22835	57.58	20,3758	20,3100	20,9343
17.18	5,98742	6,01000	6,19240	59.60	18,6786	18,6300	18,6611
19.20	5,10474	5,16467	5,38479	61.62	17,1833	17,1133	17,0437
21.22	4,47358	4,49500	4,67570	63.64	15,8207	15,7467	15,6505
23.24	3,95279	3,96633	4,09764	65.66	14,6997	14,5267	14,4292
25.26	3,53352	3,52067	3,59762	67.68	13,4774	13,4500	13,3656
27.28	3,17426	3,16367	3,20844	69.70	12,6398	12,5967	12,5087
29.30	5,20507	5,24333	5,33437	71.72	11,7886	11,8117	11,6897
31.32	5,75726	5,76667	5,81364	73.74	10,9332	10,9400	10,90169
33.34	6,42276	6,38000	6,42600	75.76	10,16641	10,1267	10,14218
35.36	7,04739	7,06667	7,11458	77.78	9,25603	9,36000	9,37161
37.38	7,82970	7,82333	7,82412	79.80	8,60315	8,61333	8,62310
39.40	7,67434	8,70000	8,68412	81.82	7,81968	7,94333	8,15392
41.42	9,70027	9,68500	9,09669	83.84	7,35659	7,29667	7,13478

Vitesse verticale. Moyennes sur 2 éléments

à deux éléments

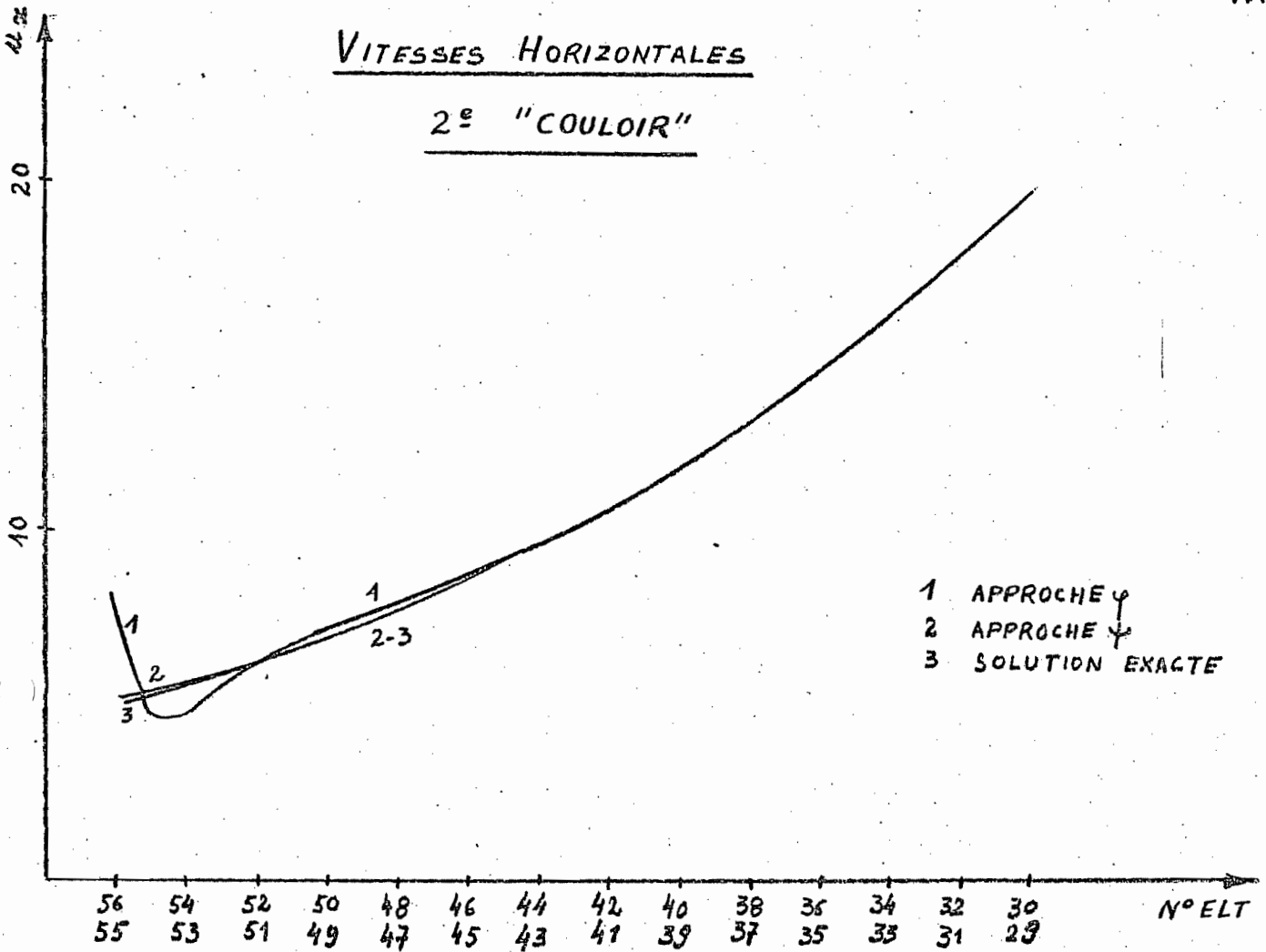
Éléments	$u_x(y)$	$u_x^{calc.}$	$u_x(y)$	Éléments	$u_x(y)$	$u_x^{calc.}$	$u_x(y)$
1. 2	2,13519	2,82400	-0,98662	43. 44	9,52665	9,5833	9,55198
3. 4	3,48147	3,54400	5,52342	45. 46	8,64556	8,71500	8,75107
5. 6	3,91951	3,95800	4,53575	47. 48	7,74983	7,83833	7,88613
7. 8	4,44181	4,49333	4,77520	49. 50	6,46019	7,05500	7,10357
9. 10	5,09950	5,15633	5,39570	51. 52	6,28242	6,35667	6,20558
11. 12	5,96757	6,09167	6,18919	53. 54	5,62610	5,74333	4,71346
13. 14	6,97264	6,94500	7,04329	55. 56	5,39221	5,24667	8,33074
15. 16	8,38601	8,30667	8,46237	57. 58	7,42196	7,27667	8,26299
17. 18	10,0123	9,97000	9,96283	59. 60	7,88625	7,93333	8,16663
19. 20	11,7122	11,6833	11,6307	61. 62	8,54378	8,63000	8,66302
21. 22	13,4890	13,4967	13,4072	63. 64	9,31994	9,36833	9,36298
23. 24	15,2741	15,3333	15,2679	65. 66	10,04749	10,1467	10,12913
25. 26	17,1918	17,2767	17,2143	67. 68	11,0065	10,9533	10,91355
27. 28	19,2204	19,2300	19,0984	69. 70	11,6893	11,6967	11,6990
29. 30	19,7514	19,7633	19,6413	71. 72	12,5554	12,4867	12,3504
31. 32	17,9953	17,9267	17,8430	73. 74	13,4863	13,4747	13,2991
33. 34	16,2133	16,1300	16,5656	75. 76	14,6012	14,5600	14,4570
35. 36	14,6026	14,5400	14,4958	77. 78	15,8884	15,7667	15,6644
37. 38	13,1946	13,1033	13,0445	79. 80	17,1596	17,1367	17,0014
39. 40	11,7953	11,7533	11,6939	81. 82	18,7227	18,6367	18,5060
41. 42	10,5865	10,5500	10,51278	83. 84	20,4370	20,3433	20,3842

Planches horizontales - étagées sur deux éléments



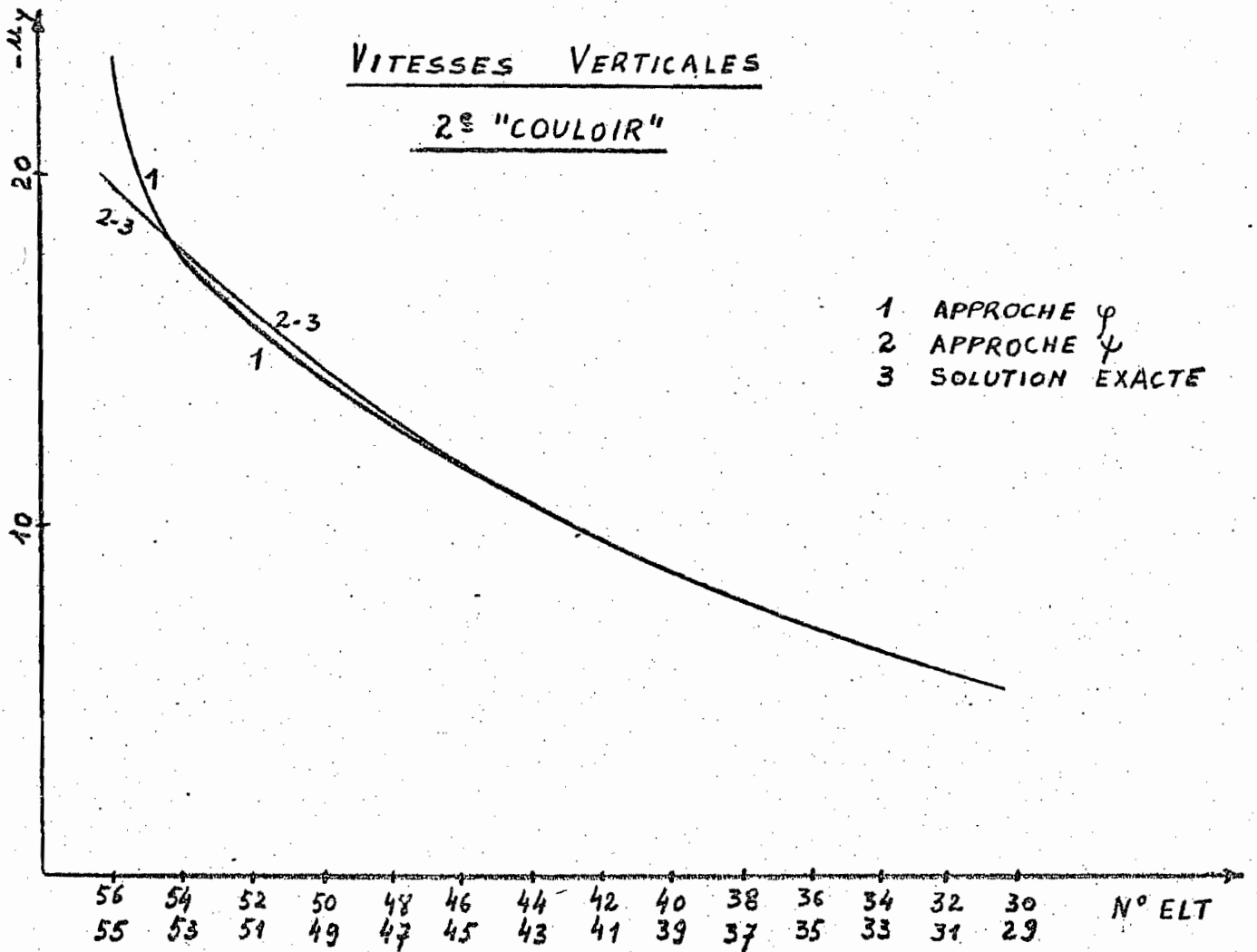
VITESSES HORIZONTALES

2^e "COULOIR"



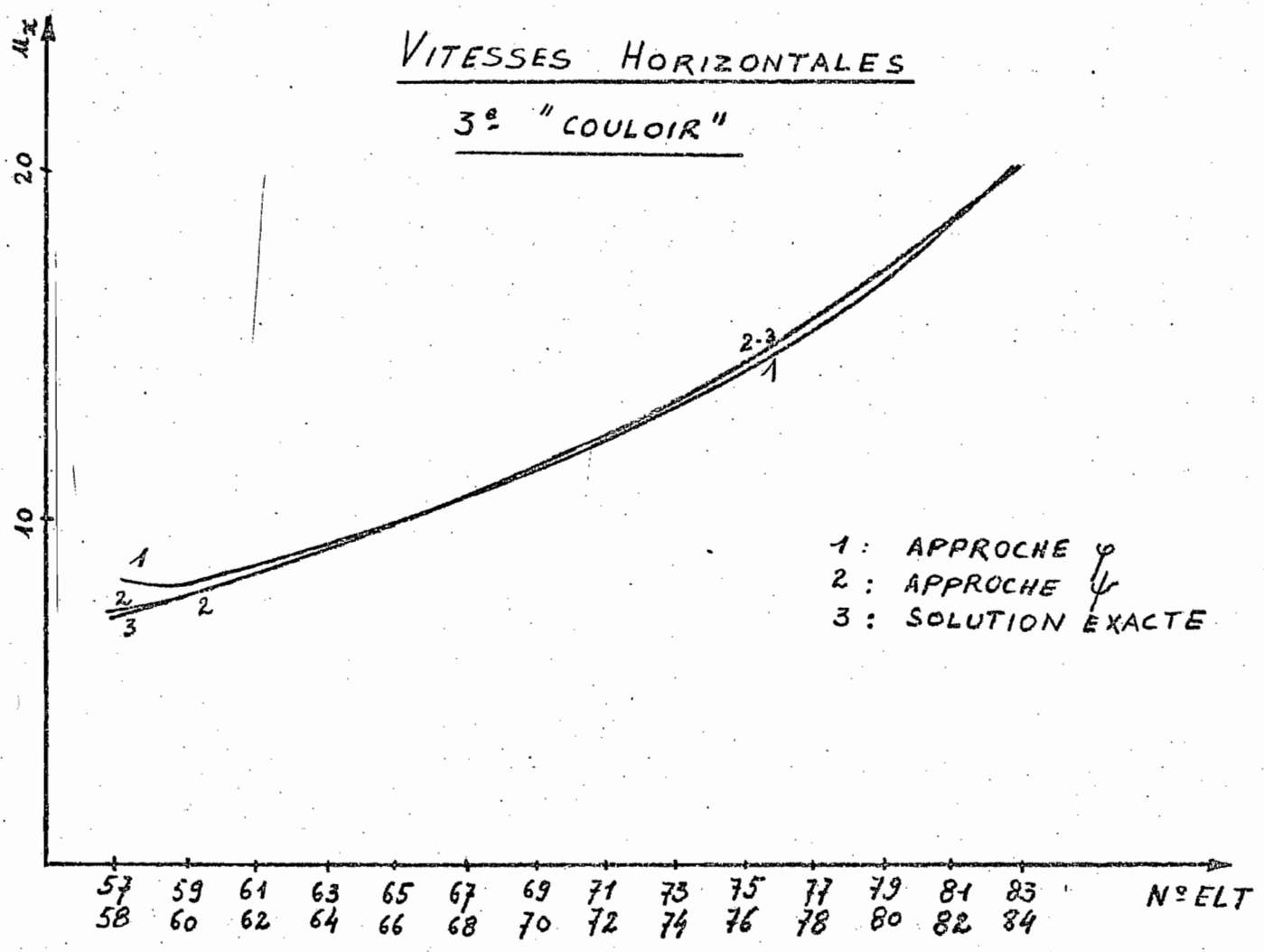
VITESSES VERTICALES

2^e "COULOIR"



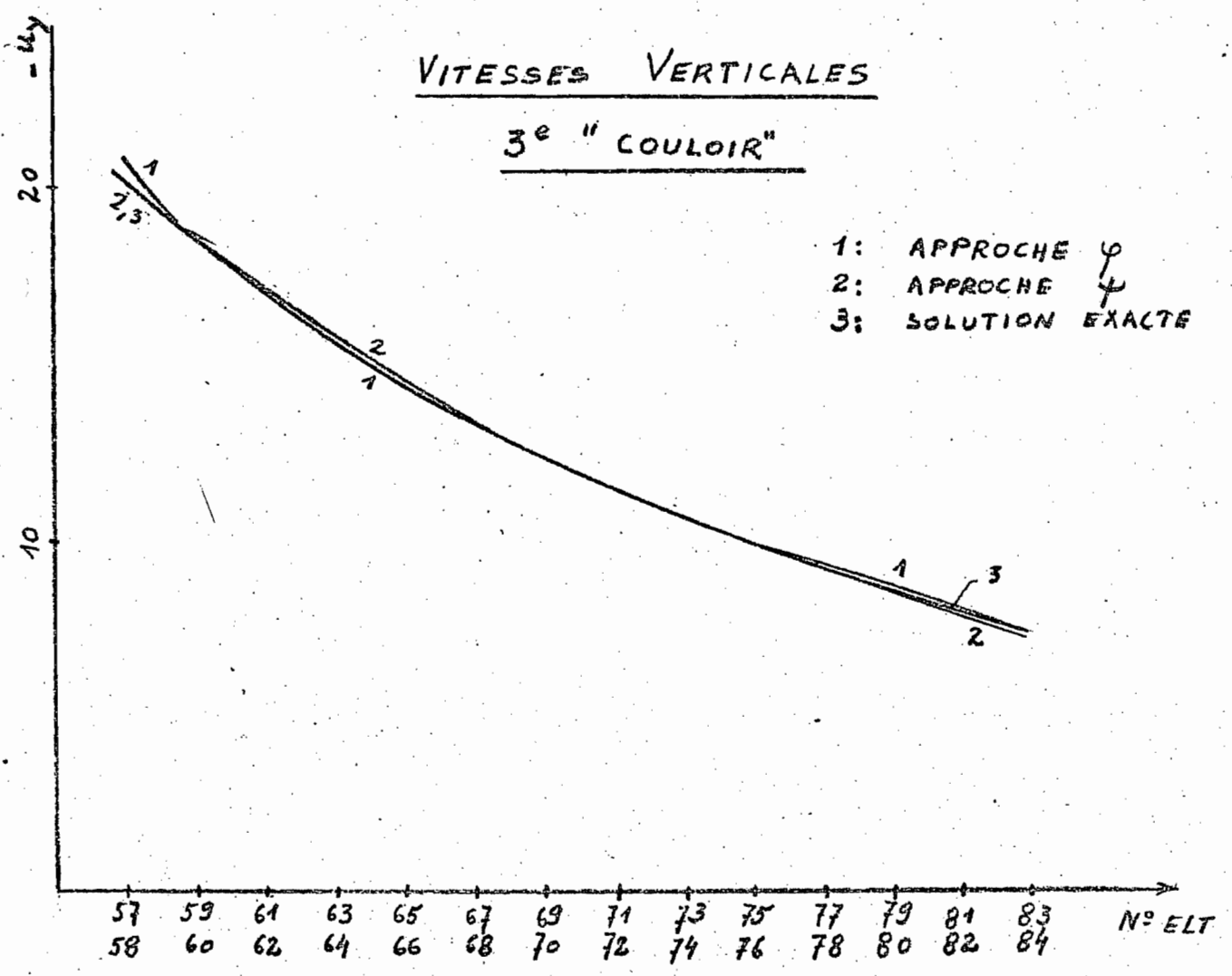
VITESSES HORIZONTALES

3^e "COULOIR"



VITESSES VERTICALES

3^e "COULOIR"



On dit que la fonction de courant est le champ de connaissance forte, c'est à dire qu'il est la base de la discrétisation et, en fin de compte, le champ que l'on varie dans l'application du principe J_5 .

Pour le potentiel des vitesses, on impose la vitesse normale, variable conjuguée de ψ , mais par des "sources", flux concentrés énergétiquement équivalents. Si, au point de vue énergétique, cela donne le bon résultat, ce procédé n'entraîne pas moins une transformation locale du champ des vitesses.

Loin de ces limites, la différence est très faible, illustrant ainsi ce que MARTIN [12] appelle "le principe de Saint-Venant de la mécanique des fluides".

Normalement, ce sont les conditions sur le champ de connaissance forte qui doivent donner les meilleurs résultats. C'est bien le cas, comme on peut le constater en comparant les valeurs de $(-u_{\{y\}}(\psi))$ aux valeurs théoriques.

7.5 - Ceci montre clairement que, même par de modèles relativement simples, la méthode des éléments finis permet de traiter avec succès les écoulements plans de fluides parfaits. On pourrait, d'autre part, traiter le cas axisymétrique sans grand changement par rapport à ce qui précède.

CHAPITRE 8 - FORMULATION VARIATIONNELLE DE LA LUBRIFICATION

8.1- Dérivation d'un principe canonique de la lubrification

Le problème a déjà été évoqué au chapitre 4, paragraphe 8. Nous allons ici montrer comment, à partir des principes du chapitre 4, on peut déduire une méthode d'analyse duale des problèmes de lubrification stationnaire.

Le schéma est le même que dans le chapitre 4. Les conditions aux limites sont:

$$\text{en } y=0 : u_i = V_i \quad (i=1,3)$$

$$\text{en } y=h : u_i = 0 \quad "$$

On fait les hypothèses suivantes:

$$u_2 = 0 \text{ partout}$$

$$\text{Seuls les } \sigma_{2i} \text{ sont considérés} \quad (i=1,3)$$

$$p = \text{constante sur toute la hauteur } h.$$

Les conditions aux limites sur les vitesses en $y=0$ et en $y=h$ sont imposées a priori. Nous noterons S^* pour la surface latérale. Dans ces conditions, le principe à trois champs s'écrit $\delta R(u, \sigma, p) = 0$, avec:

$$R(u, \sigma, p) = \int_{S_i^*} (m_j \sigma_{ji} - m_i p) (u_i - \bar{u}_i) dS + \int_{\Omega} \bar{h}_i u_i d\Omega + \int_R \left[\frac{\sigma_{2i} \sigma_{2i}}{2\mu} - \sigma_{2i} \partial_2 u_i + p \partial_i u_i \right] dR$$

Pour avoir des renseignements sur la forme des tensions de viscosité, varions u_i :

$$\delta u_i \Rightarrow \partial_2 \sigma_{2i} - \partial_i p = 0.$$

Or $\partial_i p$ ne dépend pas de y . On a donc:

$$\partial_2 \sigma_{2i} = a_i(x, z)$$

$$\text{soit } \sigma_{2i} = a_i y + b_i$$

Il est clair que b_i est la "tension de frottement" sur la surface mobile. Restituant cette forme dans le principe et intégrant le terme qui s'y rapporte sur la hauteur, on trouve: (Ω = surface horizontale)

$$\int_{\Omega} \left(\frac{a_i a_i h^3}{6\mu} + a_i b_i \frac{h^2}{2\mu} + b_i b_i \frac{h}{2\mu} \right) d\Omega - \int_R [(a_i y + b_i) \partial_2 u_i + p \partial_i u_i] dR$$

$$+ \int_{\Omega} \bar{h}_i q_i d\Omega + \int_{S_i^*} \left[(u_i - \bar{u}_i) m_{2i} (a_i y + b_i) + \frac{(u_2 - \bar{u}_2)}{0} m_i (a_i y + b_i) \right] dS$$

$$- \int_{S_1} p h_i (u_i - \bar{u}_i) dS \quad (q_i = \text{débit dans la direction } i)$$

$$\text{Or } \delta \left[- \int_{S_i^*} p h_i (u_i - \bar{u}_i) dS \right] = - \int_{\Omega} p (h_i q_i - \bar{q}) d\Omega$$

b_1 étant la portion du contour de Ω correspondant

à S_1 .

$$\begin{aligned} \bullet - \int_R (a_i y + b_i) \partial_2 u_i dR &= - \int_S (a_i y + b_i) m_2 u_i ds + \int_R a_i u_i dR \\ &= \int_{-2} a_i q_i d\Omega - \int_{-2} (a_i h + b_i) \underbrace{u_i(h)}_0 d\Omega + \int_{-2} b_i V_i d\Omega \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet \int_{-2} p \partial_i u_i d\Omega &= \int_S p m_i u_i ds - \int_R \partial_i p u_i dR \\ &= \int_{-2} p m_i q_i ds - \int_{-2} \partial_i p q_i d\Omega \end{aligned}$$

D'où le principe canonique de la lubrification: $\delta(LC) = 0$

$$\begin{aligned} LC = \int_{-2} \left(\frac{a_i q_i h^3}{6\mu} + \frac{a_i b_i h^2}{2\mu} + \frac{b_i b_i h}{2\mu} + a_i q_i + b_i V_i - \partial_i p q_i \right) d\Omega \\ + \int_{b_2} (\bar{T}_i + m_i p) q_i ds + \int_{b_1} p \bar{q} ds \end{aligned}$$

Les équation d'Euler de ce principe sont:

$$\delta a_i \quad \square \quad \frac{a_i h^3}{3\mu} + \frac{b_i h^2}{2\mu} + q_i = 0 \quad (1)$$

$$\delta b_i \quad \square \quad \frac{a_i h^2}{2\mu} + \frac{b_i h}{\mu} + V_i = 0 \quad (2)$$

$$\delta q_i \quad \square \quad a_i - \partial_i p = 0 \quad (3)$$

$$\bar{T}_i + m_i p = 0 \quad \text{sur } b_2 \quad \text{: on ne peut donc y imposer} \\ \text{que la pression} \quad (4)$$

$$\delta p \quad \square \quad - m_i q_i + m_i \bar{q}_i = 0 \quad \text{sur } b_1 \quad (5)$$

$$- m_i q_i + m_i \bar{q}_i = 0 \quad \text{sur } b_2 \quad (6)$$

$$\partial_i q_i = 0 \quad \text{sur } \Omega \quad (7)$$

8.2 - Principe à deux champs (p, q)

Restituons la valeur des tensions de viscosité: le système formé par les équations (1) et (2) donne comme solutions:

$$a_i = - \frac{12\mu}{h^3} \left(- \frac{V_i h}{2} + q_i \right)$$

$$b_i = \frac{12\mu}{h^2} \left(- \frac{V_i h}{3} + \frac{q_i}{2} \right)$$

Notant que $\left(a_i \frac{h^3}{6\mu} + b_i \frac{h^2}{4\mu} \right) a_{ii} = - q_i a_i / 2$

$$\left(\frac{a_i h^2}{4\mu} + b_i \frac{h}{2\mu} \right) b_{ii} = - \frac{V_i b_i}{2}$$

il ne reste plus qu'à calculer

$$\frac{q_i a_i - V_i b_i}{2}$$

ce qui donne:

$$- \frac{6\mu}{h^3} [q_i q_i - q_i v_i h + \underbrace{v_i v_i h}_3]$$

invariant.

On obtient alors le principe mixte:

$$\delta \int_{\Omega} \left[\frac{6\mu}{h^3} (q_i q_i - q_i v_i h) + q_i \partial_i p \right] d\Omega - \int_{b_2} m_i q_i (p - \bar{p}) ds - \int_{b_1} \bar{p} q ds = 0.$$

dont les équations d'Euler sont:

$$\delta q_i \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{6\mu}{h^3} (2q_i - v_i h) + \partial_i p = 0 \\ p = \bar{p} \text{ sur } b_2 \end{cases}$$

$$\delta p \Leftrightarrow \begin{cases} \partial_i q_i = 0 \\ m_i q_i = m_i \bar{q}_i \text{ sur } b_1 \end{cases}$$

8.3- Si l'on impose à priori les relations

$$q_i = \frac{v_i h}{2} - \frac{h^3}{12\mu} \partial_i p \quad \text{et} \quad p = \bar{p} \text{ sur } b_2,$$

on obtient le principe de variation des pressions:

$$\int_{\Omega} \left(\frac{h^3}{24\mu} \partial_i p \partial_i p - \frac{v_i h}{2} \partial_i p \right) d\Omega + \int_{b_1} \bar{p} q ds = \min.$$

dont l'équation d'Euler,

$$- \partial_i \left(\frac{h^3}{12\mu} \partial_i p \right) + \partial_i \left(\frac{v_i h}{2} \right) = 0$$

est célèbre sous le nom d'équation de REYNOLDS (cfr. par ex. LELOUP, [11])

En surface, on obtient:

$$m_i \frac{v_i h}{2} - \frac{h^3}{24\mu} m_i \partial_i p = m_i \bar{q}_i \text{ sur } b_1$$

8.4 - Si, au contraire, on impose $\partial_i q_i = 0$, et $m_i q_i = \bar{q}$ sur b_1 ,

$$\int_{\Omega} q_i \partial_i p d\Omega = \int_{b_1} \bar{p} m_i q_i ds - \int_{\Omega} \underbrace{p \partial_i q_i}_0 d\Omega \quad \text{ce qui donne:}$$

$$\int_{\Omega} \frac{6\mu}{h^3} (q_i q_i - q_i v_i h) d\Omega + \int_{b_1} \bar{p} m_i q_i ds = \min.$$

(Principe de variation des débits).

Une manière simple d'imposer la continuité des débits consiste à poser

$$q_1 = \partial_3 \psi \quad ; \quad q_2 = -\partial_1 \psi$$

Alors, on obtient:

$$\delta \int_{\Omega} \frac{6\mu}{h^3} (\partial_i \psi \partial_i \psi - h v_i \partial_3 \psi + h v_3 \partial_1 \psi) d\Omega + \int_{b_1} \bar{p} (m_1 \partial_3 \psi - m_3 \partial_1 \psi) ds = 0.$$

On peut transformer les termes aux limites:

$$\int_{b_1} \bar{p} (m_1 \partial_3 \psi - m_3 \partial_1 \psi) ds = - \int_{b_1} \bar{p} (t_3 \partial_3 \psi + t_1 \partial_1 \psi) ds. \quad (\vec{t} = \text{vecteur tg.})$$

$$= - \int_{b_1} [\partial_3(\bar{p}\psi) t_3 + \partial_1(\bar{p}\psi) t_1] ds + \int_{b_1} \psi (\partial_3 \bar{p} t_3 + \partial_1 \bar{p} t_1) ds \quad 8.4$$

$$= - \int_{b_1} d(\bar{p}\psi) + \int_{b_1} \psi d\bar{p} = [\bar{p}\psi]_{b_1^-}^{b_1^+} + \int_{b_1} \psi \partial_t \bar{p} ds$$

b_1^- et b_1^+ sont les extrémités de b_2 . Par conséquent, par continuité, $\psi = \bar{\psi}$ et le crochet est invariant. On obtient donc:

$$\int_{\Omega} \frac{6\mu}{h^3} (\partial_i \psi \partial_i \psi - h v_1 \partial_3 \psi + h v_3 \partial_1 \psi) d\Omega - \int_{b_1} \psi \partial_t \bar{p} ds \quad \min$$

(Principe de variation de la fonction de courant.) t est la direction de la tangente, pour un sens de parcours "aire à gauche".

8.5 - Bornes supérieures et inférieures en lubrification.

Considérons la forme quadratique $\int_{\Omega} \vec{n}^{(1)} \cdot \vec{n}^{(2)} \cdot \frac{h^3}{12\mu} d\Omega$. Elle est définie positive, car $h > 0$ et $\mu > 0$.

Définissons alors 1) les champs homogènes statiquement admissibles a , vérifiant les relations:

$$r_i = \partial_i p$$

$$p = 0 \text{ sur } b_2$$

2) les champs homogènes cinématiquement admissibles c , tels que

$$r_i = - \frac{12\mu}{h^3} q_i$$

$$\partial_i q_i = 0 \text{ sur } \Omega$$

$$m_i q_i = 0 \text{ sur } b_1$$

Ces deux familles sont orthogonales:

$$(a, c) = - \int_{\Omega} \frac{h^3}{12\mu} \partial_i p \cdot \frac{12\mu}{h^3} q_i d\Omega = - \int_{b_1} m_i p q_i ds + \int_{\Omega} p \partial_i q_i d\Omega = 0.$$

3) soit un champ particulier statiquement admissible non-homogène a_0 :

$$a_0 : \begin{cases} r_i = -\partial_i p \\ p = \bar{p} \text{ sur } b_2 \end{cases}$$

4) soit enfin c_0 un champ particulier cin. ad. non-homogène défini par les relations:

$$c_0 : \begin{cases} r_i = \frac{12\mu}{h^3} \left(\frac{v_i h}{z} - q_i \right) \\ \partial_i q_i = 0 \\ m_i q_i = \bar{q} \text{ sur } b_1 \end{cases}$$

Alors,

$$(a, c_0) = \int_{\Omega} \frac{h^3}{12\mu} \frac{12\mu}{h^3} \partial_i p \left(\frac{v_i h}{z} - q_i \right) d\Omega = \int_{\Omega} \left(\frac{v_i h}{z} \partial_i p + p \partial_i q_i \right) d\Omega - \int_{b_1} p m_i q_i ds.$$

$$= \int_{\Omega} \frac{v_i h}{2} \partial_i p \, d\Omega - \int_{b_2} p \bar{q} \, ds.$$

$$(a_0, c) = - \int_{\Omega} \partial_i p \frac{h^3}{12\mu} \frac{12\mu}{h^3} q_i \, d\Omega = - \int_{b_1} q_i m_i \bar{p} \, ds + \int_{\Omega} p \frac{\partial_i q_i}{0} \, d\Omega.$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} \circ (c+c_0, c+c_0) - 2(c, a_0) = \\ \int_{\Omega} \frac{12\mu}{h^3} \left(\frac{v_i h}{2} - q_i \right) \left(\frac{v_i h}{2} - q_i \right) \, d\Omega + 2 \int_{b_1} \bar{p} m_i q_i \, ds \quad \text{min} \end{aligned}$$

On retrouve le principe de variation des débits.

$$\begin{aligned} \circ (a+a_0, a+a_0) - 2(a, c_0) = \\ \int_{\Omega} \frac{h^3}{12\mu} \partial_i p \partial_i p \, d\Omega - 2 \int_{\Omega} \frac{v_i h}{2} \partial_i p \, d\Omega + 2 \int_{b_2} p \bar{q} \, ds \quad \text{min} \end{aligned}$$

On retrouve le principe de variation des pressions.

Conclusion: appelons "puissance laminaire" la demi-norme. C'est la puissance qui correspondrait à des vitesses imposées nulles.

1^e CAS: $c_0 = 0$, c.-à-d. $\underline{v_i = 0}$, $\underline{\bar{q} = 0}$ sur b_2 .

Alors,

$$\int_{\Omega} \frac{6\mu}{h^3} q_i q_i \, d\Omega \leq \text{puissance laminaire} \leq \int_{\Omega} \frac{h^3}{24\mu} \partial_i p \partial_i p \, d\Omega$$

2^e CAS: $a_0 = 0$, c.-à-d. $\underline{\bar{p} = 0}$ sur b_1 .

Alors,

$$\int_{\Omega} \frac{h^3}{24\mu} \partial_i p \partial_i p \, d\Omega \leq \text{puissance laminaire} \leq \int_{\Omega} \frac{6\mu}{h^3} \left(\frac{v_i h}{2} - q_i \right) \left(\frac{v_i h}{2} - q_i \right) \, d\Omega$$

8.6 - Il est donc possible de faire des études en lubrification par la méthode des éléments finis. Bien plus, les principes de variation de p et de la fonction de courant diffèrent peu de ceux relatifs aux écoulements plans de fluide parfait. Moyennant des modifications mineures (hauteur variable, "forces" de volume), on pourrait donc utiliser le même élément fini. L'existence de bornes supérieures et inférieures permet de tester la convergence de l'approximation. L'extension au cas du "squeeze film" est simple. (cfr. REDDI, [14] et [15]). La méthode des éléments finis semble donc très prometteuse dans ce domaine, surtout qu'elle permet d'étudier facilement les géométries compliquées.

CHAPITRE 9 - TRAITEMENT DES ECOULEMENTS DE STOKES PLANS PAR
ANALOGIE ELASTIQUE. [16]

9.1 - Considérons le principe de variation des vitesses établi au chapitre 4.

$$U(u) = \int_{S_2} \bar{T}_i u_i ds + \int_R [\rho g_i u_i - F(Du)] dR \quad \text{min.}$$

Pour vérifier la condition essentielle d'incompressibilité, on peut écrire le principe en termes de la fonction de courant définie par

$$u_1 = \partial_2 \psi \quad ; \quad u_2 = -\partial_1 \psi$$

Le principe s'écrit alors

$$\int_{S_2} [\bar{T}_1 \partial_2 \psi - \bar{T}_2 \partial_1 \psi] ds + \int_S [\rho g_1 \partial_2 \psi - \rho g_2 \partial_1 \psi] ds - \int_S \mu \theta_{ij} \theta_{ij} ds$$

Transformons les différents termes:

$$1) \quad \theta_{ij} = \frac{1}{2} (\partial_i u_j + \partial_j u_i) \text{ soit explicitement: } \begin{aligned} \theta_{11} &= \partial_1 u_1 = \partial_{12} \psi \\ \theta_{22} &= \partial_2 u_2 = -\partial_{21} \psi \\ \theta_{12} &= \frac{1}{2} (\partial_1 u_2 + \partial_2 u_1) = \\ &= \frac{1}{2} (-\partial_{11} \psi + \partial_{22} \psi) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Dès lors, } F &= \mu [\theta_{11}^2 + \theta_{22}^2 + 2\theta_{12}^2] \\ &= \mu [(\partial_{12} \psi)^2 + (\partial_{22} \psi)^2 - 2\partial_{11} \psi \partial_{22} \psi + 2(\partial_{12} \psi)^2] \end{aligned}$$

$$2) \quad \int_S (\rho g_1 \partial_2 \psi - \rho g_2 \partial_1 \psi) ds = \int_S (\rho g_1 m_2 \psi - \rho g_2 m_1 \psi) ds - \int_S [\partial_2 (\rho g_1) - \partial_1 (\rho g_2)] \psi ds$$

où la dernière intégrale est nulle, puisque la pesanteur est irrotationnelle.

Or, $m_1 = \beta_2$ et $m_2 = -\beta_1$, où $\vec{\beta}$ est le vecteur tangent (défini dans le sens "aire à gauche").

Dès lors,

$$- \int_S \psi (\rho \vec{g} \cdot d\vec{s}) = - \int_{S_1} \bar{\psi} (\rho \vec{g} \cdot d\vec{s}) - \int_{S_2} \psi (\rho \vec{g} \cdot d\vec{s}) \quad ;$$

$$\text{si l'on écrit } \rho \vec{g} = \rho g_n \vec{n} + \rho g_t \vec{\beta} \quad ,$$

il vient finalement

$$\rho \vec{g} \cdot d\vec{s} = \rho g_t \vec{\beta} \cdot d\vec{s} + \rho g_n \vec{n} \cdot d\vec{s} = \rho g_t ds$$

3) Examinons $\int_{S_2} \bar{T}_i u_i ds$. On a évidemment

$$\bar{T} = \bar{T}_n \vec{n} + \bar{T}_t \vec{\beta}$$

Le produit scalaire se conserve lors d'une transformation orthogonale:

$$\bar{T}_i u_i = \bar{T}_n u_n + \bar{T}_t u_t$$

D'autre part,

$$* \quad \mu_m = \vec{\mu} \cdot \vec{m} = \partial_2 \psi m_1 - \partial_1 \psi m_2 = \partial_2 \psi \beta_2 + \partial_1 \psi \beta_1 = \frac{\partial \psi}{\partial s}$$

$$* \quad \mu_t = \vec{\mu} \cdot \vec{\beta} = \partial_2 \psi \beta_1 - \partial_1 \psi \beta_2 = -\partial_2 \psi m_2 - \partial_1 \psi m_1 = -\frac{\partial \psi}{\partial n}$$

L'intégrale peut donc s'écrire:

$$\int_{b_2} (\bar{T}_m \frac{\partial \psi}{\partial s} - \bar{T}_t \frac{\partial \psi}{\partial n}) ds = [\bar{T}_m \psi]_{b_2^-}^{b_2^+} - \int_{b_2} \frac{\partial \bar{T}_m}{\partial s} \psi ds - \int_{b_2} \bar{T}_t \frac{\partial \psi}{\partial n} ds$$

où b_{2-} et b_{2+} sont les extrémités d'arcs identiques, de S , parcourus dans le sens précisé ci-dessus. Si l'on impose la continuité de la fonction de courant, on peut écrire

$$\psi = \bar{\psi} \quad \text{en } b_{2-} \text{ et } b_{2+}.$$

Le crochet est donc invariant.

Finalement, on obtient le principe de variation de la fonction de courant:

$$\delta J = 0$$

avec

$$J = \int_S \frac{\mu}{2} [(\partial_{11} \psi)^2 + (\partial_{22} \psi)^2 - 2 \partial_{11} \psi \partial_{22} \psi + 4 (\partial_{12} \psi)^2] ds - \int_{b_2} (p g_t + \frac{\partial \bar{T}_m}{\partial s}) \psi ds - \int_{b_2} \bar{T}_t \frac{\partial \psi}{\partial n} ds$$

Pour les plaques de KIRCHHOFF, le principe de variation de la flèche s'écrit [3]

$$\delta J = 0$$

où

$$J = \int_S \frac{D}{2} [(\partial_{11} w)^2 + (\partial_{22} w)^2 + 2\nu \partial_{11} w \partial_{22} w + 2(1-\nu)(\partial_{12} w)^2] ds - \int_{b_2} (T_m + \frac{\partial M_{nt}}{\partial s}) w ds + \int_{b_2} \bar{M}_m \frac{\partial w}{\partial n} ds - \sum_i z(i) w(i)$$

On en déduit aisément l'analogie résumée dans le tableau suivant

Ecoulement de STOKES

μ	(viscosité)
ψ	(fct. de courant)
$p g_t$	(compos. tg. de la pesanteur)

Plaque de KIRCHHOFF

D	(rigidité flexionnelle)
w	(flèche)
T_m	(effort tranchant)

Écoulement de STOKESPlaque de KIRCHHOFF

$\bar{\tau}_m$ (tension de visc. normale)	\bar{M}_{nt} (moment de torsion)
$-\bar{\tau}_k$ (tension tg. de viscosité)	\bar{M}_n (moment de flexion)
$\rho g + \frac{\partial \bar{\tau}_m}{\partial s}$	\bar{K}_m (effort tranchant de KIRCHHOFF)
-1	ν (coeff. de POISSON)
$F(\partial u)$ (fct. de dissipation)	W^p (énergie libre)

* Pour les plaques,

$$M_x = D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right), \text{ etc....}$$

D'où

$$\begin{pmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{pmatrix} = -D \begin{pmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\nu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial_{11} w \\ \partial_{22} w \\ \partial_{12} w \end{pmatrix}$$

* Pour l'écoulement de STOKES,

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= 2\mu \partial_1 u_1 = 2\mu \partial_{11} \psi \\ \sigma_{22} &= 2\mu \partial_2 u_2 = -2\mu \partial_{12} \psi \\ \sigma_{12} &= \mu (\partial_1 u_2 + \partial_2 u_1) = \mu (\partial_{22} \psi - \partial_{11} \psi) \end{aligned}$$

ce qui donne

$$\begin{pmatrix} \sigma_{12} \\ -\sigma_{12} \\ -\sigma_{11} \end{pmatrix} = \mu \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\partial_{11} \psi \\ -\partial_{22} \psi \\ -\partial_{12} \psi \end{pmatrix}$$

On obtient ainsi les nouvelles correspondances:

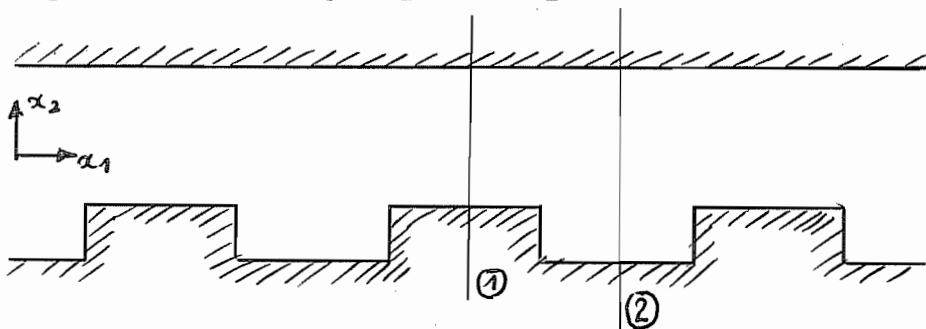
$$\begin{aligned} \sigma_{12} &\longleftrightarrow M_x \\ -\sigma_{12} &\longleftrightarrow M_y \\ -\sigma_{11} &\longleftrightarrow M_{xy} \end{aligned}$$

Le fait de trouver (-1) comme coefficient de POISSON ne doit pas étonner. En effet, les tensions ne se correspondent pas exactement, comme on vient de le voir, en ce qui concerne les signes. Cette analogie a un grand intérêt, car elle permet d'étudier les écoulements de STOKES avec des éléments de plaque. Cela représente une économie considérable en program-

mation. On sait, en effet, que la construction d'éléments où la condition de jonction s'écrit en termes de la dérivée normale du champ ne se fait pas sans problèmes.

9.2- Etude d'un écoulement à paroi crénelée.

Pour illustrer l'application de l'analogie élastique, étudions l'écoulement représenté ci-dessous. La paroi supérieure est plane, la paroi inférieure présente des aspérités rectangulaires de façon périodique.



Considérons la section (1).

a) Il est clair que u_1 est symétrique par rapport à cette section. Sa dérivée est donc une fonction impaire de x_1 prise égale à zéro en (1). Dès lors, $\partial_1 u_1 = 0$, d'où $\sigma_{11} = 0$ en cette section.

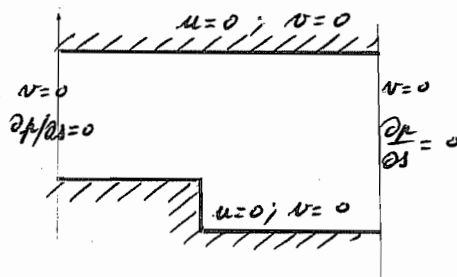
b) D'autre part, u_2 doit être antisymétrique par rapport à la section considérée, donc impaire en x_1 . Sa dérivée seconde a la même parité, ce qui signifie $\partial_{11} u_2 = 0$. Comme $u_2 = 0$ sur toute la hauteur de la section, on peut écrire

$$\partial_{22} u_2 = 0 .$$

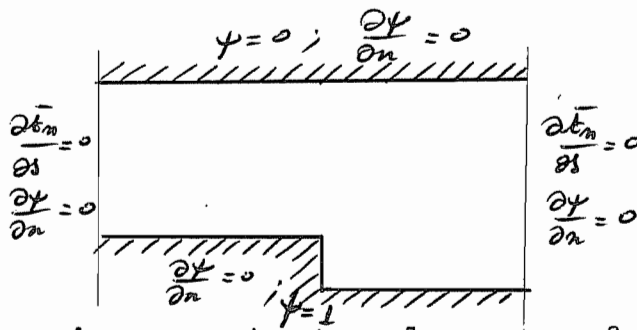
L'équation de NAVIER-STOKES donne alors

$$\partial_2 p = \mu (\partial_{11} + \partial_{22}) u_2 = 0 .$$

Un raisonnement semblable pourrait être tenu pour la section (2). Il suffit donc de considérer la portion de l'écoulement comprise entre les plans (1) et (2). Les conditions aux limites sont alors:



ou, ce qui est équivalent:



On notera qu'en posant $\psi = 1$, on ne fait que fixer l'échelle des vitesses. Dans le même ordre d'idées, on peut aussi poser $\mu = 1$, ce qui fixe l'échelle des pressions. Notons explicitement la relation de similitude: soient \bar{p} , \bar{v} , $\bar{\mu}$, \bar{l} respectivement une pression, une vitesse, une viscosité, une longueur de référence. On peut écrire

$$p = P \bar{p} \quad ; \quad v = V \bar{v} \quad ; \quad \mu = M \bar{\mu} \quad ; \quad l = L \bar{l} .$$

L'équation de NAVIER-STOKES s'écrit alors

$$\frac{\bar{\mu}}{\bar{l}} \text{GRAD } P = \frac{\bar{\mu} \bar{v}}{\bar{l}^2} M \nabla^2 V$$

La similitude dynamique est donc conservée si

$$\frac{\bar{\mu} \bar{v}}{\bar{\mu} \bar{l}} = \text{cte} .$$

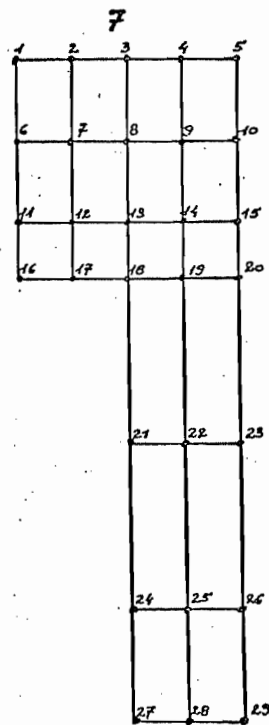
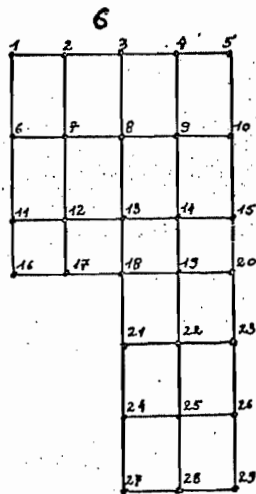
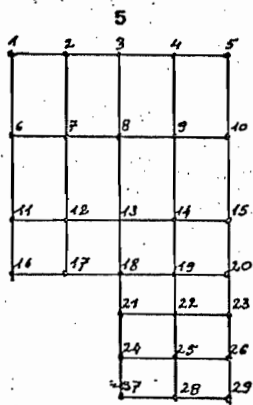
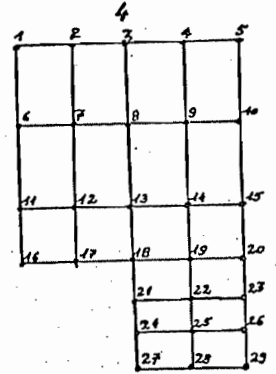
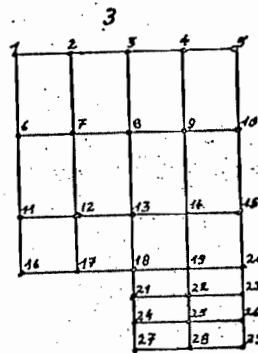
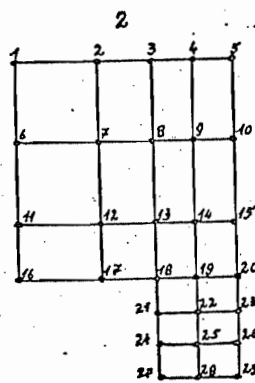
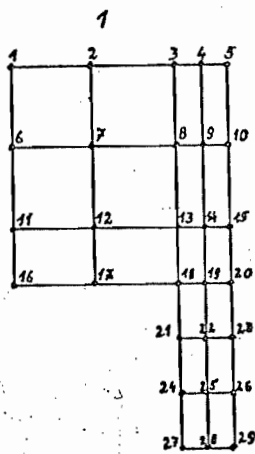
On peut aussi exprimer cette similitude en termes de la fonction de courant. Le résultat est

$$\frac{\bar{\mu} \psi}{\bar{\mu} \bar{l}^2} = \text{cte} .$$

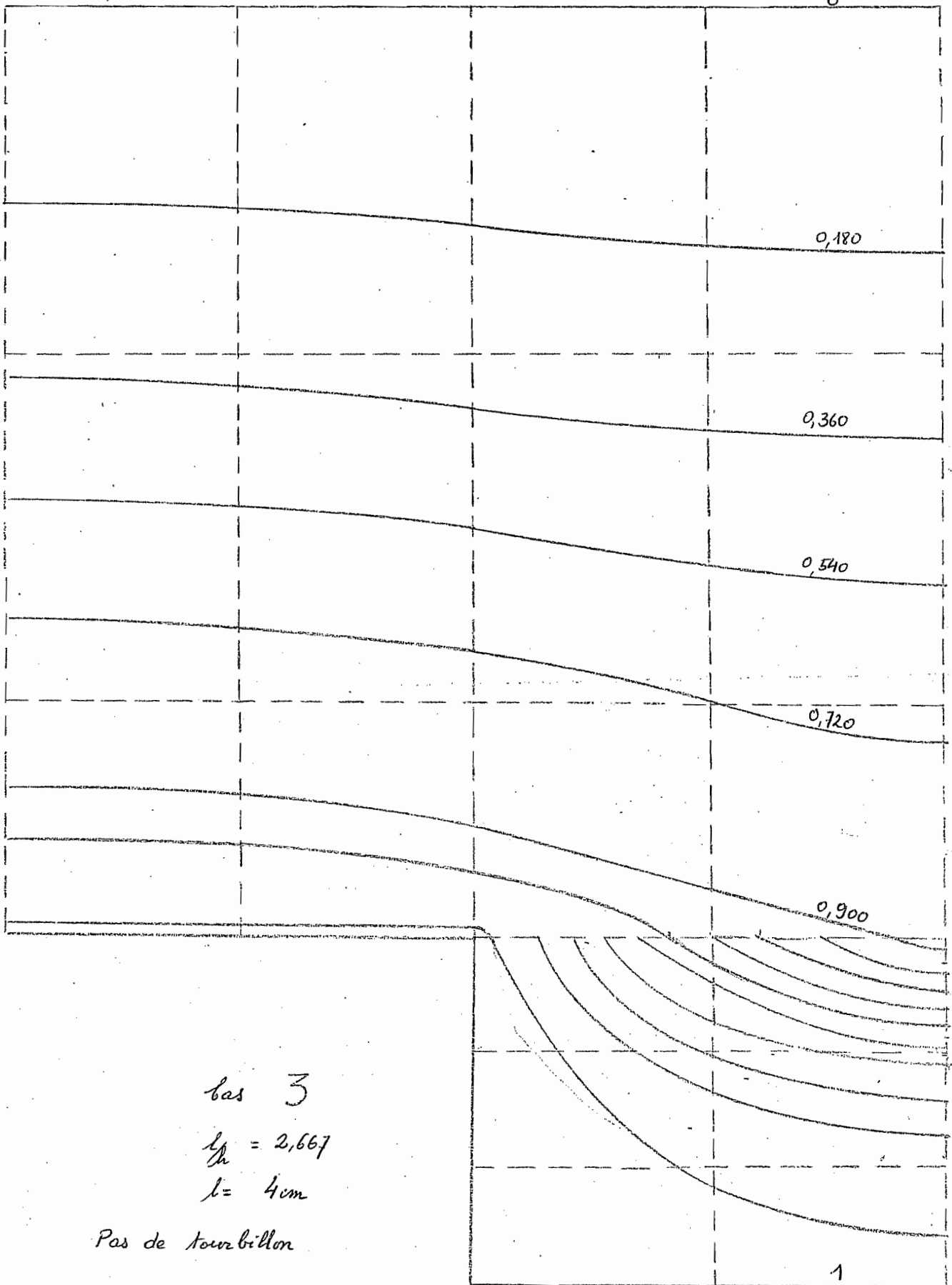
Nous considérerons divers rapports entre la largeur et la profondeur des creux. Ils sont donnés par les 7 schémas de la page suivante. Voici leurs caractéristiques:

CAS 1 :	$l = 2$	$l/h = 0,667$.
CAS 2 :	$l = 3$	$l/h = 1,667$.
CAS 3 :	$l = 4$	$l/h = 2,667$.
CAS 4 :	$l = 4$	$l/h = 2,000$.
CAS 5 :	$l = 4$	$l/h = 1,82$.
CAS 6 :	$l = 4$	$l/h = 1,000$.
CAS 7 :	$l = 4$	$l/h = 0,500$.

Le problème est traité par l'élément de plaque quadrangulaire conforme du LTAS. Les résultats sont consignés en page 9.8. On observe, lorsque l/h est suffisamment petit, l'apparition de tourbillons. Les valeurs de la fonction de courant correspondant à ceux-ci sont soulignées. Lorsqu'il y a un second tourbillon en sens inverse, les valeurs correspondantes sont soulignées deux fois.



Case Number	1	2	3	4	5	6	7
1	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	0	0
3	0	0	0	0	0	0	0
4	0	0	0	0	0	0	0
5	0	0	0	0	0	0	0
6	0,321	0,322	0,323	0,323	0,323	0,323	0,323
7	0,312	0,305	0,307	0,307	0,307	0,306	0,304
8	0,293	0,288	0,284	0,283	0,283	0,280	0,277
9	0,290	0,277	0,259	0,257	0,257	0,254	0,248
10	0,293	0,278	0,252	0,250	0,250	0,246	0,239
11	0,824	0,824	0,842	0,842	0,842	0,842	0,842
12	0,830	0,830	0,839	0,839	0,839	0,839	0,837
13	0,803	0,800	0,794	0,792	0,792	0,789	0,782
14	0,787	0,762	0,720	0,717	0,717	0,711	0,704
15	0,777	0,737	0,679	0,675	0,675	0,670	0,664
16	1	1	1	1	1	1	1
17	1	1	1	1	1	1	1
18	1	1	1	1	1	1	1
19	0,987	0,959	0,928	0,925	0,925	0,928	0,939
20	0,975	0,937	0,889	0,885	0,886	0,887	0,894
21	1	1	1	1	1	1	1
22	<u>1,0079</u>	0,999	0,978	0,988	0,989	<u>1,0154</u>	<u>1,0156</u>
23	<u>1,0132</u>	0,991	0,953	0,967	0,969	<u>1,0152</u>	<u>1,0333</u>
24	1	1	1	1	1	1	1
25	<u>0,9997</u>	<u>1,0027</u>	0,997	<u>1,0002</u>	<u>1,0047</u>	<u>1,0077</u>	<u>0,9969</u>
26	<u>1,0011</u>	<u>1,0043</u>	0,988	0,996	<u>1,0013</u>	<u>1,0165</u>	<u>0,9947</u>
27	1	1	1	1	1	1	1
28	1	1	1	1	1	1	1
29	1	1	1	1	1	1	1

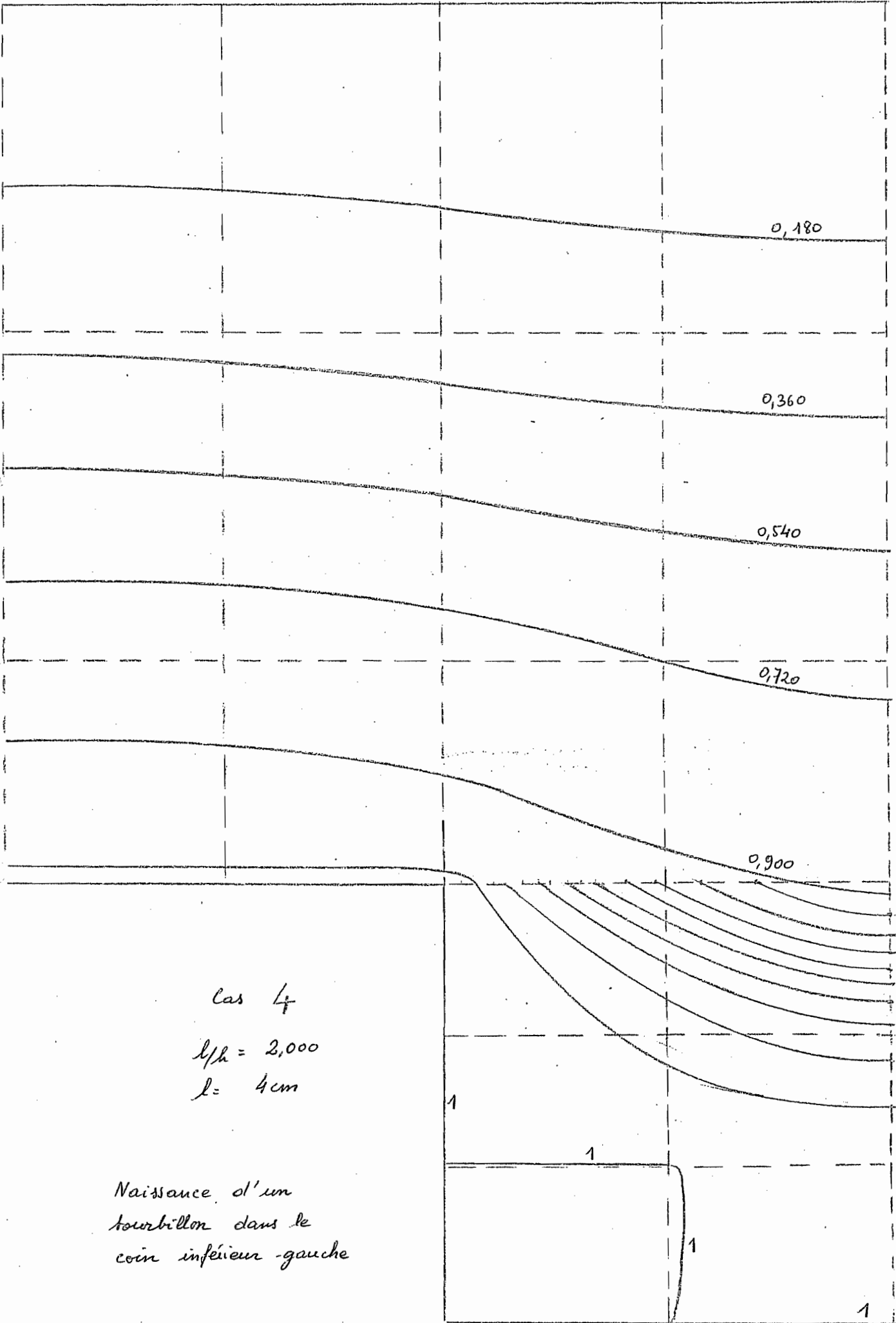


bas 3

$$\frac{l_y}{l_x} = 2,667$$

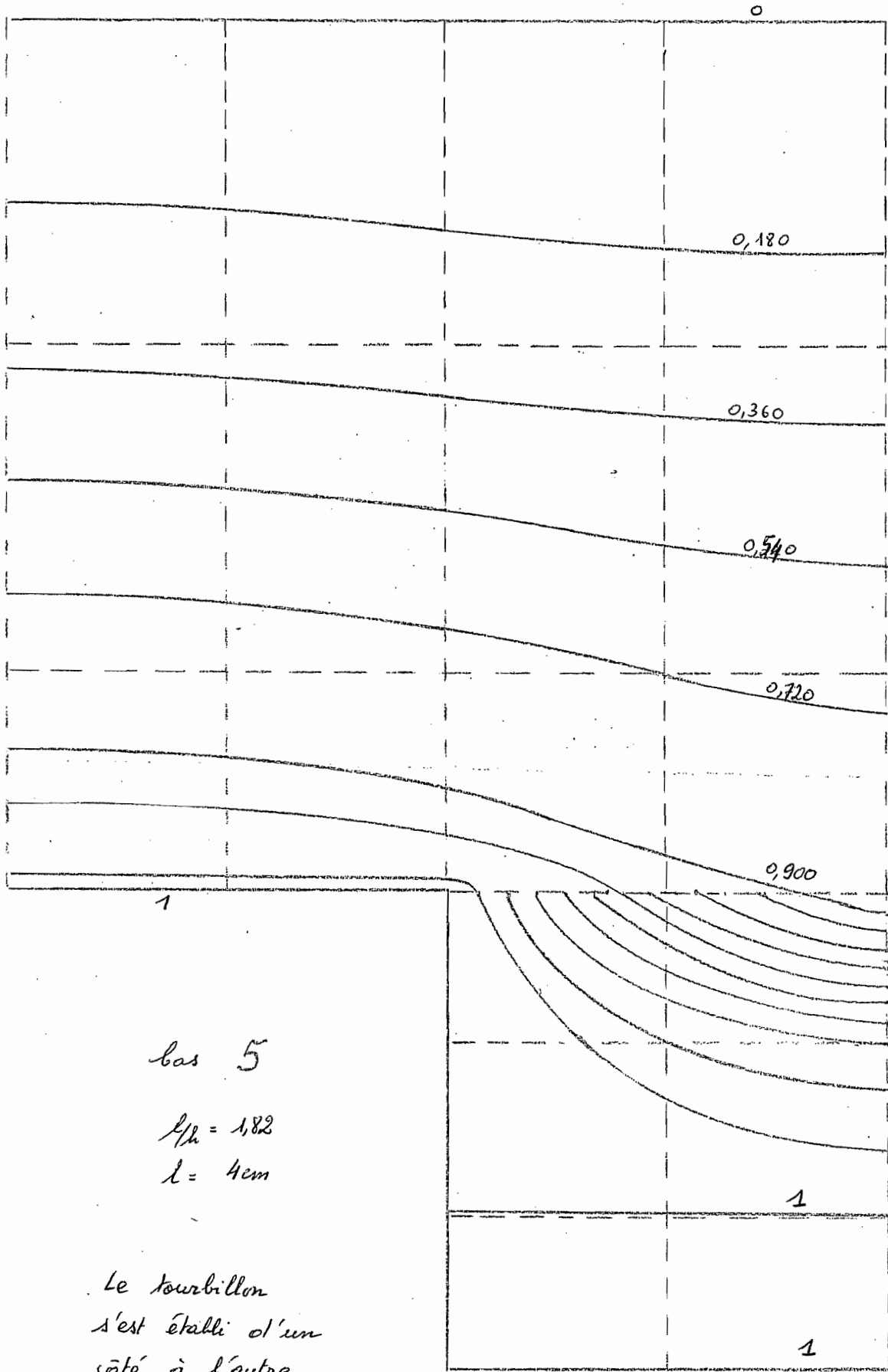
$$l = 4 \text{ cm}$$

Pas de tourbillon



Cas 4
 $l/h = 2,000$
 $l = 4\text{cm}$

Naissance d'un
 tourbillon dans le
 coin inférieur-gauche

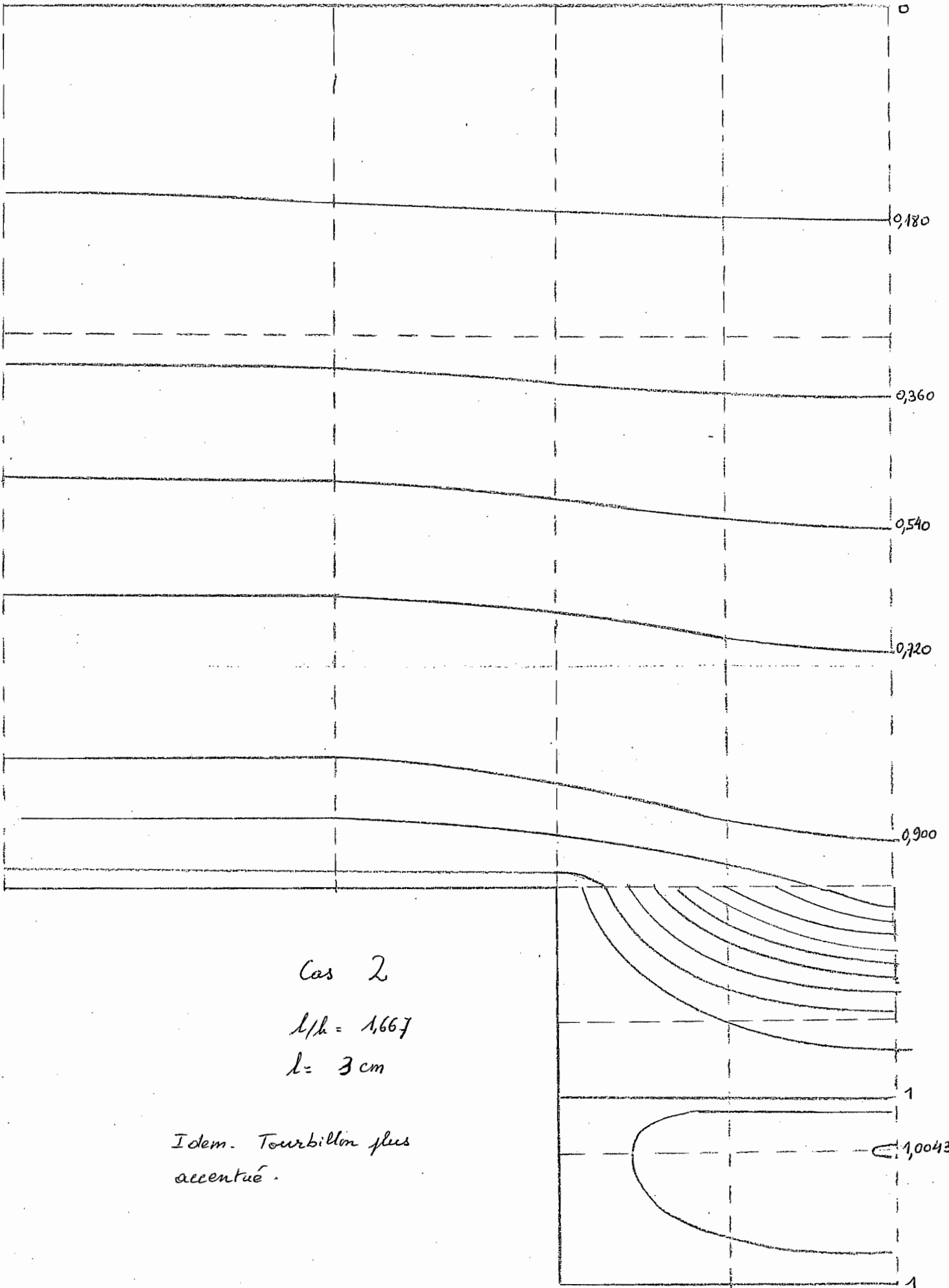


cas 5

$$l/h = 1,82$$

$$l = 4\text{cm}$$

Le tourbillon
s'est établi d'un
côté à l'autre



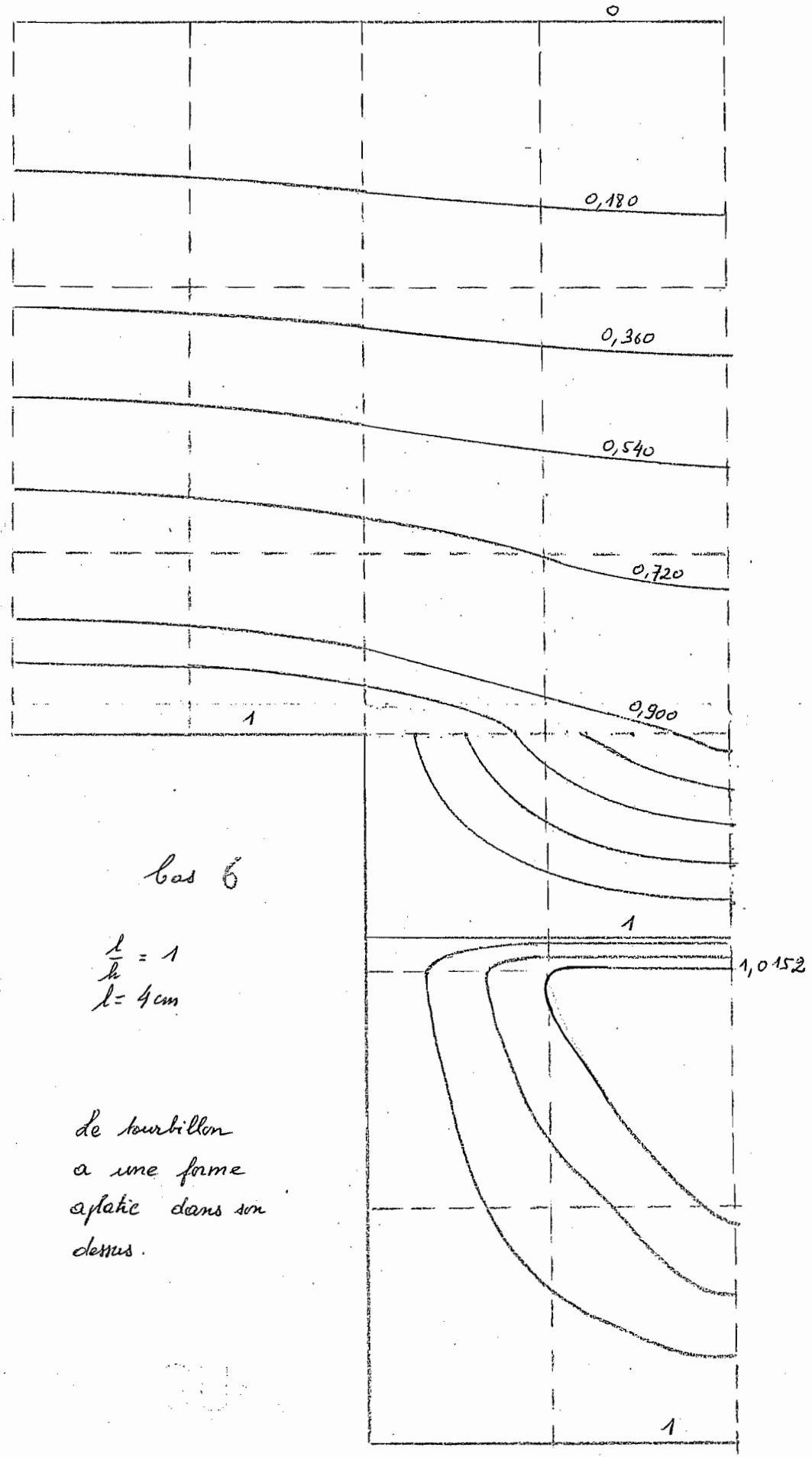
Cas 2

$$l/h = 1,667$$

$$l = 3 \text{ cm}$$

Idem. Tourbillon plus accentué.

1,0043

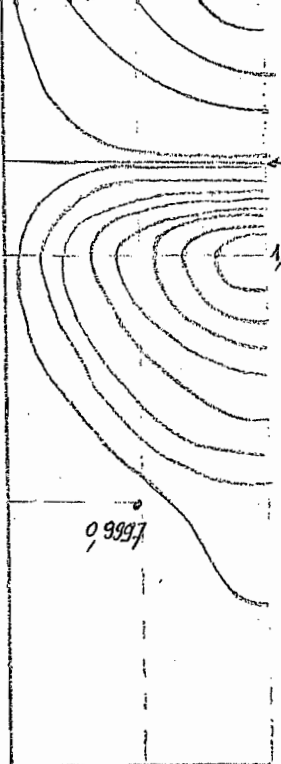
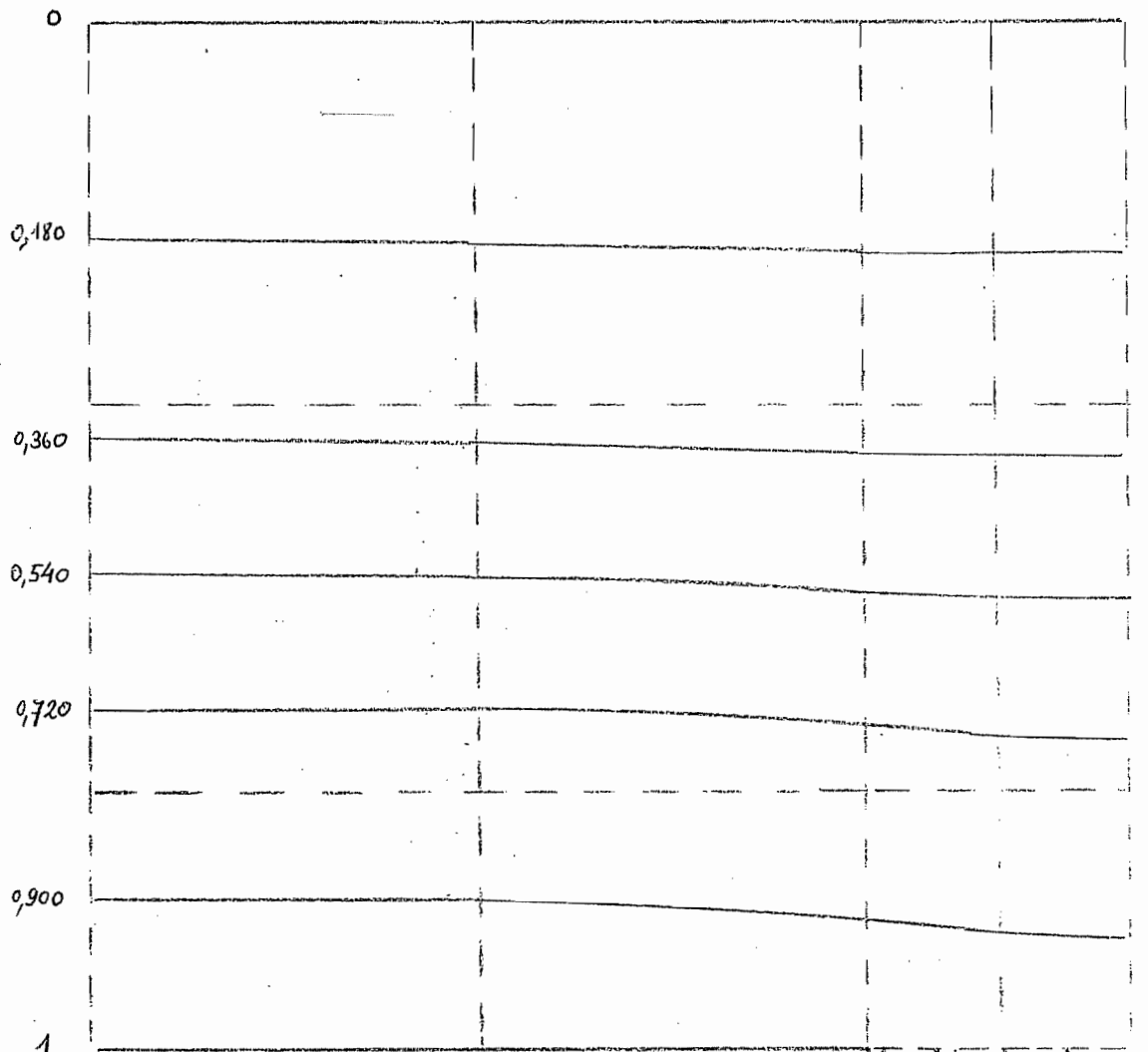


cas 6

$$\frac{l}{h} = 1$$

$$l = 4 \text{ cm}$$

le tourbillon
 a une forme
 aplatie dans son
 sens.

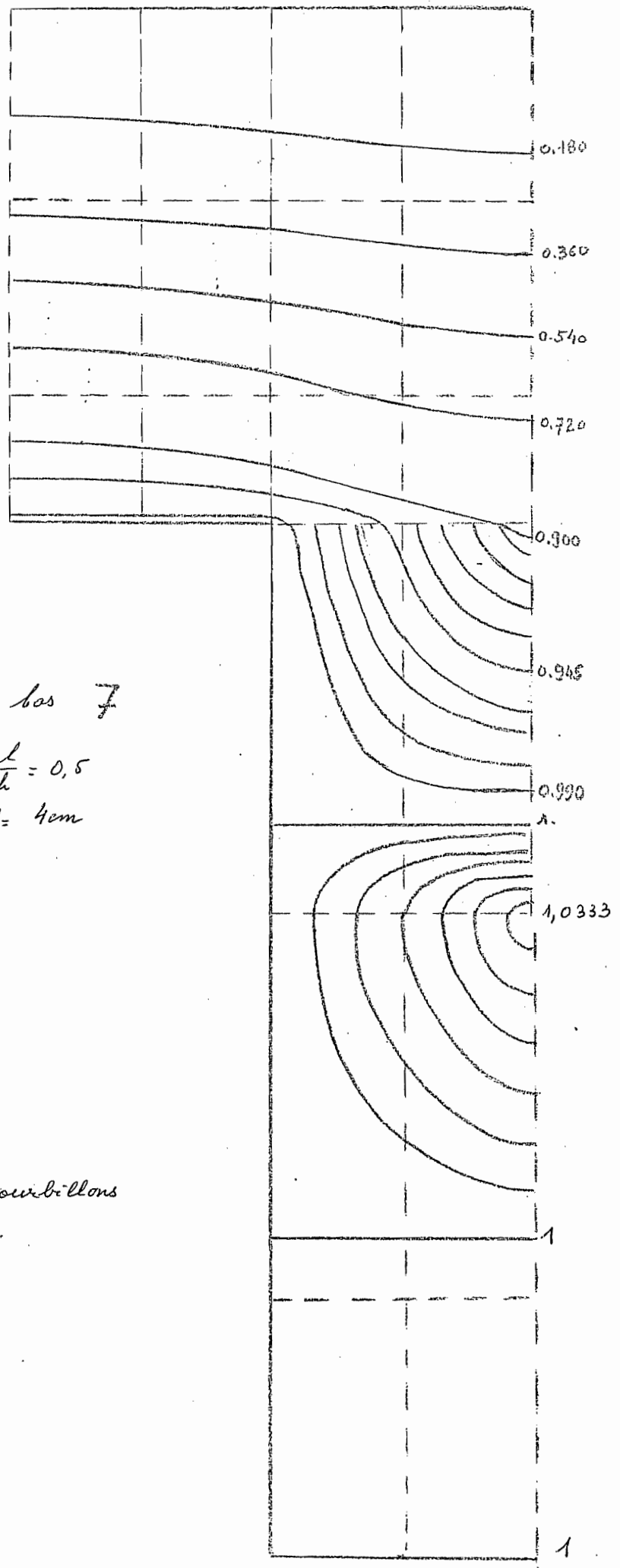


Cas 1

$$l/h = 0,667$$

$$l = 2 \text{ cm}$$

Naissance d'un nouveau tourbillon
en sens inverse, dans le coin
inférieur gauche.



bas 7
 $\frac{l}{h} = 0,5$
 $l = 4cm$

Deux tourbillons
Établis.

On trouvera, aux pages 9.9 à 9.15, les lignes de courant dans les 7 cas. On les a rangés par importance croissante des tourbillons.

Examen des résultats

- 1) A mesure que la profondeur augmente, on assiste à la formation de tourbillons. Les tourbillons naissent dans le coin du creux. On a donc deux tourbillons qui, pour une plus grande profondeur, se rejoignent pour en former un seul, à plan de symétrie vertical, mais aplati du côté de l'écoulement principal. Pour de plus grandes profondeurs, on voit apparaître de nouveaux tourbillons en sens inverse. Ils se forment d'une manière analogue aux premiers mais sont beaucoup plus lents.
- 2) La valeur de la puissance dissipée varie d'un cas à l'autre de la façon suivante:

CAS	PUISSANCE	l	l/h
1	0,6454661	2	0,667
2	0,6324835	3	1,667
3	0,5997827	4	2,667
4	0,5954533	4	2,000
5	0,5951628	4	1,82
6	0,5855926	4	1,000
7	0,5690973	4	0,500

On observe donc que la puissance dissipée

-augmente si l diminue

=augmente si l/h augmente, pour l = cte.

Les tourbillons donnent donc à l'écoulement une configuration moins dissipative. C'est assez logique, puisque l'écoulement obéit à un principe de moindre dissipation.

9.3 - Cet exemple montre bien les résultats que l'on peut obtenir, même avec un maillage assez peu serré. Il faut cependant noter que l'élément utilisé est assez évolué (assemblage de triangles du troisième degré). Au point de vue du temps de traitement du problème, voici le détail pour le cas 4: (IBM 370/155)

Préparation des données: 5,239 sec

Génération des éléments: 15,665 sec

Résolution: 17,284 sec

TOTAL 32,949 sec

Le programme travaille sur 197 degrés de liberté.

On peut donc trouver dans l'analogie élastique une solution

efficace et peu coûteuse en software, puisque on peut utiliser des éléments finis déjà construits.

* * * *

APPENDICE- Note sur l'élément "40" de fluide parfait,
approche par potentiel des vitesses ou fonction
de courant.

Il s'agit d'un élément fini triangulaire de degré variable. Il permet de faire une approche par le potentiel des vitesses ou la fonction de courant. Nous parlerons, pour fixer les idées, de la fonction de courant.

La fonction de courant est développée en un polynôme de degré quelconque:

$$\psi = a_1 + a_2 x + a_3 y + a_4 x^2 + a_5 xy + a_6 y^2 + \dots$$

En pratique, il convient cependant de se limiter au degré 3, qui est le degré imposé pour les "forces appliquées". (Conventionnellement, nous dirons "déplacement" pour la variable de connaissance forte, "force" pour la variable conjuguée à la surface). Les polynômes sont utilisés sous une forme pseudo-formelle qui permet la construction automatique de l'élément, le degré étant spécifié par l'utilisateur.

1) On peut écrire

$$\psi = a'f \quad f' = (1, x, y, x^2, xy, y^2, \dots)$$

On a $\psi(x(i)) = q_i = a'f(x(i))$, $x(i)$ étant les noeuds du triangle.

L'ensemble de ces relations s'écrit:

$$q = C a \quad \text{où} \quad C = \begin{pmatrix} f'(x(1)) \\ f'(x(2)) \\ \vdots \end{pmatrix} \quad \text{est appelée matrice de connexion.}$$

2) Dérivons la fonction de courant:

$$\partial_i \psi = a' \partial_i f$$

$$\partial_i \psi \partial_i \psi = a' \partial_i f (\partial_i f)' a$$

$$\int_{\Delta} \partial_i \psi \partial_i \psi d\Delta = a' \left[\int_{\Delta} \partial_i f (\partial_i f)' d\Delta \right] a = a' I a$$

$$= q' C^{-1} I C^{-1} q = q' K q$$

où K est appelée "matrice de raideur", par analogie avec l'analyse des structures.

3) Vecteurs de dérivation

Considérons une fonction $\eta = b'f$.
La fonctionnelle

$$\int_{\Delta} \text{grad} \eta \cdot \text{grad} \psi \, d\Delta$$

est -bilinéaire

-définie positive pour les gradients

-symétrique.

C'est donc un produit scalaire pour les gradients (mais non pour les fonctions elles-mêmes).

Nous l'écrivons donc: $(\text{grad} \psi, \text{grad} \eta) = a' I b$. Supposons à présent que

$$\eta = \frac{a_i^{n+1}}{n+1}$$

Cela revient à dire

$$b_j = \delta_{sj} \quad s = n^\circ \text{ du terme considéré.}$$

Dès lors,

$$\partial_j \eta = a_i \delta_{sj}$$

et

$$\begin{aligned} (\text{grad} \psi, \text{grad} \eta) &= a' I b = a_k I_{kj} b_j = a_k I_{ks} \\ &= q' (e^{-1} I) b = q'_k (e^{-1} I)_{ks} \\ &= d'_s q \end{aligned}$$

soit

où

$$d_s = (e^{-1} I)_{s^c} \text{ colonne}$$

Les vecteurs d_s sont appelés "vecteurs de dérivation". Ils donnent en effet soit les moyennes, soit les moments des dérivées.

Conclusion: Vitesse moyenne :

$$\int_{\Delta} \text{grad} \psi \, d\Delta = \begin{pmatrix} d_2' \\ d_3' \end{pmatrix} q$$

Moment selon x $\begin{pmatrix} d_4' \\ d_5' \end{pmatrix} q \dots$
y

On montre facilement que pour

$= x^{n+1}$, s= nombre de termes jusque et y compris le degré n, +1 , soit:

$$s = \frac{(n+1)(n+2)}{2} + 1$$

$= y^{n+1}$, s= nombre de termes jusqu'au degré (n+1) compris, soit :

$$s = \frac{(n+2)(n+3)}{2}$$

Dans l'élément 40, seuls d_2 et d_3 sont calculés. Ils donnent:

$$(\partial_1 \psi)_{\text{moy}} \quad \text{et} \quad (\partial_2 \psi)_{\text{moy}} .$$

4) Modes rigides. Singularité de la matrice de raideur

La fonctionnelle $(\text{grad} \psi, \text{grad} \psi)$ est nulle si et seulement si $\text{grad} \psi = 0$. Cela signifie que ψ est constante. C'est ce que nous appellerons "mode rigide", toujours par analogie avec les structures.

Pour $\psi = \text{constante}$, $q_i = q$. Dès lors, pour η quelconque, on a $\eta(x_i) = g_i$ et

$$(\text{grad} \eta, \text{grad} \psi) = g_i k_{ij} q_j = 0 \quad \text{car} \quad \text{grad} \psi = 0$$

Puisque les g_i sont arbitraires, on doit avoir

$$k_{ij} q_j = q \sum_j k_{ij} , \quad \forall q$$

Donc, $\sum_j k_{ij} = 0$: La somme des éléments d'une colonne de K est nulle.

5) Réduction de la matrice de raideur et des vecteurs de dérivation. (routine REDM40)

Lorsque le degré du polynôme est ≥ 3 , on est amené à définir des points intérieurs pour déterminer tous les coefficients du polynôme. Ces noeuds intérieurs ne participent pas à la connexion et il convient de les éliminer.

Considérons le cas où

$$q = \begin{pmatrix} 0 \\ q_2 \end{pmatrix} ,$$

l'indice 2 se rapportant aux points intérieurs. Alors,

grad ψ ne peut être nul partout dans l'élément sans que l'on ait $q_2 = 0$. Donc $(\text{grad } \psi, \text{grad } \psi) > 0$ et cette inéquation peut s'écrire

$$(0, q_2') \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ q_2 \end{pmatrix} = (0, q_2') \begin{pmatrix} k_{12} q_2 \\ k_{22} q_2 \end{pmatrix} = q_2' k_{22} q_2 > 0$$

pour tout q_2 différent de 0. Cela signifie que k_{22} est définie positive. Par conséquent, partant de l'équation

$$\begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}$$

on peut écrire

$$q_2 = k_{22}^{-1} (p_2 - k_{21} q_1)$$

et $(k_{11} - k_{12} k_{22}^{-1} k_{21}) q_1 = p_1 - k_{12} k_{22}^{-1} p_2$

soit $\boxed{k_{red} q_1 = p^*}$,

équation qui définit l'opération de réduction de la matrice de raideur et la transformation du vecteur "force". Lorsque $p_2 = 0$, ce qui sera généralement le cas pour nous, $p^* = p_1$.

Montrons que k_{red} conserve la singularité de K . Pour cela, mettons K sous la forme

$$K = \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & k_{12} \\ 0 & k_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & 0 \\ B & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A + k_{12} B & k_{12} D \\ k_{22} B & k_{22} D \end{pmatrix}$$

On trouve par identification

$$D \equiv E$$

$$B = k_{22}^{-1} k_{21}$$

$$A \equiv k_{11} - k_{12} k_{22}^{-1} k_{21} = k_{red}$$

d'où

$$K = \begin{pmatrix} E & k_{12} \\ 0 & k_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_{red} & 0 \\ k_{22}^{-1} k_{21} & E \end{pmatrix}$$

Il s'ensuit que $\text{dtm } K = \text{dtm } (k_{22}) \cdot \text{dtm } (k_{red})$,

soit $\text{dtm } (k_{red}) = \frac{\text{dtm } K}{\text{dtm } k_{22}} = 0$.

Il faut encore réduire les vecteurs de dérivation. Les considérations qui suivent valent pour tout vecteur z tel que $z'q$ soit invariant, à condition que $p_2 = 0$.

On a

$$\begin{pmatrix} z_1' & z_2' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1' & z_2' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ -k_{22}^{-1} k_{21} q_1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{aligned}
 &= (z_1' - z_2' k_{22}^{-1} k_{21}') q_1 \\
 &= \{ z^* \}' q_1
 \end{aligned}$$

avec

$$z^* = z_1 - k_{12} k_{22}^{-1} z_2$$

6) Distribution de forces énergétiquement équivalentes (routine FAPP40)

L'élément peut recevoir, sur le premier côté de son contour, des forces en distribution continue. Elles sont définies par la valeur locale de la densité de force en 4 points. (1). La densité est interpolée par la routine qui calcule ensuite le nombre voulu de forces énergétiquement équivalentes, c'est à dire telles que

$$\int_S p \psi ds = \sum_i P(i) q(i)$$

Pour cela, on prend pour coordonnée la longueur parcourue sur le contour. Les forces s'écrivent

$$p(s) = b' f^*(s) \quad \text{où } f^* = (1 \dots s^k)$$

L'interpolation se fait au moyen d'une matrice de connexion locale C_p telle que

$$p = C_p b$$

On procède d'une façon analogue pour les déplacements:

$$q(s) = a' f(s) \quad \text{où } f = (1 \dots s^n)$$

et

$$q = C_q a$$

Le terme de surface s'écrit alors:

$$\begin{aligned}
 \int_0^L p(s) q(s) ds &= a' \left[\int_0^L f(s) f^*(s) ds \right] b = a' N b \\
 &= b' N C_q^{-1} a = P' q
 \end{aligned}$$

où

$$P = C_q^{-1} N' b = C_q^{-1} N' C_p^{-1} p$$

est le vecteur force associé aux déplacements du premier côté.

7) Remarques générales

a) L'élément est appelé par le programme ASEF du LTAS, via une routine nommée ASP40 qui transmet les données et fait lire ce qui est propre à l'élément.

 Sur l'ASEF: carte additionnelle n° 2. Mettre IFO = 1.

b) Résultats: le programme ASEF a été conçu pour le calcul des structures. On ne s'étonnera donc pas d'y trouver des termes se rapportant à cette discipline. Voici la correspondance des diverses grandeurs:

STRUCTURES	φ	ψ
Déplacement	φ	ψ
Contraintes $\left\{ \begin{array}{l} 1^e \\ 2^e \end{array} \right.$	Vitesses $\left\{ \begin{array}{l} \mu_x \\ \mu_y \end{array} \right.$	Vitesses $\left\{ \begin{array}{l} -\mu_y \\ \mu_x \end{array} \right.$
Réactions, forces	Vitesses normales	Vit. tg.
Energie potentielle	En. cinétique	En. cinétique

8) Note sur l'interprétation des résultats

Dans l'élément n° i ,

$$q(i) = C(i)a(i) \quad \text{et} \quad K(i) = C'(i)I(i)C(i).$$

L'assemblage peut être schématisé comme suit:

$$q(i) = L(i) Q ,$$

où Q est le vecteur déplacement global pour l'écoulement complet, et L(i) la matrice d'incidence de l'élément. L'énergie cinétique relative à l'élément n°i est donc

$$\frac{1}{2} q'(i) K(i) q(i) = \frac{1}{2} Q' L'(i) K(i) L(i) Q$$

Pour l'écoulement complet, il suffit de faire la somme sur tous les éléments: on a

$$T = \frac{1}{2} Q' \left[\sum_i L'(i) K(i) L(i) \right] Q$$

$$\text{Variations } Q. \quad \delta T = \delta Q' \left[\sum_i L'(i) K(i) L(i) \right] Q$$

Le premier membre de la condition naturelle s'écrit:

$$\begin{aligned} & \sum_i L'(i) K(i) L(i) Q \\ &= \sum_i L'(i) K(i) q(i) \\ &= \sum_i \underbrace{L'(i) C^{-1}(i)}_{\text{matrice}} \underbrace{I(i) C^{-1}(i)}_{\text{moments moyens}} q(i) \end{aligned}$$

(cf supra)

On obtient donc une conditions sur les valeurs moyennes. Ce sont donc les seules grandeurs qui ont un sens au point de vue du principe variationnel. Calculer des vitesses locales est abusif. C'est pourquoi seules les vitesses moyennes sont calculées dans l'élément. En fait, on pour-

rait calculer les moments jusqu'à l'ordre $(n-1)$, n étant le degré du champ φ ou ψ . Mais ces grandeurs sont difficiles à interpréter. On dit, d'habitude que le champ connu partout (celui qui a été discrétisé dans l'élément) est connu fortement. Le champ connu en moyenne est dit de connaissance faible.

* * *

CONCLUSION

Les exemples traités ci-dessus mettent en lumière la souplesse d'utilisation de la méthode des éléments finis. Un de ses grands avantages est de permettre l'étude de formes compliquées.

Certains cas d'écoulements ont déjà été traités par PINTONG, MARTIN, ODEN, REDDI, CHU . [5] , [12] , [13] , [14] , [15] , [16] . Parfois, on peut utiliser directement des éléments finis existant pour le calcul des structures. Dans d'autres cas, il faut construire de nouveaux éléments, mais ils sont souvent simples et, pour beaucoup, très voisins.

Enfin, la possibilité d'une analyse duale, garantissant l'encadrement d'une norme, permet de vérifier la convergence de la discrétisation. Ce n'est certes pas le moindre avantage de la méthode des éléments finis.

* * * *

REFERENCES

=====

- [1] B. FRAEIJIS de VEUBEKE : "A New variational principle for finite elastic displacements" Inst.J.Engng. Sci. , 1972, Vol 10, pp. 745-763. Pergamon Press.
- [2] G. SANDER: "Application de la méthode des éléments finis à la théorie des plaques" Collection des publications de la faculté des sciences appliquées de l'université de Liège"
- [3] B. FRAEIJIS de VEUBEKE: Cours de Mécanique des fluides. Cours de Théorie des Structures.
- [4] BATEMAN : "Partial differential equations" . Dover Publications.
- [5] PIN TONG : "Texte de conférences à Udine.
- [6] I.M. GUELFAND et S.V. FOMIN : "Calculus of Variations" . Prentice Hall .
- [7] L.LANDAU et E. LIFCHITZ : "Mécanique des fluides" . Editions Mir, Moscou.
- [8] B.FRAEIJIS de VEUBEKE : "Variational principles in Fluid Mechanics".
- [9] M. GERADIN : "Principes variationnels en mécanique des fluides incompressibles" Communication personnelle.
- [10] M.GERADIN : "Vibrations transversales d'un lanceur à ergols liquides". (Travail de fin d'études)
- [11] L.LELOUP : "Etude de la lubrification et calcul des paliers" 2^e édition, Sciences et lettres, Liège .
- [12] H.C.MARTIN : "Finite element analysis of fluid flow".
- [13] T.ODEN et D.SOMOGYI : "Finite element applications in fluid dynamics". Proceedings ASCE, Eng. Mech. Div. 1969, I, 95 pp.821 à 826.
- [14] M.M. REDDI : "Finite element solution of the Incompressible Lubrication Problem". Trans. ASME, F, July 1969, pp. 524-533.
- [15] M.M.REDDI et T.Y.CHU : "Finite Element solution of the Steady-State Lubrication Problem". Transactions ASME, F, July 1970, pp. 495-503.
- [16] P.TONG and Y.C.FUNG : "Slow Particulate Viscous Flow in Channels and Tubes- Applications

to Biomechanics".

Journal of applied Mechanics, december
1971, pp. 721-728.

= + = + =

TABLE des MATIERES

CHAPITRE 1 - Descriptions lagrangienne et eulérienne	
1.1- Définitions	1.1
1.2- Transformations	1.1
1.3- Correspondance des intégrales	1.2
1.4- Expressions de la conservation de la masse; dérivée des intégrales	1.3
1.5- Variations	1.4
CHAPITRE 2 - Principes variationnels pour l'écoulement isentropique d'un fluide incompressible	
2.1- Formulation du principe de Hamilton	2.1
2.2- Elargissement du principe	2.2
2.3- Passage à un principe eulérien	2.3
2.4- Simplifications. Les principes de Bateman	2.6
2.5- Cas particulier: écoulement irrotationnel	2.6
2.6-	2.7
CHAPITRE 3 - Principes variationnels pour l'écoulement irrotationnel d'un fluide incompressible	
3.1- Principe en φ	3.1
3.2- Principe canonique	3.1
3.3- Principe à deux champs $(\vec{\lambda}, \varphi)$	3.2
3.4- Introduction d'un potentiel vecteur	3.2
3.5- Principe de variation du potentiel vecteur	3.4
3.6- Principe de variation des vitesses	3.4
CHAPITRE 4 - Principes variationnels pour l'écoulement laminaire d'un fluide visqueux (Ect de Stokes)	
4.1- La fonction de dissipation F	4.1
4.2- Principe de variation des vitesses	4.2
4.3- Principe canonique	4.3
4.4- Principe $R(\vec{u}, \sigma, p)$	4.4
4.5- Principe $F(\vec{\lambda}, \theta, p)$	4.5
4.6- Principe de variation des tensions	4.5
4.7-	4.5
4.8- Une application en lubrification: Blochet de dimension finie.	4.7
CHAPITRE 5 - Ecoulement de Stokes. Formulation vectorielle	
5.1-	5.1
5.2- Principe canonique	5.1
5.3- Principe à trois champs (u, ω, p)	5.2
5.4- Principe de variation de la vorticité	5.2
5.5- Analyse des conditions aux limites	5.3
Application	5.4
CHAPITRE 6 * Bornes supérieure et inférieure	
6.1-	6.1
6.2-	6.2
6.3- Application à la description duale φ/\vec{A} du ch.3	6.4
6.4- Application à l'étude de l'écoulement laminaire du chapitre 4	6.7
6.5- Application aux principes du chapitre 5	6.9
CHAPITRE 7 - Ecoulements plans de fluide parfait	
7.1- Dégénérescence du potentiel vecteur	7.1
7.2- Application à l'étude d'un écoulement en canal courbe	7.2
7.3-	7.3

7.4- Etude des résultats; aberrations de découpage	7.9
7.5-	7.20

CHAPITRE 8 - Formulation variationnelle de la Lubrification

8.1- Dérivation d'un principe canonique de la lubrification	8.1
8.2- Principe à deux champs (p,q)	8.2
8.3- Principe de variation des pressions	8.3
8.4- Principe de variation des débits	8.3
8.5- Bornes supérieures et inférieures en lubrification	8.4
8.6-	8.5

CHAPITRE 9 - Traitement des écoulements de STOKES plans par analogie élastique

9.1- Analogie STOKES / KIRCHHOFF	9.1
9.2- Etude d'un écoulement à paroi crénelée	9.4

APPENDICE- Note sur l'élément "40" de fluide parfait
(approche $\varphi - \psi$)