

UNIVERSITE DE LIEGE
FACULTE DES SCIENCES APPLIQUEES
LABORATOIRE DE METHODES DE FABRICATION

SUR UNE MESURE LOCALE DE L'ERREUR DE DISCRETISATION
PAR ELEMENTS FINIS

J.F. DEBONGNIE

Rapport LMF/D28, juin 1993

1. Introduction

Les méthodes d'estimation d'erreur de solutions obtenues par éléments finis peuvent se subdiviser en deux catégories. Dans la première, on essaie d'abord de déterminer, par une voie quelque peu empirique, une "meilleure" solution, par exemple par lissage des contraintes. Cette "meilleure" solution sert de base à un calcul d'erreur par différence avec la solution obtenue. La difficulté est évidemment de définir des algorithmes d'amélioration *a posteriori* de la solution, et les résultats s'en ressentent.

Dans la seconde catégorie de méthodes, on s'efforce de n'utiliser que les résultats obtenus par le calcul, et on en analyse les *défauts*. La solution est en effet défectueuse dans la mesure où elle viole les conditions locales d'équilibre. *A priori*, une telle approche a beaucoup d'attraits, car le caractère local des défauts doit permettre de déterminer *en quels endroits* la solution est particulièrement mauvaise, et d'en déduire une stratégie de raffinement du maillage.

Mais cette voie est rocailleuse, car il n'y a pas nécessairement convergence *locale* de l'équilibre, si bien qu'une attention particulière s'impose pour définir des mesures d'erreur consistantes. Notre point de vue est qu'il faut considérer le déséquilibre dans son cadre naturel, c'est-à-dire comme *un élément de l'espace dual*. En d'autres termes, un déséquilibre ne peut être valablement mesuré que par *le travail qu'il est susceptible de produire*. Les quelques lignes qui suivent présentent des mesures d'erreur de caractère quasi-local permettant de déterminer les lieux où un raffinement de maillage s'impose en priorité.

2. Problème variationnel

Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^2 , de frontière $\partial\Omega$. On considère une forme bilinéaire

$$a(u,v) = \int_{\Omega} (\partial u, H\partial v) \, dS \quad (1)$$

où u et v sont des *champs de déplacement* définis dans Ω , ∂ un opérateur de dérivation du premier ordre, H un opérateur matriciel symétrique permettant de calculer les *contraintes*

$$\sigma = H \partial u.$$

La forme bilinéaire (1) est définie et bornée dans un ensemble V (qui est une puissance de $H^1(\Omega)$) :

$$|a(u,v)| \leq C \|u\|_V \|v\|_V \quad (2)$$

Moyennant des fixations suffisantes, conduisant à restreindre V à un sous-espace V_0 , la forme (1) est également V_0 -elliptique:

$$a(u,u) \geq \alpha \|u\|_V^2 \quad \text{dans } V_0 . \quad (3)$$

Dans ces conditions, il est assez naturel, et très commode, d'utiliser dans V_0 la *norme énergétique*

$$\|u\|^2 = a(u,u) . \quad (4)$$

Nous considérerons des formes linéaires du type

$$f(v) = \int_{\Omega} (f,v) \, dS + \int_{\text{bord}} (t,v) \, ds , \quad (5)$$

avec

$$f \in L^2(\Omega) , \quad t \in L^2(\text{bord}) ,$$

le bord étant restreint à la partie de $\partial\Omega$ exempte de fixations. De telles fonctionnelles sont toujours bornées sur V_0 :

$$\|f\| = \sup_{v \in V_0} \frac{f(v)}{\|v\|} < \infty \quad (6)$$

Le problème variationnel envisagé consiste à minimiser dans V_0 l'*énergie potentielle totale*

$$\text{EPT}(u) = \frac{1}{2} a(u,u) - f(u) . \quad (7)$$

Il est équivalent de chercher l'élément $u \in V_0$ tel que pour tout $v \in V_0$,

$$a(u,v) = f(v) . \quad (8)$$

3. Problème approché

On résout le problème (8) de manière approchée en définissant un *sous-espace d'éléments finis* $V_h \subset V_0$ et en cherchant à minimiser l'énergie potentielle totale dans V_h , ce qui revient à chercher $u_h \in V_h$ tel que pour tout $v_h \in V_h$,

$$a(u_h, v_h) = f(v_h) . \quad (9)$$

Bien entendu, la solution u_h ainsi obtenue est entachée d'une erreur, c'est-à-dire que $u_h \neq u$, sauf dans le cas particulier où le hasard voudrait que $u \in V_h$. Il en découle en particulier que

$$EPT(u_h) \geq EPT(u) ,$$

l'égalité étant l'exception.

4. Expression de l'erreur en fonction des déplacements

L'erreur de la solution obtenue peut être mesurée globalement par la norme $\|u - u_h\|$. Celle-ci est intimement liée à l'erreur en énergie totale, car

$$\begin{aligned} \|u - u_h\|^2 &= a(u - u_h, u - u_h) = \|u\|^2 - 2 a(u, u_h) + \|u_h\|^2 \\ &= \|u\|^2 + a(u_h, u_h) - 2 f(u_h) \\ &= \|u\|^2 + 2 EPT(u_h) \end{aligned} \quad (10)$$

Cette relation est en fait valable pour *tout* déplacement approché, qu'il soit ou non obtenu par la méthode de Rayleigh-Ritz. Précisément, cette dernière méthode consiste à minimiser $EPT(u_h)$, ce qui revient donc à minimiser l'erreur en énergie. La conjugaison des deux relations (8) et (9), écrites avec

$v = v_h \in V_h \subset V$ donne

$$a(u, v_h) = f(v_h) = a(u_h, v_h) \Rightarrow a(u - u_h, v_h) = 0, \quad (11)$$

pour tout $v_h \in V_h$. Cela signifie que le résidu $(u - u_h)$ d'une analyse de Rayleigh-Ritz est orthogonal à la solution approchée. Il en résulte en particulier que

$$\|u - u_h\|^2 = a(u - u_h, u), \quad (12)$$

relation dont nous aurons à nous servir. Par ailleurs, la linéarité des espace V_0 et V_h implique que l'on peut poser dans (8) et (9) $v = u$ et $v_h = u_h$, ce qui donne les théorèmes de Clapeyron

$$a(u, u) = f(u) \quad (13)$$

et

$$a(u_h, u_h) = f(u_h) . \quad (14)$$

Il en découle

$$EPT(u_h) = -\frac{1}{2} a(u_h, u_h) = -\frac{1}{2} f(u_h) \quad (15)$$

d'où, par (10), *

$$\|u - u_h\|^2 = \|u\|^2 - \|u_h\|^2 = f(u) - f(u_h) , \quad (16)$$

résultat bien connu.

Tout serait évidemment fort simple si l'on connaissait la solution exacte u , ce qui n'est malheureusement pas le cas. On peut évidemment travailler par extrapolation à partir de plusieurs analyses, en tenant compte du fait que l'erreur $\|u - u_h\|$ tend vers zéro lorsque le maillage se raffine. Mais une telle méthode est coûteuse et peu satisfaisante en ce qu'elle ne donne pas d'indications sur les *endroits* où il convient de raffiner le maillage.

5. Mesure de l'erreur en fonction des défauts d'équilibre

Commençons par noter que

$$\|u - u_h\| = \sup_{v \in V_0} \frac{a(u - u_h, v)}{\|v\|} \quad (17)$$

Or,

$$a(u - u_h, v) = a(u, v) - a(u_h, v) = f(v) - a(u_h, v) . \quad (18)$$

Développons ces deux termes. On a, en notant e les éléments et b les portions de frontières d'éléments appartenant au bord chargé,

$$f(v) = \sum_b \int_b (t, v) ds + \sum_e \int_e (f, v) dS . \quad (19)$$

Par ailleurs, en notant

$$\sigma_h = H \partial u_h ,$$

on obtient

$$a(u_h, v) = \sum_e \int_e (\sigma_h, \partial v) dS$$

et, en intégrant par parties sur chaque élément,

$$a(u_h, v) = \sum_e \int_{\partial e} (N' \sigma_h, v) ds - \sum_e \int_e (\partial' \sigma_h, v) dS ,$$

où ∂' est l'opérateur conjugué à ∂ et N' l'opérateur de frontière correspondant. Séparons sur les frontières d'éléments les interfaces i et les bords b . Il vient, en tenant compte de la présence de deux termes sur les interfaces,

$$a(u_h, v) = \sum_i \int_i (\Delta N' \sigma_h, v) ds + \sum_b \int_b (N' \sigma_h, v) ds - \sum_e \int_e (\partial' \sigma_h, v) dS \quad (20)$$

Rassemblant les résultats (19), (20) et (21), on obtient

$$a(u_h, v) = \sum_b \int_b (t - N' \sigma_h, v) ds - \sum_i \int_i (\Delta N' \sigma_h, v) ds + \sum_e \int_e (\partial' \sigma_h + f, v) dS \quad (21)$$

Il s'agit du *travail des défauts d'équilibre*:

$t - N' \sigma_h$ sur les bords

$\Delta N' \sigma_h$ sur les interfaces

$\partial' \sigma_h + f$ dans les éléments,

pour un déplacement d'essai v . Si l'on se donne ce déplacement v , l'expression (21) est une fonctionnelle $g_h(v)$ que l'on peut calculer à partir des données et des résultats de l'analyse effectuée. Il est clair que

$$\|u - u_h\| = \sup_{v \in V_0} \frac{g_h(v)}{\|v\|} = \|g_h\|', \quad (22)$$

$\|g_h\|'$ étant la norme dans le dual V_0' . Lorsque le maillage se raffine, $\|g_h\|' \rightarrow 0$. Mais cela ne signifie pas que les défauts locaux d'équilibre tendent vers zéro ponctuellement, ni même au sens L^2 . Un contre-exemple typique est l'élément du premier degré dans lequel on a constamment $\partial' \sigma_h = 0$, si bien que

$$\sum_e \int_e |\partial' \sigma_h + f|^2 dS = \int_{\Omega} |f|^2 dS,$$

grandeur qui ne tend pas vers zéro. Il convient donc d'être très attentif aux normes utilisées. Dans cette optique, nous dirons qu'une mesure d'erreur est *consistante* si elle tend vers zéro lorsque $\|u - u_h\|$ le fait.

6. Une mesure inconsistante d'erreur

On est tenté de majorer l'expression (21) en faisant usage de diverses inégalités à la Schwarz-Cauchy. Ainsi,

$$\begin{aligned} \left| \int_b (t - N'\sigma_h, v) ds \right| &\leq \int_b |t - N'\sigma_h| |v| ds \\ &\leq \left(\int_b |t - N'\sigma_h|^2 ds \right)^{1/2} \left(\int_b |v|^2 ds \right)^{1/2} \end{aligned}$$

et

$$\left| \sum_b \int_b (t - N'\sigma_h, v) ds \right| \leq \left(\sum_b \int_b |t - N'\sigma_h|^2 ds \right)^{1/2} \left(\sum_b \int_b |v|^2 ds \right)^{1/2}$$

Notant

$$\| \# \|_{0, \cup b} = \left(\sum_b \int_b |\#|^2 ds \right)^{1/2},$$

on a donc obtenu le majorant

$$\| t - N'\sigma_h \|_{0, \cup b} \| v \|_{0, \cup b}.$$

De la même façon, et avec des notations similaires,

$$\left| \sum_i \int_i (\Delta N'\sigma_h, v) ds \right| \leq \| \Delta N'\sigma_h \|_{0, \cup i} \| v \|_{0, \cup i}$$

et

$$\left| \sum_e \int_e (\partial'\sigma_h + f, v) ds \right| \leq \| \partial'\sigma_h + f \|_{0, \cup e} \| v \|_{0, \cup e},$$

si bien que

$$\begin{aligned} g_h(v) &\leq \| t - N'\sigma_h \|_{0, \cup b} \| v \|_{0, \cup b} + \| \Delta N'\sigma_h \|_{0, \cup i} \| v \|_{0, \cup i} + \\ &\quad + \| \partial'\sigma_h + f \|_{0, \cup e} \| v \|_{0, \cup e} \stackrel{\Delta}{=} b_h(v). \end{aligned} \quad (23)$$

On a alors

$$\| u - u_h \|^2 = a(u - u_h, u) = g_h(u) \leq b_h(u),$$

et on peut évaluer $b_h(u)$ par

$$b_h(u) \approx b_h(u_h). \quad (24)$$

Ce procédé est du reste susceptible de nombreuses variantes sur lesquelles nous n'insisterons pas, car notre objet est de faire remarquer que la convergence énergétique *n'implique pas* que

$$\| \partial'\sigma_h + f \|_{0, \cup e} \longrightarrow 0,$$

ce que nous savons déjà, ni non plus que

$$\|\Delta N' \sigma_h\|_{0, \cup i} \longrightarrow 0 ,$$

puisque précisément, une partie des charges réparties est redistribuée sur les frontières de l'élément de manière *énergétiquement équivalente*. Le même phénomène se produit également au droit des bords. La mesure d'erreur (23) est donc *inconsistante*. La raison de cette inconsistance est à chercher dans le fait que l'on a remplacé la norme naturelle des charges, celle du dual, par une norme au sens du carré moyen, qui est *plus forte*. Du reste, il s'agit d'une mesure globale qui ne donne aucune indication directe sur les régions où le maillage doit être raffiné.

7. Evaluations énergétiques locales de l'erreur

Considérons deux éléments e_1 et e_2 ayant en commun une interface i . Pour la simplicité de l'exposé, nous supposons les éléments de degré 1, bien que les idées énoncées ci-dessous soient plus générales. Définissons un déplacement ψ nul sur la frontière de $\overline{e_1 \cup e_2}$, et quadratique sur l'interface i . Pour ce déplacement,

$$g_h(\psi) = \int_{e_1} (\partial' \sigma_h + f, \psi) dS + \int_{e_2} (\partial' \sigma_h + f, \psi) dS + \int_i (\Delta N' \sigma_h, \psi) ds , \quad (25)$$

grandeur qu'il est aisé de calculer. Ceci fournit une *mesure du déséquilibre d'interface*

$$\varepsilon(\psi) = \frac{g_h(\psi)}{\|\psi\|} . \quad (26)$$

Il est clair que cette mesure d'erreur, de caractère local, est consistante, car $\psi \in V_0$, ce qui implique

$$\varepsilon(\psi) \leq \sup_{v \in V_0} \frac{g_h(v)}{\|v\|} = \|g_h\| , \quad (27)$$

On notera que l'expression (26) contient une partie des déséquilibres intérieurs d'éléments, ce qui est une *nécessité* du fait de la compensation partielle de ces déséquilibres avec ceux de l'interface.

De la même façon, en choisissant pour ψ une *bulle* d'élément, on obtient

$$g_h(\psi) = \int_e (\partial' \sigma_h + f, \psi) dS \quad (28)$$

et

$$\varepsilon(\psi) = \frac{\int (\partial' \sigma_h + f, \psi) dS}{\|\psi\|} .$$

Les mesures d'erreur de ce genre peuvent être calculées dans le cadre d'un post-processeur, puisqu'elles ne font appel qu'aux données et aux résultats obtenus. En outre, nous nous proposons de montrer que les déplacements ψ menant aux plus grandes valeurs de $\varepsilon(\psi)$ sont à ajouter en priorité au modèle: il s'agit donc d'indicateurs de régions à raffiner.

8. Analyse de sensibilité

Soit u_h la solution approchée obtenue. Proposons-nous de l'améliorer par addition d'un champ de déplacement particulier $q\psi$ où q est un nombre, et ψ la forme du déplacement. On cherchera donc le déplacement

$$\tilde{u} = u_h + q \psi \quad (30)$$

qui minimise

$$\begin{aligned} \text{EPT}(\tilde{u}) &= \frac{1}{2} a(u_h + q \psi, u_h + q \psi) - f(u_h + q \psi) \\ &= \frac{1}{2} a(u_h, u_h) + q a(u_h, \psi) + \frac{1}{2} q^2 a(\psi, \psi) - f(u_h) - q f(\psi) \\ &= \text{EPT}(u_h) + \frac{1}{2} q^2 \|\psi\|^2 - q [f(\psi) - a(u_h, \psi)] \\ &= \text{EPT}(u_h) + \frac{1}{2} q^2 \|\psi\|^2 - q g_h(\psi) \end{aligned} \quad (31)$$

Le minimum de cette expression par rapport à q s'obtient pour

$$q = \frac{g_h(\psi)}{\|\psi\|^2} .$$

Pour cette valeur, on obtient

$$\text{EPT}(\tilde{u}) = \text{EPT}(u_h) - \frac{1}{2} \frac{g_h^2(\psi)}{\|\psi\|^2} = \text{EPT}(u_h) - \frac{1}{2} \varepsilon^2(\psi) . \quad (32)$$

Ainsi, l'addition du degré de liberté ψ , sans rien changer au reste de la solution, permet de gagner $\frac{1}{2} \varepsilon^2(\psi)$ sur l'énergie potentielle totale. En vertu de la formule (10), cela signifie que la norme de l'erreur est diminuée de $\varepsilon^2(\psi)$. Par conséquent, un

raffinement rationnel de maillage doit commencer par l'addition des champs de déplacement ayant le plus grand $\varepsilon(\psi)$.