

UNIVERSITE DE LIEGE
FACULTE DES SCIENCES APPLIQUEES
LABORATOIRE DE METHODES DE FABRICATION

SUR LE CONTACT LINEAIRE TECHNIQUE

J.F. DEBONGNIE

Rapport LMF/D20, décembre 1989

SUR LE CONTACT LINEAIRE TECHNIQUE

J.F. DEBONGNIE

RÉSUMÉ

Le présent papier dégage, à partir de la notion de contact linéaire technique, une voie permettant de prédire analytiquement le rapprochement de deux corps en contact hertzien linéaire.

1. INTRODUCTION

On peut distinguer trois espèces de contacts entre deux corps, selon la forme de la zone *nominale* de contact. Lorsque cette zone nominale est une *surface* , on parle de contact *conforme* . Les autres cas, où la zone nominale de contact est un point ou une courbe, sont appelés contacts *hertziens* , *ponctuel* dans le premier cas, *linéaire* dans le second.

Dans un contact conforme, les efforts se répartissent sur toute la zone de contact et s'étudient par la théorie linéaire de l'élasticité. Les contacts hertziens, bien que relevant de la même théorie à l'intérieur de chacun des deux corps, sont essentiellement non linéaires, car la surface réelle de contact croît en fonction de la charge.

Le problème du contact ponctuel a été traité par HERTZ [1], à la fin du siècle dernier, par les équations intégrales. La zone effective de pression est une ellipse d'axes $2a$ et $2b$. Notant $e=b/a \leq 1$, on est tenté d'étendre ce résultat au contact linéaire en faisant tendre e vers zéro. Malheureusement, ce procédé n'est pas justifiable, car dans ce cas, comme la charge P est donnée par

$$P = \frac{2}{3} \pi p_H a b$$

où p_H est la pression maximale, encore appelée *pression de Hertz* , on a soit $P = \infty$, soit $p_H = 0$. Il en résulte en particulier que le rapprochement δ des deux corps est infini, ce qui est à tout le moins troublant. L'état plan de déformation ne constitue donc pas un cadre satisfaisant pour cette étude. Et l'état plan de contrainte? La réponse est également négative, car un état plan de contrainte véritable correspond à des déplacements variables sur l'épaisseur [2].

Est-ce à dire que le rapprochement de deux corps en contact linéaire résiste à toute analyse? Tout dépend, en fait, de la manière dont on envisage le passage à la limite à partir du contact ponctuel. Dans de nombreuses applications, on a en réalité affaire à ce que nous appellerons un *contact linéaire technique* , que nous idéaliserons comme suit: les deux corps en présence ont une courbure relative très faible dans la direction de la ligne de contact, et cette zone de faible courbure relative est prolongée, de part et d'autre, par une zone où les deux corps se séparent plus nettement (*fig. 1*). Dans ces conditions, sous de faibles charges, le contact est ponctuel, mais le grand axe de la zone de contact est nettement plus grand que le petit. Sous de fortes charges, l'ellipse de contact est tronquée, et le contact s'identifie à un contact linéaire (*fig. 2*). A l'heure actuelle, la plupart des roulements à rouleaux sont conçus de telle sorte que le type de contact que nous venons de décrire soit de règle. (C'est ce que les constructeurs de roulements appellent un *contact linéaire modifié*).

Le présent papier se propose de montrer que le contact linéaire technique peut se traiter rationnellement comme la limite

d'un contact ponctuel, à condition de se rappeler que la zone de charge garde une surface finie. Il résulte de cette approche, très élémentaire sur le plan conceptuel, une expression *finie* du déplacement en fonction de la charge, expression qui, de plus, se trouve en bon accord avec les données empiriques.

2. FORMULES FONDAMENTALES

Soient deux corps en contact, de modules de Young respectifs E_I et E_{II} et de coefficients de Poisson ν_I et ν_{II} . On note E_m le *module équivalent* défini par

$$\frac{2}{E_m} = \frac{1 - \nu_I^2}{E_I} + \frac{1 - \nu_{II}^2}{E_{II}}$$

Les rayons de courbure du corps I au droit du contact sont ρ_{1I} dans la direction 1 et ρ_{2I} dans la direction 2. Ils sont comptés positivement si la courbure correspond à une convexité du corps I. On définit de même ρ_{1II} et ρ_{2II} pour le corps II. La *courbure totale* est définie par

$$\Sigma\rho = \rho_{1I} + \rho_{2I} + \rho_{1II} + \rho_{2II}$$

Le second paramètre de courbure est l'angle θ défini par

$$\cos \theta = \left| \frac{\rho_{1I} - \rho_{2I} + \rho_{1II} - \rho_{2II}}{\Sigma\rho} \right|, \quad 0 < \theta \leq 90^\circ$$

On vérifie aisément que θ vaut 90° pour un contact sphérique et que le cas-limite $\theta = 0^\circ$ correspond à un contact linéaire. Il reste encore une donnée à fournir, la charge P qui presse les deux corps l'un sur l'autre.

HERTZ [1] a montré que la zone de contact est une ellipse de demi-axes a et b et que la pression a une distribution donnée par

$$p = p_H [1 - (x/a)^2 - (y/b)^2]^{1/2},$$

dont le maximum p_H est appelé *pression de Hertz*. On peut également calculer le rapprochement δ des deux corps. Les résultats de Hertz peuvent être mis sous la forme suivante:

$$a = k_a(\theta) \left(\frac{P}{E_m \Sigma\rho} \right)^{1/3}$$

$$b = k_b(\theta) \left(\frac{P}{E_m \Sigma\rho} \right)^{1/3}$$

$$p_H = k_p(\theta) \cdot P^{1/3} \cdot (E_m \Sigma\rho)^{2/3}$$

$$\delta = k_\delta(\theta) \cdot P^{2/3} \cdot E_m^{-2/3} \cdot (\Sigma\rho)^{1/3}$$

Il est possible d'établir des tables de θ , k_a , k_b , k_p et k_δ en fonction de l'excentricité $e = b/a$. Pour le cas du contact linéaire technique, qui correspond à de très faibles excentricités, on peut établir les formules asymptotiques suivantes:

$$k_a \approx (6/\pi)^{1/3} e^{-2/3}$$

$$k_b \approx (6/\pi)^{1/3} e^{1/3}$$

$$k_p \approx \frac{1}{4} (6/\pi)^{1/3} e^{1/3}$$

$$k_\delta \approx \frac{1}{2} (6/\pi)^{2/3} e^{2/3} \ln(4/e),$$

dont on déduit aisément

$$a) \quad k_a/k_p = 4/e,$$

soit

$$a = \frac{1}{E_m \sum \rho} \cdot \frac{4}{e} \cdot P_H \quad (1)$$

$$b) \quad k_b/k_p = 4,$$

soit

$$b = \frac{1}{E_m \sum \rho} \cdot 4 P_H \quad (2)$$

$$c) \quad k_\delta/k_p = 8 \ln(4/e),$$

soit

$$\delta = \frac{1}{E_m^2 \sum \rho} \cdot P_H^2 \cdot 8 \ln(4/e) \quad (3)$$

A ce stade, observons que pour $e \rightarrow 0$, la relation donnant b en fonction de P_H reste définie. L'approche classique consiste à admettre que cette relation reste valable. On constate alors que δ tend vers l'infini, paradoxe que l'on lève en faisant appel à l'expérience.

Mais une autre approche est possible: pour e très petit, mais non nul, il est réaliste, et conforme à l'usage, d'admettre que les relations (1) et (2) restent valables. Le fait que le grand axe $2a$ soit très grand n'est pas choquant en soi. Simplement, il faut calculer la charge et le déplacement en tenant compte du fait que l'ellipse de contact est *tronquée*. Comme il s'agit d'intégrales sur la zone *effective* de contact, on obtiendra une charge et un déplacement *finis*. Il sera alors loisible de faire

tendre e vers zéro sans modifier sensiblement les résultats. On obtient ainsi une théorie rationnelle du contact linéaire.

3. CALCUL DE LA CHARGE

La charge est donnée (fig. 3) par

$$P = \int_S p \, dS$$

et, comme la pression est distribuée suivant la loi

$$p(x, y) = p_H [1 - (x/a)^2 - (y/b)^2]^{1/2},$$

on a

$$P = p_H \int_{-1/2}^{1/2} dx \int_{-b^*(x)}^{b^*(x)} [1 - (x/a)^2 - (y/b)^2]^{1/2} dy,$$

en notant

$$b^*(x) = b [1 - (x/a)^2]^{1/2}.$$

La première intégrale à calculer est

$$\begin{aligned} \int_{-b^*}^{b^*} [1 - (x/a)^2 - (y/b)^2] dy &= \frac{1}{b} \int_{-b^*}^{b^*} [b^{*2} - y^2]^{1/2} dy \\ &= \frac{b^*}{b} \int_{-b^*}^{b^*} [1 - (y/b^*)^2] dy. \end{aligned}$$

Posant

$$y = b^* \sin \phi,$$

on obtient

$$\frac{b^{*2}}{b} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 \phi \, d\phi = \frac{b^{*2}}{b} \cdot \frac{\pi}{2}.$$

Il vient donc

$$P = p_H b \frac{\pi}{2} \int_{-1/2}^{1/2} (b^*/b)^2 dx = p_H b \frac{\pi}{2} \int_{-1/2}^{1/2} \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) dx,$$

soit

$$P = p_H \frac{\pi b}{2} \left[1 - \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2a}\right)^2\right].$$

On peut transformer cette expression en notant que, par (1),

$$2a = \frac{1}{E_m \sum \rho} \cdot (8/e) \cdot p_H ,$$

ce qui donne

$$P = \frac{p_H \pi b l}{2} \left[1 - \frac{1}{3} \left(\frac{E_m l \sum \rho}{8 p_H} \right)^2 e^2 \right]$$

et, pour $e \rightarrow 0$,

$$P \approx p_H \frac{\pi b l}{2} . \quad (4)$$

Introduisant dans cette formule la valeur de b donnée par (2), on obtient

$$P \approx 2 \pi l \frac{p_H^2}{E_m \sum \rho} ,$$

soit

$$p_H = \left[\frac{1}{2\pi} \frac{P E_m \sum \rho}{l} \right]^{1/2} = \left[\frac{1}{2\pi} P' E_m \sum \rho \right]^{1/2} , \quad (5)$$

avec

$$P' = P/l . \quad (6)$$

C'est la formule classique de la charge dans un contact linéaire. Quant à la demi-largeur de contact, elle s'exprime, en fonction de la charge par unité de longueur, sous la forme suivante:

$$b = \frac{1}{E_m \sum \rho} \cdot 4 p_H = \left[\frac{8}{\pi} \frac{P'}{E_m \sum \rho} \right]^{1/2} . \quad (7)$$

On retrouve effectivement les formules classiques du contact linéaire.

4. CALCUL DU DEPLACEMENT

La théorie de Hertz est fondée sur la relation

$$\delta_a = \frac{2}{\pi E_m} \int_S \frac{P_B}{r_{AB}} dS_B .$$

Pour une zone elliptique complète, on obtient ainsi, au centre de la zone de contact, le déplacement théorique

$$\delta_{th} = \frac{1}{E_m^2 \sum \rho} p_H^2 \cdot 8 \ln(4/e) ,$$

soit, sous forme non dimensionnelle,

$$\delta_{th} \sum \rho = \left(\frac{p_H}{E_m} \right)^2 \cdot 8 \ln(4/e) \quad (8)$$

Dans notre cas, il faut tenir compte du fait que l'ellipse est tronquée en soustrayant, toujours pour le centre,

$$\begin{aligned} \Delta\delta &= \frac{2}{\pi E_m} \int_{\text{surface inexistante}} \frac{p}{r} dS \\ &= \frac{4 p_H}{\pi E_m} \int_{1/2}^a dx \int_{-b^*}^{b^*} \frac{[1 - (x/a)^2 - (y/b)^2]^{1/2}}{[x^2 + y^2]^{1/2}} dy, \quad (9) \end{aligned}$$

b^* ayant toujours pour signification

$$b^* = b [1 - (x/a)^2]^{1/2}.$$

La longueur $1/2$ étant grande devant b , on peut sans grande erreur remplacer, au dénominateur de l'intégrand, $[x^2 + y^2]^{1/2}$ par x . Il vient alors

$$\Delta\delta = \frac{4 p_H}{E_m} \int_{1/2}^a \frac{dx}{x} \int_{-b^*}^{b^*} [1 - (x/a)^2 - (y/b)^2]^{1/2} dy$$

et, par les mêmes développements que pour la charge,

$$\begin{aligned} \Delta\delta &= \frac{4 p_H b}{\pi E_m} \cdot \frac{\pi}{2} \int_{1/2}^a (b^*/b)^2 \frac{dx}{x} \\ &= \frac{2 p_H b}{E_m} \int_{1/2}^a \left(\frac{1}{x} - \frac{x}{a^2} \right) dx \\ &= \frac{2 p_H b}{E_m} \left[\ln \frac{2a}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2a} \right)^2 \right]. \end{aligned}$$

Notant que, par (2),

$$b = \frac{4 p_H}{E_m \sum \rho},$$

on obtient

$$\Delta\delta = \frac{8 p_H^2}{E_m^2 \sum \rho} \left[\ln \frac{2a}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2a} \right)^2 \right].$$

Par ailleurs, nous avons déjà calculé

$$\frac{2a}{1} = \frac{p_H}{E_m (1 \sum \rho)} \cdot \frac{8}{e},$$

ce qui permet d'écrire

$$\Delta\delta \cdot \Sigma\rho = \frac{8p_H^2}{E_m^2} \left[\ln \frac{4}{e} + \ln \frac{2p_H}{E_m 1\Sigma\rho} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \left(\frac{E_m 1\Sigma\rho}{p_H} \frac{e}{8} \right)^2 \right] \quad (10)$$

Soustrayant cette valeur de (8), on obtient

$$\delta \Sigma\rho = (\delta_{th} - \Delta\delta) \Sigma\rho = \frac{8 p_H^2}{E_m} \left[\frac{1}{2} - \ln \frac{2p_H}{E_m 1\Sigma\rho} - \frac{1}{2} \left(\frac{E_m 1\Sigma\rho}{p_H} \frac{e^2}{8} \right)^2 \right]$$

et, en négligeant le terme en e^2 ,

$$\delta \Sigma\rho = \frac{8 p_H^2}{E_m^2} \left[\frac{1}{2} - \ln 2 - \ln \frac{p_H}{E_m 1\Sigma\rho} \right]$$

Cette relation peut encore être mise sous la forme

$$\frac{\delta \Sigma\rho}{(1\Sigma\rho)^2} = 8 \left(\frac{p_H}{E_m 1\Sigma\rho} \right)^2 \left[\frac{1}{2} - \ln 2 - \ln \frac{p_H}{E_m 1\Sigma\rho} \right] = f \left(\frac{p_H}{E_m 1\Sigma\rho} \right) \quad (11)$$

5. EXPRESSIONS APPROCHÉES DU DEPLACEMENT

Interviennent dans le problème les cinq grandeurs

$$\delta, \quad \Sigma\rho, \quad P, \quad E_m, \quad l$$

dont les dimensions sont

$$L, \quad L^{-1}, \quad F, \quad FL^{-2}, \quad L.$$

Les cinq grandeurs en question dépendant de deux dimensions fondamentales, on peut les grouper en trois nombres sans dimension. Nous choisirons les nombres suivants:

$$\delta\Sigma\rho, \quad \frac{P\Sigma\rho}{E_m l}, \quad l\Sigma\rho.$$

En adoptant une loi de puissances, on obtient

$$\delta\Sigma\rho = K \left(\frac{P\Sigma\rho}{E_m l} \right)^x \left(l\Sigma\rho \right)^y \quad (12)$$

On trouve dans la littérature deux types de formules de ce genre:

a) La formule de DOWSON et HIGGINSON, qui se caractérise par $y = 0$;

b) Les formules fondées sur le fait, assez bien vérifié par l'expérience, que δ ne dépend guère de $\Sigma\rho$. L'indépendance vis-à-vis de $\Sigma\rho$ exige

$$y = 1 - x.$$

C'est le cas de la formule de LUNDBERG et de celle d'ESCHMANN & al..

Quoi qu'il en soit, on notera que

$$\frac{P\Sigma\rho}{E_m l} = 2 \pi \left(\frac{P_H}{E_m} \right)^2,$$

ce qui permet de donner à la relation (12) la forme

$$\delta\Sigma\rho = K^* \left(\frac{P_H}{E_m} \right)^{2x} (l\Sigma\rho)^y,$$

avec

$$K^* = K (2\pi)^x \quad (13)$$

Il en découle encore

$$\frac{\delta\Sigma\rho}{(l\Sigma\rho)^2} = K^* \left(\frac{P_H}{E_m l\Sigma\rho} \right)^{2x} (l\Sigma\rho)^{y+2x-2}, \quad (14)$$

formule que l'on peut comparer à (11) pour une valeur donnée de $l\Sigma\rho$. Nous passerons en revue les trois formules suivantes:

(1) Formule de DOWSON et HIGGINSON [3]

Dowson et Higginson ont proposé en 1963 la formule

$$\delta \Sigma \rho = 3,6 \left(\frac{2}{\pi E_m} P' \Sigma \rho \right)^{0,9},$$

ce qui correspond à

$$x = 0,9, \quad y = 0, \quad K = 3,6 \cdot (2/\pi)^{0,9}.$$

On trouve donc

$$K^* = 12,54$$

et

$$\frac{\delta \Sigma \rho}{(1 \Sigma \rho)^2} = 12,54 \left(\frac{P_H}{E_m 1 \Sigma \rho} \right)^{1,8} \cdot \frac{1}{(1 \Sigma \rho)^{0,2}} \quad (15)$$

(2) Formule de LUNDBERG [4]

Cette formule s'écrit

$$\delta = 2,537 \frac{P^{0,9}}{E_m^{0,9} l^{0,8}}$$

soit

$$\delta \Sigma \rho = 2,537 \cdot \left(\frac{P \Sigma \rho}{E_m l} \right)^{0,9} \cdot (1 \Sigma \rho)^{0,1}$$

On a donc ici

$$x = 0,9; \quad y = 1 - x = 0,1; \quad y + 2x - 2 = -0,1; \quad K = 2,537$$

On calcule

$$K^* = 2,537 \cdot (2\pi)^{0,9} = 13,26,$$

ce qui donne

$$\frac{\delta \Sigma \rho}{(1 \Sigma \rho)^2} = 13,26 \left(\frac{P_H}{E_m 1 \Sigma \rho} \right)^{1,8} \cdot \frac{1}{(1 \Sigma \rho)^{0,1}} \quad (16)$$

(3) Formule d'ESCHMANN & al. [5]

Eschmann & al. donnent pour le contact acier/acier

$$\delta = 4,05 \cdot 10^{-5} \cdot \frac{P^{0,925}}{l^{0,85}},$$

où δ et l sont à exprimer en mm, et P , en N. Cette formule équivaut, dans le cas de l'acier, à

$$\delta = 4,05 \cdot 10^{-5} \cdot E_m^{0,925} \cdot \frac{P^{0,925}}{E_m^{0,925} l^{0,85}} ;$$

dans le cas de l'acier, les mêmes auteurs donnent

$$\delta = 2,08 \cdot 10^5 \text{ MPa}, \quad \nu = 0,3 ,$$

ce qui conduit à

$$E_m = 228\,600 \text{ MPa}$$

et

$$\delta = 3,669 \frac{P^{0,925}}{E_m^{0,925} l^{0,85}} ,$$

ou encore,

$$\delta \Sigma \rho = 3,669 \left(\frac{P \Sigma \rho}{E_m l} \right)^{0,925} (l \Sigma \rho)^{0,075} .$$

On a donc ici

$$x = 0,925 ; \quad y = 1 - x = 0,075 ; \quad y + 2x - 2 = -0,075 ; \quad K = 3,669$$

Il en résulte la formule suivante:

$$\frac{\delta \Sigma \rho}{(l \Sigma \rho)^2} = 20,08 \left(\frac{P_H}{E_m l \Sigma \rho} \right)^{1,85} \cdot \frac{1}{(l \Sigma \rho)^{0,075}} . \quad (17)$$

Comparons les résultats de ces trois formules à ceux de la relation (11), pour la valeur raisonnable

$$l \Sigma \rho = 2 ,$$

dans l'intervalle

$$10^{-4} \leq \frac{P_H}{E_m l \Sigma \rho} \leq 10^{-2} ,$$

qui correspond aux valeurs courantes de p_H . Les formules (15), (16) et (17) se réduisent, dans ce cas particulier, à

$$(15) \rightarrow \frac{\delta \Sigma \rho}{(l \Sigma \rho)^2} = 10,92 \left(\frac{P_H}{E_m l \Sigma \rho} \right)^{1,8}$$

$$(16) \rightarrow \frac{\delta \Sigma \rho}{(l \Sigma \rho)^2} = 12,37 \left(\frac{P_H}{E_m l \Sigma \rho} \right)^{1,8}$$

$$(17) \rightarrow \frac{\delta \Sigma \rho}{(1 \Sigma \rho)^2} = 19,06 \left(\frac{P_H}{E_m 1 \Sigma \rho} \right)^{1,85}$$

Les valeurs obtenues sont consignées dans le tableau suivant, où l'on note X la variable $\frac{P_H}{E_m 1 \Sigma \rho}$ et Y la variable $\frac{\delta \Sigma \rho}{(1 \Sigma \rho)^2}$.

X	$10^6 Y$ (15)	$10^6 Y$ (16)	$10^6 Y$ (17)	$10^6 Y$ (11)
10^{-4}	0,6890	0,7805	0,7588	0,7124
$2 \cdot 10^{-4}$	2,399	2,718	2,735	2,664
$5 \cdot 10^{-4}$	12,48	14,14	14,90	14,82
10^{-3}	43,47	49,25	53,72	53,72
$2 \cdot 10^{-3}$	151,4	171,5	193,7	192,7
$5 \cdot 10^{-3}$	787,7	892,3	1055	1021
10^{-2}	2743	3107	3803	3530

On constate que l'accord entre notre relation et la formule et la formule d'Eschmann et al. est très bon. Il est un peu moins bon avec les deux autres formules, mais nos résultats sont toujours compris entre ceux des autres formules. En ajustant linéairement les logarithmes de la formule (11) pour les valeurs du tableau ci-dessus, on obtient l'expression approchée

$$\frac{\delta \Sigma \rho}{(1 \Sigma \rho)^2} = 18,22 \left(\frac{P_H}{E_m 1 \Sigma \rho} \right)^{1,848},$$

qui correspond à

$$x = 0,9239, \quad y + 2x - 2 = 0,$$

soit

$$y = 2 - 2x = 1,523$$

et

$$K^* = 18,22,$$

c'est-à-dire

$$K = \frac{18,22}{(2\pi)^{0,9239}} = 3,335.$$

Il vient donc

$$\delta \sum \rho = 3,335 \left(\frac{P \sum \rho}{E_m I} \right)^{0,9239} \cdot (1 \sum \rho)^{0,1523}$$

soit

$$\delta = 3,335 \cdot \frac{P^{0,9239}}{E_m^{0,9239} \cdot I^{0,8478}} \cdot (1 \sum \rho)^{0,07620} \quad (18)$$

Cette formule, très proche de celle d'Eschmann et al., comporte en plus un facteur $(1 \sum \rho)$ à la puissance 0,07620, très faible. L'influence de ce facteur est souvent infime.

6. CONCLUSIONS

Le contact linéaire technique se présente donc comme une approche simple et efficace pour effectuer le passage à la limite entre le contact ponctuel et le contact linéaire. Cette approche permet, et c'est là son grand intérêt, de calculer le rapprochement des deux corps, les valeurs obtenues étant en bon accord avec l'expérience.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] HERTZ - *Gesammelte Werke*
Berlin, 1895, Tome 1, pp. 155-174
- [2] B. FRAEIJIS de VEUBEKE - *A Course in Elasticity*
Applied Math. Sciences, 29, Springer, New York, 1979
- [3] D. DOWSON, G.R. HIGGINSON - *Elasto-hydrodynamic Lubrication*
Pergamon, 1977
- [4] A. PALMGREN - *Les Roulements*
Editions de la firme S.K.F.
- [5] ESCHMANN, HASBAGEN, WEIGAND - *Die Wälzlagerpraxis*
Oldenburg, München, 1978

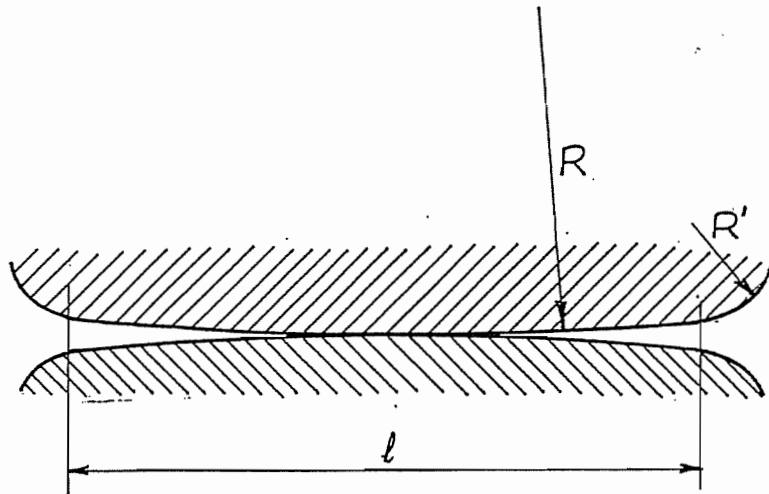


FIGURE 1

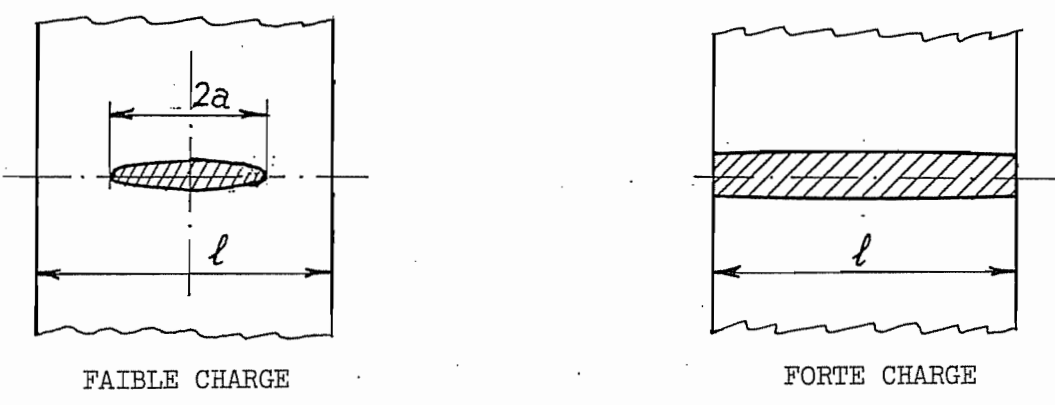


FIGURE 2

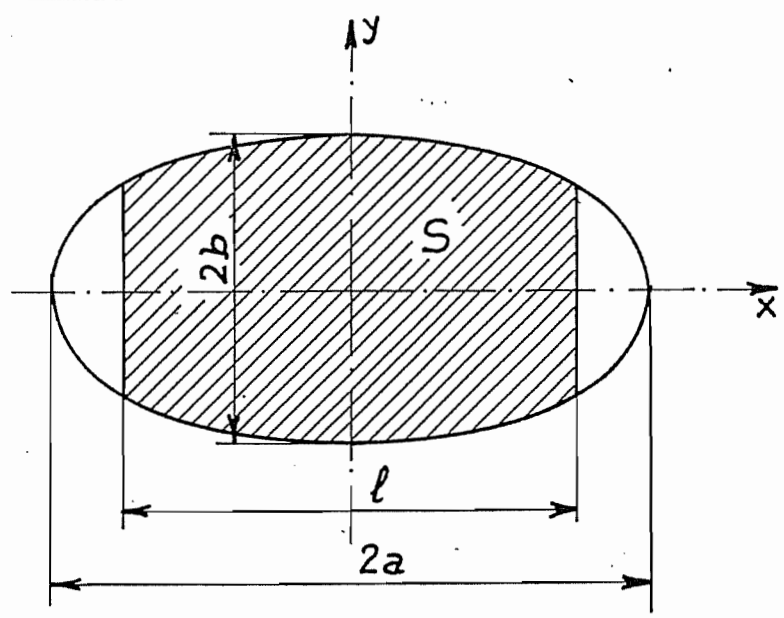


FIGURE 3