# Sur le rang de la matrice de raideur de l'élément de tétraèdre statiquement admissible.

**J.F. Debongnie, mai 2004**

## 1. Rappel

Dans un élément équilibre, le champ de contrainte σ est exprimé sous la forme

$$\sigma = M(x)a$$

les fonctions contenues dans le tableau M(x) étant choisies de façon à assurer a priori la condition d'équilibre interne

$$D_j\sigma_{ji} = 0$$

On définit alors les charges g propres à assurer la condition d'équilibre

$$n_j\, \sigma_{ji} = t_i$$

sur la frontière. Si q est le vecteurs des déplacements conjugués aux charges g, on est alors amené au système

$$\begin{cases} Ja = C^T q \\ Ca = g \end{cases}$$

dont on tire la matrice de raideur

$$K = C\, J^{-1}\, C^T$$

Le rang de cette matrice dépend de celui de la matrice de connexion C. En appelant $n_a$ et $n_g$ les dimensions des vecteurs a et g, on a fréquemment $n_a < n_g$, si bien que

$$\mathrm{Rang}(C) \le n_a$$

En réalité, le nombre $n_a$ est à diminuer du nombre de solutions indépendantes de l'équation

$$Ca = 0$$

qui sont des modes d'autocontrainte. Soit $n_{ac}$ le nombre de modes de ce type. On a alors

$$\mathrm{rang}(C) = n_a - n_{ac}$$

La matrice de raideur a $n_r$ singularités naturelles qui sont les modes rigides. Si le rang de C est inférieur à $(n_g - n_r)$, l'élément est en outre affligé de *mécanismes* dont le nombre est

$$n_m = n_g - n_r - \mathrm{rang}(C)$$

**2. Dénombrement de $n_a$ pour un élément tétraédrique de degré k**

Au degré k, un champ polynomial de contraintes quelconque (c'est-à-dire non équilibré) possède des paramètres en nombre

$$n_p = 6.\dim(P_k) = 6\frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{6}$$

où $P_k$ est l'ensemble des polynômes de degré k *à trois dimensions*. Les trois conditions d'équilibre interne $D_j\sigma_{ji}= 0$ portent sur des polynômes de degré (k-1), ce qui donne un nombre d'équations d'équilibre interne

$$n_e = 3\dim(P_{k-1}) = 3\frac{k(k+1)(k+2)}{6}$$

On a donc

$$n_a = n_p - n_e = \frac{(k+1)(k+2)}{6}[6k+18-3k] = \frac{(k+1)(k+2)(k+6)}{2}$$

## 3. Dénombrement de $n_g$

Sur chaque face, il faut assurer la transmission des tractions de surface en un nombre de points égal à $\dim(p_k)$ où $p_k$ est l'ensemble des polynômes de degré k *à deux dimensions*. On a donc

$$n_g = 4 faces * 3 tractions * \dim(p_k) = 12\frac{(k+1)(k+2)}{2} = 6(k+1)(k+2)$$

## 4. Principe du dénombrement des états d'autocontrainte

Dans le cas d'un état plan de contrainte, les autocontraintes sont aisées à dénombrer à l'aide de la fonction d'Airy qui, pour ces états, s'annule avec sa dérivée normale sur la frontière de l'élément. Dans l'espace, il existe bien les fonctions de contrainte de Maxwell ou de Morera, mais l'annulation des tractions de surface ne s'exprime pas de façon simple à l'aide de ces fonctions. Nous adopterons donc une démarche différente, que voici. Tout d'abord, nous déterminerons le nombre $n_i$ de contraintes *internes*, c'est-à-dire vérifiant

$$n_j \sigma_{ji} = 0$$

sur la frontière, sans conditions d'équilibre à l'intérieur. Nous chercherons alors le nombre $n_\varepsilon$ de conditions à appliquer à ces états pour obtenir une autocontrainte. Alors,

$$n_{ac} = n_i - n_\varepsilon$$

Pour arriver à nos fins, il nous faudra d'abord établir un certain nombre de résultats techniques.

## 5. Inexistence de modes d'autocontrainte du second degré

### 5.1- Un résultat préparatoire

Montrons que *sur un tétraèdre e, un champ de vecteurs* **s** *du second degré vérifiant*

$$D_i s_i \text{ dans e} \qquad \text{et} \qquad n_i s_i \quad \text{sur} \quad \partial e$$

*est identiquement nul*

En effet, la condition div(**s**) = 0 . implique l'existence d'un potentiel vecteur **a** du troisième degré tel que

$$\mathbf{s} = rot\mathbf{a}$$

Ce potentiel est défini, comme on sait, à un gradient près. Les conditions de frontière s'écrivent alors

$$0 = \mathbf{n}.\mathbf{s} = \mathbf{n}.rot\mathbf{a}$$

ce qui implique que sur la frontière, **a** s'identifie à un gradient. On peut alors écrire dans e

$$\mathbf{a} = grad\phi + \mathbf{b}$$

avec **b** = 0 sur la frontière. Comme le gradient ne change rien au vecteur **s**, on peut poser sans perte de généralité

$$\mathbf{a} = \mathbf{b}$$

où **b** est une bulle du troisième degré. Mais il n'existe pas de bulle non nulle du troisième degré sur le tétraèdre. Donc, **b** = 0 , ce qui implique **s** = 0.

### 5.2- Corollaire

Il en résulte directement que *sur un tétraèdre, il n'existe pas de mode d'autocontrainte du second degré.*

En effet, cela supposerait

$$D_j\sigma_{ji} = 0 \quad \text{dans e} \qquad \text{et} \qquad n_j\sigma_{ji} = 0 \quad \text{sur} \quad \partial\text{e}$$

En définissant les trois vecteurs $\mathbf{s}^{(i)}$ tels que

$$\sigma_{ji} = s_j^{(i)}$$

on se ramène directement au résultat précédent.

## 6. Nombre maximal d'états de contrainte interne au second degré

**6.1** – Il est aisé de démontrer la proposition suivante :

*Sur un tétraèdre e, un mode interne σ qui vérifie*

$$\int_e \sigma_{ij} dx = 0$$

*est identiquement nul.*

En effet, cela implique que pour tout champ de déformation constant, on a

$$\int_e \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} dx = 0$$

ou, ce qui revient au même, que pour tout champ de déplacement **u** du premier degré, on a

$$\int_e \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}(\mathbf{u}) dx = 0$$

Or,

$$\int_e \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}(\mathbf{u}) dx = \int_{\partial e} u_i n_j \sigma_{ji} dS - \int_e u_i D_j \sigma_{ji} dx = -\int_e u_i D_j \sigma_{ji} dx$$

la dernière égalité résultant du fait que σ est un état de contrainte interne. En choisissant

$$u_i = D_j \sigma_{ji}$$

ce qui est loisible, on obtient

$$\int_e D_j \sigma_{ji} D_k \sigma_{ki} dx = 0$$

soit l'équilibre interne. Il s'agit donc d'un état d'autocontrainte, ce qui, au degré 2, implique l'annulation de σ.

**6.2** – Il en résulte le corollaire suivant : *il ne peut y avoir plus de six modes internes de contrainte de degré 2 indépendants sur le tétraèdre.*

## 7. Construction de six modes internes de degré 2

Notons 1, 2, 3, 4 les quatre sommets du tétraèdre. Soit encore $c_i(x) = 0$ l'équation de la face opposée au sommet i, normalisée de telle sorte que $c_i$(sommet i) = 1. Soit enfin $\mathbf{w}_{ij}$ le vecteur joignant le nœud i au nœud j (arête). Ce vecteur est évidemment perpendiculaire aux vecteurs unitaires normaux aux deux faces adjacentes. Dès lors, le tenseur symétrique

$$\sigma = \mathbf{w}_{ij}\mathbf{w}_{ij}^T$$

donne des tractions de surface

$$\mathbf{t} = \mathbf{w}_{ij}\mathbf{w}_{ij}^T\mathbf{n}$$

nulles sur les deux faces adjacentes à l'arête ij. Il en résulte que le champ tensoriel du deuxième degré

$$\sigma = \mathbf{w}_{ij}\mathbf{w}_{ij}^T c_i c_j$$

est un mode interne, puisqu'en plus de la propriété précédente, il s'annule sur les deux faces restantes $c_i = 0$ et $c_j = 0$. On obtient ainsi six modes internes. Il reste à examiner leur indépendance.

## 8. Indépendance des six tenseurs $\mathbf{w}_{ij}\mathbf{w}_{ij}^T$

Nous allons montrer que *les six tenseurs*

$$\tau^{(1)} = \mathbf{w}_{12}\mathbf{w}_{12}^T$$

$$\tau^{(2)} = \mathbf{w}_{13}\mathbf{w}_{13}^T$$

$$\tau^{(3)} = \mathbf{w}_{14}\mathbf{w}_{14}^T$$

$$\tau^{(4)} = \mathbf{w}_{23}\mathbf{w}_{23}^T$$

$$\tau^{(5à} = \mathbf{w}_{24}\mathbf{w}_{24}^T$$

$$\tau^{(6)} = \mathbf{w}_{34}\mathbf{w}_{34}^T$$

*sont linéairement indépendants*

## 8.1 – Réduction de la thèse

*Si cette* propriété *est vraie pour le tétraèdre unitaire trirectangle, elle est vraie pour tout autre tétraèdre*

Le tétraèdre trirectangle unitaire est celui dont les sommets sont :

$$\begin{array}{lll} 1 & \rightarrow & (0,0,0) \\ 2 & \rightarrow & (1,0,0) \\ 3 & \rightarrow & (0,1,0) \\ 4 & \rightarrow & (0,0,1) \end{array}$$

Les arêtes $\mathbf{w}_{ij}$ d'un tétraèdre quelconque se transforment par affinité en celles, $\mathbf{v}_{ij}$, du tétraèdre unitaire trirectangle, car ce sont des vecteurs :

$$\mathbf{w}_{ij} = \mathbf{A}\ \mathbf{v}_{ij}$$

où $\mathbf{A}$ est une matrice constante. Dès lors,

$$\mathbf{w}_{ij}\mathbf{w}_{ij}^{T} = \mathbf{A}\ \mathbf{v}_{ij}\ \mathbf{v}_{ij}^{T}\mathbf{A}^{T}$$

d'où

$$\sum_{i<j} \lambda_{ij} \mathbf{w}_{ij} \mathbf{w}_{ij}^{\mathbf{T}} = \mathbf{A}(\sum_{i<j} \lambda_{ij} \mathbf{v}_{ij} \mathbf{v}_{ij})\mathbf{A}^{\mathbf{T}}$$

si bien que les $\mathbf{w}_{ij}\mathbf{w}_{ij}^{T}$ et les $\mathbf{v}_{ij}\mathbf{v}_{ij}^{T}$ sont simultanément dépendants ou indépendants.

## 8.2 – Cas du tétraèdre unitaire trirectangle

Commençons par observer que si une arête $\mathbf{v}$ a pour composantes

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

alors

$$\mathbf{vv}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} a^2 & ab & ac \\ ab & b^2 & bc \\ ac & bc & c^2 \end{bmatrix}$$

En conséquence, la condition

$$\sum_{i<j} \lambda_{ij} \mathbf{v}_{ij} \mathbf{v}_{\mathbf{ij}}^{\mathbf{T}} = 0$$

s'écrit encore

$$\begin{bmatrix} a_{12}^2 & a_{13}^2 & a_{14}^2 & a_{23}^2 & a_{24}^2 & a_{34}^2 \\ b_{12}^2 & b_{13}^2 & b_{14}^2 & b_{23}^2 & b_{24}^2 & b_{34}^2 \\ c_{12}^2 & c_{13}^2 & c_{14}^2 & c_{23}^2 & c_{24}^2 & c_{34}^2 \\ a_{12}b_{12} & a_{13}b_{13} & a_{14}b_{14} & a_{23}b_{23} & a_{24}b_{24} & a_{34}b_{34} \\ a_{12}c_{12} & a_{13}c_{13} & a_{14}c_{14} & a_{23}c_{23} & a_{24}c_{24} & a_{34}c_{34} \\ b_{12}c_{12} & b_{13}c_{13} & b_{14}c_{14} & b_{23}c_{23} & b_{24}c_{24} & b_{34}c_{34} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_{12} \\ \lambda_{13} \\ \lambda_{14} \\ \lambda_{23} \\ \lambda_{24} \\ \lambda_{34} \end{bmatrix} = 0$$

Or, les six vecteurs arêtes ont les composantes suivantes :

| Vecteur | $V_{12}$ | $V_{13}$ | $V_{14}$ | $V_{23}$ | $V_{24}$ | $V_{34}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| a | 1 | 0 | 0 | -1 | -1 | 0 |
| b | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | -1 |
| c | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 |

Ce qui conduit à la matrice

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$$

dont le déterminant vaut, par la règle de Frobenius-Schur,

$$\text{dtmA.dtm}(D - CA^{-1}B)$$

soit ici, comme C = 0,

$$\text{dtmA.dtnD} = 1.(-1) = -1$$

Cette matrice est donc régulière, ce qui démontre la thèse.

**9. Nombre de modes internes de degré k**

Il résulte de tout ceci qu'un champ tensoriel de la forme

$$\sum_{i=1}^{6} f_i(x,y,z)\tau^{(i)}$$

ne peut être identiquement nul que s'il en est ainsi de toutes les fonctions $f_i$ et que les $\tau^{(i)}$, i = 1,...6 forment une base pour tout tenseur symétrique.

Au degré 2, les six modes internes

$$\mathbf{w}_{ij}\mathbf{w}_{ij}^{T} c_i c_j$$

sont indépendants ; au degré k, tout multiple de ces modes par un polynôme de degré (k-2) est un mode interne, et tous ces modes sont indépendants. En définitive, le nombre de modes internes de degré k est

$$n_i = 6 \dim(P_{k-2}) = (k-1)\, k\, (k+1) = k^3 - k$$

**10. Conditions pour qu'un mode interne soit une autocontrainte**

*Pour qu'un mode de contrainte interne σ soit une autocontrainte, il faut et il suffit que*

$$\int_e \sigma_{ij}\varepsilon_{ij}(\mathbf{u})dx = 0$$

*pour tout champ de déplacement* **u** *de degré (k -1).*

Cette propriété repose sur le fait que les modes internes vérifient l'équation

$$\int_e u_i D_j \sigma_{ji} dx = -\int_e \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}(\mathbf{u}) dx$$

Ces conditions sont *nécessaires* car $D_j\sigma_{ji} = 0$ entraîne

$$0 = \int_e u_i D_j \sigma_{ji} dx = -\int_e \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}(\mathbf{u}) dx$$

quel que soit **u**.

Elles sont également *suffisantes*, car elles entraînent

$$\int_e u_i D_j \sigma_{ji} dx = 0$$

pour tout **u** de degré (k-1). En faisant le choix particulier

$$u_i = D_j\sigma_{ji}$$

on obtient

$$\int_e D_j \sigma_{ji} D_k \sigma_{ki} dx = 0$$

ce qui entraîne

$$D_j\sigma_{ji} = 0$$

## 11. Indépendance des conditions précédentes

A supposer que les conditions précédentes ne soient pas toutes indépendantes, il doit exister un certain v de degré (k-1) tel que

$$\int_e \sigma_{ij}\varepsilon_{ij}(\mathbf{v})dx = 0$$

pour *tout* mode de contrainte interne σ. Soit $\{\varphi^{(1)}, \ldots, \varphi^{(6)}\}$ la base tensorielle biorthogonale à la base $\{\tau^{(1)}, \ldots,\tau^{(6)}\}$ définie en section 8 (c'est-à-dire que $\varphi_{ij}{}^{(k)}\tau_{ij}{}^{(l)} = \delta_{kl}$ ). Il est possible d'exprimer $\varepsilon_{ij}(\mathbf{v})$ sous la forme

$$\varepsilon_{ij}(\mathbf{v}) = \sum_{k=1}^{6} \lambda_k(x,y,z)\,\varphi_{ij}{}^{(k)}$$

où les $\lambda_k$ sont des polynômes de degré (k-2). Mais alors, le mode interne

$$\sigma_{ij} = \sum_{k=1}^{6} \lambda_k(x,y,z)\tau_{ij}^{(k)}c*_k\, c**_k$$

(où $c*_k$ et $c**_k$ sont les équations des côtés à utiliser pour que

$$\tau_{ij}{}^{(k)}c*_k c**_k$$

soit un mode interne), vérifie

$$\int_e \sigma_{ij}\varepsilon_{ij}(\mathbf{v})dx = \sum_{k=1}^{6}\int_e \lambda_k^2 c*_k\, c**_k dx = 0$$

et comme les $c_i$ sont positifs dans l'élément, cela implique la nullité des $\lambda_k$ et donc des $\varepsilon_{ij}(\mathbf{v})$.

## 12. Dénombrement des modes d'autocontrainte

Le nombre de conditions d'équilibre d'un mode interne de degré k est donc

$$n_\varepsilon = 3\dim(P_{k-1}) - 6 = 3\frac{k(k+1)(k+2)}{6} - 6 = \tfrac{1}{2}(k^3 + 3k^2 + 2k - 12)$$

Par conséquent, le nombre d'états d'autocontrainte vaut

$$n_{ac} = n_i - n_\varepsilon = \tfrac{1}{2}[(2k^3 - 2k) - (k^3 + 3k^2 + 2k - 12)$$

$$= \tfrac{1}{2}(k^3 - 3k^2 - 4k + 12)$$

$$= \tfrac{1}{2}(k-3)(k-2)(k+2)$$

Cette expression est valable pour k ≥ 2. Le cas k = 1 doit donc être traité séparément.

**13. Rang de la matrice de connexion**

Pour k ≥ 2, le rang de la matrice de connexion C est

$$rang(C) = n_a - n_{ac} = \tfrac{1}{2}(k+1)(k+2)(k+6) - \tfrac{1}{2}(k-3)(k-2)(k+2) = 6k(k+2)$$

**14. Nombre de mécanismes de l'élément**

Toujours pour k supérieur ou égal à 2, le nombre de mécanismes de l'élément est donné par

$$n_m = n_g - 6 - rang(C) = 6(k+1)(k+2) - 6 - 6k(k+2) = 6(k+1)$$

**15. Assemblage de quatre tétraèdres**

En assemblant quatre tétraèdres en un superélément tétraédrique, on obtient un nombre de paramètres connectables

$$n_{conn} = 4rang(C) = 24k(k+2)$$

Le nombre de connecteurs externes reste égal à

$$n_g = 6(k+1)(k+2)$$

Les relations de connexion sur les six faces internes de l'assemblage ont pour nombre

$$n_{rel} = 6 * 3 * \dim(p_k) = 9(k+1)(k+2)$$

On a alors

$$n_{conn} - (n_g + n_{rel}) + 6 = 9(k-1)(k+2)$$

valeur toujours positive dans le cas considéré d'un degré au moins égal à deux. La connexion est donc régulière pour tout k $\geq$2.

## 16. Cas particulier du degré 1

Il reste à considérer le cas particulier du degré 1. Il n'existe pas d'autocontraintes pour ce degré et

$$rang(C) = n_a = \frac{2.3.7}{2} = 21$$

tandis que

$$n_g = 6.2.3 = 36$$

Le nombre de mécanismes de cet élément est donné par

$$n_m = n_g - rang(C) - 6 = 36 - 21 - 6 = 9$$

Pour quatre éléments assemblés, on a

$$n_a = 4 rang\ (C) = 84$$

$n_g$ restant égal à 36. Le nombre de relations de connexion sur les faces internes vaut

$$n_{rel} = 9.2.3 = 54$$

On a donc

$$n_a - (n_g + n_{rel}) + 6 = 84 - (36 + 54) + 6 = 0$$

ce qui signifie que la connexion est régulière.