Prise en compte des pressions réparties dans les plaques équilibre

J.F. Debongnie, mai 2004

1. Introduction

Les éléments triangulaires de plaque équilibre à champs de moments de degré zéro ou un sont incapables de prendre en compte une pression répartie. Il est donc nécessaire d'ajouter une solution particulière de degré deux au moins à l'intérieur de l'élément, conduisant à des moments et efforts de bord compatibles avec le modèle utilisé. La seule connue jusqu'ici, publiée par Sander [1], est une solution du deuxième degré permettant de prendre en compte une pression constante, et se ramenant à trois efforts tranchants de Kirchhoff constants sur les bords. Elle ne peut donc être ajoutée qu'à des éléments de degré un., ce qui exclut de fait les éléments de degré zéro de la plupart des problèmes pratiques.

Or, la physique du problème suggère que des pressions pourraient très bien être équilibrées par des charges de coin seulement. Cette possibilité existe-t-elle dans le cadre de champs polynomiaux relativement simples ? Le présent travail montre que cette possibilité existe bel et bien. En fait, une pression constante peut être équilibrée par un champ de moment quadratique se ramenant sur le bord à des forces de coin. Bien plus, un champ de pression du premier degré peut également être équilibré par des forces de coin à travers un champ de moments de degré trois. Il est donc possible de compléter un élément à moments constants par des champs particuliers équilibrant des pressions jusqu'au degré un.

La construction de ces champs résulte de la combinaison de quelques champs particuliers qu'il convient d'étudier en détail, ce qui justifie la longueur du présent papier. Les développements sont faits en axes rectangulaires, ce qui simplifie l'utilisation pratique des résultats.

2. Champ de moments du premier degré à moments nuls sur le bord

Le premier champ particulier que nous développerons est un champ de moments du premier degré exempt de moments normaux sur le bord. Nous examinerons alors ce que valent les autres efforts sur la frontière.

2.1 – Construction

Nous choisirons un système d'axes rectangulaires particulier, défini comme suit : en notant les nœuds du triangle 1, 2 et 3, dans le sens horlogique, l'axe x coïncidera avec le côté 1-2 ; l'axe y lui sera perpendiculaire, passera par le nœud 1, et sera orienté de telle sorte que y_3 soit positif. Alors, en notant l_{ij} la longueur du côté i-j , $x_{ij} = x_j - x_i$ et $y_{ij} = y_j - y_i$, on peut établir le tableau suivant donnant les normales extérieures unitaires **n**, les tangentes unitaires **t** dans le sens de parcours 1-2-3, et les produits de composantes de ces vecteurs :

TABLEAU 1 -

Côté	t_x	t_y	n_x	n_y	$n_x t_x$	$n_x t_y + n_y t_x$	$n_y t_y$
$1-2$	1	0	0	-1	0	-1	0
$2-3$	$\frac{x_{23}}{l_{23}}$	$\frac{y_3}{l_{23}}$	$\frac{y_3}{l_{23}}$	$-\frac{x_{23}}{l_{23}}$	$\frac{y_3 x_{23}}{l_{23}^2}$	$\frac{y_3^2 - x_{23}^2}{l_{23}^2}$	$-\frac{y_3 x_{23}}{l_{23}^2}$
$3-1$	$-\frac{x_3}{l_{31}}$	$-\frac{y_3}{l_{31}}$	$-\frac{y_3}{l_{31}}$	$\frac{x_3}{l_{31}}$	$\frac{x_3 y_3}{l_{31}^2}$	$\frac{y_3^2 - x_3^2}{l_{31}^2}$	$-\frac{x_3 y_3}{l_{31}^2}$

Notons $c_1(x,y)$, $c_2(x,y)$ et $c_3(x,y)$ les trois coordonnées aréales. Le moment normal sur le côté 1-2 étant égal à M_y, on pourra écrire

$$\begin{cases} M_x = \alpha_1 c_1 + \alpha_2 c_2 + \alpha_3 c_3 \\ M_{xy} = \alpha_4 c_1 + \alpha_5 c_2 + \alpha_6 c_3 \\ M_y = \alpha_7 c_3 \end{cases}$$

Les conditions de nullité sur les deux autres côtés du moment normal

$$M_n = n_x^2 M_x + 2 n_x n_y M_{xy} + n_y^2 M_y$$

s'écrivent alors

$$\bullet \textit{ côté 1-2 : } \begin{cases} \alpha_2 y_3^2 - 2\alpha_5 y_3 x_{23} = 0 \\ \alpha_3 y_3^2 - 2\alpha_6 y_3 x_{23} + \alpha_7 x_{23}^2 = 0 \end{cases}$$

$$\bullet \textit{ côté 3-1 : } \begin{cases} \alpha_1 y_3^2 - 2\alpha_4 x_3 y_3 = 0 \\ \alpha_3 y_3^2 - 2\alpha_6 y_3 x_3 + \alpha_7 x_3^2 = 0 \end{cases}$$

Ces conditions sont visiblement vérifiées pour

$$\begin{cases} \alpha_1 = -Z_1 \dfrac{x_3}{y_3}; \qquad \alpha_4 = -\dfrac{Z_1}{2} \\ \alpha_2 = Z_2 \dfrac{x_{23}}{y_3}; \qquad \alpha_5 = \dfrac{Z_2}{2} \\ \alpha_3 = -\dfrac{x_3 x_{23}}{y_3 x_2} Z_3; \quad \alpha_6 = -\dfrac{x_3 + x_{23}}{2x_2} Z_3; \quad \alpha_7 = -\dfrac{y_3}{x_2} Z_3 \end{cases}$$

où apparaissent les constantes Z_i dont la signification apparaîtra plus clairement dans la suite. Le champ de moments cherché a donc la forme générale

$$
\left\{
\begin{aligned}
M_x &= -Z_1\frac{x_3}{y_3}c_1 + Z_2\frac{x_{23}}{y_3}c_2 - Z_3\frac{x_3x_{23}}{y_3x_2}c_3\\
M_{xy} &= -\frac{Z_1}{2}c_1 + \frac{Z_2}{2}c_2 - Z_3\frac{x_3+x_{23}}{2x_2}c_3\\
M_y &= -Z_3\frac{y_3}{x_2}c_3
\end{aligned}
\right.
\qquad (1)
$$

Il est utile d'étudier en détail les propriétés de ce champ de moments.

2.2 – Moments de torsion sur les bords

Sur les bord, le moment de torsion se calcule par la formule générale

$$M_{nt} = M_x n_x t_x + M_{xy}(n_x t_y + n_y t_x) + M_y n_y t_y$$

• *Sur le côté 1-2,* où c_3=0, on a immédiatement

$$M_{nt} = -M_{xy} = \frac{Z_1}{2}c_1 - \frac{Z_2}{2}c_2 \qquad (2)$$

Aux deux extrémités de ce côté, que nous noterons (1+) et (2-), on a donc

$$M_{nt}(1+) = \frac{Z_1}{2}, \qquad M_{nt}(2-) = -\frac{Z_2}{2} \qquad (3)$$

• *Sur le côté 2-3,* on a $c_1 = 0$ et

$$M_{nt} = \frac{y_3x_{23}}{l_{23}^2}M_x + \frac{y_3^2 - x_{23}^2}{l_{23}^2}M_{xy} - \frac{y_3x_{23}}{l_{23}^2}M_y$$

ce qui, après quelques manipulations algébriques, conduit tout simplement à

$$M_{nt} = \tfrac{1}{2}Z_2c_2 - \tfrac{1}{2}Z_3c_3 \qquad (4)$$

En particulier, aux deux extrémités de ce segment, on a

$$M_{nt}(2+) = \tfrac{1}{2}Z_2, \qquad M_{nt}(3-) = -\tfrac{1}{2}Z_3 \qquad (5)$$

• *Sur le côté 3-1,* où $c_2 = 0$, on a

$$M_{nt} = \frac{x_3y_3}{l_{31}^2}M_x + \frac{y_3^2 - x_3^2}{l_{31}^2}M_{xy} - \frac{x_3y_3}{l_{31}^2}M_y$$

Tous calculs faits, cela donne

$$M_{nt} = \tfrac{1}{2} Z_3 c_3 - \tfrac{1}{2} Z_1 c_1 \tag{6}$$

Aux deux extrémités du segment 3-1, on a donc

$$M_{nt}(3+) = \tfrac{1}{2} Z_3, \qquad\qquad M_{nt}(1-) = -\tfrac{1}{2} Z_1 \tag{7}$$

2.3 – Forces de coin

Il est bien clair que les forces de coin $M_{nt}(i+) - M_{nt}(i-)$ valent

Nœud 1 : Z_1 ; *noeud 2 :* Z_2 ; *nœud 3 :* Z_3 (8)

Ainsi, les coefficients Z_i définis ci-dessus s'identifient aux forces de coin.

2.4 – Efforts tranchants

2.4.1 – Effort tranchant selon x

L'effort tranchant selon x se calcule par

$$T_x = D_x M_x + D_y M_y$$

$$= -Z_1 \left(\frac{x_3}{y_3} D_x c_1 + \tfrac{1}{2} D_y c_1\right) + Z_2 \left(\frac{x_3 - x_2}{y_3} D_x c_2 + \tfrac{1}{2} D_y c_1\right) - Z_3 \frac{2x_3 - x_2}{2x_2} D_y c_3 \tag{9}$$

en tenant compte du fait que $D_x c_3 = 0$. On peut transformer cette expression en notant que, par le théorème d'Euler sur les fonctions homogènes,

$$\begin{aligned} xD_x c_1 + yD_y c_1 &= c_1 - 1 \\ xD_x c_2 + yD_y c_2 &= c_2 \\ xD_x c_3 + yD_y c_3 &= c_3 \end{aligned}$$

Du reste, nous noterons librement $c_i(k)$ pour la valeur de c_i au nœud k. Cela étant, la première expression entre parenthèses de (9) se réduit, comme $c_1(3)=0$, à

$$\tfrac{1}{2} \frac{x_3}{y_3} D_x c_1 - \frac{1}{2y_3}$$

et comme

$$D_x c_1 = \frac{c_1(2) - c_1(1)}{l_{12}} = -\frac{1}{l_{12}}$$

on obtient

$$\frac{x_3}{y_3} D_x c_1 + \tfrac{1}{2} D_y c_2 = -\tfrac{1}{2}\left(\frac{x_3}{y_3}\frac{1}{l_{12}} + \frac{1}{y_3}\right) \tag{10}$$

Par des calculs analogues, on trouve que la deuxième expression entre parenthèses de (9) vaut

$$\frac{x_3 - x_2}{y_3} D_x c_2 + \tfrac{1}{2} D_y c_2 = \tfrac{1}{2}\frac{x_3}{y_3}\frac{1}{l_{12}} - \frac{1}{y_3} \tag{11}$$

Enfin, il est clair que

$$D_y c_3 = \frac{1}{y_3} \tag{12}$$

L'introduction des résultats (10) à (12) dans (9) donne

$$T_x = \tfrac{1}{2} Z_1 \left(\frac{x_3}{y_3}\frac{1}{l_{12}} + \frac{1}{y_3}\right) + \tfrac{1}{2} Z_2 \left(\frac{x_3}{y_3}\frac{1}{l_{12}} - \frac{2}{y_3}\right) + \tfrac{1}{2} Z_3 \frac{x_2 - 2x_3}{x_2}\frac{1}{y_3} \tag{13}$$

2.4.2- Effort tranchant selon y

L'effort tranchant selon y est donné par

$$T_y = D_x M_{xy} + D_y M_y = -\tfrac{1}{2} Z_1 D_x c_1 + \tfrac{1}{2} Z_2 D_x c_2 - Z_3 \frac{y_3}{x_2} D_y c_3$$

soit

$$T_y = \tfrac{1}{2} Z_1 \frac{1}{l_{12}} + \tfrac{1}{2} Z_2 \frac{1}{l_{12}} - Z_3 \frac{1}{l_{12}} \tag{14}$$

2.4.3 – Effort tranchant normal sur les côtés

Les efforts tranchant normaux sur les côtés se calculent par

$$T_n = n_x T_x + n_y T_y$$

On trouve

• *Côté 1-2 :*

$$T_n = -T_y = \frac{1}{l_{12}}(-\tfrac{1}{2}Z_1 - \tfrac{1}{2}Z_2 + Z_3) \tag{15}$$

• *Côté 2-3 :*

$$T_n = \frac{y_3}{l_{23}}T_x - \frac{x_3 - x_2}{l_{23}}T_y = \frac{1}{l_{23}}(Z_1 - \tfrac{1}{2}Z_2 - \tfrac{1}{2}Z_3) \tag{16}$$

• *Côté 3-1 :*

$$T_n = -\frac{y_3}{l_{31}}T_x + \frac{x_3}{l_{31}}T_y = \frac{1}{l_{31}}(-\tfrac{1}{2}Z_1 + Z_2 - \tfrac{1}{2}Z_3) \tag{17}$$

2.5 – Efforts tranchants de Kirchhoff

Passons à l'évaluation des efforts tranchants de Kirchhoff

$$K_n = T_n + D_t M_{nt}$$

où D_t représente la dérivée tangentielle sur le bord, en parcourant celui-ci dans le sens 1-2-3. A partir des résultats (2)à(7) on obtient aisément les valeurs suivantes :

• *Côté 1-2 :*

$$D_t M_{nt} = \frac{M_{nt}(2-) - M_{nt}(1+)}{l_{12}} = -\frac{1}{2l_{12}}(Z_2 + Z_1)$$

d'où, par (15),

$$K_n = \frac{1}{l_{12}}(-Z_1 - Z_2 + Z_3) \tag{18}$$

On procède de même pour les deux autres côtés, ce qui donne

• *côté 2-3 :*

$$K_n = \frac{1}{l_{23}}(Z_1 - Z_2 - Z_3) \tag{19}$$

• *côté 3-1 :*

$$K_n = \frac{1}{l_{31}}(-Z_1 + Z_2 - Z_3) \tag{20}$$

2.6 – Cas particulier

Un cas particulier intéressant est celui où les trois forces de coin ont la même valeur Z.. Alors,

$$K_{n12} = -\frac{Z}{l_{12}}$$
$$K_{n23} = -\frac{Z}{l_{23}} \tag{21}$$
$$K_{n31} = -\frac{Z}{l_{31}}$$

2.4 – Synthèse

Il est donc possible de trouver un champ de moments du premier degré correspondant à des moments normaux nuls sur le côté. A ce champ correspondent des charges de coin et des efforts tranchants de Kirchhoff non nuls. La question qui se pose à ce stade est de savoir s'il est possible d'y superposer des champs de moments qui compensent les efforts tranchants de Kirchhoff, sans pour autant réintroduire des moments normaux. C'est l'objet de la section suivante.

3. Champ de moments du troisième degré correspondant à une valeur constante de l'effort tranchant de Kirchhoff sur un seul côté, à l'exclusion de tout autre effort de frontière

3.1 – Forme générale du champ recherché

Il est utile de traiter ce problème pour une position *quelconque* du triangle considéré. Un effort tranchant de Kirchhoff K_n constant est appliqué sur le côté 2-3 du triangle. Tous les autres efforts et moments sont à annuler.

La recherche de la solution à ce problème est fondée sur la remarque suivante : sur chacun des côtés, la grandeur

$$h = (x - x_1)n_x + (y - y_1)n_y \tag{22}$$

est constamment égale à la distance de ce côté au sommet 1. En notant h_{ij} la valeur de h sur le côté i-j, il est clair que

$$h_{12} = h_{31} = 0 \qquad et \qquad h_{23} \neq 0$$

Considérons alors le champ de moments particulier

$$\begin{cases} M_x = (x - x_1)^2 c_1 \\ M_{xy} = (x - x_1)(y - y_1) c_1 \\ M_y = (y - y_1)^2 c_1 \end{cases} \tag{23}$$

Il est clair qu'il vérifie sur chaque côté

$$M_n = c_1\{(x - x_1)^2 n_x^2 + 2(x - x_1)(y - y_1) n_x n_y + (y - y_1)^2 n_y^2\} = h^2 c_1$$

Dès lors, le moment normal est nul sur les côtés 1-2 et 3-1 où h est nul et aussi sur le côté 2-3 où c_1 est nul. Il reste à explorer les autres efforts de frontière.

3.2 – Efforts tranchants

Comme

$$D_x M_x = 2(x - x_1) c_1 + (x - x_1)^2 D_x c_1$$

et

$$D_y M_{xy} = (x - x_1) c_1 + (x - x_1)(y - y_1) D_y c_1$$

on a

$$T_x = 3(x - x_1) c_1 + (x - x_1)\{(x - x_1) D_x c_1 + (y - y_1) D_y c_1\}$$

Or, en notant $c_1(0)$ la valeur de c_1 à l'origine des axes,

$$x D_x c_1 + y D_y c_1 - (x_1 D_x c_1 + y_1 D_y c_1) = c_1 - c_1(0) - \{c_1(1) - c_1(0)\} = c_1 - 1$$

si bien que

$$T_x = (x - x_1)(4c_1 - 1) \tag{24}$$

De la même manière,

$$T_y = (y - y_1)(4c_1 - 1) \tag{25}$$

L'effort tranchant normal sur un côté vaut donc

$$T_n = \{n_x (x - x_1) + n_y (y - y_1)\}(4c_1 - 1) = h(4c_1 - 1) \tag{26}$$

Explicitement,

$$
\begin{aligned}
T_{n12} &= 0 \\
T_{n23} &= -h_{23} \\
T_{n31} &= 0
\end{aligned}
\tag{27}
$$

3.3 – Moments de torsion

Le moment de torsion sur un côté vaut

$$M_{nt} = c_1\{(x-x_1)^2 n_x t_x + (x-x_1)(y-y_1)(n_x t_y + n_y t_x) + (y-y_1)^2 n_y t_y\}$$

ce qui se transforme aisément en

$$M_{nt} = c_1 h\{(x-x_1)t_x + (y-y_1)t_y\} \tag{28}$$

Il est visiblement nul sur tout le contour, ce qui implique en particulier la nullité des forces de coin,

$$Z_1 = Z_2 = Z_3 = 0 \tag{29}$$

et la relation $K_n = T_n$ sur tous les côtés. Le champ considéré vérifie donc bien les conditions imposées.

3.4 – Pression

A quel champ de pression correspond ce champ de moments ? La pression est donnée par

$$-p = D_x T_x + D_y T_y$$

Comme

$$D_x T_x = 4c_{1.} - 1 + 4(x-x_1)D_x c_1$$

et

$$D_y T_y = 4c_1 - 1 + 4(y-y_1)D_y c_1$$

on obtient

$$-p = 8c_1 - 2 + 4\{c_1 - c_1(0) - c_1(1) + c_1(0)\}$$

soit encore

$$-p = 12c_1 - 6 \tag{30}$$

3.5 – Champ correspondant à K_{n23}=-1

Notre but étant de compenser un effort tranchant de Kirchhoff préexistant, il est utile de se ramener au champ de compensation unitaire défini par $K_{n23} = -1$. A cette fin, il suffit de diviser le champ (23) par

$$h_{23} = \frac{2S}{l_{23}}$$

où S représente l'aire du triangle. Cela donne explicitement

$$\begin{cases} M_x = \frac{l_{23}}{3S}(x - x_1)^2 c_1 \\ M_{xy} = \frac{l_{23}}{3S}(x - x_1)(y - y_1)c_1 \\ M_y = \frac{l_{23}}{3S}(y - y_1)^2 c_1 \end{cases} \tag{31}$$

Le champ de pression correspondant est

$$-p = \frac{l_{23}}{3S}(6c_1 - 3) \tag{32}$$

3.6- Cas d'un effort tranchant sur un autre côté

Comme aucune hypothèse n'a été faite sur la position du triangle, les numéros de nœuds sont indifférents. Dès lors, une simple permutation circulaire des indices 1, 2 et 3 fournit les formules équivalentes à (31) et (32) pour une effort tranchant de Kirchhoff égal à (-1) sur un côté quelconque.

3.7 – Champ particulier correspondant à un effort tranchant de Kirchhoff total égal sur chaque côté

Considérons le cas où chacun des côtés porte un effort tranchant de Kirchhoff total (-F/3). Localement, sur le côté i-j, on a donc

$$K_{nij} = -\frac{F}{3l_{ij}}$$

Le champ correspondant s'obtient simplement par superposition d'états du type (31), ce qui donne le résultat suivant :

$$\begin{cases} M_x = \dfrac{F}{6S}\{(x-x_1)^2 c_1 + (x-x_2)^2 c_2 + (x-x_3)^2 c_3\} \\ M_{xy} = \dfrac{F}{6S}\{(x-x_1)(y-y_1)c_1 + (x-x_2)(y-y_2)c_2 + (x-x_3)(y-y_3)c_3\} \\ M_y = \dfrac{F}{6S}\{(y-y_1)^2 c_1 + (y-y_2)^2 c_2 + (y-y_3)^2 c_3\} \end{cases} \tag{33}$$

Fait remarquable, ce champ est *de degré deux*, car

$$\begin{aligned} &(x-x_1)^2 c_1 + (x-x_2)^2 c_2 + (x-x_3)^2 c_3 = \\ &\qquad = x^2(c_1+c_2+c_3) - 2x(x_1c_1 + x_2c_2 + x_3c_3) + x_1^2 c_1 + x_2^2 c_2 + x_3^2 c_3 \\ &\qquad = x_1^2 c_1 + x_2^2 c_2 + x_3^2 c_3 - x^2 \end{aligned}$$

et il en est de même des deux autres composantes. On obtient ainsi

$$\begin{cases} M_x = \dfrac{F}{6S}(x_1^2 c_1 + x_2^2 c_2 + x_3^2 c_3 - x^2) \\ M_{xy} = \dfrac{F}{6S}(x_1 y_1 c_1 + x_2 y_2 c_2 + x_3 y_3 c_3 - xy) \\ M_y = \dfrac{F}{6S}(y_1^2 c_1 + y_2^2 c_2 + y_3^2 c_3 - y^2) \end{cases} \tag{34}$$

Le champ de pression correspondant s'obtient également par superposition de formules du type (32) :

$$p = -\frac{F}{3S}\{(6c_1 - 3) + (6c_2 - 3) + (6c_3 - 3)\} = \frac{F}{S} \tag{35}$$

On a donc tout simplement retrouvé le champ quadratique correspondant à une pression uniforme publié par Sander [1]. Mais ici, il est exprimé en axes rectangulaires quelconques, et non dans un système d'axes obliques particulier.

4. Champ du troisième degré correspondant à des forces de coin seulement

4.1- Construction

Le champ du premier degré à moments nuls sur le contour, décrit en section 2, conduit aux efforts tranchants de Kirchhoff

$$\begin{cases} K_{n12} = \dfrac{1}{l_{12}}(-Z_1 - Z_2 + Z_3) \\ K_{n23} = \dfrac{1}{l_{23}}(Z_1 - Z_2 - Z_3) \\ K_{n31} = \dfrac{1}{l_{31}}(-Z_1 + Z_2 - Z_3) \end{cases}$$

On peut annuler ces efforts en superposant trois champs du troisième degré du type (31), ce qui conduit au champ complémentaire suivant, *dans le système d'axes attaché au triangle suivant les règles définies en section 2*. On a ainsi

$$
\begin{aligned}
M_x^{comp} &= \frac{1}{2S}\{(Z_1 - Z_2 - Z_3)x^2c_1 + (-Z_1 + Z_2 - Z_3)(x-x_2)^2c_2 + (-Z_1 - Z_2 + Z_3)(x-x_3)^2c_3\} \\
&= \frac{1}{2S}\{Z_1\left[x^2c_1 - (x-x_2)^2c_2 - (x-x_3)^2c_3\right] \\
&\quad + Z_2\left[-x^2c_1 + (x-x_2)^2c_2 - (x-x_3)^2c_3\right] \\
&\quad + Z_3\left[-x^2c_1 - (x-x_2)^2c_2 + (x-x_3)^2c_3\right]\}
\end{aligned}
$$

De la même façon,

$$
\begin{aligned}
M_{xy}^{comp} = \frac{1}{2S}\{ & Z_1\left[xyc_1 - (x-x_2)yc_2 - (x-x_3)(y-y_3)c_3\right] \\
& + Z_2\left[-xyc_1 + (x-x_2)yc_2 - (x-x_3)(y-y_3)c_3\right] \\
& + Z_3\left[-xyc_1 - (x-x_2)yc_2 + (x-x_3)(y-y_3)c_3\right]\}
\end{aligned}
$$

et

$$
\begin{aligned}
M_y^{comp} = \frac{1}{2S}\{ & Z_1\left[y^2c_1 - (y-y_2)^2c_2 - (y-y_3)^2c_3\right] \\
& + Z_2\left[-y^2c_1 + (y-y_2)^2c_2 - (y-y_3)^2c_3\right] \\
& + Z_3\left[-y^2c_1 - (y-y_2)^2c_2 + (y-y_3)^2c_3\right]\}
\end{aligned}
$$

Il convient de superposer ce champ complémentaire au champ de base (1), ce qui donne le champ général correspondant à des forces de coin seulement. En groupant les contributions de chaque force de coin, on obtient

$$
\begin{cases}
M_x = N_x^{(1)}Z_1 + N_x^{(2)}Z_2 + N_x^{(3)}Z_3 \\
M_{xy} = N_{xy}^{(1)}Z_1 + N_{xy}^{(2)}Z_2 + N_{xy}^{(3)}Z_3 \\
M_y = N_y^{(1)}Z_1 + N_y^{(2)}Z_2 + N_y^{(3)}Z_3
\end{cases}
\tag{36}
$$

avec

$$
N_x^{(1)} = -\frac{x_3}{y_3}c_1 + \frac{1}{2S}\left[x^2c_1 - (x-x_2)^2c_2 - (x-x_3)^2c_3\right]
$$

$$
N_x^{(2)} = \frac{x_3 - x_2}{y_3}c_2 + \frac{1}{2S}\left[-x^2c_1 + (x-x_2)^2c_2 - (x-x_3)^2c_3\right]
$$

$$N_x^{(3)} = -\frac{x_3}{y_3}\frac{(x_3 - x_2)}{x_2}c_3 + \frac{1}{2S}\left[-x^2c_1 - (x-x_2)^2c_2 + (x-x_3)^2c_3\right]$$

$$N_{xy}^{(1)} = -\tfrac{1}{2}c_1 + \frac{1}{2S}\left[xyc_1 - (x-x_2)yc_2 - (x-x_3)(y-y_3)c_3\right]$$

$$N_{xy}^{(2)} = \tfrac{1}{2}c_2 + \frac{1}{2S}\left[-xyc_1 + (x-x_2)yc_2 - (x-x_3)(y-y_3)c_3\right]$$

$$N_{xy}^{(3)} = -\frac{2x_3 - x_2}{2x_2}c_3 + \frac{1}{2S}\left[-xyc_1 - (x-x_2)yc_2 + (x-x_3)(y-y_3)c_3\right]$$

$$N_y^{(1)} = \frac{1}{2S}\left[y^2c_1 - y^2c_2 - (y-y_3)^2c_3\right]$$

$$N_y^{(2)} = \frac{1}{2S}\left[-y^2c_1 + y^2c_2 - (y-y_3)^2c_3\right]$$

$$N_y^{(3)} = -\frac{y_3}{x_2}c_3 + \frac{1}{2S}\left[-y^2c_1 - y^2c_2 + (y-y_3)^2c_3\right] \tag{37}$$

4.2-Champ de pression correspondant

Bien évidemment, le champ de pression ne dépend que du champ de moments complémentaire. Par application du résultat (32), on trouve, après quelques manipulations élémentaires,

$$-p = \frac{1}{S}\left[Z_1(12c_1 - 3) + Z_2(12c_2 - 3) + Z_3(12c_3 - 3)\right] \tag{38}$$

C'est visiblement un polynôme du premier degré et on peut donc écrire

$$p = p_1c_1 + p_2c_2 + p_3c_3$$

Les valeurs nodales de la pression sont :

$$p_1 = \frac{1}{S}(9Z_1 - 3Z_2 - 3Z_3)$$

$$p_2 = \frac{1}{S}(9Z_2 - 3Z_3 - 3Z_1)$$

$$p_3 = \frac{1}{S}(9Z_3 - 3Z_1 - 3Z_2)$$

Ces relations s'inversent en

$$Z_1 = -\frac{S}{12}(2p_1 + p_2 + p_3)$$

$$Z_2 = -\frac{S}{12}(p_1 + 2p_2 + p_3) \qquad (39)$$

$$Z_3 = -\frac{S}{12}(p_1 + p_2 + 2p_3)$$

Il est donc possible d'équilibrer un champ de pression de degré 1 à l'aide d'un champ de moment du troisième degré, *avec pour seules réactions des forces de coin.*

4.3 – Cas particulier d'un champ de pression constant

En faisant dans (39) $p_1 = p_2 = p_3 = p$, on obtient

$$Z = Z_1 = Z_2 = Z_3 = -\frac{pS}{3} \qquad (40)$$

Le champ de moments complémentaire est alors *de degré 2.* Ainsi,

$$\begin{aligned} M_x^{comp} &= -\frac{Z}{2S}\left[x^2 c_1 + (x - x_2)^2 c_2 + (x - x_3)^2 c_3\right] \\ &= -\frac{Z}{2S}\left[x^2 (c_1 + c_2 + c_3) - 2x(x_2 c_2 + x_3 c_3) + x_2^2 c_2 + x_3^2 c_3\right] \\ &= \frac{Z}{2S}(x^2 - x_2^2 c_2 - x_3^2 c_3) \end{aligned}$$

et de même,

$$\begin{aligned} M_{xy}^{comp} &= \frac{Z}{2S}(xy - x_3 y_3 c_3) \\ M_y^{comp} &= \frac{Z}{2S}(y^2 - y_3^2 c_3) \end{aligned}$$

Le champ de moments complet est alors

$$\begin{aligned}
M_x &= Z\left\{-\frac{x_3}{y_3}c_1 + \frac{x_3 - x_2}{y_3}c_2 - \frac{x_3}{y_3}\frac{(x_3 - x_2)}{x_2}c_3 + \frac{1}{2S}(x^2 - x_2^2 c_2 - x_3^2 c_3)\right\} \\
M_{xy} &= Z\left\{-\tfrac{1}{2}c_1 + \tfrac{1}{2}c_2 - \frac{2x_3 - x_2}{2x_2}c_3 + \frac{1}{2S}(xy - x_3 y_3 c_3)\right\} \qquad (41) \\
M_y &= Z\left\{-\frac{y_3}{x_2}c_3 + \frac{1}{2S}(y^2 - y_3^2 c_3)\right\}
\end{aligned}$$

5. Conclusion

Nous avons donc obtenu des champs de moments permettant de prendre un compte un champ de pression jusqu'au degré un avec pour seules réactions des forces de coin. Ces champs peuvent être ajoutés aux éléments de plaque équilibre de degré un ou même zéro, ce qui constitue une extension sensible de leur champ d'application. Dans le cas d'une pression constante, le champ de moments, du second degré, est à peine plus compliqué que celui de Sander qui, lui, exige au moins les connecteurs d'un élément de degré un.

Le champ de moments du troisième degré correspondant à des forces de coin arbitraires permet également d'envisager la construction d'une *base d'interpolation codiffusive* pour les plaques, étape utile pour une démonstration des propriétés de convergence.

Bibliographie

1. G. Sander – *Application de la méthode des éléments finis à la flexion des plaques.* Coll. Pub. Fac. Sci. Appli. Univ. Lg., **15**, 1969

*　　　*
　*