

Consistance du lissage des contraintes par convolution

J.F. DEBONGNIE

1. Position du problème

Les contraintes obtenues à partir d'un modèle d'éléments finis ont un ordre de convergence inférieur à celui des déplacements, et sont donc intrinsèquement d'une qualité moindre que ceux-ci. Cette propriété est gênante dans la mesure où la valeur des contraintes constitue un des principaux critères d'acceptation d'une structure.

En outre, les contraintes calculées par éléments finis ont deux propriétés particulièrement gênantes, à savoir

- (a) Elles sont discontinues d'un élément à l'autre, ce qui rend leur interprétation graphique difficile.
- (b) Elles ne vérifient pas l'équilibre local.

De nombreuses méthodes ont été proposées pour améliorer le champ de contraintes obtenu. L'amélioration consiste en général à corriger un des défauts (a) ou (b), tout en ne s'écartant pas trop de la solution d'origine. Dans la plupart des cas, on admet implicitement que les contraintes corrigées $\tilde{\sigma}_h$ obtenues à partir des contraintes du modèle d'éléments finis σ_h sont suffisamment proches de la solution exacte pour que

$$\|\tilde{\sigma}_h - \sigma_h\|_{L^2} \approx \|\sigma - \sigma_h\|_{L^2}$$

et on en déduit une mesure d'erreur.

Parmi les méthodes qui corrigent l'équilibre local, il faut citer l'analyse duale qui consiste à construire une solution statiquement admissible. Cette solution peut être obtenue par un processus de Rayleigh-Ritz - il s'agit alors de l'analyse duale classique - ou par une construction à posteriori à partir de la solution de départ - on obtient alors la méthode de Ladevèze, dite de l'erreur en loi de comportement. L'avantage de ces méthodes est l'obtention d'une borne stricte de l'erreur, à savoir

$$\|\sigma_h - \sigma_h\|_{L^2} \leq \|\tilde{\sigma}_h - \sigma_h\|_{L^2}.$$

Mais dans le cas tridimensionnel, on ne connaît pas de modèle statiquement admissible, ce qui oblige soit à consentir à des approximations sur l'équilibre (ce qui rend la borne caduque), soit à se tourner vers d'autres méthodes.

Les méthodes focalisées sur la continuité peuvent être globales ou locales. Les méthodes globales consistent à construire une expression des contraintes dans une base aussi riche que les déplacements et à choisir les valeurs nodales de manière à minimiser la norme

$\|\tilde{\sigma}_h - \sigma_h\|_{L^2}$. Ce processus est coûteux et tend à être abandonné. Il est plus fréquent d'utiliser des moindres carrés locaux ou des procédés de lissage, soit à partir de la notion de points de superconvergence, soit par des moyennes plus ou moins locales.

Un processus tentant est la convolution. En effet, à partir d'un champ $\sigma_h \in L^2$, la convolution

$$\tilde{\sigma}_h(x) = \int_{R^n} \sigma_h(x-y)\varphi(y)dy$$

par une fonction φ suffisamment régulière fournit un résultat continu et même dérivable autant que le noyau φ . A supposer que l'on calcule $\tilde{\sigma}_h$ à tous les noeuds du champ de déplacements, et que ces $\tilde{\sigma}_h$ soient de bonne qualité, leur interpolation à l'aide des fonctions de forme des déplacements n'altère la qualité de la solution adoucie que d'un ordre égal à l'ordre de convergence des déplacements. Ceci définit un processus viable pour établir un champ de contrainte amélioré à l'intérieur du corps (le noyau doit avoir son support dans le corps). A la frontière, on pourra utiliser les conditions d'équilibre.

La vraie question est celle de la qualité des valeurs nodales. A ce sujet, on peut énoncer une condition de consistance, qui consiste en ce qui suit : la solution exacte doit vérifier

$$\tilde{\sigma}(x) = \sigma(x).$$

Ainsi posée, la question semble difficilement soluble. Mais on se rappellera que dans une énorme majorité de cas, la solution exacte de l'élasticité est biharmonique. Ceci ramène le problème à exiger que la convolution utilisée restitue exactement une fonction biharmonique. C'est à la détermination d'une famille de noyaux présentant cette propriété qu'est attaché le présent travail.

2. Noyaux radiaux normalisés

Nous dirons qu'un noyau de convolution est *radial* s'il est de la forme

$$\varphi(x) = \varphi(r), \quad r = |x| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} \quad n = \text{dimension de l'espace.}$$

Avec un tel noyau, on a

$$\tilde{f}(x) = \int_{R^n} f(x-y)\varphi(y)dy = \int_{R^n} f(x+y)\varphi(-y)dy = \int_{R^n} f(x+y)\varphi(y)dy,$$

expression qui est plus parlante : $\tilde{f}(x)$ est la moyenne des valeurs de f au voisinage de x , avec son poids $\varphi(r)$ dépendant de la distance au point considéré. Pour que ce soit une moyenne au sens classique du terme, il faudra que soit vérifiée la condition de normalisation

$$\int_{R^n} \varphi(y) dy = 1. \quad (1)$$

Dans la pratique, nous supposons que le noyau φ a son support dans une boule de rayon R . Il est possible de construire une famille de noyaux comme suit : soit $\bar{\varphi}(x)$ une fonction radiale dont le support est la boule unité, et telle que

$$\int_{B_1} \bar{\varphi}(x) dx \neq 0 \quad (2)$$

Alors, la fonction

$$\varphi_1(x) = \frac{\bar{\varphi}(x)}{\int_{B_1} \bar{\varphi}(x) dx} \quad (3)$$

est normalisée. Sur une boule de rayon R , la fonction

$$\varphi_R(x) = C \varphi_1\left(\frac{x}{R}\right)$$

analogue de φ_1 sur la boule unitaire, aura pour intégrale

$$\int_{B_R} \varphi_R(x) dx = C \omega_n \int_0^R \varphi_1\left(\frac{r}{R}\right) r^{n-1} dr$$

où ω_n est l'aire de la sphère unité à n dimensions. Cette intégrale se transforme en

$$C \omega_n \int_0^1 \varphi_1(\rho) R^{n-1} \rho^{n-1} R d\rho = CR^n \omega_n \int_0^1 \varphi_1(\rho) \rho^{n-1} d\rho = CR^n \int_{B_1} \varphi_1 dx$$

Elle sera donc égale à l'unité si $C = 1/R^n$. En conséquence, la fonction

$$\varphi_R(x) = \frac{1}{R^n} \varphi_1\left(\frac{x}{R}\right) \quad (4)$$

est normalisée comme φ_1 .

Le choix de la fonction φ_1 définit les propriétés des convolutions envisagées. On sait que si le noyau $\in C^p(R^n)$, il en est de même du produit de convolution $f * \varphi$ [4]. Cette propriété est vérifiée pour la fonction simple

$$\bar{\varphi}(x) = \begin{cases} (1-|x|^2)^p & \text{pour } |x| < 1 \\ 0 & \text{pour } |x| \geq 1 \end{cases} \quad (5)$$

L'indéfinie continue différentiability est réalisée par le noyau

$$\bar{\varphi}(x) = \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{1-|x|^2}\right) & \text{pour } |x| < 1 \\ 0 & \text{pour } |x| \geq 1 \end{cases} \quad (6)$$

bien connu des mathématiciens (*mollifier*, régularisation canonique, adoucissement, ...)

Une propriété attractive des convolutions envisagées est la suivante : si $f \in L^\infty$ et si $\bar{\varphi} \in L^1$, on a en chaque point de continuité de f ,

$$\lim_{R \rightarrow 0} (f * \varphi_R)_x = f(x) \quad (7)$$

Cette propriété, généralement démontrée pour $\varphi \geq 0$, reste vraie dans le cas général. En effet,

$$\begin{aligned} (f * \varphi_R)_x - f(x) &= \int_{R^n} [f(x-y) - f(x)] \varphi_R(y) dy \\ &= \int_{B_R} [f(x-y) - f(x)] \varphi_R(y) dy = R^n \int_{B_1} [f(x-Rz) - f(x)] \frac{\bar{\varphi}_1(z)}{R^n} dz \end{aligned}$$

Il en résulte

$$|(f * \varphi_R)_x - f(x)| \leq \int_{B_1} |f(x-Rz) - f(x)| |\bar{\varphi}_1(z)| dz$$

Comme f est continue en x , à tout $\varepsilon > 0$, on peut associer un nombre $\eta > 0$ tel que pour $R < \eta$,

$$|f(x-Rz) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{\int_{B_1} |\bar{\varphi}_1(z)| dz},$$

ce qui entraîne

$$|(f * \varphi_R)_x - f(x)| \leq \varepsilon.$$

3. Essais de lissage par convolution de Do Viet Tuyen [5]

La procédure de convolution sur des champs de contrainte bidimensionnels a été testée par Do Viet Tuyen. Les conclusions de son travail sont les suivantes :

- a) Pour un champ de déplacement du premier degré, c'est-à-dire un champ de contraintes constant par élément, cette procédure donne des indices d'effectivité valables.
- b) Par contre, pour un champ de déplacement du second degré, auquel correspondent des contraintes du premier degré dans les éléments, l'indice d'effectivité est trop grand et ne converge pas vers l'unité. En réalité, les meilleurs indices sont obtenus pour $R \rightarrow 0$, ce qui est surprenant *a priori*. Do Viet Tuyen a avancé l'hypothèse que le noyau est "incompatible" avec le problème. Allant plus loin, il a écrit *The problem is how to choose the mollifier function in order to reach an acceptable result for different kinds of elements as well as their order*. Bien que ces conclusions nous aient surpris à l'époque, nous croyons à présent qu'il touchait effectivement du doigt le vrai problème : *il existe pour le noyau de convolution une condition de consistance*. C'est ce que nous allons exposer ci-dessous.

4. Consistance du noyau de convolution

La convolution peut être décrite comme un opérateur T qui à toute fonction f associe la nouvelle fonction $Tf = f * \varphi$. Soit f_h une expression approchée de f , au sens que $\|f - f_h\| \leq \eta$. Alors, on a évidemment

$$\|Tf - Tf_h\| \leq \|T\| \|f - f_h\| \quad (8)$$

ce qui signifie que $Tf_h \rightarrow Tf$ si $f_h \rightarrow f$. Mais en réalité, on est intéressé par la distance entre la fonction f et Tf_h , qui vérifie

$$\|f - Tf_h\| \leq \|f - Tf\| + \|Tf - Tf_h\| \leq \|f - Tf\| + \|T\| \|f - f_h\| \quad (9)$$

Le dernier terme converge certes vers zéro si $f_h \rightarrow f$, mais il n'en est pas de même de $\|f - Tf\|$ qui ne dépend que de la fonction f . Il subsiste donc une erreur, a priori difficile à chiffrer, liée au fait que $Tf \neq f$. Les termes $\|f - Tf\|$, mesurant le fait que la convolution ne restitue pas f peut être considéré comme une *erreur de consistance* de la convolution.

Si la fonction f est continue, on a

$$\lim_{R \rightarrow 0} f * \varphi_R = f,$$

et l'erreur de consistance tend vers zéro, ce qui semble bien expliquer le comportement observé par Do Viet Tuyen. Naturellement, ce résultat est peu satisfaisant, car le lissage, pour $R \rightarrow 0$ cesse d'être effectif.

5. Un résultat relatif aux fonctions harmoniques

Il n'est pas possible de trouver un noyau de convolution tel que $f * \varphi_R = f$ pour toute fonction. Cependant, cette propriété peut être vérifiée pour certaines classes de fonction. Nous considérerons d'abord les fonctions harmoniques.

Notons ω un point quelconque de la sphère unité. On a

$$I = \int_{|\omega|=1} [f(R\omega) - f(o)] d\omega = \int_{|\omega|=1} d\omega \int_0^R D_r f(r\omega) dr$$

En introduisant la fonction $e(r)$ définie par $\frac{de}{dr} = \frac{1}{r^{n-1}}$, $e(\infty) = 0$, on a encore

$$\begin{aligned} I &= \int_{|\omega|=1} d\omega \int_0^R D_r e D_r f(r\omega) r^{n-1} dr = \int_{B_R} D_i e D_i f dr \\ &= \int_{\dot{B}_R} e n_i D_i f dS - \int_{B_R} e D_{ii} f dx = e(R) \int_{B_R} D_{ii} f dx - \int_{B_R} e(r) D_{ii} f dr, \end{aligned}$$

ce qui donne

$$I = \int_{|\omega|=1} [f(R\omega) - f(o)] d\omega = \int_{B_R} [e(R) - e(r)] \Delta f dx \quad (10)$$

Ce résultat contient comme cas particulier le théorème de la moyenne des fonctions harmoniques : si f est harmonique, on a

$$f(o) = \frac{1}{\omega_n} \int_{|\omega|=1} f(R\omega) d\omega \quad \forall R \quad (11)$$

où ω_n est la mesure superficielle de la sphère unité à n dimensions.

Si l'on multiplie les deux membres de cette équation par une fonction radiale quelconque $\varphi(r)$, on obtient

$$f(o)\varphi(r)r = \frac{1}{\omega_n} \int_{|\omega|=1} f(r\omega)\varphi(r)d\omega$$

Multiplions par $\omega_n r^{n-1}$ et intégrons de 0 à R : il vient

$$f(o) \int_{B_R} \varphi(r) dy = \int_{B_R} f \varphi dy \quad (12)$$

ce qui, translaté de x, donne

$$f(x) = \frac{\int_{B_R} f(x+y) \varphi(y) dy}{\int_{B_R} \varphi(y) dy} \quad (13)$$

En particulier, si $\int_{B_R} \varphi(y) dy = 1$, il vient

$$f(x) = (f * \varphi)_x \quad (14)$$

Ainsi, la convolution d'une fonction harmonique par une fonction radiale normalisée quelconque restitue la fonction initiale. Cette propriété, relativement peu connue, est citée par L. Schwartz [3].

6. Le cas des fonctions biharmoniques

Malheureusement, les contraintes élastiques ne sont en général pas harmoniques, ce qui signifie qu'une convolution par un noyau radial quelconque n'est pas consistante. Cependant, dans le cas d'un solide homogène et isotrope et pour des forces de volume de degré 2 au plus, les contraintes sont *biharmoniques* (voir annexe).

Dans le cas d'une fonction biharmonique, Δf est harmonique. Dès lors, le dernier membre de (10)

$$I = \int_{B_R} [e(R) - e(r)] \Delta f dx$$

qui fait intervenir la fonction radiale $e(R) - e(r)$ vaut encore par (12)

$$\begin{aligned} I &= \Delta f(o) \int_{B_R} [e(R) - e(r)] \Delta f dx \\ &= \omega_n \Delta f(o) \int_0^R [e(R) - e(r)] r^{n-1} dr \end{aligned}$$

Une intégration par partie donne, en posant $u = [e(R) - e(r)]$, $dv = r^{n-1} dr$,

$$\int_0^R [e(R) - e(r)] r^{n-1} dr = \left[[e(R) - e(r)] \frac{r^n}{n} \right]_0^R + \int_0^R \frac{r}{n} dr = \frac{R^2}{2n},$$

si bien que

$$I = \Delta f(o) \frac{\omega_n R^2}{2n} \quad (15)$$

Soit alors un noyau radial normalisé quelconque $\varphi_R(r) = \frac{1}{R^n} \varphi_1\left(\frac{r}{R}\right)$. On a

$$\int_{|\omega|=1} f(o) \varphi_R(r) r^{n-1} d\omega = \int_{|\omega|=1} f(r\omega) \varphi_R(r) r^{n-1} d\omega - \Delta f(o) \frac{\omega_n}{2n} r^{n+1} \varphi_R(r)$$

et, en intégrant de 0 à R,

$$f(o) = \int_{B_R} f(y) \varphi_R(y) dy - \frac{\Delta f(o) \omega_n}{2n} \int_0^R r^{n+1} \varphi_R(r) dr$$

Or,

$$\int_0^R r^{n+1} \varphi_R(r) dr = \int_0^1 R^{n+1} \rho^{n+1} \frac{1}{R^n} \varphi_1(\rho) R d\rho = R^2 \int_0^1 \rho^{n+1} \varphi_1(\rho) d\rho$$

Notant donc

$$A = \int_0^1 \rho^{n+1} \varphi_1(\rho) d\rho \quad (16)$$

grandeur qui ne depend que du noyau de convolution φ_1 , on obtient, après translation de x,

$$(f * \varphi_R)_x = f(x) + \frac{A \omega_n}{2n} \Delta f(x) \cdot R^2 \quad (17)$$

Ainsi, pour un noyau radial quelconque, il existe en général une erreur de consistance proportionnelle à R^2 . *La condition de consistance, dans le cas d'une fonction biharmonique, est que le noyau vérifie*

$$A = \int_0^1 \rho^{n+1} \varphi_1(\rho) d\rho = 0 \quad (18)$$

7. Construction de noyaux consistants pour les fonctions biharmoniques

Soit φ_R un noyau radial normalisé, nul hors de B_R et vérifiant $\lim_{r \rightarrow R} \varphi_R(r) = 0$. Partons de la relation (15)

$$\int_{|\omega|=1} f(r\omega)d\omega = \omega_n f(o) + \frac{\omega_n r^2}{2n} \Delta f(o)$$

La fonction $\Delta f(o)$, étant harmonique, vérifie (12) avec $\varphi \equiv 1$, ce qui donne

$$\frac{\omega_n r^n}{n} \Delta f(o) = \int_{B_r} \Delta f \, dx = \int_{\bar{B}_R} \frac{\partial f}{\partial n} dS = \int_{|\omega|=1} D_r f(\omega r) r^{n-1} d\omega$$

On a donc

$$\frac{\omega_n r^2}{2n} \Delta f(o) = \frac{r}{2} \int_{|\omega|=1} D_r f(\omega r) d\omega,$$

soit

$$\int_{|\omega|=1} f(r\omega)d\omega = \omega_n f(o) + \frac{r}{2} \int_{|\omega|=1} D_r f(\omega r) d\omega$$

Multiplions par $r^{n-1} \varphi_R(r)$ et intégrons de 0 à R. Il vient

$$\int_{|\omega|=1} d\omega \int_0^R f(r\omega) r^{n-1} \varphi_R(r) dr = \omega_n f(o) \int_0^R r^{n-1} \varphi_R(r) dr + \frac{1}{2} \int_{|\omega|=1} d\omega \int_0^R r^n \varphi_R(r) D_r f(r\omega) dr \quad (19)$$

Une intégration par parties donne

$$\int_0^R r^n \varphi_R(r) D_r f(r\omega) dr = [r^n \varphi_R(r) f(r\omega)]_0^R - \int_0^R nr^{n-1} \varphi_R(r) f(r\omega) dr - \int_0^R r^r D_r \varphi_R f(r\omega) dr$$

Le terme intégré disparaît car $\varphi_R(R) = 0$. Finalement, comme φ_R est normalisé, l'équation (19) se ramène à

$$f(o) = \frac{1}{2} \int_{B_R} [(n+2)\varphi_R + rD_r \varphi_R] f(y) dy \quad (20)$$

soit, après translation de x ,

$$f = f * \left\{ \frac{1}{2} [(n+2)\varphi_R + rD_r \varphi_R] \right\} \quad (21)$$

La démarche qui précède s'inspire, avec quelques modifications, de développements présentés par Parton et Perline [3].

8. Commentaires

- Si l'on note Ψ_R le noyau obtenu ci-dessus, on notera que

$$\boxed{\Psi_R = \frac{1}{2} \frac{1}{r^{n+1}} D_r (r^{n+2} \varphi_R)} \quad (22)$$

- Ce noyau est lui-même normalisé, car

$$\begin{aligned} \int_{B_R} \Psi_R dy &= \frac{1}{2} \omega_n \int_0^R \frac{1}{r^2} D_r (r^{n+2} \varphi_R) dr = \frac{1}{2} \omega_n \left\{ \left[\frac{1}{r^2} r^{n+2} \varphi_R \right]_0^R + 2 \int_0^R \frac{1}{r^3} r^{n+2} \varphi_R dr \right\} \\ &= \omega_n \int_0^R r^{n-1} \varphi_R dr = 1. \end{aligned}$$

- En outre, il vérifie

$$\Psi_R(r) = \frac{1}{2} \frac{1}{R^{n+1}} \frac{1}{\rho^{n+1}} \frac{1}{R} \frac{d}{d\rho} \left(R^{n+2} \rho^{n+2} \frac{\varphi_1}{R^n} \right) = \frac{1}{R^n} \cdot \frac{1}{2} \frac{1}{\rho^{n+1}} D_\rho (\rho^{n+2} \varphi_1) = \frac{1}{R^n} \Psi_1(\rho)$$

selon la règle classique vue en section 2.

- On a également

$$A = \int_0^1 \rho^{n+1} \Psi_1(\rho) d\rho = \frac{1}{2} \int_0^1 D\rho (\rho^{n+2} \varphi_1) d\rho = \frac{1}{2} [\varphi_1(1) - 0] = 0,$$

en vertu de l'hypothèse $\varphi_1(1) = 0$. Ceci confirme le caractère consistant de ce type de noyau. On notera que la condition $A = 0$ implique que *les noyaux de ce type ne peuvent être partout positifs*, car

$$\Psi_1 > 0, \rho > 0 \Rightarrow A = \int_0^1 \rho^{n+1} \Psi_1(\rho) d\rho > 0.$$

- Pour obtenir un noyau $\Psi_R \in C^p$, il faut que $\varphi_R \in C^{p+1}$.
- Appliquée à un champ de contraintes constant par élément, avec un rayon tel que le support du noyau soit centré en un noeud et ne sorte pas des éléments adjacents, toute convolution à noyau radial donne

$$\tilde{f}_h = \frac{1}{\omega_n} \sum_i \omega_i f_{hi}$$

où les ω_i sont les angles (ou angles solides) des éléments. Dans ce cas, l'utilisation de Ψ_R à la place de φ_R ne fait rien gagner.

9. Annexe 1 - Caractère biharmonique des contraintes

9.1. Etat tri-dimensionnel de contrainte

Dans un milieu homogène et isotrope, la loi de Hooke s'écrit

$$\sigma_{ij} = 2G \left(\varepsilon_{ij} + \frac{\nu}{1-2\nu} \varepsilon_{ll} \delta_{ij} \right)$$

Les équations d'équilibre

$$D_j \sigma_{ji} + f_i = 0$$

prennent donc la forme

$$D_j \varepsilon_{ji} + \frac{\nu}{1-2\nu} D_i \varepsilon_{ll} = -\frac{f_i}{2G},$$

soit en termes des déplacements,

$$\frac{1}{2} (D_{jj} u_i + D_{ji} u_j) + \frac{\nu}{1-2\nu} D_{ij} u_j = -\frac{f_i}{2G}$$

ou encore

$$D_{jj} u_i + \frac{1}{1-2\nu} D_{ij} u_j = -\frac{f_i}{2G} \quad (23)$$

Prenant la divergence sur l'indice i, on obtient

$$D_{jj} u_i + \frac{1}{1-2\nu} D_{ij} u_j = -\frac{1}{G} D_i f_i$$

soit

$$D_{ij} u_j = -\frac{1}{G} \frac{1-2\nu}{1-\nu} D_i f_i \quad (24)$$

Le laplacien de la relation (23) s'écrit

$$D_{kkjj} u_i + \frac{1}{1-2\nu} D_{ikkj} u_j = -\frac{1}{G} D_{kk} f_i$$

et tenant compte de (24), on obtient

$$D_{kkj}u_i = -\frac{1}{G} \frac{1}{1-\nu} D_{ik}f_k = -\frac{1}{G} D_{kk}f_i$$

soit

$$\Delta^2 u_i = -\frac{1}{G} \left[D_{kk}f_i - \frac{1}{1-\nu} D_{ik}f_k \right] \quad (25)$$

Les déplacements sont donc biharmoniques si les forces internes sont du premier degré au plus et, plus généralement, si elles sont harmoniques avec une divergence constante.

Pour les déformations, on a

$$\Delta^2 D_j u_i = -\frac{1}{G} \left[D_{kk} D_j f_i - \frac{1}{1-\nu} D_{jik} f_k \right]$$

et

$$\Delta^2 \varepsilon_{ij} = -\frac{1}{G} \left[D_{kk} \frac{1}{2} (D_j f_i + D_j f_i) - \frac{1}{1-\nu} D_{ij} (D_k f_k) \right] \quad (26)$$

Les déformations sont donc biharmoniques si les forces internes sont au plus de degré 2. Dans le cas de forces dérivant d'un potentiel,

$$f_i = -D_i \Phi,$$

on obtient

$$\Delta^2 \varepsilon_{ij} = \frac{1}{G} \left[D_{kkj} \Phi - \frac{1}{1-\nu} D_{ijk} \Phi \right],$$

et la condition se ramène à

$$D_{ij} \Delta \Phi = 0, \quad (27)$$

c'est-à-dire que le laplacien du potentiel est au plus de degré 1.

9.2. Etat plan de contrainte

Pour un état plan de contrainte,

$$\sigma_{ij} = \frac{E}{1-\nu^2} \left[(1-\nu) \varepsilon_{ij} + \nu \varepsilon_{ll} \delta_{ij} \right] = 2G \left[\varepsilon_{ij} + \frac{\nu}{1-\nu} \varepsilon_{ll} \delta_{ij} \right]$$

et les équations d'équilibre s'écrivent

$$\frac{1}{2}(D_{jj}u_i + D_{ji}u_j) + \frac{\nu}{1-\nu}D_{ij}u_j = -\frac{f_i}{2G} \quad (28)$$

Prenant la divergence sur l'indice i, on obtient

$$D_{jj}u_i + \frac{1+\nu}{1-\nu}D_{ij}u_j = -\frac{1}{G}D_i f_i$$

soit

$$D_{ij}u_j = -\frac{1}{G}\frac{1-\nu}{2}D_i f_i \quad (29)$$

Le laplacien de la relation (28) s'écrit

$$D_{kkj}u_i + \frac{1+\nu}{1-\nu}D_{ikk}u_j = -\frac{1}{G}D_{kk}f_i$$

et tenant compte de (29), on obtient

$$D_{kkj}u_i - \frac{1+\nu}{2G}D_{ik}f_k = -\frac{1}{G}D_{kk}f_i$$

soit

$$\Delta^2 u_i = -\frac{1}{G}\left[D_{kk}f_i - \frac{1+\nu}{2}D_{ik}f_k\right] \quad (30)$$

Il en découle

$$\Delta^2 \varepsilon_{ij} = -\frac{1}{G}\left[D_{kk}\frac{1}{2}(D_j f_i + D_i f_j)_i - \frac{1+\nu}{2}D_{ij}(D_k f_k)\right] \quad (31)$$

et les conclusions sont identiques.

9.3. Plaques de Kirchhoff

Enfin, dans le cas des plaques de Kirchhoff, il découle de l'équation de Sophie Germain que le bilaplacien du déplacement est proportionnel à la pression appliquée. Les moments, combinaisons des dérivées secondes du déplacement, seront donc biharmoniques si la pression est au plus de degré 1.

10. Annexe 2 - Un noyau particulier

$$\text{Soit } \bar{\varphi}(x) = \begin{cases} (1-|x|^2)^p & \text{pour } |x| < 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Ce noyau est de classe C^p . On a, en posant $u = \rho^2$,

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^1 \rho^{n-1} (1-\rho^2)^p d\rho = \frac{1}{2} \int_0^1 \rho^{n-2} (1-\rho^2)^p 2\rho d\rho = \frac{1}{2} \int_0^1 u^{\frac{n}{2}-1} (1-u)^p du = \frac{1}{2} B\left(\frac{n}{2}, p+1\right) \\ &= \frac{1}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\Gamma(p+1)}{\Gamma\left(p+1+\frac{n}{2}\right)} \end{aligned}$$

Comme

$$\Gamma\left(p+1+\frac{n}{2}\right) = \left(\frac{n}{2}+p\right)\left(\frac{n}{2}+p-1\right)\dots\frac{n}{2}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right),$$

il vient

$$I_n = \int_0^1 \rho^{n-1} (1-\rho^2)^p d\rho = \frac{1}{2} \frac{p!}{\left(\frac{n}{2}+p\right)\left(\frac{n}{2}+p-1\right)\dots\frac{n}{2}}$$

soit

- pour $n = 2$, $I_n = \frac{1}{2} \frac{p!}{(p+1)p\dots 1} = \frac{1}{2(p+1)}$

- pour $n = 3$, $I_n = \frac{1}{2} \frac{p!}{\left(p+\frac{3}{2}\right)\left(p+\frac{1}{2}\right)\dots\frac{3}{2}}$

Comme $\omega_n = 2\pi$ pour $n = 2$ et $\omega_n = 4\pi$ pour $n = 3$, le noyau normalisé est

$$\varphi_1 = C_n (1-\rho^2)^p$$

avec

$$C_2 = \frac{p+1}{\pi}, \quad C_3 = \frac{\left(p+\frac{3}{2}\right)\left(p+\frac{1}{2}\right)\dots\frac{3}{2}}{2\pi p!}$$

La fonction ψ_1 est donnée par

$$\psi_1 = \frac{1}{2} C_n (1 - \rho^2)^{p-1} [(n+2)(1 - \rho^2) - 2p\rho]$$

Elle est de classe C^{p-1} .

Bibliographie

- [1] V. MIKHAILOV - *Equations aux dérivées partielles*. Mir, Moscou, 1980.
- [2] V. PARTON, P. PERLINE - *Méthodes de la Théorie mathématique de l'Elasticité*. Mir, Moscou, 1984.
- [3] L. SCHWARTZ - *Théorie des Distributions*. Hermann, Paris, 1966.
- [4] H.G. GARNIR - *Fonctions de Variables réelles II*. Gauthier Villars, Paris et Librairie Universitaire, Louvain, 1965.
- [5] DO VIET TUYEN - "Error Estimation in 2-Dimensional Linear Elasticity based on smoothed stress field obtained by convolution method. European Master Thesis, Ho Chi Minh-Ville et Liège, 1999.
- [6] M. LAVRENTIEV, B. CHABAT - *Méthodes de la théorie des fonctions d'une variable complexe*. Mir, Moscou, 1977.