Une loi de similitude de l'endurance des pièces entaillées soumises à la fatigue

J.F. DEBONGNIE

Rapport LMF-D41

2001

Première partie - Bases théoriques

1. Faits expérimentaux

Il est bien connu que la contrainte nominale d'endurance d'une pièce entaillée dépend à la fois de sa *taille* (effet d'échelle) et de ses *entailles* (effet d'entaille). Si l'on note σ_{nD} la contrainte nominale d'endurance de la pièce entaillée de diamètre d et σ_D* la contrainte d'endurance pour un même type de sollicitation, dans une pièce lisse de diamètre de référence d*, on écrit donc

$$\sigma_{nD} = \frac{\sigma_D *}{\beta_g \beta_k}$$

où β_g est l'indice d'effet d'échelle et β_k, l'indice d'effet d'entaille. Selon *l'ordre* dans lequel on considère ces deux coefficients, on obtient *deux approches différentes* qui, malheureusement, ne sont pas toujours bien distinguées.

1.1.- Approche g - k

Dans une première approche, on définit d'abord l'indice d'effet d'échelle comme le rapport entre la limite d'endurance d'une pièce lisse de diamètre de référence d* et la limite d'endurance d'une pièce lisse de diamètre réel d :

$$\beta_g = \sigma_D(d^*, lisse) / \sigma_D(d, lisse) \tag{1}$$

Cet indice dépend évidemment de d, mais aussi du matériau :

$$\beta_g = \beta_g(d, matériau) \tag{2}$$

L'indice d'effet d'entaille se définit alors par le rapport entre l'endurance de la pièce entaillée réelle et celle d'une pièce lisse de même diamètre :

$$\beta_k = \beta_{kd} = \sigma_D(d, lisse) / \sigma_{nD}(d, entaillée) \tag{3}$$

Il dépend à la fois de l'entaille, du matériau et de l'échelle d

$$\beta_k = \beta_k \text{ (entaille, d, matériau)} \tag{4}$$

En d'autres termes, l'utilisation de cette approche nécessite la détermination de β_k pour divers matériaux et diverses échelles. Si l'on songe au coût d'essais sur de grosses pièces, on comprend aisément qu'une telle masse de renseignements est inaccessible en pratique.

1.2.- Approche k - g

Une seconde approche, préconisée dans la littérature russe notamment [4, 13, 14, 15, 19], consiste à définir d'abord l'indice d'effet d'entaille pour un diamètre de référence d* :

$$\beta_{kd^*} = \sigma_D(d^*, lisse) / \sigma_D(d^*, entaillée) \tag{5}$$

Comme le diamètre ne varie plus, on a alors

$$\beta_{kd^*} = \beta_{kd^*}(entaille, matériau) \tag{6}$$

ce qui limite fortement les expériences et permet de travailler avec des éprouvettes petites.

Mais alors, l'indice d'effet d'échelle doit être défini comme

$$\overline{\beta}_g = \sigma_D(d^*, entaillée) / \sigma_D(d, entaillée) \tag{7}$$

et il est clair qu'il dépend non seulement du diamètre, mais encore du matériau et de l'entaille :

$$\overline{\beta}_g = \overline{\beta}_g(d, matériau, entaille) \tag{8}$$

Tout le problème est donc reporté sur l'effet d'échelle, ce qui ne résout rien. Les tenants de cette méthode fournissent bien des courbes de $\overline{\beta}_g$ différentes pour les éprouvettes lisses, les pièces "faiblement entaillées" et les pièces "fortement entaillées", qui ont sans doute le mérite de montrer que ces dernières sont les plus sensibles à l'échelle, mais en pratique, on a bien de la peine à faire son choix, tant la notion "faiblement" ou "fortement" entaillée est vague.

1.3.- Utilisation des résultats expérimentaux

Que ce soit dans l'approche k-g ou l'approche g-k, on est confronté au fait que l'on ne dispose presque jamais des renseignements nécessaires. Le problème essentiel est la difficulté pratique de réaliser des expériences sur de grosses pièces. En élargissant l'horizon à d'autres disciplines de l'ingénieur, on se rend compte que le même problème se pose fréquemment et que sa solution réside dans l'établissement de *lois de similitude*. Ainsi par exemple, les turbomachines hydrauliques sont régies par les lois de similitude de Rateau. Ne peut-on trouver une loi de ce genre pour les problèmes de fatigue ? Nous allons montrer que la méthode du gradient, telle qu'exposée en [3] fournit une réponse positive à cette question essentielle en pratique.

2. La méthode du gradient

Essayant d'analyser les choses plus profondément, on constate que

(1) Il n'y a pas d'effet d'échelle pour les pièces lisses en extension. Cet effet ne se manifeste qu'en flexion et en torsion. Il en découle que c'est la limite d'endurance en *extension* qui, seule, doit être considérée comme une caractéristique intrinsèque du matériau [17].

(2) Pour une pièce entaillée, on peut calculer ou mesurer le coefficient de concentration de torsion, rapport entre la plus grande contrainte locale σ_{max} et la contrainte nominale σ_n :

$$K_t = \sigma_{\max} / \sigma_n \tag{9}$$

Ce coefficient ne dépend que de la forme, indépendamment de l'échelle. Les expériences montrent que pour un diamètre d donné, la contrainte nominale d'endurance vérifie généralement

$$\sigma_{nD} \geq \sigma_D(d, lisse) / K_t \tag{10}$$

(3) Le rapport $\sigma_{nD} / \sigma_D(d, lisse)$ décroît lorsque le diamètre augmente.

(4) Il en est de même quand on passe à un acier plus dur.

(5) La plupart des entailles possèdent un rayon qui joue un grand rôle dans leur acuité. Lorsque ce rayon diminue, le rapport $\sigma_{nD} / \sigma_D(d, lisse)$ croît.

(6) Des entailles vives, c'est-à-dire de rayon nul conduisent à un coefficient de concentration de contrainte infini, ce qui pourrait laisser croire que l'endurance correspondante est nulle. En fait, il n'est est rien, et de telles pièces présentent une endurance faible, certes, mais non nulle, et dépendant peu de l'acier considéré.

Il est possible de rendre compte des constatations (1) à (5) à partir de la notion *de gradient relatif de contrainte*

$$\chi = \left(\frac{|grad \sigma|}{\sigma} \right)_{\sigma_{\max}} \tag{11}$$

Ce gradient relatif vaut 0 pour l'extension simple d'une pièce lisse, 2/d pour la flexion et la torsion d'une pièce lisse, et pour les pièces entaillées, il est de la forme

$$\chi = \chi_o + \frac{C}{r} \tag{12}$$

où

$$\chi_o = \begin{cases} 0 \textit{ en extension} \\ \dfrac{2}{d} \textit{ en flexion et torsion} \end{cases}$$

r est le rayon à fond d'entaille et C est une constante dépendant de la forme de l'entaille et du type de sollicitation. Typiquement, pour une entaille perpendiculaire à l'axe de la pièce, C = 2,33 en extension et flexion et 1 en torsion.

La *méthode du gradient*, introduite pour la première fois par SIEBEL [12] consiste à admettre que la contrainte maximale à l'endurance est une fonction croissante du gradient relatif

$$\sigma_{\max D} = \Sigma(\chi) \tag{13}$$

Il en résulte que la contrainte nominale d'endurance vaut

$$\sigma_{nD} = \frac{\Sigma(\chi)}{K_t} \tag{14}$$

Ceci permet de rendre compte au moins qualitativement des faits (1) à (5) reportés ci-dessus. La difficulté pratique est évidemment le choix de la fonction $\Sigma(\chi)$. A ce sujet, nous avons montré dans une communication récente [3] que toutes les constatations (1) à (6) sont vérifiées si l'on admet l'expression

$$\Sigma(\chi) = \sigma_{D_o} + A\sqrt{\chi} \tag{15}$$

où σ_{D_o} est la limite d'endurance en *extension* (indépendante de l'échelle) et A une constante du matériau liée au seuil de non-fissuration de la mécanique de la rupture. Pour les aciers de construction et les aciers d'amélioration, cette constante peut être prise uniformément égale à

$$A = 70{,}67\ MPa\sqrt{mm} \tag{16}$$

A partir de cette expression, il devient simple de calculer l'endurance nominale si l'on connaît l'expression de K_t et celle du gradient relatif. On notera qu'en torsion, il faut écrire

$$\tau_{tD}\sqrt{3} = \sum(\chi)/K_t \tag{17}$$

Lorsque le rayon de l'entaille est nul, on obtient par un passage à la limite élémentaire une endurance *indépendante de l'acier* (elle ne dépend que de la grandeur A, ce qui est normal, puisqu'on se retrouve dans le cadre de la mécanique de la rupture) [3].

3. Les entailles non calculables

Malheureusement, on rencontre en mécanique de nombreuses situations où les grandeurs K_t et χ ne sont pas connues. C'est le cas des emmanchements frettés. C'est aussi le cas des rainures de clavettes, dont le rayon à fond de rainure correspond à celui de la pointe de l'outil.

Pour ces problèmes, il reste nécessaire de recourir à l'expérience. Mais les résultats sont peu nombreux et, dans le meilleur des cas, on en trouve pour différentes valeurs de la limite de rupture R_m, à échelle constante ou à l'inverse, pour différentes échelles, à matériau constant.

On ne trouve jamais les deux, ce qui rend fortement désirable une formule de prolongement des résultats. Or, il se trouve que la méthode du gradient trace la voie pour ce genre d'opération.

Considérons en effet une famille de pièces *géométriquement semblables*. Elles ont donc toutes la même valeur de K_t et la même valeur du produit χd. Partant de l'expression

$$\sigma_{nD} = \frac{\sigma_{D_o} + A\sqrt{\chi}}{K_t} = \frac{1}{K_t}\left[\sigma_{D_o} + A\frac{\sqrt{\chi d}}{\sqrt{d}}\right] \tag{18}$$

et définissant le *taux d'affaiblissement*

$$\gamma = \frac{\sigma_{nD}}{\sigma_{D_o}}, \tag{19}$$

on constate que, comme K_t et χd sont des constantes de la famille de pièces, on a simplement

$$\gamma = C_1 + \frac{C_2}{\sigma_{D_o}\sqrt{d}} \tag{20}$$

où C_1 et C_2 sont également des constantes de la famille de pièces. Il s'agit d'une loi de similitude faisant intervenir le groupement $\sigma_{D_o}\sqrt{d}$ qui a la dimension d'un facteur d'intensité de contrainte.

En *extension*, le taux d'affaiblissement γ est tout simplement l'inverse de l'indice d'effet d'entaille :

$$\gamma_e = 1/\beta_{ke}$$

Il n'en est pas de même en flexion et en torsion où

$$\frac{1}{\beta_{kf}} = \frac{\sigma_{nD}}{\sigma_{fD}(d)}, \quad \frac{1}{\beta_{kt}} = \frac{\tau_{nD}\sqrt{3}}{\sigma_{fD}(d)}$$

tandis que

$$\gamma_f = \frac{\sigma_{nD}}{\sigma_{D_o}}, \quad \gamma_t = \frac{\tau_{nD}\sqrt{3}}{\sigma_{D_o}}.$$

Notre référence, σ_{D_o}, est intrinsèque au matériau. Au contraire, les approches classiques se réfèrent à $\sigma_{fD}(d)$ *qui varie avec l'échelle*, si bien que les coefficients β_k varient d'une manière compliquée, en raison du fait que lors d'un changement d'échelle, leur numérateur et leur dénominateur varient tous deux.

La loi (20) fait intervenir deux coefficients C_1 et C_2 propres à la famille de pièces. Il suffit donc en théorie de deux expériences pour les déterminer. Mais bien entendu, dans le cas où des résultats plus nombreux sont connus, il est préférable de procéder à un ajustement linéaire, ce qui permet, au vu de la corrélation obtenue, d'émettre un jugement a postériori sur la validité du modèle adopté. La deuxième partie de ce rapport est précisément consacrée à l'exploitation de résultats de la littérature sur un échantillon de géométries aussi large que possible. Les données utilisées proviennent de sources diverses. Nous avons été frappé de la corrélation *excellente* que nous avons trouvée dans tous les cas.

On objectera peut-être que la loi de similitude (20) est imparfaite dans la mesure où le groupement $\sigma_{D_o}\sqrt{d}$ n'est pas dépourvu de dimension. En réalité, la relation (18) mène directement à la loi

$$\gamma = C_1 + C_2^* \frac{A}{\sigma_{D_o}\sqrt{d}} \tag{21}$$

où apparaît le nombre sans dimension

$$\Pi = \frac{\sigma_{D_o}\sqrt{d}}{A} \tag{22}$$

Il est tentant de postuler que l'expression (21) est universelle. Mais nous ne disposons pas de résultats expérimentaux permettant de tester cette assertion.

4. Les entailles vives

Lorsque le rayon de l'entaille tend vers zéro, K_t et χ tendent simultanément vers l'infini, mais on a pratiquement toujours, pour r petit,

$$K_t \approx C_3\sqrt{\frac{d}{r}}, \quad \chi \approx \frac{C_4}{r}$$

si bien qu'à la limite,

$$\sigma_{nD} = \lim_{r\to o} \frac{\sigma_{D_o} + A\sqrt{\chi}}{K_t} = \frac{A\sqrt{C_4}}{C_3\sqrt{d}} = \frac{C_2}{\sqrt{d}}$$

On remarque deux choses. Tout d'abord, cette limite est *indépendante de l'acier*. Ce fait est en assez bon accord avec la courbe que donnent Köhler et Rögnitz pour une saignée vive à 60°, où la limite d'endurance varie peu autour de 100 Mpa. En outre, cette limite est sujette à un *très fort effet d'échelle*, en $1/\sqrt{d}$. Ceci correspond assez bien aux courbes données par la littérature russe pour les très fortes entailles. Il en résulte qu'en flexion par exemple, le moment d'endurance est de la forme

$$M_{f_D} = \frac{\pi d^3}{32} \cdot \frac{C_2}{\sqrt{d}} = C_4 d^{2,5}$$

Il ne croît donc plus que comme la puissance 2,5 du diamètre.

Pour une famille de pièces semblables à entaille vive, la formule (20) reste valable, mais le coefficient C_1 est nul. Il est donc possible d'extrapoler les résultats d'un seul test.

5. Confrontation des résultats de la méthode du gradient avec l'expérience

La comparaison des résultats de calcul avec des données de la littérature est compliquée par le fait que beaucoup d'auteurs ont converti leurs résultats expérimentaux en termes d'indices d'effet d'entaille. La limite d'endurance obtenue est alors de la forme

$$\sigma_{nD} = \sigma_{fD} / \beta_k ,$$

mais encore faut-il savoir si la valeur σ_{fD} tient ou non compte de l'effet d'échelle. Il faut donc préférer les résultats exprimés directement en termes de contraintes. C'est sans aucun doute HEYWOOD [17] qui a réuni le plus grand nombre de résultats pour tester sa propre méthode de calcul. Nous avons nous-même recalculé par notre méthode toutes les limites d'endurance citées. Comme mesure d'erreur, nous utilisons l'écart quadratique moyen relatif

$$s = \left[\frac{\sum (\sigma_{calc} - \sigma_{mes})^2}{\sum \sigma_{mes}^2} \right]^{1/2}$$

Les résultats peuvent être résumés comme suit :

Type d'entaille	Auteurs	Nombre de mesures	S %
Trou transversal, extension	[22]	18	6,5
		12	11,8
	[25]	14	9,7
Trou transversal, flexion	[23]	16	13,0
	[24]	7	7,2
Changement de section, extension et flexion	[23,25,26,27,28,29,30 31,32,33,34]	65	11,7
Gorge circulaire, extension	[23,35,25,36]	84	16,7
Gorge circulaire, flexion	[37,38,39,40,41]	76	11,9

Eu égard au fait que le calcul, fondé sur la connaissance expérimentale de la limite d'endurance des éprouvettes lisses, est entaché de la dispersion intrinsèque des essais de fatigue, et qu'il en est évidemment de même du résultat d'essai sur éprouvette entaillée, ces résultats peuvent être considérés comme très valables. Il faut ajouter que le gradient a varié de

4 à 1165 in^{-1} et le coefficient de concentration de contrainte, de 1,2 à 14,1. L'éventail des cas considérés est donc large et varié.

Deuxième partie - Quelques entailles utiles

1. Valeur de la limite d'endurance en extension

NIEMANN [1], en bon accord avec les diagrammes VDI fournis par STEINHILPER et ROEPER [2], donne les valeurs suivantes de la limite d'endurance en flexion σ^*_{fD} (d = 10 mm) en fonction de la limite de rupture R_m :

Rm/Mpa	300	400	600	800	1000	1200	1400
$\sigma^*_{fD}\ /MPa$	156	210	300	383	454	519	579

Il résulte de la théorie du gradient, telle qu'exposée dans [3] que la limite d'endurance en extension s'en déduit par la formule

$$\sigma_{D_o} = \sigma^*_{fD} - A\sqrt{\frac{2}{10}}, \quad A = 70{,}67\ MPa\sqrt{mm}$$

pour les aciers de construction et les aciers améliorés. Ceci revient à dire

$$\sigma_{D_o} = \sigma^*_{fD} - 31{,}60 MPa\,.$$

Il en résulte le tableau suivant :

Rm/Mpa	300	400	600	800	1000	1200	1400
$\sigma_{D_o}\ /MPa$	124,4	178,4	268,4	351,4	422,4	487,4	547,4

Ces valeurs sont plus faibles que celles qu'annonce Niemann, mais elles sont en bon accord avec les diagrammes VDI de la référence [2]. On remarquera qu'elles vérifient, avec un coefficient de régression de 0,9999, la relation

$$\boxed{\frac{\sigma_{D_o}}{MPa} = -243{,}9 + 21{,}09\sqrt{\frac{Rm}{MPa}}}$$

2. Méthodologie de calcul

Dans un grand nombre de cas, on trouve dans la littérature les valeurs de l'indice d'effet d'entaille β_k pour une dimension de référence donnée d* et diverses valeurs de Rm. On calcule alors

$$\sigma_{nD} = \frac{\sigma_{fD}(d^*)}{\beta_k}$$

pour ces différents cas, et on cherche un ajustement linéaire de la forme

$$\sigma_{nD} = a\sigma_{Do} + b$$

Cet ajustement étant obtenu, on a, pour d = d*,

$$\gamma = \frac{\sigma_{nD}}{\sigma_{D_o}} = a + \frac{b}{\sigma_{D_o}} = a + \frac{b\sqrt{d^*}}{\sigma_{D_o}\sqrt{d^*}},$$

ce qui conduit aux coefficients

$$C_1 = a, \quad C_2 = b\sqrt{d^*}.$$

C'est une généralisation du procédé utilisé par HEYWOOD [17] en extension.

3. Incertitudes liées à l'échelle

Dans un certain nombre de cas, on trouve dans la littérature des valeurs de β_k pour différents aciers et une échelle commune malheureusement non spécifiée. Chaque fois que cette situation s'est présentée, nous avons posé arbitrairement d* = 10 mm, en conformité avec l'usage allemand. On peut cependant se demander quelle est l'altération des résultats dans l'hypothèse d'une erreur d'échelle. Soient d_1 l'échelle exacte des expériences et d_2 l'échelle adoptée dans l'ajustement. Cela signifie que l'on a calculé, pour un acier donné

$$\sigma_{nD2} = \frac{\sigma_{fD}(d_2)}{\beta_k}$$

au lieu de

$$\sigma_{nD1} = \frac{\sigma_{fD}(d_1)}{\beta_k}.$$

Rappelons que pour un ajustement de la forme

$$Y = aX + b$$

à partir de n couples (X_i, Y_i), on calcule d'abord

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_i X_i, \quad \overline{Y} = \frac{1}{n}\sum_i Y_i ,$$

puis les variables centrées

$$x_i = X_i - \overline{X}, \quad y_i = Y_i - \overline{Y} .$$

On a alors

$$a = \frac{\sum_i x_i y_i}{\sum_i x_i^2}, \quad b = \overline{Y} - a\overline{X} .$$

Si l'on remplace les Y_i par de nouvelles valeurs $(Y_i + \delta Y_i)$, on obtient successivement

$$\delta\overline{Y} = \frac{1}{n}\sum_i \delta Y_i ,$$

$$\delta y_i = \delta Y_i - \delta\overline{Y}$$

$$\delta a = \frac{\sum_i x_i \, \delta y_i}{\sum_i x_i^2}, \quad \delta b = \delta\overline{Y} - \delta a\overline{X} .$$

En d'autres termes, la perturbation de l'ajustement est égale à l'ajustement de la perturbation.

Dans le cas qui nous occupe, on a

$$\delta\sigma_{nD} = \sigma_{nD2} - \sigma_{nD1} = \frac{\sigma_{fD}(d_2) - \sigma_{fD}(d_1)}{\beta_k} = \frac{B}{\beta_k}$$

où B est une constante dont la valeur est

$$B = A\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{d_2}} - \frac{1}{\sqrt{d_1}}\right).$$

Si l'on calcule l'ajustement

$$\frac{1}{\beta_k} = \alpha\sigma_{D_0} + \beta$$

on a alors

$$\delta a = B\alpha, \quad \delta b = B\beta.$$

Examinons un cas de figure précis. Dans le cas d'une rainure de clavette en flexion, on obtient, en supposant $d_2 = 10$ mm,

$$C_1 = a = 0{,}2853, \quad b = 109{,}6, \quad C_2 = 109{,}6\sqrt{10} = 346{,}5$$

Les indices d'effet d'entaille s'ajustent comme suit :

R_m	500	600	700	800	900	1000
β_k	1,5	1,6	1,72	1,8	1,9	2,0
$1/\beta_k$	0,6667	0,6250	0,5814	0,5556	0,5263	0,5
σ_{D_o}	224,4	268,4	312,4	351,4	387,4	422,4

On obtient

$$\alpha = -0{,}0008361 \qquad \beta = 0{,}8498$$

Supposons que l'échelle réelle des expériences soit $d_1 = 30$ mm. On a donc

$$B = A\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{10}} - \frac{1}{\sqrt{30}}\right) = 13{,}36\, MPa$$

ce qui donne

$$\delta a = B\alpha = -13{,}36 \times 0{,}0008361 = -0{,}01117$$
$$\delta b = B\beta = 13{,}36 \times 0{,}8498 = 11{,}35$$

soit

$$\delta a / a = -0{,}01117 / 0{,}2853 = -0{,}03915\ (-3{,}9\%)$$
$$\delta b / b = 11{,}35 / 109{,}6 = 0{,}1036\ (+10{,}3\%)$$

On constate que a est un peu sous-estimé et que b est surestimé dans une mesure un peu plus grande. En ce qui concerne C_1 et C_2, on a alors

$$C_1\ exact = a - \delta a = 0{,}2853 + 0{,}01117 = 0{,}2965$$
$$C_2\ exact = (b - \delta b)\sqrt{30} = (109{,}6 - 11{,}35)\sqrt{30} = 538{,}1.$$

C'est donc essentiellement C_2 qui est modifié, presque en proportion de la racine de l'échelle de référence. Ainsi, en présumant une échelle trop faible, on modifie peu le comportement pour $\sigma_{D_o}\sqrt{d^*}$ grand, c'est-à-dire la valeur estimée de K_t. Par contre, l'effet d'échelle est nettement sous-estimé. Cela signifie que pour les petites valeurs de $\sigma_{D_o}\sqrt{d^*}$, le taux d'affaiblissement γ calculé est trop petit, ce qui va dans le sens de la sécurité.

4. Rainures de clavette obtenues par fraisage en bout

PISSARENKO, YAKOVLEV et MATVEEV [4] donnent pour ce problème des résultats en flexion et en torsion pour 6 valeurs de R_m. Le diamètre d* non explicitement spécifié, est supposé valoir 10 mm.

4.1.- Flexion

Soient d le diamètre de l'arbre, b la largeur de la rainure et t sa profondeur. La contrainte nominale se calcule par

$$\sigma_n = \frac{M_f}{W_f}$$

avec

$$W_f = \frac{\pi d^3}{32} - \frac{bt(d-t)^2}{2d}$$

Les auteurs donnent les valeurs de β_k. On a le tableau suivant (en Mpa) :

R_m	500	600	700	800	900	1000
σ^*_{fD}	256	300	344	383	419	454
β_k	1,5	1,6	1,72	1,8	1,9	2,0
σ_{nD}	170,7	187,5	200	212,8	220,5	227
σ_{D_o}	224,4	268,4	312,4	351,4	387,4	422,4

Coefficient de régression : 0,9933

$C_1 = 0{,}2853$

$C_2 = 109{,}6 \times \sqrt{10} = 346{,}5$

4.2.- Torsion

La contrainte nominale de torsion se calcule par

$$\tau_n = \frac{M_t}{W_t}$$

avec

$$W_t = \frac{\pi d^3}{16} - \frac{bt(d-t)^2}{2d}$$

Le tableau de calcul s'établit comme suit :

R_m	500	600	700	800	900	1000
σ^*_{fD}	256	300	344	383	419	454
β_k	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9
$\tau_{nD}\sqrt{3}$	182,9	200	215	225,3	232,8	238,9
σ_{D_o}	224,4	268,4	312,4	351,4	387,4	422,4

Coefficient de régression : 0,9892
$C_1 = 0{,}2826$
$C_2 = 123{,}2 \times \sqrt{10} = 389{,}6$

5. Rainure de clavette obtenue à la fraise disque

KOEHLER et ROEGNITZ [5] donnent pour ce cas les valeurs de β_k pour deux valeurs de Rm. La contrainte nominale se calcule par

$$\sigma_n = \frac{M_f}{W_f},$$

où W_f n'est pas explicitement définie par les auteurs. Mais il y a tout lieu de penser que, selon la tradition allemande, c'est

$$W_f = \frac{\pi\,(d-t)^3}{32}$$

t étant la profondeur de la rainure. L'échelle, non spécifiée, est supposée égale à d* = 10 mm. Cela étant, on a

R_m	500	700
σ^*_{fD}	256	344
β_k	1,4	1,65
σ_{nD}	182,9	208,5
σ_{D_o}	224,4	312,4
γ	0,8151	0,6674
$10^3 / \sigma_{D_o}$	4,456	3,201

L'interpolation donne

$$C_1 = 0{,}2909 \quad C_2 = 117{,}6 \times \sqrt{10} = 371{,}9$$

6. Emmanchements frettés

La détermination a priori du gradient relatif défie l'analyse dans le cas des emmanchements. C'est donc typiquement un cas où l'expérience est nécessaire. Sur base de résultats de diverses provenances, LEHR [6] a montré que dans ce genre de problèmes, l'effet d'échelle est très prononcé. Par ailleurs, NIEMANN [1] donne la variation de la limite d'endurance en flexion des assemblages frettés en fonction de la dureté de l'acier.

6.1.- Les données de LEHR

Il s'agit d'un acier St50. Les données sont

d	10	40	160	290
σ_{nD}	160	110	82	70
$1/\sqrt{d}$	0,3162	0,1581	0,07906	0,05872

Coefficient de régression : 0,9976

Ajustement : $\sigma_{nD} = 53{,}26 + \dfrac{341{,}4}{\sqrt{d}}$

Compte tenu du fait que pour $R_m = 500\,MPa$, $\sigma_{D_o} = 224{,}4\,MPa$, on obtient

$$C_1 = \frac{53{,}26}{224{,}4} = 0{,}2373 \quad C_2 = 341{,}4 \qquad \text{(LEHR)}$$

6.2.- Les données de NIEMANN

Pour une échelle de 10 mm, NIEMANN cite d'abord la valeur $\beta_k \approx 2$. En outre, il donne un tableau de variation de la limite d'endurance en fonction du matériau, sous la forme d'un coefficient $q_1(R_m)$ tel que

$$\sigma_{nD} = q_1 \cdot \frac{\sigma^*_{fD}}{\beta^*_k},$$

β^*_k étant la valeur de l'indice d'effet d'entaille pour $R_m = 500 MPa$.

Ceci donne le tableau suivant :

R_m	400	500	600	700	850	1000
σ^*_{fD}	210	256	300	344	400	454
q_1	1,1	1	0,93	0,85	0,74	0,71
$q_1\sigma^*_{fD}$	231,0	256,0	279,0	292,4	296,0	322,3
σ_{nD} (*)	115,5	128	139,5	146,2	148,0	161,2
σ_{D_o}	178,4	224,4	268,4	312,4	368,4	422,4

Coefficient de régression : 0,9736

$C_1 = 0{,}1727 \quad C_2 = 88{,}67 \times \sqrt{10} = 280{,}4$ (NIEMANN)

Comparant à la formule obtenue à partir des données de Lehr, on constate que les coefficients sont dans les rapports suivants :

$$\frac{0{,}2373}{0{,}1727} = 1{,}374; \frac{341{,}4}{280{,}4} = 1{,}218$$

A 6 % près, chacun de ces rapports peut être identifié à leur moyenne géométrique 1,294. On obtient donc une correspondance raisonnable des deux formules en remplaçant la valeur annoncée $\beta_k = 2$ par la valeur plus faible 2/1,294 = 1,546.

6.3.- Confirmation de la formule obtenue à partir des résultats de LEHR

CAZAUD et al. [7] fournissent des résultats ponctuels obtenus par THUM et WUNDERLICH d'une part et par BUCKWALTER et HORGER d'autre part.

6.3.1.- Expérience de Thum et Wunderlich

Il s'agit d'un arbre de 14 mm de diamètre qui, lisse, présente une endurance de flexion de 290 Mpa. Avec un emmanchement, l'endurance se réduit à 155 Mpa.

On calcule

$$\sigma_{D_o} = 290 - 70{,}67\sqrt{\frac{2}{14}} = 263{,}3\ MPa$$

et, par la formule "LEHR"

$$\sigma_{nD} = 0{,}2373\ .\ 263{,}3 + \frac{341{,}4}{\sqrt{14}} = 153{,}7\ MPa$$

soit 0,8 % de moins que l'expérience.

6.3.2.- Expériences de Buckwalter et Horger

Un arbre lisse de 50 mm de diamètre présente une endurance en flexion de 242 Mpa. Des arbres de même acier, de 50 mm et 178 mm de diamètre, avec emmanchement, conduisent à des endurances respectives de 98 et 77 Mpa.

On calcule

$$\sigma_{D_o} = 242 - 70{,}67\sqrt{\frac{2}{50}} = 227{,}9\ MPa$$

Pour l'arbre emmanché de 50 mm, il vient

$$\sigma_{nD} = 0{,}2373\ .\ 227{,}9 + \frac{341{,}4}{\sqrt{50}} = 102{,}4\ MPa$$

soit 4 % de plus que l'expérience. Pour l'arbre emmanché de 170 mm,

$$\sigma_{nD} = 0{,}2373\ .\ 227{,}9 + \frac{341{,}4}{\sqrt{170}} = 79{,}67\ MPa\,,$$

soit 3,5 % de plus que l'expérience.

6.3.3.- Données numériques de Dubbel

Le memento Dubbel [16] présente des données provenant des normes TGL19430 et relatives à un diamètre de 40 mm. Les données se présentent sous la forme d'indices d'effet d'entaille, dans le cadre d'une méthode de calcul quelque peu conventionnelle dont voici les grands traits :

$$\sigma^*_{fD} = R_m / 2$$

$$\sigma_{nD} = \frac{\sigma^*_{fD}}{\beta_g \beta_k},$$

avec, pour d = 40 mm, $\frac{1}{\beta_g} = 0,85$. Ceci donne le tableau suivant :

R_m	400	500	600	700	800	900	1000	1100	1200
σ^*_{fD}	200	250	300	350	400	450	500	550	600
σ^*_{fD} / β_g	170	212,5	255	297,5	340	382,5	425	465,7	510
β_k	1,8	2	2,1	2,3	2,5	2,7	2,8	2,8	2,9
σ_{nD}	94,44	106,3	121,4	129,3	136	141,7	151,8	166,3	175,9
σ_{nD} (LEHR)	96,31	107,2	117,7	128,1	137,4	145,9	154,2	162,1	169,7
$\Delta\%$	2,0	0,8	-3,0	-0,9	1,0	3,0	1,6	-2,5	-3,6

6.3.4.- Conclusion

Ces résultats très satisfaisants confirment pleinement la validité de la formule "Lehr".

6.4.- Emmanchements frettés en torsion

Le memento Dubbel donne également des indices d'effet d'entaille en torsion, qui sont repris ci-dessous (d* = 40 mm).

R_m	400	500	600	700	800	900	1000	1100	1200
σ^*_{fD} / β_g	170	212,5	255	297,5	340	382,5	425	465,7	510
β_k	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,8	1,9
$\tau_{nD}\sqrt{3}$	141,7	163,5	182,1	198,3	212,5	225	236,1	258,7	268,4
σ_{D_o}	178,4	224,4	268,4	312,4	351,4	387,4	422,4	455,6	487,4

Coefficient de régression : 0,9978
$C_1 = 0{,}4006 \quad C_2 = 72{,}13\sqrt{40} = 456{,}2$

7. Assemblages boulonnés en extension

Nous possédons à ce sujet des résultats de Pissarenko et al. [4] pour quatre valeurs de R_m et pour un diamètre de référence d* = 12 mm. Sont traités, les filetages métrique et Wilworth.

7.1.- Filet métrique

R_m	400	600	800	1000
σ_{D_o}	178,4	268,4	351,4	422,4
β_k	3,0	3,9	4,8	5,2
σ_{nD}	59,47	68,82	73,21	81,23

Coefficient de régression : 0,9917
$C_1 = 0{,}08538 \quad C_2 = 44{,}63 \times \sqrt{12} = 154{,}6$

7.2.- Filet Withworth

R_m	400	600	800	1000
σ_{D_o}	178,4	268,4	351,4	422,4
β_k	2,2	2,9	3,5	3,8
σ_{nD}	81,09	92,55	100,4	111,2

Coefficient de régression : 0,9967
$C_1 = 0{,}1202 \quad C_2 = 59{,}64 \times \sqrt{12} = 206{,}6$

8. Filetage sur arbre

Nous possédons à ce sujet des diagrammes d'indice d'effet d'entaille qui nous ont aimablement été communiqués par A. Leroy de la Faculté Polytechnique de Mons. Ces diagrammes sont relatifs à l'extension et à la flexion. Nous n'en retirerons que les deux sections correspondant au filetage métrique et au filetage Withworth. L'échelle, non mentionnée, sera prise égale à d* = 10 mm.

8.1.- Filetage Withworth en extension

R_m	400	600	800	1000
σ_{D_o}	178,4	268,4	351,4	422,4
β_k	2,15	2,73	3,15	3,50
σ_{nD}	82,98	98,32	111,6	120,7

Coefficient de régression : 0,9983

$C_1 = 0{,}1556 \quad C_2 = 55{,}91 \times \sqrt{10} = 176{,}8$

8.2.- Filetage métrique en extension

R_m	400	600	800	1000
σ_{D_o}	178,4	268,4	351,4	422,4
β_k	2,37	3	3,45	3,83
σ_{nD}	75,27	89,47	101,9	110,3

Coefficient de régression : 0,9982

$C_1 = 0{,}1446 \quad C_2 = 50{,}10 \times \sqrt{10} = 158{,}4$

8.3.- Filetage Withworth en flexion

R_m	400	600	800	1000	1200
σ^*_{fD}	210	300	383	454	519
β_k	1,29	1,62	1,93	2,2	2,43
σ_{nD}	162,8	185,2	198,4	206,4	213,6
σ_{D_o}	178,4	268,4	351,4	422,4	487,4

Coefficient de régression : 0,9831
$C_1 = 0{,}1610 \quad C_2 = 138{,}3 \times \sqrt{10} = 437{,}3$

8.4.- Filetage métrique en flexion

R_m	400	600	800	1000	1200
σ^*_{fD}	210	300	383	454	519
β_k	1,33	1,69	2,02	2,3	2,56
σ_{nD}	157,9	177,5	189,6	197,4	202,7
σ_{D_o}	178,4	268,4	351,4	422,4	487,4

Coefficient de régression : 0,9827
$C_1 = 0{,}1436 \quad C_2 = 136{,}0 \times \sqrt{10} = 429{,}9$

9. Cannelures droites ou en développante, en flexion

Des données à ce sujet sont disponibles dans l'ouvrage de Pissarenko et al. [4]. La contrainte nominale se calcule comme suit :

$$\sigma_n = \frac{M_f}{W_f}$$

avec

- pour les cannelures *en développante* :

$$W_f = \frac{\pi\, d^3_{prim}}{32}$$

où d_{prim} est le diamètre primitif

- pour les cannelures *droites*,

$$W_f = \xi \frac{\pi\, d_{\text{int}}^3}{32}$$

où d_{int} est le diamètre à fond de cannelures et ξ est un facteur dépendant de leur profondeur.

Série	ξ
légère	9/8
moyenne	6/5
forte	5/4

Les données correspondent à 8 valeurs de R_m. L'échelle, non spécifiée, sera prise égale à d* = 10 mm. On obtient le tableau suivant :

R_m	400	500	600	700	800	900	1000	1200
σ^*_{fD}	210	256	300	344	383	419	454	519
σ_{nD}	156	177	194	215	232	247	264	297
σ_{D_o}	178,4	224,4	268,4	312,4	351,4	387,4	422,4	487,4

Coefficient de régression : 0,9994
$C_1 = 0{,}4508 \quad C_2 = 74{,}41 \times \sqrt{10} = 235{,}3$

10. Cannelures droites en torsion

La source est la même. La contraine nominale se calcule par

$$\tau_n = \frac{M_t}{2W_f},$$

W_f se calculant comme en flexion.

R_m	400	500	600	700	800	900	1000	1200
σ^*_{fD}	210	256	300	344	383	419	454	519
β_k	2,10	2,25	2,35	2,45	2,55	2,65	2,70	2,80
$\tau_{nD}\sqrt{3}$	100	113,8	127,7	140,4	150,2	158,1	168,1	185,4
σ_{D_o}	178,4	224,4	268,4	312,4	351,4	387,4	422,4	487,4

Coefficient de régression : 0,9989
$C_1 = 0,2736 \quad C_2 = 52,93 \times \sqrt{10} = 167,4$

11. Cannelures en développante, torsion

Notre source est encore Pissarenko. La contrainte nominale se calcule par

$$\tau_n = M_t / W_t$$

avec

$$W_t = \frac{\pi\, d^3_{prim}}{16},$$

d_{prim} étant le diamètre primitif.

R_m	400	500	600	700	800	900	1000	1200
σ^*_{fD}	210	256	300	344	383	419	454	519
β_k	1,40	1,43	1,46	1,49	1,52	1,55	1,58	1,60
$\tau_{nD}\sqrt{3}$	150,0	179,0	205,5	230,9	252,0	270,3	287,3	324,4
σ_{D_o}	178,4	224,4	268,4	312,4	351,4	387,4	422,4	487,4

Coefficient de régression : 0,9993
$C_1 = 0,5578 \quad C_2 = 53,89 \times \sqrt{10} = 170,4$

12. Gorges de circlips

Les données relatives aux gorges de circlips sont très rares. Seul Niemann [1] donne, pour un acier St50 et un diamètre de 10 mm, les valeurs

$$\beta_{kf} = 2,2 \text{ et } \beta_{kt} = 1,8$$

Pour cet acier et cette échelle, la limite d'endurance en flexion est de 256 Mpa.

On a donc

$$\sigma_{nD} = \frac{256}{2,2} = 116,4MPa, \quad \tau_{nD}\sqrt{3} = \frac{256}{1,8} = 142,2MPa.$$

Il n'est pas question dans ce cas de tenir compte d'un rayon bien défini à fond d'entaille, car les outils à saigner correspondants sont pratiquement à angle vif. Il est donc raisonnable de considérer qu'il s'agit d'entailles vives, ce qui mène aux limites d'endurance suivantes dans le cas général.

$$\sigma_{nD} = \frac{116{,}4\sqrt{10}}{\sqrt{d}} = \frac{368{,}1}{\sqrt{d}}$$

et

$$\tau_{nD}\sqrt{3} = \frac{142{,}2\sqrt{10}}{\sqrt{d}} = \frac{449{,}7}{\sqrt{d}}$$

13. Arbres dentelés

Les données de la littérature pour ce type d'entaille sont très contradictoires, tant pour le coefficient de concentration de contrainte que pour l'indice d'effet d'entaille. Pour le cas de la *torsion*, cependant, le coefficient de concentration de contrainte peut être évalué à partir des travaux de NEUBER [20]. Selon cet auteur, en choisissant pour contrainte nominale de torsion celle qui apparaîtrait dans l'arbre plein ayant le même diamètre extérieur de, on a :

$$\alpha_k = 1 + \sqrt{\frac{t_\varpi}{r}}$$

où t_ϖ est une profondeur réduite calculée à partir de la profondeur réelle t des dents par

$$t_\varpi = t\,\xi, \qquad \xi = \frac{\pi\, d_i}{Zt}\, th\left(\frac{Zt}{\pi\, d_i}\right),$$

où Z est le nombre de dents et d_i, le diamètre intérieur (à fond de dents). Par ailleurs, le gradient relatif vérifie

$$\chi\, d_e = \frac{d_e}{r} + 2\frac{d_e}{d_i},$$

ce qui permet d'écrire

$$\gamma = C_1 + \frac{C_2}{\sigma_{D_o}\sqrt{d_e}},$$

avec

$$C_1 = \frac{1}{\alpha_k}, C_2 = C_1 A\sqrt{\chi\, d_e}\,.$$

Le calcul, mené pour huit types d'arbres dentelés suivant la norme DIN 5481 T1 a donné les résultats suivants :

Denture	d_e	d_i	r	C_1	C_2
10 x 12	12	10,8	0,1	0,3532	276,0
12 x 14	14,2	12,06	0,1	0,3374	286,4
15 x 17	17,2	14,91	0,15	0,3636	277,9
17 x 20	20	17,37	0,15	0,3495	287,7
21 x 24	23,9	20,76	0,15	0,3327	298,8
26 x 30	30	26,40	0,25	0,3674	287,1
30 x 34	34	30,38	0,3	0,3768	286,3
36 x 40	39,9	35,95	0,5	0,4219	270,0

La constante C_1 a pour valeur moyenne 0,3628, avec un écart-type de 0,02629. Pour la constante C_2, la valeur moyenne est 283,8, l'écart-type étant 8,293. Nous adopterons ces valeurs moyennes :

$C_1 = 0{,}3628$ $\qquad\qquad$ $C_2 = 283{,}8$

TABLEAU SYNTHETIQUE - $\gamma = C_1 + \dfrac{C_2}{\sigma_{D_o}\sqrt{d}}$

Entaille	Référence	Variation	Régression	C_1	$C_2 / MPa\sqrt{mm}$	C_2^*
1. Rainure de clavette, fraise en bout Flexion $\sigma_n = M_f / W_f$ $W_f = \dfrac{\pi d^3}{32} - \dfrac{bt(d-t)^2}{2d}$ b = largeur, t = profondeur	Pissarenko	6 valeurs de Rm d* = 10 mm	0,9933	0,2853	346,5	4,903
2. Idem, torsion $\tau_n = M_t / W_t$ $W_t = \dfrac{\pi d^3}{16} - \dfrac{bt(d-t)^2}{2d}$	Pissarenko	6 valeurs de Rm d* = 10 mm	0,9892	0,2826	389,6	5,513
3. Rainure de clavette, fraise disque Flexion $\sigma_n = M_f / W_f$ $W_f = \dfrac{\pi (d-t)^3}{32}$ t = profondeur	Köhler & Rögnitz	2 valeurs de Rm d* = 10 mm	-	0,2909	371,9	5,262
4. Emmanchement fretté, flexion	Lehr, Niemann Dubbel	4 diamètres, St50 6 valeurs de Rm 9 valeurs de Rm d* = 10 mm	0,9976	0,2373	341,4	4,831
5. Emmanchement fretté, torsion	Dubbel	9 valeurs de Rm d* = 40 mm	0,9978	0,4006	456,2	6,455
6. Assemblage boulonné, extension Filet métrique	Pissarenko	4 valeurs de Rm d* = 12 mm	0,9917	0,08538	154,6	2,188
7. Assemblage boulonné, extension Filet Withworth	Pissarenko	4 valeurs de Rm d* = 12 mm	0,9967	0,1202	206,6	2,923
8. Filetage Withworth sur arbre, extension	Leroy	4 valeurs de Rm d* = 10 mm	0,9983	0,1556	176,8	2,502

9. Filetage métrique sur arbre, extension	Leroy	4 valeurs de Rm d* = 10 mm	0,9982	0,1446	158,4	2,241
10. Filetage Withworth sur arbre, flexion	Leroy	5 valeurs de Rm d* = 10 mm	0,9831	0,1610	437,3	6,188
11. Filetage métrique sur arbre, flexion	Leroy	5 valeurs de Rm d* = 10 mm	0,9827	0,1436	429,9	6,083
12. Cannelures droites ou en développante, Flexion - $\sigma_n = M_f / W_f$ $W_f = \frac{\pi d^3_{prim}}{32}$ (développante) $W_f = \xi \frac{\pi d^3_{\text{int}}}{32}$ (droites) $\xi = 9/8$ série légère $6/5$ série moyenne $5/4$ série forte	Pissarenko	8 valeurs de Rm d* = 10 mm	0,9994	0,4508	235,3	3,33
13. Cannelure droites en torsion $\tau_n = M_t / 2W_f$ Voir W_f en 11	Pissarenko	8 valeurs de Rm d* = 10 mm	0,9989	0,2736	167,4	2,369
14. Cannelure en développante, torsion $\tau_n = M_t / 2W_f$ Voir W_f en 11	Pissarenko	8 valeurs de Rm d* = 10 mm	0,9993	0,5578	170,4	2,411
15. Gorge de circlips, flexion	Niemann	1 valeur, Rm = 500 Mpa d* = 10 mm	-	-	368,1	5,209
16. Gorge de circlips, torsion	Niemann	1 valeur, Rm = 500 Mpa d* = 10 mm	-	-	449,7	6,363
17. Arbre dentelé, torsion τ calculé avec le diamètre extérieur	Calcul		-	0,3628	283,8	4,016

Bibliographie

[1] G. NIEMANN - *Maschinenelemente*. Band 1, 2d Auflage, Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 1975.

[2] W. STEINHILPER, R. ROEPER - *Maschinen- und Konstruktionselemente 1*. 4te Auflage, Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 1994.

[3] J.F. DEBONGNIE - "On the link between design against fatigue and fracture mechanics". Proc. of the 2000 ASME - DETC, Sept. 10-13, 2000, Baltimore, Maryland.

[4] G. PISSARENKO, A. YAKOVLEV, V. MATVEEV - *Aide-mémoire de résistance des matériaux*. Mir, Moscou, 1979.

[5] G. KOEHLER, H. ROEGNITZ - *Maschinenteile 2*. 5te Auflage, Teubner, Stuttgart, 1976.

[6] E. LEHR - "Formgebung und Werkstoffausnutzung". Stahl und Eisen, 1941, pp. 965 sqq.

[7] R. CAZAUD, G. POMEY, P. RABBE, Ch. JANSSEN - *La fatigue des métaux*. Dunod, Paris, 1969.

[8] K.H. DECKER - *Maschinenelemente*. 10te Auflage, Hanser, München, Wien, 1990.

[9] R.E. PETERSON - *Stress concentration factors*. Wiley, New York, London, Sydney, Toronto, 1974.

[10] R. HAENCHEN - *Neue Festigkeitsberechnung für den Maschinenbau*. Carl Hanser Verlag, München, 1956.

[11] F. KOERBER, M. HEMPEL - "Zugdruck-Biege- und Verdrehungs-wechselbeanspruchung und Stahlstäben mit Querbohrungen und Kerben". Mitt. Max Planck-Inst. f. Eisenforschung. Abh. 366, Düsseldorf, 1939, Stahleisen m.b.H.

[12] E. SIEBEL - "Neue Wege der Festigkeitsrechnung". VDI - Zeitschrift Bd 90, Nr. 5, pp. 135-139, 1948.

[13] N.M. BELYAEV - *Strength of Materials*. Mir, Moscou, 1979.

[14] V. FEODOSSIEV - *Résistance des Matériaux*. Mir, Moscou, 1976.

[15] P. STEPINE - *Résistance des Matériaux*. Mir, Moscou, 1986.

[16] *Dubbel Taschenbuch für den Maschinenbau*. 17te Auflage, Springer, 1990.

[17] R.B. HEYWOOD - *Designing against fatigue*. Chapman and Hall, London, 1962.

[18] R.B. HEYWOOD - *Designing by photoelasticity*. Chapman and Hall, London, 1952.

[19] P. Ye. KRAVCHENKO - *Fatigue Resistance*. Pergamon Press, Oxfor, London, New York, Paris, 1964.

[20] H. NEUBER - *Kerbspannungslehre*. Springer Verlag, Berlin, Göttingen, Heidelberg, 1958.

[21] F.G. KOLLMAN - *Welle-Nabe-Verbindungen*. Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, Tokyo, 1984.

[22] M. HEMPEL - Notch sensitivity of various steels with transverse holes. *Archiv Eisenhüttenw.*, **12**, 1939, pp. 433-444.

[23] R.E. PETERSON, A.M. WAHL - Two- and three-dimensional cases of stress concentration and comparison with fatigue tests. *Trans. ASME, J. App. Mech.*, **58**, 1936, A15-A22.

[24] R.C.A. THURSTON, J.E. FIELD - Fatigue strength under bending, torsional and combined stresses of steel test pieces with stress concentrations. *Proc. IME*, **168**, 1954, pp. 785-796.

[25] C.E. PHILLIPS, R.B. HEYWOOD - Size effect in fatigue of plain and notched steel specimens. *Proc. IME*, **165**, *WEP65*, 1951, pp. 113-124.

[26] O.J. HORGER, T.V. BUCKWALTER - Endurance of NE steels in $1\frac{3}{4}$ in. specimens. *Metal progress*, 46, oct. 1944, pp. 727-729.

[27] A. THUM, E. BRUDER - Danger of fatigue failure in grooves of shafts and axles and its diminution. *Deutsche Kraftfahforschung*, **11**, 1938.

[28] W. SCHNEIDER - Beitrage zur Frage der Schwingungsfestigkeit. *Stahl und Eisen*, **51**, 1931, p. 288 sqq.

[29] T.J. DOLAN - Simultaneous effects of corrosion and abrupt changes in section on the fatigue strength of steel. *Trans. ASME, J. Appl. Mech.*, **60**, 1938, A141-A148.

[30] S. TIMOSHENKO - Stress concentration produced by fillet and holes. *Proc. 2d. Intern. Cong. App. Mech., 1926; Trans. ASME*, **47**, 1925, pp. 199-237.

[31] E. LEHR, R. MAILANDER - Einfluss von Hohlkehlen an abgesetzten Wellen auf die Biegewechselfestigkeit. *ZVDI*, **79**, Aug. 1935, pp. 1005 sqq.

[32] O.J. HORGER, T.V. BUCKWALTER, H.F. NEIFERT - Fatigue strength of $5\frac{1}{4}$ in. diameter shaft as related to design of large parts. *Trans. ASME*, **67**, 1945, A149-A155.

[33] W.E. BARDGETT - Factors affecting the influence of nitriding on fatigue strength. *Metal Treatment*, **10**, 1943, pp. 87-101.

[34] R.E. PETERSON, A.M. WAHL - Fatigue of shafts at fitted members, with a related photoelastic analysis. *Trans. ASME, J. App. Mech.*, **57**, 1935, A1-111; A69-A74.

[35] A. POMP, M. HEMPEL - Wechselfestigkeit im Kerbwirkungszahlen von legierten und unlegierten Baustahlen bei +20° und -78°C. *Archiv Eisenhuttenwesen*, **21**, jan. 1950, pp. 53-66.

[36] C. MASSONNET - Effect of size, shape and grain size on the fatigue strength of medium carbon steel. *Proc. ASTM*, **56**, pp. 954-978.

[37] O.J. HORGER, T.V. BUCKWALTER - Endurance of NE steels in $1\frac{3}{4}$ in. specimens. *Metal Progress*, **46**, oct. 1944, p. 727-729.

[38] H.F. MOORE, D. MORKOVIN - Effect of size of specimen on fatigue strength. *Proc. ASTM*, **42**, 1942, pp. 145 sqq.

[39] T.J. DOLAN, B.C. HANLEY - Effect of size and notch sensitivity on fatigue characteristics of two metallic materials. Part 2, SAE 4340 steel U.S. Air Force, *TR5726*, april 1946 and may 1948.

[40] T.J. DOLAN, C.S. YEN - Somme aspects of the effect of metallurgical structure on fatigue strength and notch sensitivity of steels. *Proc. ASTM*, **48**, 1948, pp. 664 sqq.

[41] H.F. MOORE, R.L. JORDAN - Stress concentration in steel shafts with semi-circular notches. *Proc. 5th.释 Housing*