

LABORATOIRE D'AÉRONAUTIQUE
DE L'UNIVERSITÉ DE LIÈGE
RUE DU VAL BENOIT, 75
B - 4000 LIÈGE
BELGIQUE

RAPPORT SF-74

"ELEMENTS DE TORES ISOPARAMETRIQUES DEVELOPPES
EN SERIES DE FOURIER"

J.F. DEBONGNIE,

MAÎTRE DE CONFÉRENCES

MAI 1978

INTRODUCTION

Le présent rapport décrit les éléments de type 14 et 30 récemment mis en service dans le logiciel SAMCEF.

Après une brève description théorique, on trouvera une notice d'utilisation de ces éléments. Enfin, le rapport se termine par la présentation d'un certain nombre d'exemples pratiques.

I. LES ELEMENTS DE TORES ISOPARAMETRIQUES DEVELOPPES EN SERIES DE FOURIER

1. Préliminaires. Conventions d'écriture

Le développement en séries de FOURIER est comme d'habitude dans SAMCEF :

$$\begin{aligned}
 u_r &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^1 u_{nm} \cos \left(n\theta + m \frac{\pi}{2} \right) \\
 u_z &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^1 w_{nm} \cos \left(n\theta + m \frac{\pi}{2} \right) \\
 u_\theta &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^1 v_{nm} \sin \left(n\theta + m \frac{\pi}{2} \right)
 \end{aligned}$$

Dans la suite, nous considérerons toujours un harmonique d'ordre (n,m) donné, Pour alléger les écritures, nous omettrons couramment les indices n et m lorsque aucune confusion n'est possible.

2. Description des éléments

2.1. Généralités

Il s'agit d'éléments iso- ou hyp- paramétriques, selon les degrés .

- Pour décrire la géométrie, on utilise un élément de référence A et on le transforme en l'élément effectif B par la relation

$$(\xi, \eta) \in A \rightarrow (r=R(\xi, \eta), z = Z(\xi, \eta)) \in B.$$

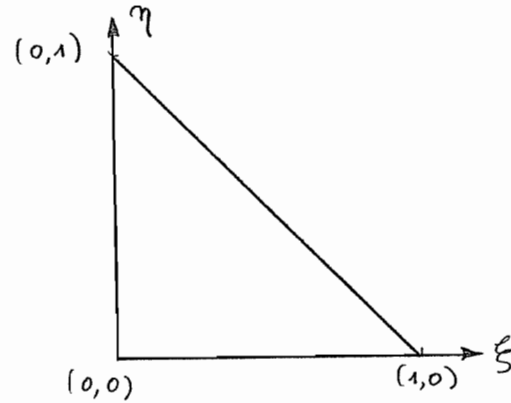
- Les déplacements sont également des fonctions de ξ et η :

$$(\xi, \eta) \in A \rightarrow (u=U(\xi, \eta), w = W(\xi, \eta), v = V(\xi, \eta))$$

Les éléments 14 et 30 se distinguent par le choix de l'élément de référence A et des fonctions R, Z, U, W, V.

2.2. Type 14

- a) Elément de référence : triangle rectangle isocèle, dont les petits côtés sont de longueur unité



- b) Fonctions R et Z : polynômes complets de degré $\ell = 1$ ou 2

$$R = \sum_{i=0}^{\ell} \sum_{j=0}^{\ell-i} \alpha_{ij} \xi^i \eta^j, \quad Z = \dots$$

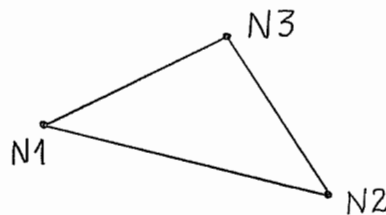
- c) Fonctions U, W et V : polynômes complets de degré $k = 1, 2$ ou 3

$$U = \sum_{i=0}^k \sum_{j=0}^{k-i} \alpha_{ij} \xi^i \eta^j, \quad W = \dots, \quad V = \dots$$

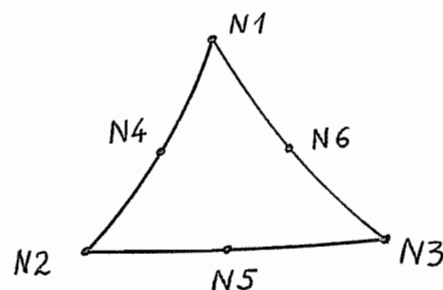
- d) Règle d'utilisation : on doit avoir $\ell \leq k$

- e) Définition de la géométrie

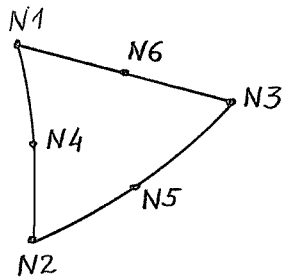
- par 3 noeuds : $\ell = 1$. Bords rectilignes



- par 6 noeuds : $\ell = 2$. Bords courbes



- par $3 < N < 6$ noeuds : $\ell = 2$. Si un côté , soit, pour fixer les idées, N1-N3 , est rectiligne, on peut, dans la définition de l'élément, remplacer le noeud central de ce côté (dans le cas présent, N6) par zéro. Les degrés de liberté de ce côté sont alors désignés comme des d.d.l. d'interface (N1,N3, composante)



- Remarque importante : chaque fois que le noeud central d'un côté est défini à une valeur non nulle, le degré des déplacements est automatiquement fixé à 2 sur ce côté. En conséquence, le degré 3 ne peut exister que sur un côté rectiligne.

f) Réduction de degré sur un bord

La réduction de degré se fait automatiquement sur une interface bordée par deux éléments de degrés différents: le degré adopté est le plus petit des deux degrés.

g) Forces implicites

Les forces implicites peuvent se composer de :

- charges thermiques
- charges de volume
- pression linéaire sur le bord N1-N2 de l'élément
- forces centrifuges

h) Corrections de raideur

L'élément peut prendre en compte

- la correction de raideur due à une charge initiale ("précontrainte")
- la correction centrifuge de la raideur ($K(\Omega^2)$)

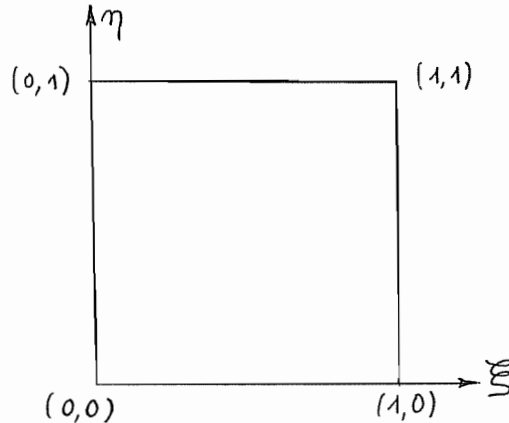
i) Limitation de l'aplatissement

Lorsque l'élément est défini par 3 noeuds, son aplatissement (grand côté/petit côté) ne peut excéder 100.

2.3. Type 30

Les caractéristiques de ce type d'élément sont identiques à celles du type 14, sauf :

a) Elément de référence : Carré unité



b) Fonctions R et Z : Ce sont les polynômes suivants, au degré $l = 1$ ou 2

$$R = \sum_{i=0}^{n(i)} \sum_{j=0}^{n(i)} \beta_{ij} \xi^i \eta^j, \quad Z = \dots$$

$$\text{avec } n(i) = \begin{cases} l & \text{si } i \leq 1 \\ 1 & \text{si } i > 1 \end{cases}$$

c) Fonctions U, W et V ; Ce sont les polynômes suivant au degré $k=1,2$ ou 3

$$U = \sum_{i=0}^k \sum_{j=0}^{n(i)} \alpha_{ij} \xi^i \eta^j \quad W=\dots, \quad V=\dots$$

$$\text{avec } n(i) = \begin{cases} k & \text{si } i \leq 1 \\ 1 & \text{si } i > 1 \end{cases}$$

e) Définition de la géométrie : Le principe est le même que pour le type 14 mais le nombre de noeuds oscille entre 4 et 8.

i) Limitation de l'aplatissement

Lorsque l'élément est défini par 4 noeuds, son aplatissement (grand côté/petit côté) ne peut excéder 50.

3. Utilisation des éléments de types 14 et 30

3.1. Définition de l'élément: Pour définir un élément $\left\{ \begin{matrix} 14 \\ 30 \end{matrix} \right\}$ par plus de $\left\{ \begin{matrix} 3 \\ 4 \end{matrix} \right\}$ noeuds, il faut écrire $NBN = \left\{ \begin{matrix} 6 \\ 8 \end{matrix} \right\}$.

3.2. Nombre de points de GAUSS

Type 14 : L1 = NG : nombre de points de GAUSS selon une direction. Option par défaut : NG = ND

Type 30 : LL1 = NGX : nombre de points de GAUSS selon la direction ξ (N1 - N2)
 L2 = NGY : nombre de points de GAUSS selon la direction η (N1 - N4)
 Options par défaut : NGX = NGY = ND+1

3.3. Ordre conventionnel des tensions

$$\sigma_{rr}, \sigma_{zz}, \sigma_{\theta\theta}, \tau_{rz}, \tau_{z\theta}, \tau_{r\theta}$$

3.4. Cartes additionnelles

- Codes admis : 1, 4, 11, 12, 13, 14, 113, 114, 21, 51, 52

- Conventions particulières

Code 4 : $\alpha_r, \alpha_z, \alpha_\theta, 0$

Code 11 : PI(1) , PI(2)

Pression linéairement variable sur le côté N1-N2 de l'élément. PI(2) = 0 équivaut à PI(2) = PI(1) (Pression constante).

Codes 13, 14, 113, 114 . Voir l'ordre conventionnel des tensions.

13	H ₁₁	H ₂₂	H ₃₃	H ₄₄
14	H ₅₅	H ₆₆	H ₂₁	H ₃₁
113	H ₃₂	H ₄₁	H ₄₂	H ₄₃
114	H ₆₅			

Code 21 : σ_r , σ_z , σ_θ , τ_{rz}

3.5. Impression des contraintes

Sont imprimées, les moyennes d'éléments .

II. APPLICATIONS

1. Compression d'une barre

Il s'agit d'un problème très simple destiné à vérifier le comportement de l'élément aux divers degrés, pour $n=0$. On considère une barre circulaire, dont l'axe est \vec{e}_z . On fixe les déplacements verticaux d'un côté de la barre et, de l'autre, on applique une pression. Les dimensions de la barre sont indiquées à la figure (1a). Les éléments ont d'abord été testés aux degrés 1, 2 et 3 à l'aide des maillages représentés aux figures (1a) et (1b) où seuls, les sommets (noeuds 1, 2, 3, 4) sont définis. Au degré 3, on a également testé les maillages effectivement représentés aux figures (1a) et (1b), c'est-à-dire comprenant les noeuds supplémentaires 5, 6 et 7. Dans ce dernier cas, le degré est donc réduit à deux sur les interfaces (1,2) (2,3) et (3,4), qui portent respectivement les noeuds 5, 6 et 7. Les fixations sur l'interface (3,4) s'expriment alors dans les données comme des fixations aux noeud 7.

La solution de ce problème est un comportement de barre, où les déplacements sont linéaires. Dès lors, toutes les idéalizations proposées doivent conduire au même résultat, à savoir:

- tensions

$$\sigma_z = -p = -1 \text{ hb} , \sigma_r = \sigma_\theta = \tau_{rz} = \tau_{z\theta} = \tau_{r\theta} = 0$$

- déplacements longitudinaux de l'extrémité chargée

$$w = \frac{\sigma_z}{E} \cdot l = \frac{-1}{21000} \cdot 100 \text{ mm} = 4,761905 \cdot 10^{-3} \text{ mm}$$

Ces résultats ont effectivement été obtenus, sauf dans le cas de deux éléments de type 14 au degré 1, où l'on a obtenu

$$\sigma_z : \begin{cases} \text{Elt I} : -0,9987 \text{ hb} \\ \text{Elt II} : -1,004 \text{ hb} \end{cases}$$

$$\begin{cases} w_1 : -4,793032 \cdot 10^{-3} \text{ mm} \\ w_2 : -4,751529 \cdot 10^{-3} \text{ mm} \end{cases}$$

Cette légère dissymétrie (1 % sur les déplacements) est due au fait que dans le cadre des options par défauts, le nombre de points de GAUSS est égal à 1 au premier degré, ce qui ne permet pas d'intégrer exactement la mise en charge de pression. Il est d'ailleurs possible d'éviter cette petite dissymétrie en prescrivant dans les données un nombre de points de GAUSS plus grand.

2. Torsion d'une barre

Les maillages de la figure 1 permettent également d'étudier la torsion de la barre. Pour cela, il suffit de poser

$$n = 0 \quad , \quad m = 1$$

Les fixations seront, au premier degré :

$$\left\{ \begin{array}{l} u_{\theta} \text{ fixé aux noeuds } 1, 3, 4 \\ u_r \text{ et } u_z \text{ fixés partout} \end{array} \right.$$

Pour représenter le couple, il nous suffit, étant donné le degré choisi, d'imposer une charge $F = C/r$ selon θ au noeud 2.

Dans notre cas, nous poserons

$$C = 1000 \text{ mm.daN,}$$

d'où

$$F = 100 \text{ daN .}$$

Etant donné que

$$I_p = \frac{\pi d^4}{32} = 1,57 \cdot 10^4 \text{ mm}^4$$

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} = 8100 \text{ hb .}$$

on obtient alors pour l'angle de torsion :

$$\psi = \frac{C}{GI_p} \cdot l = 7,88.10^{-4} \text{ rad.}$$

et

$$u_\theta = \psi \cdot r = 7,88.10^{-3} \text{ mm.}$$

Les tensions s'écrivent alors

$$\tau = G \psi \frac{r}{l} = 6,36.10^{-2} r ,$$

soit, en moyenne , pour $r = 5 \text{ mm}$,

$$\tau_{\text{moy}} = 3,18.10^{-1} \text{ hb .}$$

Ces valeurs ont été effectivement obtenues.

3. Flexion d'un arbre

L'arbre représenté à la figure 3 peut être traité à l'aide d'éléments de type 30. Ce problème a été étudié au moyen de 4 éléments de second degré, dont on donne les noeuds d'interfaces.

Les valeurs de n et m sont respectivement 1 et 0. Pour déterminer la manière d'introduire la charge, on note que pour les valeurs considérées de n et m , on a, pour tout θ ,

$$\begin{cases} u_x = u_r \cos\theta - u_\theta \sin\theta = u \cos^2\theta - v \sin^2\theta \\ u_y = u_r \sin\theta + u_\theta \cos\theta = u \sin\theta \cos\theta + v \sin\theta \cos\theta; \end{cases}$$

Comme, sur l'axe, on a

$$u + v = 0 ,$$

il vient

$$u_x = u = -v$$

$$u_y = 0 ,$$

si bien que le travail de la charge s'écrit

$$= P \cdot u_x = Pu = - Pv = P((1-\alpha)u - \alpha v)$$

quel que soit α . On peut donc poser

$$P_r = (1-\alpha)P$$

$$P_\theta = -\alpha P$$

quel que soit le nombre réel α . Nous avons posé $\alpha=0$, ce qui donne, pour $P = 1 \text{ daN}$,

$$P_r = 1 \text{ daN}, \quad P_\theta = 0.$$

La théorie des poutres permet de prévoir une flèche égale à

$$\bar{v} = \frac{Pl^3}{48EI} + \frac{Pl}{4G\Omega^*}, \quad \Omega^* = \frac{\Omega}{1,175}$$

Pour les données élastiques suivantes :

$$E = 21000 \text{ hb}, \quad \nu = 0,3$$

on obtient

$$\bar{v} = 2,02 + 1,16 \cdot 10^{-4} \approx 2,02 \text{ mm.}$$

La tension axiale moyenne (c'est-à-dire en $r/2$) vaut alors

$$\frac{M\bar{r}}{I} = 1,29 \cdot 10^{-1} \text{ hb.}$$

Elle varie linéairement entre un appui et la charge.

Les résultats du calcul numérique sont comparés aux précédents dans le tableau suivant :

GRANDEUR	ANALYTIQUE	EL. FINIS
flèche (mm)	2,02	1,887
σ_z El.1 (hb)	0,3203	0,3204
σ_z El.2 (hb)	0,970	0,9551

La correspondance est raisonnable, si l'on tient compte du fait que l'idéalisation est du second degré.

4. Arbre soumis à un gradient thermique

On considère à nouveau l'arbre de la figure 3. Le gradient thermique se représente par un champ de température variant cosinusoidalement en θ et linéairement en r :

$$T = A \cos \theta,$$

ce qui se traduit en coordonnées cartésiennes par

$$T = Ax .$$

On pose

$$. A = 4 \text{ K/mm}$$

ce qui correspond à un saut de température de 40 K.

$$. \alpha = 1,2 \cdot 10^{-5} \text{ K}^{-1}$$

La solution analytique s'établit aisément : posant

$$M_0 = \int_{\Omega} E \alpha T x \, dx \, dy = E \alpha A I ,$$

on obtient

$$u(z) = z (\ell - z) \frac{M_0}{2EI}$$

d'où

$$u\left(\frac{\ell}{2}\right) = \frac{\alpha A \ell^2}{8} = 6 \text{ mm} .$$

Le calcul a été effectué au second degré. On a obtenu

$$u\left(\frac{l}{2}\right) = 6,017 \text{ mm.}$$

Les tensions sont toutes nulles, ce qui est logique, puisqu'il s'agit d'un cas de dilatation libre.

5. Arbre soumis à son poids

Considérant encore l'arbre de la figure 3, on étudie sa déformée sous une charge uniforme de volume dirigée selon l'axe des x. Comme on a

$$u_x = u_r \cos\theta - u_\theta \sin\theta$$

$$u_y = u_r \sin\theta + u_\theta \cos\theta$$

l'équivalence des diverses formes du travail s'écrit en général

$$\begin{aligned} &= f_r u_r + f_\theta u_\theta = f_x u_x + f_y u_y \\ &= (f_x \cos\theta + f_y \sin\theta) u_r + \\ &\quad + (f_y \cos\theta - f_x \sin\theta) u_\theta ; \end{aligned}$$

d'où

$$f_r = f_x \cos\theta + f_y \sin\theta, \quad f_\theta = f_y \cos\theta - f_x \sin\theta$$

Dans notre cas, $f_y = 0$, d'où

$$f_r = f_x \cos\theta \quad f_\theta = - f_x \sin\theta$$

Il s'agit donc d'un problème en $n=1$, $m=0$, avec les harmoniques de charge suivants :

$$f_{r,(1,0)} = f_x \quad f_{\theta,(1,0)} = - f_x .$$

On obtient aisément une solution analytique approchée en faisant usage de la théorie des poutres : la poutre est soumise à une densité linéique de charge égale à

$$p = f_x \Omega .$$

La flèche vaut alors

$$u = \frac{5}{384} \frac{f_x \Omega l^2}{EI} = 1,075 \cdot 10^5 f_x .$$

Pour $f_x = 10^{-5} \text{ daN/mm}^3$, on obtient donc

$$u = 1,075 \text{ mm.}$$

Le calcul à l'aide de 4 éléments de degré 2 donne

$$u = 0,9399 \text{ mm.}$$

6. Arbre tendu soumis à une charge transversale

On considère le même arbre, soumis à une précontrainte longitudinale :

$$\sigma_{z,0} = 1,3 \text{ hb.}$$

On applique, au milieu de l'arbre une charge $P = 1 \text{ daN}$.

Un calcul simple montre que la solution de ce problème s'écrit

$$u(z) = \frac{P}{2N_0} \left(z - \frac{1}{\beta} \frac{\text{sh}\beta z}{\text{ch}\beta \frac{l}{2}} \right) \text{ dans } \left[0, \frac{l}{2} \right]$$

$$u(l - z) \quad \text{dans } \left] \frac{l}{2} ; l \right]$$

où

$$N_0 = \sigma_{z,0} \cdot \Omega$$

$$\beta = (N/EI)^{1/2}$$

La flèche sous la charge est donc donnée par

$$u\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{P}{2N} \left(\frac{l}{2} - \frac{1}{\beta} \operatorname{th} \beta \frac{l}{2}\right) .$$

Pour

$$P = 1 \text{ daN}$$

$$\sigma_{z,o} = 1,3 \text{ hb}$$

$$r = 5 \text{ mm}$$

$$l = 1000 \text{ mm}$$

on obtient

$$u\left(\frac{l}{2}\right) = 1,020742538 \text{ mm.}$$

Ce problème a été résolu à l'aide du maillage de la figure 3, au second degré. On a obtenu :

$$u\left(\frac{l}{2}\right) = 0,9682713 \text{ mm,}$$

ce qui est très raisonnable. Le même problème a également été utilisé pour tester la procédure d'anisotropie.

7. Plaque en cisaillement pur

La plaque représentée à la figure 4 est fixée sur l'axe. On soumet sa périphérie à un flux de charge décrit par les équations suivantes :

$$f_r = \frac{f}{\pi r} \cos 2\theta$$

$$f_\theta = -\frac{f}{\pi r} \sin 2\theta$$

On a donc évidemment $n = 2$, $m=0$. La solution de ce problème peut être obtenue par voie analytique. On a en effet

$$f_r = t(\sigma_r n_r + \tau_{r\theta} n_\theta) = t \sigma_r$$

$$f_\theta = t(\tau_{r\theta} n_r + \sigma_\theta n_\theta) = t \tau_{r\theta}$$

d'où

$$\sigma_r = \frac{f}{\pi tr} \cos 2\theta \quad \tau_{r\theta} = -\frac{f}{\pi tr} \sin 2\theta, \quad (*)$$

σ_θ ne pouvant être déterminé par ces équations. C'est qu'il faut encore vérifier l'équilibre intérieur et la compatibilité.

Pour cela, on notera que l'on a

$$\begin{bmatrix} \sigma_r & \tau_{r\theta} \\ \tau_{r\theta} & \sigma_\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

d'où

$$\sigma_r = \sigma_x \cos^2\theta + \sigma_y \sin^2\theta + \tau_{xy} \sin 2\theta$$

$$\tau_{r\theta} = \tau_{xy} \cos 2\theta + \frac{1}{2} (\sigma_y - \sigma_x) \sin 2\theta$$

$$\sigma_\theta = \sigma_x \sin^2\theta + \sigma_y \cos^2\theta - \tau_{xy} \sin 2\theta$$

Dès lors, une solution des relations (*) est

$$\tau_{xy} = 0, \quad -\sigma_y = +\sigma_x = \frac{f}{\pi t}$$

Cette solution vérifie à la fois l'équilibre et la compatibilité car les tensions sont constantes. L'état de tension (*) est donc complété par l'équation suivante:

$$\sigma_\theta = -\frac{f}{\pi tr} \cos 2\theta = -\sigma_r$$

Il est facile de voir qu'il s'agit en fait d'un état de cisaillement uniforme dans des axes faisant un angle de $\frac{\pi}{4}$ radians avec le système xOy .

Pour $f = 2$ daN, on obtient alors

$$\sigma_{r,(2,0)} = \frac{2}{200\pi} = 3,183098861 \cdot 10^{-3} \text{ hb}$$

Le calcul a été effectué à l'aide du maillage de la figure 4. On a obtenu

$$\sigma_r = 3,183 \cdot 10^{-3} \text{ hb} ,$$

ce qui est bien la solution exacte.

Le même problème a également été résolu en faisant usage d'axes locaux au noeud 6 de la figure 4. Ces axes sont respectivement à -30° et 60° par rapport à l'horizontale. On remplace donc en ce noeud 6 $f_r = 1$ daN par les composantes équivalentes:

$$f_1 = 0,868 \text{ daN} \quad f_2 = 0,5 \text{ daN}.$$

Le résultat n'a pas changé lors de cet essai.

8. Flambement d'un arbre soumis à la compression

On étudie à présent la stabilité au flambement de l'arbre de la figure 3, soumis à une compression définie par

$$\sigma_z^0 = -1,3 \text{ hb}$$

Cette valeur est, en fait, très proche de la tension critique d'Euler qui vaut, pour ce problème ,

$$\sigma_E^0 = -1,295386 \text{ hb} .$$

Dès lors, les "charges critiques" sont données par

$$\lambda_1 = \frac{\sigma_E^0}{\sigma_z^0} , \lambda_2 = 4 \lambda_1 , \lambda_3 = 9 \lambda_1$$

Les modes de flambement peuvent être obtenus indifféremment pour $n=1, m=0$ (modes selon Ox), ou $n=1, m=1$ (modes selon oy). Deux idéalizations ont été considérées :

- a) 4 éléments de type 30, au degré 3. C'est le maillage de la figure 3.

- b) 8 éléments de type 14, au degré 3. Ce maillage à été obtenu à partir du précédent, en coupant chaque quadrangle en deux triangles.

Les charges critiques obtenues sont reprises dans le tableau suivant :

Charge critique numéro	Analytique λ_a	Type 30 λ_{30}	Type 14 λ_{14}
1	0,996450	0,996896	0,996715
2	3,985802	4,015201	4,013151
3	8,968054	9,273791	9,265378

La correspondance est très bonne, surtout pour les deux premiers modes. Les charges critiques se détériorent à mesure de leur ordre, ce qui est normal.

9. Arbre non cylindrique en torsion

La figure 5 représente un arbre composé de deux parties qui se joignent en AB par des cannelures. On étudie son comportement en torsion.

Le matériau est de l'acier. Ses caractéristiques sont donc

Module de YOUNG : $E = 2,1 \cdot 10^4$ hb

Coefficient de POISSON = $\nu = 0,3$

densité de masse : $7,8 \cdot 10^{-10}$ daN.sec²/mm

On a effectué successivement un calcul statique et un calcul dynamique. Dans les deux cas, il s'agit évidemment d'une solution ($n=0$, $m=1$).

a) Etude statique

On applique les forces tangentielles totales suivantes :

- point E : 1993,6588 daN

- point F : 1596,4598 daN

Ce problème a été étudié d'une part avec des éléments de type 16, et d'autre part, avec des éléments de type 30, au premier degré dans les deux cas. On a obtenu les énergies suivantes :

Modèle	Energie
Type 16	$1,774193.10^2$
Type 30	$1,755845.10^2$

Ces résultats concordent très bien (1% d'erreur en énergie). En outre, les déplacements et les tensions ont été comparés en divers endroits, notamment au voisinage de la rainure G, et la concordance a été jugée très bonne. On notera que le modèle réalisé à l'aide d'éléments de type 16 conduit à une énergie un peu plus faible. Ce fait doit être attribué au fait que l'élément de type 16 à bords non parallèles n'est pas conforme.

b) Etude dynamique

On recherche la première fréquence propre du même arbre, également à l'aide du maillage de la figure 5, réalisé au moyen d'éléments de type 16 et de type 30. Les résultats sont :

Premier mode de torsion	Type 16	Type 30
Fréquence Propre (Hz)	1592,847	1601,311
Masse généralisée ($\text{kg} \cdot \text{mm}^2$)	$6,519407710^6$	$6,530662.10^6$

On constate encore que les résultats diffèrent de moins de 0,5%, tant pour la fréquence propre que pour la masse généralisée.