

Théorie des poutres faiblement vrillées

J.F. DEBONGNIE

Octobre 1978

THEORIE DES POUTRES FAIBLEMENT VRILLEES

A THEORY OF WEAKLY PRETWISTED BEAMS

par J.F. DEBONGNIE*

Résumé

On présente une théorie des poutres faiblement vrillées par une voie nouvelle qui rend les développements particulièrement simples. L'approche proposée jouit de la propriété que dans le cadre de la méthode des éléments finis, l'erreur de la théorie décroît lorsque le maillage se raffine.

Abstract

A theory of weakly pretwisted beams is presented by an original and particularly simple way. A very attractive property of this approach is the fact that in a finite element implementation, the error due to the theory itself tends to zero when the mesh is refined.

* Maître de Conférences, Laboratoire d'Aéronautique, Université de Liège
75, rue du Val Benoit , B-4000 LIEGE, Belgium

1. INTRODUCTION

Afin de prévoir rapidement les propriétés d'une structure au niveau de l'avant-projet, l'ingénieur a besoin de théories simples menant à des calculs peu coûteux. Pour le calcul des aubes de turbomachines, on se tournera donc naturellement vers une théorie des poutres vrillées, de manière à réduire autant que possible le nombre de degrés de liberté d'une analyse par éléments finis. Au stade du projet définitif, une telle approche se justifie d'ailleurs encore en tant que recoupement d'autres calculs plus compliqués et, par là même, plus sujets à des erreurs diverses de données, parfois bien difficiles à déceler.

L'approche que nous présentons est nouvelle. L'idée de base est de considérer que la poutre vrillée est obtenue par une rotation initiale fictive de chacune de ses sections à partir d'une poutre non vrillée, selon une généralisation d'un concept qui apparaissait implicitement dans la théorie des coques plates de Marguerre [1] et que nous avons interprété et étendu [2, 3]. Notre théorie est donc approchée, et son erreur est d'autant plus forte que l'angle total de vrillage est plus grand. Mais justement, cette erreur peut être rendue aussi petite que l'on veut par un découpage en éléments, ce qui donne à la présente théorie un très grand intérêt pour les calculs par la méthode des éléments finis.

2. THEORIE DES POUTRES FAIBLEMENT VRILLEES

2.1. Pour décrire une poutre vrillée, on peut imaginer qu'elle a été obtenue à partir d'une poutre non vrillée, par rotation de chacune de ses sections dans son propre plan, autour de son centre de gravité.

Si \vec{e}_z est l'axe de la poutre, ces rotations définissent un champ fictif de déplacements, que nous appellerons déplacements initiaux, de la forme

$$(1) \quad \hat{u}_1 = -\psi(z) \cdot y \quad \hat{u}_2 = \psi(z) \cdot x \quad \hat{u}_3 = 0.$$

Il convient de prendre garde que ce déplacement initial n'est que pure fiction. Les seules considérations qui nous guident dans son choix sont, d'une part, l'obtention de la poutre vrillée à partir d'une poutre non vrillée, d'autre part, la plus grande simplicité. On remarquera, en particulier que le champ de déplacements initiaux proposé ne comporte aucun gauchissement. Notre point de vue n'implique nullement, en effet, que ce déplacement initial corresponde à une quelconque condition de minimisation de l'énergie de déformation.

Soient alors u_1 , u_2 et u_3 les véritables déplacements élastiques, que nous appellerons également déplacements ultérieurs. La mesure de déformation de GREEN du déplacement total ($\hat{u}_i + u_i$) sera

$$(2) \quad (g_{ij})_{\text{tot}} = \hat{g}_{ij} + \frac{1}{2} g_{ij} + \frac{2}{2} g_{ij},$$

avec

$$(3) \quad \begin{cases} \hat{g}_{ij} = \frac{1}{2} (D_i \hat{u}_j + D_j \hat{u}_i + D_i \hat{u}_m D_j \hat{u}_m) \\ \frac{1}{2} g_{ij} = \frac{1}{2} (D_i u_j + D_j u_i + D_i \hat{u}_m D_j u_m + D_j \hat{u}_m D_i u_m) \\ \frac{2}{2} g_{ij} = \frac{1}{2} D_i u_m D_j u_m \end{cases}$$

Dans ces expressions, nous faisons usage de la convention d'Einstein de sommation sur les indices répétés.

Nous adopterons, dans ce qui suit, la mesure de déformation suivante:

$$(4) \quad \hat{g}_{ij} = (g_{ij})_{\text{tot}} - \hat{g}_{ij} = \hat{g}_{ij}^1 + \hat{g}_{ij}^2$$

Ces expressions permettent de faire une théorie complète des poutres vrillées, incluant éventuellement l'effet des grands déplacements. Mais nous nous limiterons au cadre plus restreint de la linéarisation géométrique, consistant à ne retenir dans l'expression des déformations que les termes linéaires ou les déplacements ultérieurs, ce qui revient à écrire

$$(5) \quad \epsilon_{ii} = g_{ii}^1, \quad \gamma_{ij} = 2g_{ij}^1 \quad (i \neq j)$$

C'est l'hypothèse généralement connue sous le nom de petits déplacements, bien qu'à proprement parler, seules les rotations doivent être infinitésimales.

La définition des déformations à partir de l'expression (4) nécessite en principe l'usage des modules définis dans la poutre prédéformée, c'est-à-dire, pour le calcul de l'énergie complémentaire [8,14]

$$C_{ijkl} = \frac{1}{E} [(1+\nu) G_{ik} G_{jl} - \nu G_{ij} G_{kl}] ,$$

où E est le module de Young et ν , le coefficient de Poisson, tandis que les G_{ij} sont les composantes du tenseur métrique après la déformation initiale, donnés par $G_{ij} = \delta_{ij} + 2 \hat{g}_{ij}$, soit, en écrivant ψ' pour $\frac{d\psi}{dz}$,

$$G_{11} = 1 + \psi'^2$$

$$G_{22} = 1 + \psi'^2$$

$$G_{33} = 1 + \psi'^2 (x^2 + y^2)$$

$$G_{12} = 0$$

$$G_{13} = \psi' (-y + \psi x)$$

$$G_{23} = \psi' (x + \psi y)$$

L'approximation fondamentale de notre théorie consiste à identifier ces expressions des modules avec les expressions classiques

$$C_{ijkl} = \frac{1}{E} [(1+\nu) \delta_{ik} \delta_{jl} - \nu \delta_{ij} \delta_{kl}] ,$$

δ_{ij} étant le symbole de Kronecker. L'erreur sera donc petite si

$$\sum_{ij} |G_{ij} - \delta_{ij}| \leq \sum_{ij} \delta_{ij} = 3$$

ce qui aura lieu si

$$(a) \quad \psi^2 \ll 1$$

$$(b) \quad |\psi' x| , |\psi' y| \ll 1 .$$

La condition (a) signifie que l'angle total de vrillage est petit. Cette condition n'est pas une restriction réelle, car il suffit de découper la poutre en éléments de faible longueur pour qu'elle soit vérifiée dans chacun de ceux-ci.

La condition (b) signifie que la variation de l'angle de vrillage sur une longueur égale à la largeur de la poutre doit être faible. En ce sens, nous nous limitons aux poutres faiblement vrillées.

2.2. L'introduction du déplacement initial (1) dans les expressions (5) conduit aux expressions suivantes des déformations :

$$(6) \quad \left\{ \begin{array}{l} \epsilon_{11} = D_1 u_1 + \psi D_1 u_2 \\ \epsilon_{22} = D_2 u_2 - \psi D_2 u_1 \\ \gamma_{12} = D_1 u_2 + D_2 u_1 + \psi D_2 u_2 - \psi D_1 u_1 \end{array} \right.$$

$$(7) \quad \left\{ \begin{array}{l} \epsilon_{33} = D_3 u_3 - \psi' y D_3 u_1 + \psi' x D_3 u_2 \\ \gamma_{13} = D_1 u_3 + D_3 u_1 + \psi D_3 u_2 - \psi' y D_1 u_1 + \psi' x D_1 u_2 \\ \gamma_{23} = D_2 u_3 + D_3 u_2 - \psi D_3 u_1 - \psi' y D_2 u_1 + \psi' x D_2 u_2 , \end{array} \right.$$

Pour établir une théorie des poutres vrillées, on partira du principe de Hellinger-Reissner [15], stipulant que la fonctionnelle

$$(8) \int_V \{ \sigma_{11} \varepsilon_{11}(\vec{u}) + \sigma_{22} \varepsilon_{22}(\vec{u}) + \sigma_{33} \varepsilon_{33}(\vec{u}) + \tau_{12} \gamma_{12}(\vec{u}) + \tau_{13} \gamma_{13}(\vec{u}) + \tau_{23} \gamma_{23}(\vec{u}) - \frac{1}{2E} [\sigma_{11}^2 + \sigma_{22}^2 + \sigma_{33}^2 - 2\nu(\sigma_{11}\sigma_{22} + \sigma_{11}\sigma_{33} + \sigma_{22}\sigma_{33})] - \frac{1}{2E} (\tau_{12}^2 + \tau_{13}^2 + \tau_{23}^2) \} dV - \mathcal{P}(\vec{u})$$

où $\varepsilon_{11}(\vec{u})$, $\gamma_{12}(\vec{u})$, sont les déformations exprimées en termes des déplacements \vec{u} , σ_{11} , τ_{12} , ..., les contraintes, considérées comme des variables indépendantes, et $\mathcal{P}(\vec{u})$, le travail virtuel des charges appliquées, est stationnaire pour la solution du problème élastique.

Dans ce principe, la variation des contraintes restitue les équations de compatibilité sous la forme des relations contraintes-déformations, notamment

$$(9) \begin{cases} \varepsilon_{11}(\vec{u}) = \frac{1}{E} (\sigma_{11} - \nu\sigma_{22} - \nu\sigma_{33}) \\ \varepsilon_{22}(\vec{u}) = \frac{1}{E} (\sigma_{22} - \nu\sigma_{11} - \nu\sigma_{33}) \\ \gamma_{12}(\vec{u}) = \frac{1}{G} \tau_{12} \end{cases}$$

Nous poserons d'emblée $\sigma_{11} = \sigma_{22} = \tau_{12} = 0$, ce qui a pour effet, d'une part, de réduire la fonctionnelle ci-dessus à l'expression plus simple (nous écrirons dorénavant ε_{33} pour $\varepsilon_{33}(\vec{u})$, etc...)

$$(10) \int_V \{ \sigma_{33} \varepsilon_{33} + \tau_{13} \gamma_{13} + \tau_{23} \gamma_{23} - \frac{1}{2E} \sigma_{33}^2 - \frac{1}{2G} (\tau_{23}^2 + \tau_{13}^2) \} dV - \mathcal{P}(\vec{u}),$$

d'autre part, l'abandon des relations (9), qui étaient, pour parler en un langage imagé, "sous la responsabilité" des variables que nous avons fixées à zéro. On peut donc, en principe, attribuer à ε_{11} , ε_{22} , γ_{12} des valeurs arbitraires. Mais il convient de faire un choix qui soit simple et qui, de plus, permette de représenter les déplacements de corps rigides, sans lesquels l'équilibre global ne pourrait être respecté. La manière la plus simple de respecter ces deux conditions consiste à poser, comme de nombreux auteurs [7,16]

$$(11) \quad \varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} = \gamma_{12} = 0$$

Ces hypothèses semblent en contradiction avec les hypothèses $\sigma_{11}, \sigma_{22}, \tau_{12} = 0$. En fait, en ce qui concerne l'application du principe variationnel, il n'en est rien, comme l'a déjà souligné Sander[9] pour un problème analogue surgissant en théorie des plaques.

La solution des équations (11) est aisée à obtenir. En effet, on a, en vertu de (6)

$$\varepsilon_{11} = D_1 (u_1 + \psi u_2)$$

$$\varepsilon_{22} = D_2 (u_2 - \psi u_1),$$

d'où

$$u_1 + \psi u_2 = A_1 (y, z), \quad u_2 - \psi u_1 = A_2 (x, z)$$

Il vient alors

$$\gamma_{12} = D_2 (u_1 + \psi u_2) + D_1 (u_2 - \psi u_1) = D_2 A_1 + D_1 A_2 = 0,$$

ce qui n'est possible, puisque A_1 ne dépend pas de x et que A_2 ne dépend pas de y , que si

$$D_2 A_1 = -D_1 A_2 = A_3 (z)$$

Il en découle que

$$u_1 + \psi u_2 = A_4(z) + A_3(z) \cdot y$$

$$u_2 - \psi u_1 = A_5(z) - A_3(z) \cdot x$$

A_4 et A_5 étant deux nouvelles fonctions. Résolvant alors par rapport à u_1 et u_2 , on obtient, en posant

$$u = (A_4 - \psi A_5) / (1 + \psi^2)$$

$$v = (A_5 + \psi A_4) / (1 + \psi^2)$$

$$\theta = -A_3 / (1 + \psi^2) ,$$

la solution suivante

$$u_1 = u - \psi \theta x - \theta y \quad (12)$$

$$u_2 = v + \theta x - \psi \theta y$$

2.3. Revenant à la fonctionnelle (10), nous éliminerons les variables σ_{33} , τ_{13} , τ_{23} en faisant usage de leurs équations d'Euler respectives,

$$\sigma_{33} = E \epsilon_{33}$$

$$\tau_{13} = G \gamma_{13}$$

$$\tau_{23} = G \gamma_{23}$$

On obtient ainsi un principe analogue au principe du minimum de l'énergie totale:

$$(13) \quad \frac{1}{2} \int_V \{ E \epsilon_{33}^2 + G(\gamma_{13}^2 + \gamma_{23}^2) \} dV - (u) \quad \min ,$$

la minimisation devant en principe porter sur le sous-ensemble de $(H^1(V))^3$ des déplacements vérifiant les conditions d'appui.

Il nous reste encore à déterminer le déplacement selon l'axe de la poutre. Pour la plus grande simplicité, nous négligerons totalement les gauchissements de flexion, nous limitant pour ce type de sollicitations à de simples rotations α et β , ce qui revient à écrire

$$(14) \quad u_3 = w(z) + x \alpha(z) + y \beta(z) + k(z) W(x, y),$$

où W représente le gauchissement de torsion. Les glissements γ_{13} et γ_{23} ont alors les expressions suivantes, si l'on note $(\cdot)'$ pour $\frac{\partial(\cdot)}{\partial z}$:

$$\gamma_{13} = (\alpha + u' + \psi v') - y \theta' (1 + \psi^2) + k D_1 W$$

$$\gamma_{23} = (\beta + v' - \psi u') + x \theta' (1 + \psi^2) + k D_2 W$$

Pour rester consistant avec l'approximation consentie sur les modules, il convient de négliger ψ^2 devant l'unité dans ces expressions, ce qui mène à

$$(15) \quad \gamma_{13} = (\alpha + u' + \psi v') - y \theta' + k D_1 W$$

$$\gamma_{23} = (\beta + v' - \psi u') + x \theta' + k D_2 W$$

Enfin, la déformation normale s'écrit

$$(16) \quad \epsilon_{33} = w' + x(\alpha' + \psi' v') + y(\beta' - \psi' u') + (x^2 + y^2)\psi' \theta' + k' W$$

L'énergie de déformation, définie en (13), s'écrira donc, Ω étant la section de la poutre,

$$(17) \quad \mathcal{U} = \frac{1}{2} \int_0^L dz \int_{\Omega} \{ E [w' + x(\alpha' + \psi' v') + y(\beta' - \psi' u') + (x^2 + y^2)\psi' \theta' + k' W]^2 \\ + G [(\alpha + u' + \psi v' - y \theta' + k D_1 W)^2 + (\beta + v' - \psi u' + x \theta' + k D_2 W)^2] \} d\Omega$$

Le premier terme, précédé du module de Young E , sera appelé énergie d'extension, et le second, précédé du module de Coulomb G , sera appelé énergie de cisaillement.

2.4. Pour ce qui est du gauchissement de torsion, on admettra qu'il a la même forme que dans la poutre non vrillée, c'est-à-dire qu'il minimise, section par section, l'énergie de cisaillement, pour $\theta' = 1$: la fonctionnelle à minimiser est donc

$$(18) \quad \int_{\Omega} \{ (D_1 W - y)^2 + (D_2 W + x)^2 \} d\Omega,$$

avec la condition supplémentaire

$$(19) \quad \int_{\Omega} W d\Omega = 0,$$

nécessaire pour assurer l'unicité de la solution. Le gauchissement vérifie donc l'équation de Laplace:

$$D_{11} W + D_{22} W = 0 ,$$

avec la condition de contour

$$D_n W = y n_1 - x h_2 ,$$

(n_1, n_2) étant le vecteur normal au contour. Il est également possible d'obtenir un certain nombre de relations classiques relatives au gauchissement par une méthode directe, c'est-à-dire en exprimant la stationnarité de la fonctionnelle (18). Nous en démontrerons quelques unes, non qu'elles soient nouvelles, mais pour présenter un mode de démonstration qui reste valable pour certains gauchissements approchés :

a) Faisant $\delta W = x$, on obtient

$$(20) \quad \int_{\Omega} D_1 W \, d\Omega = \int_{\Omega} y \, d\Omega = 0,$$

à condition que l'on utilise les axes principaux de la section comme axes \vec{e}_x et \vec{e}_y .

b) De même, pour $\delta W = y$, on obtient

$$(21) \quad \int_{\Omega} D_2 W \, d\Omega = - \int_{\Omega} x \, d\Omega = 0$$

c) La relation qui suit nous servira plus loin : pour $\delta W = W$, la stationnarité de (18) entraîne

$$(22) \quad \int_{\Omega} [(D_1 W)^2 + (D_2 W)^2] \, d\Omega = \int_{\Omega} (y D_1 W - x D_2 W) \, d\Omega$$

Cette relation permet de trouver une borne supérieure de la première intégrale. En effet, en vertu de l'inégalité de Schwarz-Cauchy, la seconde est majorée par

$$I_P^{1/2} \left(\int_{\Omega} [(D_1 W)^2 + (D_2 W)^2] \, d\Omega \right)^{1/2},$$

où l'on a posé

$$I_P = \int_{\Omega} (x^2 + y^2) \, d\Omega ,$$

ce qui permet d'écrire

$$(23) \quad \int_{\Omega} [(D_1 W)^2 + (D_2 W)^2] d\Omega \leq I_p$$

d) Inversement, pour $\delta W = xy$, on obtient la relation

$$\int_{\Omega} (y D_1 W + x D_2 W) d\Omega = I_2 - I_1,$$

où

$$I_1 = \int_{\Omega} x^2 d\Omega, \quad I_2 = \int_{\Omega} y^2 d\Omega$$

Utilisant à nouveau l'inégalité de Schwarz-Cauchy, on obtient

$$|I_2 - I_1| \leq I_p^{1/2} \left(\int_{\Omega} [(D_1 W)^2 + (D_2 W)^2] d\Omega \right)^{1/2}$$

soit encore

$$(24) \quad \int_{\Omega} [(D_1 W)^2 + (D_2 W)^2] d\Omega \geq \frac{|I_2 - I_1|^2}{I_p}$$

La détermination du gauchissement étant une tâche ardue, il est souvent utile de pouvoir estimer son effet par une méthode approchée. Pour ce faire, on peut chercher une approximation de l'extrémale de la fonctionnelle (18) par la méthode de Rayleigh-Ritz: au lieu de minimiser (18) dans $H^1(\Omega)/R$, on le fait dans S/R , S étant un sous-espace vectoriel fermé de $H^1(\Omega)$. Or, les démonstrations ci-dessus resteront valables dans S à condition que S contienne les fonctions x, y et xy . La présence de cette dernière, en particulier, garantit que l'effet du gauchissement, mesuré par la grandeur

$$\int_{\Omega} [(D_1 W)^2 + (D_2 W)^2] d\Omega$$

sera non nul chaque fois que $I_2 \neq I_1$.

Ainsi, par exemple, on pourra chercher une solution de la forme

$$W = \gamma_1 x + \gamma_2 y + \gamma_3 \left(x^2 - \frac{I_1}{\Omega}\right) + \gamma_4 \left(y^2 - \frac{I_2}{\Omega}\right) + \gamma_5 xy,$$

où Ω représente l'aire de la section. Cette fonction vérifie bien la

condition (19). On est ainsi amené à minimiser la fonction

$$(\gamma_1^2 + \gamma_2^2)\Omega + [4\gamma_3^2 + (\gamma_5 + 1)^2] I_1 + [(\gamma_4 - 1)^2 + 4\gamma_5^2] I_2$$

par rapport aux variables $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$ et γ_5 , ce qui fournit les conditions

$$\gamma_1 = \dots = \gamma_4 = 0$$

$$\gamma_5 = \frac{I_2 - I_1}{I_2 + I_1},$$

d'où finalement

$$(25) \quad W = \frac{I_2 - I_1}{I_2 + I_1} xy$$

Cette solution approchée, exacte dans le cas de l'ellipse ainsi que dans le cas asymptotique d'une section rectangulaire infiniment mince, est bien approchée pour un grand nombre de sections. Elle conduit à la relation

$$\int_{\Omega} [(D_1 W)^2 + (D_2 W)^2] d\Omega = \frac{(I_2 - I_1)^2}{I_p},$$

ce qui montre d'ailleurs que la borne (24) est suffisamment fine.

2.5. La résolution -exacte ou approchée- du problème (18) permet d'obtenir le gauchissement de torsion, tel qu'il se produit naturellement et sans contrainte lors de la torsion uniforme d'une poutre prismatique. Pour étudier la torsion non uniforme, on considère ce gauchissement comme un mode de déplacement fondamental, au même titre que les rotations de flexion, par exemple. Dans ce qui suit, la fonction W sera donc supposée connue a priori. On peut alors calculer l'énergie de déformation (17). Si l'on pose

$$K = \int_{\Omega} W^2 d\Omega$$

$$L_1 = \int_{\Omega} x (x^2 + y^2) d\Omega, \quad L_2 = \int_{\Omega} y (x^2 + y^2) d\Omega, \quad L_3 = \int_{\Omega} (x^2 + y^2)^2 d\Omega,$$

$$B_1 = \int_{\Omega} x W d\Omega, \quad B_2 = \int_{\Omega} y W d\Omega, \quad B_3 = \int_{\Omega} (x^2 + y^2) W d\Omega$$

$$I_p - J = \int_{\Omega} [(D_1 W)^2 + (D_2 W)^2] d\Omega,$$

on obtient

$$(26) \quad \mathcal{U} = \frac{1}{2} \int_0^l [E \{ \Omega w'^2 + I_1 (\alpha' + \psi' v')^2 + I_2 (\beta' - \psi' u')^2 + K k'^2$$

$$+ 2 L_1 (\alpha' + \psi' v') \psi' \theta' + 2 L_2 (\beta' - \psi' u') \psi' \theta' + L_3 \psi'^2 \theta'^2 + 2 I_p \psi'^2 \theta' w'$$

$$+ 2 B_1 (\alpha' + \psi' v') k' + 2 B_2 (\beta' - \psi' u') k' + 2 B_3 \psi' \theta' k' \}$$

$$+ G \{ \Omega (\alpha + u' + \psi v') + \Omega (\beta + v' - \psi u') + J \theta'^2 + (I_p - J) (\theta' - k) \}] dz$$

2.6. L'expression ci-dessus peut encore être simplifiée à condition de consentir à deux hypothèses supplémentaires. L'une de celles-ci, connue sous le nom d'hypothèse de Navier, consiste à négliger la déformation due à l'effort tranchant [10], ce qui s'écrit

$$(27) \quad \alpha = -u' - \psi v' \qquad \beta = -v' + \psi u'$$

Cette hypothèse est valable dans les très nombreux cas où les dimensions transversales de la poutre sont petites devant sa longueur. Les relations (27) impliquent les suivantes:

$$(28) \quad \alpha' + \psi' v' = -u'' - \psi v''$$

$$\beta' - \psi' u' = -v'' + \psi u''$$

La seconde hypothèse, due à Wagner [10], consiste à lier l'amplitude du gauchissement k à la torsion θ' par la relation

$$(29) \quad k = \theta'$$

Cette approximation se justifie lorsque la raideur de torsion de Coulomb GI_p est nettement plus grande que GJ , c'est-à-dire, en pratique, pour les sections minces. Cette hypothèse implique en particulier la nullité de la torsion lorsque le gauchissement est totalement bloqué.

L'introduction des relations (27) à (29) dans l'énergie de déformation (26) conduit à l'expression

$$(30) \quad \mathcal{U} = \frac{1}{2} \int_0^l [E \{ \Omega w'^2 + I_1 (u'' + \psi v'')^2 + I_2 (v'' - \psi u'')^2 + K \theta''^2 \\ - 2L_1 (u'' + \psi v'') \psi' \theta' - 2L_2 (v'' - \psi u'') \psi' \theta' + L_3 \psi'^2 \theta'^2 + 2I_p \psi'^2 \theta' w' \\ + 2B_3 \psi' \theta' \theta'' \} + GJ \theta'^2] dz$$

On remarquera que les termes de flexion pure s'écrivent encore

$$(I_1 + \psi^2 I_2) u''^2 + (I_2 + \psi^2 I_1) v''^2 + 2\psi (I_1 - I_2) u'' v'' ,$$

ce qui fait apparaître des termes de couplage dépendant directement de l'angle de vrillage ψ . Lorsque les deux moments d'inertie sont égaux, cette expression devient

$$I(1 + \psi^2) (u''^2 + v''^2) \approx I(u''^2 + v''^2) \quad I = I_1 = I_2$$

ce qui montre que le vrillage n'entraîne pas de couplage flexion-flexion.

3. EXEMPLES

3.1. Pour illustrer ce qui précède, nous étudierons le cas d'une poutre uniformément vrillée ($\psi = \text{cte}$) dont la section présente deux axes de symétrie. Nous utiliserons, pour la simplicité, l'expression (25) du gauchissement. La symétrie entraîne alors les simplifications suivantes:

$$L_1 = L_2 = B_1 = B_2 = B_3 = 0 .$$

Par ailleurs, on déduit aisément de (25) la relation

$$(31) \quad J = I_p - \frac{(I_2 - I_1)^2}{I_p^2} = \frac{4I_1 I_2}{I_p} .$$

La fonctionnelle se réduit donc à

$$(32) \mathcal{U} = \frac{1}{2} \int_0^l [E \{ \Omega w'^2 + (I_1 + \psi^2 I_2) u''^2 + (I_2 + \psi^2 I_1) v''^2 + 2\psi (I_1 - I_2) u'' v'' + K \theta''^2 + L_3 \psi'^2 \theta'^2 + 2 I_p \psi' \theta' w' \} + GJ \theta'^2] dz .$$

Examinons d'abord le cas de la torsion d'une poutre console sous un moment d'extrémité : il s'agit donc de minimiser l'expression $\mathcal{U} + \mathcal{P}$, avec

$$(33) \quad \mathcal{P} = - M_T \theta(l) .$$

La minimisation porte sur tous les champs de déplacements tels que

$$w \in H^1(]0, l[), \quad u \in H^2(]0, l[), \quad v \in H^2(]0, l[), \quad \theta \in H^2(]0, l[)$$

qui vérifient en outre les conditions aux limites cinématiques exprimant l'encastrement, soit

$$w(0) = u(0) = v(0) = v'(0) = \theta(0) = 0$$

Un tel encastrement est dit imparfait, car le gauchissement de torsion, régi par la valeur de $\theta'(0)$, y est laissé libre. Le blocage du gauchissement rendrait automatiquement la torsion non uniforme, ce qui masquerait les effets que nous voulons mettre en évidence sur un cas simple.

On remarquera tout d'abord que dans la fonctionnelle $\mathcal{U} + \mathcal{P}$, les variables u et v sont totalement découplées de θ , ce qui permet d'affirmer d'emblée que $u=0$, $v=0$, et de ne minimiser que $\mathcal{U}^* + \mathcal{P}$, où

$$\mathcal{U}^* = \frac{1}{2} \int_0^l [E \{ \Omega w'^2 + K \theta''^2 + L_3 \psi'^2 \theta'^2 + 2 I_p \psi' \theta' w' \} + GJ \theta'^2] dz .$$

Pour rechercher l'extrémale, on calcule $\delta(\mathcal{U}^* + \mathcal{P})$ pour des variations arbitraires de déplacement $(\delta w, \delta \theta) \in H^1(]0, l[) \times H^2(]0, l[)$ vérifiant en outre les conditions cinématiques

$$(34) \quad \delta w(0) = \delta \theta(0) = 0 ,$$

ce qui donne

$$\delta (U^* + \mathcal{P}) = \int_0^{\ell} [E\{\Omega w' \delta w' + K\theta'' \delta \theta'' + L_3 \psi'^2 \theta' \delta \theta' + I_p \psi' (\theta' \delta w' + w' \delta \theta')\} \\ + GJ\theta' \delta \theta'] dz - M_T \delta \theta(\ell) = 0$$

Par des intégrations (formelles) par parties, on obtient l'expression

$$\{E \Omega w'(\ell) + EI_p \psi'' \theta'(\ell)\} \delta w(\ell) \\ + EK \theta''(\ell) \delta \theta'(\ell) - EK \theta''(0) \delta \theta'(0) \\ + \{-EK \theta'''(\ell) + (GJ + EL_3 \psi'^2) \theta'(\ell) + EI_p \psi' w'(\ell) - M_T\} \delta \theta(\ell) \\ + \int_0^{\ell} [\{-E \Omega w'' - EI_p \psi' \theta''\} \delta w + \{EK \theta^{IV} - (GJ + EL_3 \psi'^2) \theta'' \\ - EI_p \psi' w'\} \delta \theta] dz = 0 .$$

La nullité des coefficients de δw et $\delta \theta$ dans l'intégrale exprime alors les équations différentielles cherchées:

- (a) $-E \Omega w'' - EI_p \psi' \theta'' = 0$ dans $]0, \ell[$
 (b) $EK \theta^{IV} - (GJ + EL_3 \psi'^2) \theta'' - EI_p \psi' w' = 0$ dans $]0, \ell[$

tandis que les conditions aux limites naturelles correspondent à l'annulation des coefficients de $\delta w(\ell)$, $\delta \theta(\ell)$, $\delta \theta'(0)$, $\delta \theta'(\ell)$ dans les termes intégrés : ce sont

- (c) $[E \Omega w' + EI_p \psi' \theta']_{z=\ell} = 0$
 (d) $[-EK \theta''' + (GJ + EL_3 \psi'^2) \theta' + EI_p \psi' w']_{z=\ell} = M_T$
 (e) $EK \theta'' = 0$ en $z = 0$ et $z = \ell$

La condition (c) signifie que l'effort normal d'extrémité est nul; la condition (d) exprime le moment de torsion en termes des dérivées des déplacements; enfin, la condition (e) signifie que l'effort généralisé conjugué au gauchissement est nul aux deux extrémités.

Cherchant une solution telle que $\theta''=0$, on obtient, en combinant (a) et (b), la relation

$$w' = -\frac{I}{\Omega} \psi' \theta'$$

qui, combinée avec (b) et (d), donne

$$(GJ + EL_3 \psi'^2 - E \frac{I^2}{\Omega} \psi'^2) \theta' = M_T .$$

Ces deux relations entraînent encore

$$\theta' = \frac{M_T}{GJ + E(L_3 - \frac{I^2}{\Omega})\psi'^2} \quad (35)$$

$$w' = -\frac{I}{\Omega} \psi' \frac{M_T}{GJ + E(L_3 - \frac{I^2}{\Omega})\psi'^2}$$

On notera que le groupement $(L_3 - \frac{I^2}{\Omega})$ est positif, car

$$(36) \quad I_p^2 = \left\{ \int_{\Omega} (x^2 + y^2) d\Omega \right\}^2 \leq \int_{\Omega} (x^2 + y^2)^2 d\Omega \cdot \int_{\Omega} 1 d\Omega = L_3 \cdot \Omega$$

Dès lors, la torsion entraîne nécessairement une contraction de la poutre. Si l'on calcule les tensions dans une section quelconque σ_z à partir de (16), on obtient

$$(37) \quad \sigma_z = E \cdot \frac{M_T \psi'}{GJ + E(L_3 - \frac{I^2}{\Omega})\psi'^2} (x^2 + y^2 - \frac{I}{\Omega})$$

Leur moyenne est nulle, ce qui est logique, puisque l'effort normal est nul, et elles sont négatives dans le cercle de rayon $\sqrt{I_p/\Omega}$, positives en dehors.

A l'inverse, un effort normal provoquerait une torsion négative, dite de dévrillage.

La solution (35) montre en outre que le module de torsion pure est donné par

$$(38) \quad J^* = J + \frac{E}{G} (L_3 - \frac{I^2}{\Omega}),$$

soit, si l'on pose

$$r^2 = x^2 + y^2 ,$$

$$(39) \quad J^* = J + \frac{E}{G} \int_{\Omega} \left(r^4 - \frac{I}{\Omega} r^2 \right) d\Omega$$

On retrouve une formule due à Carnegie [4] .

3.2. Nous avons vu que les erreurs intrinsèques de la théorie sont de deux types, les unes de l'ordre de $\psi'(x^2+y^2)$, les autres dépendant de ψ^2 . Les premières semblent être inévitables dans toute théorie des poutres vrillées [5,6] et sont généralement très faibles. Quant aux secondes, dépendant du vrillage total, elles peuvent être rendues aussi petites que l'on veut par découpage de la poutre en éléments. Ceci s'applique en particulier aux éléments finis pour lesquels le raffinement du maillage entraîne la décroissance à la fois de l'erreur d'interpolation et de l'erreur due à l'utilisation d'une théorie approchée.

Pour mettre ce fait en évidence, nous considérerons le problème de la flexion d'une poutre console vrillée, de section rectangulaire. Nous confronterons nos résultats à ceux d'Ammam [5] (éléments finis) et ceux de Carnegie [6] (Intégration directe des équations d'équilibre). Pour faciliter la comparaison, nous utiliserons les mesures anglo-saxonnes comme ces auteurs. Les dimensions de la section sont

épaisseur	: b = 0,0635"	(0,16 mm)
largeur	: h = 1"	(2,54 mm)
longueur	: l = 6"	(15,24 mm)

et le module de Young est égal à 3.10^7 lb/in² ($2,068.10^{11}$ Pa).

On applique une charge d'1 lb (4,45 N) à l'extrémité, dans la direction O_y (problème 1), puis dans la direction O_x (problème 2).

La solution a été établie de la manière suivante : le principe variationnel s'écrit, pour une charge selon O_y , par exemple,

$$(40) \quad \frac{1}{2} \int_0^l \{ EI_1 (u'' + \psi v'')^2 + 2EI_{12} (u'' + \psi v'')(v'' - \psi u'') + EI_2 (v'' - \psi u'')^2 \} dx$$

- P v(l) stationnaire .

Si nous considérons ici un terme I_{12} , c'est pour permettre les changements d'orientation de la section de référence d'un élément à l'autre, tout en conservant le même système d'axes. Dans chaque élément, on posera

$$(41) \quad \psi(z) = \psi_t(z) - \psi_e$$

où ψ_t est l'angle de vrillage total, et ψ_e l'angle de vrillage au premier noeud de l'élément. Si \bar{I}_1 et \bar{I}_2 sont les moments d'inertie de la section dans ses axes principaux, on aura donc tout au long d'un élément

$$(42) \quad \begin{aligned} I_1 &= \bar{I}_1 \cos^2 \psi_e + \bar{I}_2 \sin^2 \psi_e \\ I_2 &= \bar{I}_1 \cos^2 \psi_e + \bar{I}_2 \sin^2 \psi_e \\ I_{12} &= (\bar{I}_1 - \bar{I}_2) \sin \psi_e \cos \psi_e \end{aligned}$$

Cela étant, si, au lieu des moments naturels

$$(43) \quad \begin{aligned} M_1 &= E \{ (I_1 - \psi I_{12}) u'' + (I_{12} + \psi I_1) v'' \} \\ M_2 &= E \{ (I_{12} - \psi I_2) u'' + (I_2 + \psi I_{12}) v'' \}, \end{aligned}$$

on utilise leurs deux combinaisons suivantes :

$$(44) \quad \mathcal{M}_1 = M_1 - \psi M_2, \quad \mathcal{M}_2 = M_2 + \psi M_1,$$

la variation première de la fonctionnelle (40) se réduit à

$$(45) \quad \int_0^l (\mathcal{M}_1 \delta u'' + \mathcal{M}_2 \delta v'') dz - P \delta v(l) = 0,$$

c'est-à-dire que l'on retrouve une expression formellement identique à celle des poutres droites. Il en découle que la solution vérifiera les relations

$$(46) \quad \mathcal{M}_1 = 0, \quad \mathcal{M}_2 = P(l - x),$$

dont on déduit, en faisant usage des définitions (43) et (44), les équations

$$(47) \quad u'' = -A v'' \quad , \quad v'' = \frac{M_2}{B} \quad ,$$

avec

$$(48) \quad A = \frac{\psi(I_1 - I_2) + (1 - \psi^2)I_{12}}{I_1 + \psi^2 I_2 - 2\psi I_{12}}$$

$$B = I_2 + 2\psi I_{12} + \psi^2 I_1 - \frac{\{\psi(I_1 - I_2) + (1 - \psi^2)I_{12}\}^2}{I_1 + \psi^2 I_2 - 2\psi I_{12}}$$

Les relations (47) et (48) peuvent être intégrées numériquement avec grande précision. De cette façon, on obtient des résultats qui, mise à part une très minime erreur d'intégration numérique, sont des solutions exactes pour les maillages considérées, et non des solutions par éléments finis. Leur comparaison aux résultats d'autres auteurs permettra donc de mettre en évidence la convergence de notre théorie approchée.

Les solutions obtenues, pour des angles de vrillage allant de 0° à 90° sont consignées dans les tableaux 1 et 2. Dans ces tableaux, U et V représentent les flèches d'extrémité exprimées en pouces (1 pouce = 2,54 mm), NEL le nombre d'éléments; et ψ , l'angle total de vrillage à l'extrémité. Les mêmes résultats sont également représentés aux figures 1 et 2. On constate que pour un découpage en 10 éléments, les résultats sont excellents, même pour un vrillage de 90°. Pour des vrillages de l'ordre de 15°, on obtient déjà une excellente solution avec un élément.

Dans le cas du problème 1, la comparaison avec les résultats d'Amman et ceux de Carnegie fait apparaître une très bonne concordance. Avec 10 éléments, notre solution approchée donne des résultats comparables à ceux d'Amman qui approche la théorie exacte par éléments finis.

Les erreurs sur les modules d'élasticité étant, comme nous l'avons vu, en ψ^2 , on doit avoir (cf. annexe), pour un vrillage uniforme, une erreur sur le travail de l'ordre de

$$(49) \quad \mathcal{P}(\vec{u} - \vec{u}_h) = O(h^2)$$

\vec{u} étant la solution (u, v) , \vec{u}_h la solution approchée et h le pas du découpage. Cet ordre de convergence a effectivement été obtenu par voie numérique, comme en témoigne la figure 3.

Annexe - Démonstration de la relation (49)

Considérons l'espace U des déplacements admissibles muni du produit scalaire $(.,.)$ correspondant à l'énergie de déformation exacte. Soit $a(.,.)$ la forme bilinéaire correspondant à l'énergie de déformation approchée. Les modules approchés étant proches des modules exacts, on a, pour tout $(v, w) \in U \times U$,

$$(50) \quad |(\vec{v}, \vec{w}) - a(\vec{v}, \vec{w})| \leq \varepsilon \|\vec{v}\| \|\vec{w}\|.$$

Le problème exact consiste à chercher le déplacement $\vec{u} \in U$ tel que pour tout $\vec{v} \in U$, on ait

$$(51) \quad (\vec{u}, \vec{v}) = \mathcal{P}(\vec{v})$$

et le problème approché, à rechercher le déplacement \vec{u}_h tel que pour tout $\vec{v} \in U$,

$$(52) \quad a(\vec{u}_h, \vec{v}) = \mathcal{P}(\vec{v})$$

On déduit de (51) et (52) que

$$(\vec{u}, \vec{v}) - a(\vec{u}_h, \vec{v}) = 0$$

soit encore

$$(\vec{u} - \vec{u}_h, \vec{v}) + (\vec{u}_h, \vec{v}) - a(\vec{u}_h, \vec{v}) = 0,$$

ce qui entraîne

$$|(\vec{u} - \vec{u}_h, \vec{v})| \leq \varepsilon \|\vec{u}_h\| \|\vec{v}\|,$$

quel que soit $\vec{v} \in U$. Dès lors, on a encore

$$\sup_{\vec{v} \in U} \frac{|(\vec{u} - \vec{u}_h, \vec{v})|}{\|\vec{v}\|} \leq \varepsilon \|\vec{u}_h\|$$

soit

$$(52) \quad \|\vec{u} - \vec{u}_h\| \leq \varepsilon \|\vec{u}_h\| ,$$

ce qui entraîne encore

$$(53) \quad \|\vec{u} - \vec{u}_h\| \leq \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} \|\vec{u}\| .$$

La norme de l'erreur est donc de l'ordre de ε . Pour ce qui est du travail, on a directement

$$|\mathcal{P}(\vec{u} - \vec{u}_h)| \leq \|\mathcal{P}\| \|\vec{u} - \vec{u}_h\| \leq \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} \|\mathcal{P}\| \|\vec{u}\| .$$

Or l'erreur que nous considérons est, pour un vrillage uniforme, donnée par

$$(54) \quad \varepsilon = \psi^2 \leq \psi'^2 h^2 ,$$

donc

$$(55) \quad \|\vec{u} - \vec{u}_h\| \leq \frac{\psi'^2 h^2}{1-\psi'^2 h^2} \|\mathcal{P}\| \|\vec{u}\| ,$$

ce qu'il fallait démontrer. La relation (53) montre qu'en outre,

$$\|\vec{u} - \vec{u}_h\| = o(h^2)$$

BIBLIOGRAPHIE

- [1] K. MARGUERRE "Knick und Beulvorgänge - Einführung in die Theorie der elastischen Stabilität". Chapitre VI de "Neuere Festigkeitsprobleme der Ingenieure", Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, 1950.
- [2] J.F. DEBONGNIE "Modélisation de problèmes hydroélastiques par éléments finis. Application aux lanceurs aérospatiaux".
Thèse de doctorat en Sciences Appliquées, Liège 1977.
- [3] J.F. DEBONGNIE "Physical Interpretation and Generalization of Marguerre's Shallow Shell Theory" International Journal of Engineering Science, 1978 (sous presse)
- [4] W. CARNEGIE "Vibration of pre-twisted cantilever blading"
Proc. Inst. Mech. Engng., vol. 173, n°12, 1959
- [5] A.A. AMMAM "Contribution théorique et expérimentale au calcul des aubes de turbomachines. Modélisation par éléments finis".
Thèse de doctorat en Sciences Appliquées, 1977.
- [6] W. CARNEGIE "The Static Bending of pre-twisted cantilever blading". Proc. Inst. Mech. Engng., London, Vol. 197, n°32
- [7] B.Z. VLASSOV "Pièces longues en voiles minces"
Eyrolles, Paris, 1962
- [8] A.E. GREEN and W. ZERNA "Theoretical Elasticity"
Oxford, Clarendon Press, 1954
- [9] G. SANDER "Application de la méthode des éléments finis à la flexion des plaques". Coll. Pub. Fac. Sc. Appli., n°15, 1969
- [10] Ch. MASSONNET "Résistance des Matériaux" Tome 1, Sciences et Lettres, Liège, Tome 2, Dunod, Paris
- [11] J. COURBON "Résistance des Matériaux" Tome I, Dunod, Paris, 1966

- [12] P. GERMAIN "Mécanique des milieux continus"
Masson, Paris, 1962
- [13] A. RIGOLOT "Sur une théorie asymptotique des poutres"
Journal de Mécanique, 11 , pp. 674-703, 1970
- [14] B. FRAEIJIS de VEUBEKE "Non linear theory of shells"
Rapport LTAS SA-21, Université de Liège
- [15] B. FRAEIJIS de VEUBEKE "Diffusion des Inconnues hyperstatiques
dans les voilures à longerons couplés"
Bulletin du Service Technique de l'Aéronautique, n°24, Bruxelles
1951.
- [16] B. FRAEIJIS de VEUBEKE "Théorie des coques prismatiques minces
renforcées par lisses ou diaphragmes"
Acad. Royale de Belgique, mémoire n°8, n°1729, 1961.

TABLEAU 1

ψ	$10^7 \cdot V$						$10^2 \cdot U$							
	0	15	30	45	60	75	90	0	15	30	45	60	75	90
1	11,3	11,1	10,7	10,1	9,52	8,90	8,32	0	0,71	1,33	1,79	2,10	2,30	2,42
2	11,3	11,1	10,8	10,3	9,69	9,03	8,38	0	0,72	1,38	1,91	2,31	2,55	2,66
5	11,3	11,2	10,9	10,5	10,0	9,45	8,84	0	0,73	1,41	2,01	2,50	2,85	3,07
10	11,3	11,2	10,9	10,6	10,1	9,57	8,99	0	0,73	1,41	2,02	2,53	2,91	3,15
20	11,3	11,2	11,0	10,6	10,1	9,60	9,03	0	0,73	1,41	2,03	2,53	2,92	3,18
50	11,3	11,2	11,0	10,6	10,1	9,61	9,05	0	0,73	1,41	2,03	2,54	2,92	3,18
AMMAM [5]	11,3	-	10,9	-	10,1	-	9,0	0	-	1,30	-	2,50	-	3,12
CARNEGIE [6]	11,3	11,1	-	10,5	-	9,50	-	0	0,70	-	2,00	-	3,00	-

TABLEAU 2

ψ NEL	$10^2 \cdot V$										$10^2 \cdot U$					
	0	15	30	45	60	75	90	0	15	30	45	60	75	90		
1	0,045	0,119	0,310	0,557	0,81	1,03	1,22	0	0,714	1,33	1,79	2,10	2,30	2,42		
2	0,045	0,121	0,334	0,649	1,02	1,41	1,76	0	0,722	1,38	1,92	2,31	2,55	2,66		
5	0,045	0,122	0,343	0,690	1,13	1,64	2,16	0	0,726	1,41	2,01	2,50	2,85	3,07		
10	0,045	0,122	0,344	0,696	1,15	1,67	2,22	0	0,727	1,41	2,02	2,53	2,91	3,16		
15	0,045	0,122	0,344	0,697	1,15	1,68	2,23	0	0,727	1,41	2,03	2,58	2,92	3,17		
25	0,045	0,122	0,345	0,697	1,15	1,68	2,24	0	0,727	1,41	2,03	2,54	2,92	3,18		
50	0,045	0,122	0,345	0,697	1,15	1,68	2,24	0	0,727	1,41	2,03	2,54	2,92	3,18		

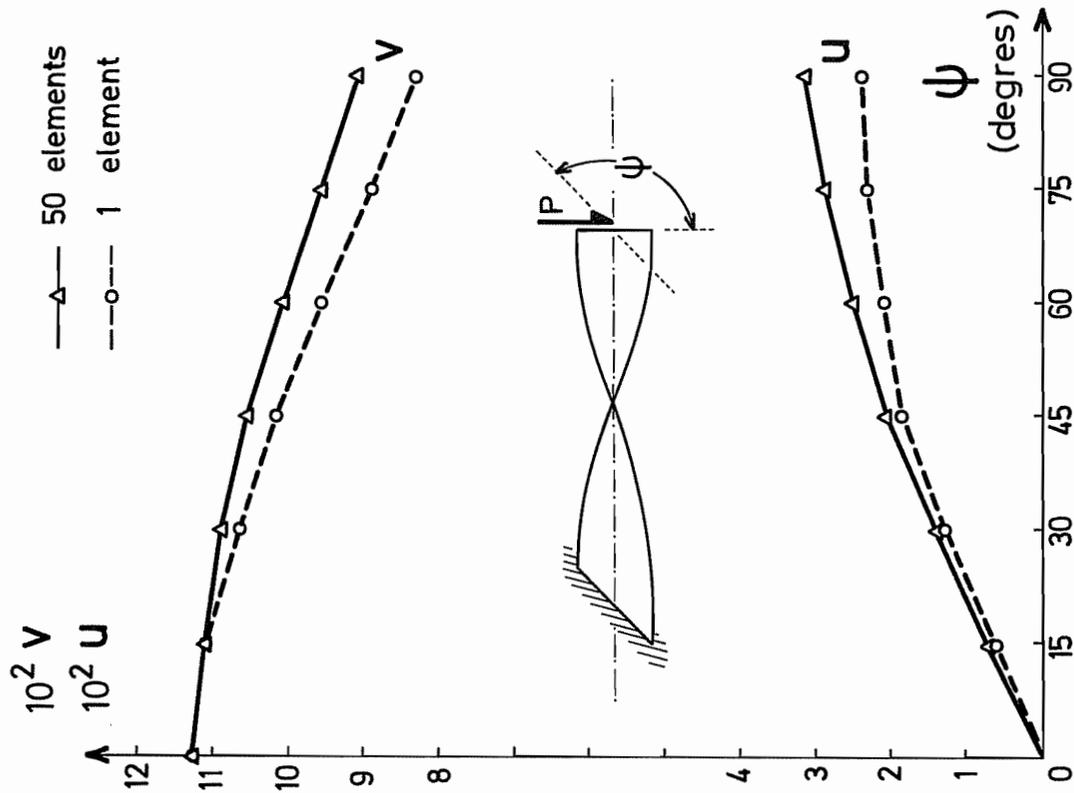


FIG. 1 PROBLEME 1
PROBLEM 1

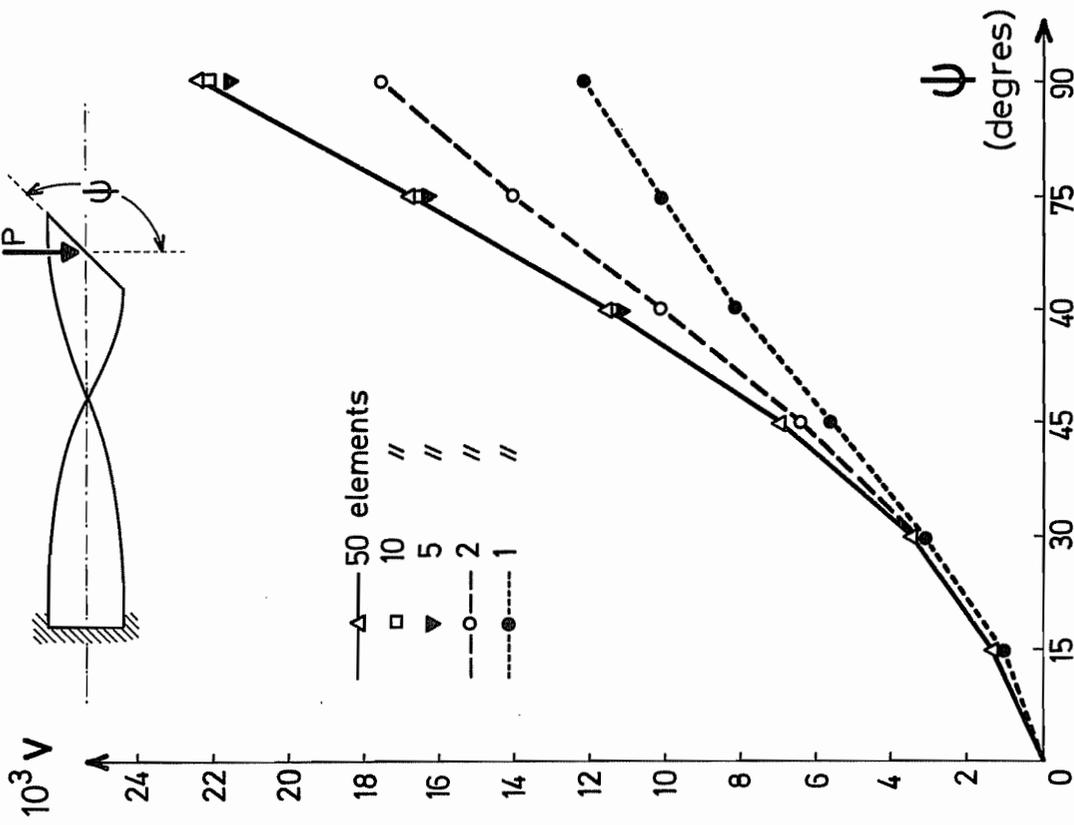


FIG. 2 PROBLEME 2
PROBLEM 2

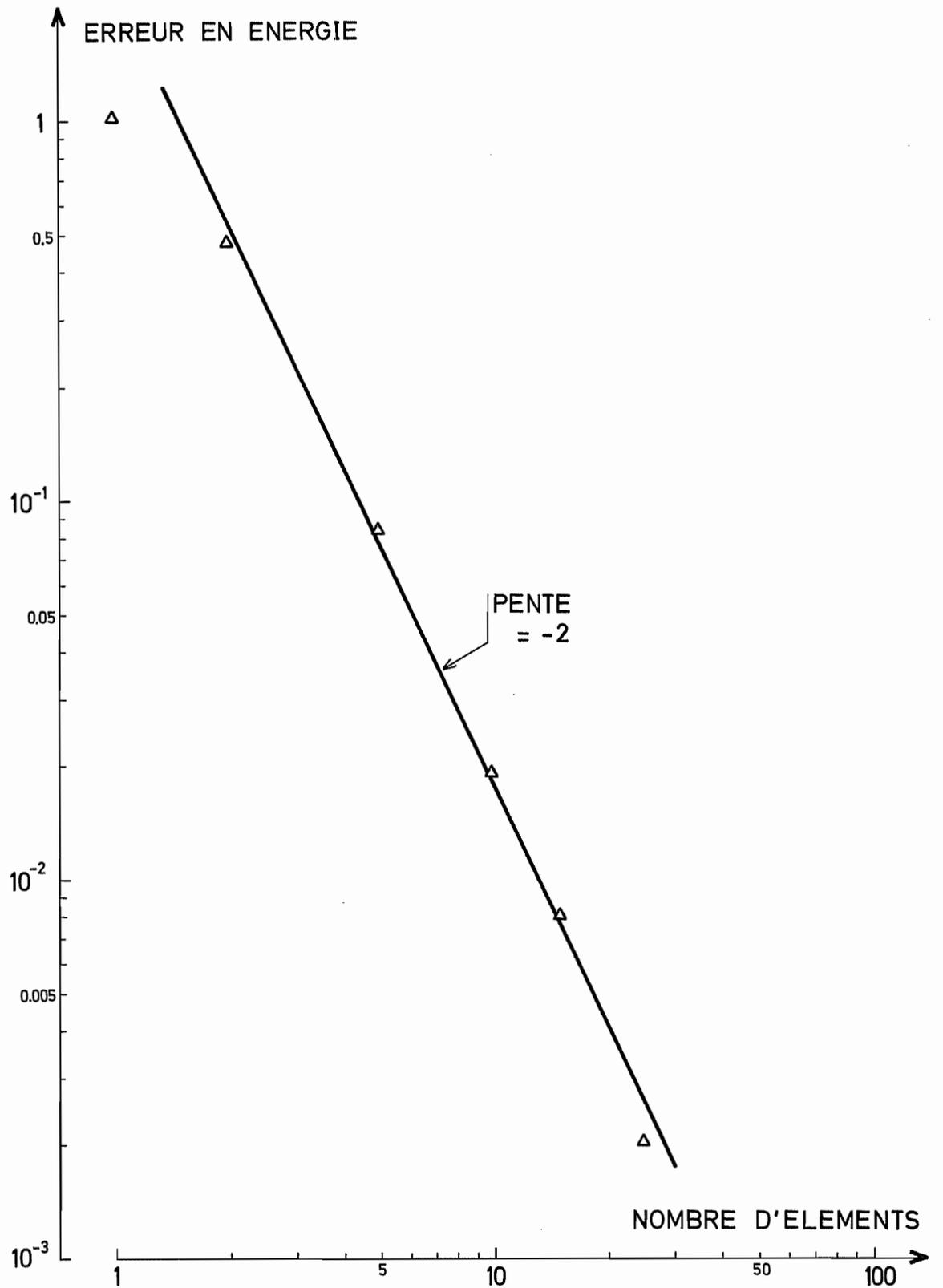


FIG. 3 ESTIMATION DE LA CONVERGENCE
ESTIMATION OF THE CONVERGENCE