

" Etude des structures élastiques anisotropes pouvant être incompressibles et application à un élément fini de tore triangulaire".

J.F. DEBONGNIE

## Introduction

Dans le cas des structures incompressibles, la matrice de Hooke liant les tensions aux déformations, n'est pas définie. Pour porter remède à cet obstacle, HERRMANN[1] a proposé une formulation mixte, déplacements et pressions, valable dans le cadre des corps isotropes, compressibles ou non. Une autre formulation, due à TONG [2] est basée sur des éléments hybrides, Elle permet l'anisotropie mais, du fait des équations d'équilibre, la pression est limitée, dans un élément fini, à être constante.

Le présent rapport présente une généralisation de la formulation de HERRMANN à tous les cas, isotropes ou non, où la matrice de flexibilité locale admet comme seule singularité éventuelle une pression isotrope. Partant du principe de Reissner, on introduit une matrice qui se conduit comme l'inverse de la matrice de flexibilité locale, vis-à-vis des déviateurs. La construction de cette matrice peut se faire de façon entièrement automatique. Les calculs sont faits analytiquement dans le cas isotrope. Enfin, les effets thermiques sont inclus dans la formulation. C'est l'objet du premier chapitre.

Le second chapitre décrit un élément de tore triangulaire basé sur cette formulation, tel qu'il a été développé pour le programme SAMCEF du L.T.A.S.

Enfin, dans le troisième chapitre, on trouvera une série de tests qui ont été effectués sur cet élément. Il s'agit souvent de tests simples, permettant de vérifier son comportement. Les résultats sont alors comparés à ceux que donne l'élément cinématiquement admissible de même géométrie (type 13 dans le code SAMCEF) ou à des résultats analytiques. Un de ces exemples a été particulièrement fouillé. Il s'agit d'un cylindre composite sous pression interne. Les résultats sont comparés à ceux de l'élément cinématiquement admissible, aux degrés 1, 2 et 3 pour un coefficient de Poisson égal à 0,4995. Pour les faibles degrés, la comparaison semble être nettement à l'avantage du nouvel élément.

CHAPITRE 1Formulation variationnelle pour les corps élastiques anisotropes compressibles ou incompressibles1. Expression de l'incompressibilité

Dans le principe de Reissner

$$\int_V \left[ \frac{1}{2} \tau_{ij} (D_i u_j + D_j u_i) - \phi(\tau) - F_i u_i \right] dV - \int_{S_2} \bar{t}_i u_i dS \text{ stat},$$

les termes contenant les tensions  $\tau_{ij}$  peuvent s'écrire

$$\int_V \left[ \tau_{ij} \varepsilon_{ij} - \phi(\tau) \right] dV$$

soit, sous forme matricielle,

$$\int_V \left[ t^T e - \frac{1}{2} t^T B t \right] dV, \quad (1)$$

$$\text{où } \begin{cases} t^T = [\tau_{11}, \tau_{22}, \tau_{33}, \tau_{12}, \tau_{13}, \tau_{23}], \\ e^T = [\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{33}, \varepsilon_{12}, \varepsilon_{13}, \varepsilon_{23}], \end{cases} \quad (2)$$

B étant la matrice de flexibilité locale.

La variation des tensions conduit alors à l'équation

$$e = B t \quad (3)$$

Pour une structure incompressible, on a la condition

$$r^T e = 0 \quad ,$$

$$\text{où } r^T = [1, 1, 1, 0, 0, 0] \quad ,$$

dont on déduit

$$r^T B t = 0 \quad \forall t \quad ,$$

$$\text{soit } B r = 0 \quad . \quad (4)$$

La matrice de flexibilité locale d'une structure incompressible est donc singulière, et admet le vecteur  $r$  comme zéro.

## 2. La matrice D

Un vecteur quelconque  $p$  peut être décomposé en un déviateur, c'est-à-dire un vecteur  $\hat{p}$  tel que  $r^T \hat{p} = 0$ , et un multiple de  $r$  : on peut en effet écrire

$$p = \hat{p} - \frac{1}{3} (r^T p) r + \frac{1}{3} (r^T p) r \quad ;$$

si l'on pose

$$\hat{p} = p - \frac{1}{3} (r^T p) r \quad ,$$

on a visiblement

$$r^T \hat{p} = r^T p - \frac{1}{3} (r^T p) r^T r$$

et, comme  $r^T r = 3$ ,

$$r^T \hat{p} = 0 \quad .$$

On notera que

$$\hat{p} = p - \frac{1}{3} r r^T p = (I - \frac{1}{3} r r^T) p = D p, \quad (5)$$

ce qui introduit la matrice

$$D = I - \frac{1}{3} r r^T \quad . \quad (6)$$

Cette matrice est symétrique et sa propriété essentielle est de filtrer la dilatation isotrope :

$$D r = 0 \quad . \quad (7)$$

En outre,

$$D D = D (I - \frac{1}{3} r r^T) = D - \frac{1}{3} D r r^T = D \quad . \quad (8)$$

### 3. La matrice A.

Dans le cas d'une structure incompressible, la singularité de la matrice B rend l'inversion de la relation (3) impossible, ce qui signifie qu'il n'existe pas de matrice de Hooke. En outre, si la structure est quasi-incompressible, c'est-à-dire si l'énergie complémentaire du vecteur r est très faible, la matrice de Hooke est mal conditionnée. L'inverse de B, si elle existe, est caractérisée par

$$B^{-1} B = I \quad .$$

Il en résulte que

$$B^{-1} B D = D \quad ,$$

Montrons que si la matrice B admet comme seule singularité éventuelle le vecteur r , il existe une matrice symétrique A telle que

$$\begin{cases} A B D = D & (9) \\ A \text{ invertible et bien conditionnée} & . \quad (10) \end{cases}$$

En effet, considérons la matrice

$$\bar{B} = B + \frac{\alpha}{3} rr^T \quad (11)$$

On peut toujours choisir  $\alpha$  pour que  $\bar{B}r \neq 0$ , car si  $Br = 0$ ,

$$\bar{B}r = \frac{\alpha}{3} rr^T r = \alpha r .$$

D'autre part, pour tout déviateur, on a

$$\bar{B} D p = B D p + \frac{\alpha}{3} rr^T D p = B D p \quad (12)$$

Dès lors, si  $B$  n'admet pas de zéro autre que  $r$ , la matrice  $\bar{B}$  est invertible. On pose alors

$$A = \bar{B}^{-1} \quad . \quad (13)$$

La matrice  $A$  est évidemment invertible.

En outre,

$$A\bar{B} = A(B + \frac{\alpha}{3} rr^T) = I ,$$

d'où

$$D = A\bar{B}D = ABD + \frac{\alpha}{3} A rr^T D = ABD$$

ce qui démontre la relation (9).

Le conditionnement de la matrice dépend du choix de  $\alpha$ .

Un bon choix semble être celui où

$$\frac{r^T \bar{B}r}{r^T r} = \text{moyenne des valeurs propres de } \bar{B},$$

soit

$$r^T \bar{B}r = 3 * \frac{\text{tr}(\bar{B})}{6} = \frac{1}{2} \text{tr}(\bar{B}),$$

$\text{tr}(\bar{B})$  représentant la trace de  $\bar{B}$ .

Or,

$$\text{tr}(\bar{B}) = \text{tr}(B) + \alpha$$

$$r^T \bar{B} r = r^T B r + \frac{\alpha}{3} (r^T r)^2 = r^T B r + 3\alpha$$

Il vient donc

$$r^T B r + 3\alpha = \frac{1}{2} \text{tr}(B) + \frac{\alpha}{2},$$

ce qui donne finalement :

$$5\alpha = \text{tr}(B) - 2r^T B r \quad (14)$$

Considérons par exemple le cas isotrope. La matrice B a la forme

$$B = \frac{1+\nu}{\epsilon} I - \frac{\nu}{\epsilon} r r^T, \quad (15)$$

où  $\epsilon$  représente le module de Young,  $\nu$  le coefficient de Poisson.

$$\text{tr}(B) = 6 \frac{1+\nu}{\epsilon} - \frac{3\nu}{\epsilon} = \frac{6+6\nu-3\nu}{\epsilon} = \frac{6+3\nu}{\epsilon}$$

$$2r^T B r = 2 \frac{1+\nu}{\epsilon} r^T r - \frac{2\nu}{\epsilon} (r^T r)^2 = \frac{6+6\nu-18\nu}{\epsilon} = \frac{6-12\nu}{\epsilon}$$

$$\text{et } 5\alpha = \frac{6+3\nu - 6 + 12\nu}{\epsilon} = \frac{15\nu}{\epsilon}$$

$$\alpha = \frac{3\nu}{\epsilon}, \quad (16)$$

d'où

$$\bar{B} = \frac{1+\nu}{\epsilon} I - \frac{\nu}{\epsilon} r r^T + \frac{\nu}{\epsilon} r r^T = \frac{1+\nu}{\epsilon} I. \quad (17)$$

On est donc conduit à un multiple de la matrice unité.

On vérifie aisément que, dans ce cas,

$$\begin{aligned}
 A &= \frac{\varepsilon}{1+\nu} I, \\
 ABD &= \frac{\varepsilon}{1+\nu} I \left[ \frac{1+\nu}{\varepsilon} I - \frac{\nu}{\varepsilon} rr^T \right] D \\
 &= \frac{\varepsilon}{1+\nu} I \frac{1+\nu}{\varepsilon} D = D.
 \end{aligned}$$

La matrice A jouit de quelques propriétés très particulières

1) Pour toute matrice A telle que  $ABD = D$ ,

$$\text{on a } BAr = \mu r. \quad (18)$$

En effet, si  $BAr = s$ ,

$$DBAr = Ds,$$

soit  $Ds = Dr = 0$ ,

donc  $s = \mu r$

2) La matrice  $A = (B + \frac{\alpha}{3} rr^T)^{-1}$  est telle que

$$(AB-I) = -\frac{\alpha}{3} A rr^T. \quad (19)$$

En effet, de la relation

$$A(B + \frac{\alpha}{3} rr^T) = I,$$

on déduit

$$AB + \frac{\alpha}{3} A rr^T = I,$$

et

$$(AB-I) = -\frac{\alpha}{3} A rr^T.$$



3) En corollaire de 2) ,

$$(AB-I)r = -\alpha Ar \quad (20)$$

$$4) (AB-I)D = ABD - D = 0 \quad (21)$$

$$5) (BA-I)BD = BABD - BD = BD = B(D-D) = 0 \quad (22)$$

#### 4. Transformation du principe de Reissner

La relation (3) peut s'écrire

$$e = BDt + \frac{1}{3} Brr^T t ;$$

prémultipliant par A, on obtient donc

$$Ae = Dt + \frac{1}{3} ABrr^T t \quad (23)$$

Or, le vecteur Dt n'est que de dimension 5, puisque  $r^T Dt = 0$ . On peut donc imposer séparément un vecteur Dt et une pression  $\pi = -\frac{1}{3} r^T t$ , à condition d'imposer extérieurement  $r^T Dt = 0$ . La relation (23) peut donc s'écrire

$$Dt = Ae + \pi ABr, \quad (24)$$

d'où

$$t = Dt - \pi r = Ae + \pi(AB-I)r \quad (25)$$

Il vient alors

$$a) t^T e = e^T Ae + \pi r^T (BA-I) e$$

$$b) \frac{1}{2} t^T Bt = \frac{1}{2} e^T ABt + \frac{1}{2} \pi r^T (BA-I) Bt$$

$$= \underbrace{\frac{1}{2} e^T ABDt}_{I} - \underbrace{\frac{1}{2} e^T ABr\pi}_{II} + \underbrace{\frac{1}{2} \pi r^T (BA-I) BDt}_{III} - \underbrace{\frac{1}{2} \pi r^T (BA-I) Br\pi}_{IV}$$

Or,

$$I \rightarrow \frac{1}{2} e^T D t = \frac{1}{2} e^T A e + \frac{1}{2} e^T \pi A B r$$

III  $\rightarrow$  0 en vertu de (22) .

Regroupant tous les termes, on obtient alors

$$\frac{1}{2} e^T A e + \pi r^T (B A - I) e + \frac{1}{2} r^T (B A - I) B r \pi^2 = \phi(e, \pi) \quad . \quad (26)$$

Montrons que la fonctionnelle

$$\int_V [\phi(Du, \pi) - F_i u_i] dV - \int_{S_2} \bar{t}_i u_i dS$$

est stationnaire à la solution du problème élastique.

En effet,

$$\frac{\partial \phi}{\partial e} = A e + (A B - I) r \pi = t, \quad (27)$$

ce qui conduira donc aux équations d'équilibre

$$D_j \tau_{ji} + F_i = 0 \quad \text{dans } V$$

$$n_j \tau_{ji} = \bar{t}_i \quad \text{sur } S_2.$$

Quant à la variation de  $\pi$ , elle fournit la condition

$$r^T (B A - I) e + r^T (B A - I) B r \pi = 0 \quad (28)$$

ce qui, vu (20), entraîne

$$- \alpha r^T (A e + A B r \pi) = 0, \quad (29)$$

d'où

$$(A e + A B r \pi) = D p \quad (30)$$

ce qui, vu (23), revient précisément à assurer que  $Dt$  soit bien un déviateur, condition d'indépendance de la pression.

On peut donner une autre interprétation de cette relation.

En effet,

$$\alpha r^T A B r \pi = 3 \alpha \mu \pi ,$$

en vertu de (18). La constante  $\mu$  s'obtient aisément : puisque

$$(B + \frac{1}{3} \alpha r r^T) A r = I r ,$$

$$B A r = r \left[ 1 - \frac{1}{3} \alpha r^T A r \right] ,$$

$$\text{et } \mu = 1 - \frac{1}{3} \alpha r^T A r$$

Il vient donc

$$\pi = - \frac{r^T A e}{3(1 - \frac{1}{3} \alpha r^T A r)} , \quad (31)$$

relation qui lie la pression aux déformations. Dans le cas isotrope, on a

$$A = \frac{\epsilon}{1+\nu} I$$

$$r^T A r = \frac{3\epsilon}{1+\nu}$$

$$\alpha = \frac{3\nu}{\epsilon}$$

$$\text{et } 1 - \frac{1}{3} \alpha r^T A r = 1 - \frac{3\nu}{1+\nu} = \frac{1-2\nu}{1+\nu}$$

La relation (31) prend alors la forme simple de l'équation de compressibilité.

$$\pi = \frac{-r^T e}{3(1-2\nu)}$$

Sous forme matricielle, la fonction  $\phi$  s'écrit

$$\phi(e, \pi) = \frac{1}{2} (e^T \pi) \bar{H} \begin{bmatrix} e \\ \pi \end{bmatrix}, \quad (32)$$

$$\text{avec } \bar{H} = \begin{bmatrix} A & (AB-I)r \\ r^T (BA-I) & r^T (BA-I)Br \end{bmatrix} \quad (33)$$

$$= \begin{bmatrix} A & -\alpha Ar \\ -\alpha r^T A & -\alpha r^T AB r \end{bmatrix} \quad (34)$$

On remarquera d'ailleurs que  $-\alpha r^T AB r = -3\alpha\mu$ , avec  $\mu = 1 - \frac{1}{3} \alpha r^T Ar$

Calculons cette matrice dans le cas d'une structure isotrope, avec la valeur de  $\alpha$  définie en (16)

Il vient

$$A = \frac{\epsilon}{1+\nu} I$$

$$-\alpha r^T A = -\frac{3\nu}{\epsilon} \frac{\epsilon}{1+\nu} r^T = -\frac{3\nu}{1+\nu} r^T$$

$$-\alpha r^T AB r = -\frac{3\nu}{\epsilon} r^T \frac{\epsilon}{1+\nu} Br = -\frac{3\nu}{1+\nu} r^T Br = -\frac{3\nu}{1+\nu} \cdot \frac{3(1-2\nu)}{\epsilon}$$

$$\text{et } \bar{H} = \begin{bmatrix} \frac{\epsilon}{1+\nu} I & -\frac{3\nu}{1+\nu} r^T \\ -\frac{3\nu}{1+\nu} r^T & -\frac{3\nu}{1+\nu} \frac{3(1-2\nu)}{\epsilon} \end{bmatrix} \quad (35)$$

## 5. Introduction d'effets thermiques

En un point donné, si la température est différente de celle où les modules élastiques ont été évalués, il y a lieu d'ajouter à l'énergie complémentaire le terme correctif  $\theta x^T t$ , où  $\theta$  est l'écart de température,  $x$  le vecteur des coefficients de dilatation thermique.

L'intégrale (1) se transforme alors en

$$\int_V \left[ t^T (e - x\theta) - \frac{1}{2} t^T B t \right] dV, \quad (36)$$

ce qui montre que tous les développements antérieurs restent valables, à condition de remplacer partout  $e$  par  $(e - x\theta)$ .

## 6. Conditions d'applicabilité du principe

L'existence du principe variationnel exige que les dérivées des déplacements aient leurs carrés intégrables ce qui est certainement satisfait si les déplacements sont continus. Quant à la pression, elle doit seulement être de carré sommable. En particulier, une pression continue par morceaux est suffisante.

## Chapitre 2.

### Élément fini de tore triangulaire basé sur la discrétisation des déplacements et de la pression

#### 1. Description géométrique de l'élément et discrétisation des champs

Il s'agit d'un élément de tore triangulaire, semblable à l'élément cinématique (Type 13) déjà en service (fig. 1). Sa géométrie est définie par trois noeuds dans le sens méridien.

Les hypothèses faites sur les champs de déplacements sont :

$$\begin{aligned}
 u_r &= \sum_{j=0}^k \alpha_{j1} r^j z^{1-j} & k = 1, 2, 3 \\
 u_\theta &= 0 \\
 u_z &= \sum_{j=0}^k \beta_{j1} r^j z^{1-j} & k = 1, 2, 3
 \end{aligned} \tag{37}$$

Il s'agit donc de polynômes complets de degré  $k$  en  $r$  et  $z$ .

Ils comportent  $\frac{(k+1)(k+2)}{2}$  coefficients. Les déplacements sont connectés aux trois noeuds et en  $(k-1)$  points sur chaque interface, ce qui garantit une valeur unique sur chaque côté. Au troisième degré, il subsiste cependant deux paramètres de champ correspondant à des "modes-bulles", c'est-à-dire nuls sur toute la frontière. On élimine ces derniers indépendamment dans chaque élément.

Le champ de pression moyenne, qui n'est astreint à aucune condition de compatibilité sur les interfaces, est défini indépendamment dans chaque élément. On constatera tout d'abord que

$$- \int_V \alpha \pi r^T A e \, dV = - \int_V \alpha \pi r^T A \partial u \, dV$$

$$= - \int_S \alpha \pi r^T A L u dS + \int_V \partial^T (\alpha \pi r^T A) u dV ,$$

où  $\partial u$  représente la déviation des déplacements, et  $L u$  le déplacement normal à la surface.

Il en résulte que si la pression moyenne  $\pi$  est constante, elle ne produit pas de travail pour un mode bulle. Il n'est donc pas possible de condenser la pression constante en même temps qu'un mode bulle, du moins dans le cas incompressible. Ceci signifie qu'il est nécessaire de conserver le paramètre de pression constante jusqu'à ce qu'un déplacement normal de frontière soit condensé. Par contre, une pression variable fournit du travail pour les modes bulles et peut donc être condensée. En conséquence,

a) Il est nécessaire de définir un noeud fictif supplémentaire pour le paramètre constant de pression moyenne. Cette pression ne peut être condensée qu'après un déplacement normal d'une interface de l'élément auquel elle se rapporte.

b) Pour  $k = 1$  ou  $2$ , la pression moyenne sera constante sur l'élément. Pour  $k = 3$ , on choisit un champ de pression de degré 1. Les deux paramètres supplémentaires sont alors condensés avec les modes bulles.

Ce sont les options effectivement choisies dans le programme SAMCEF.

## 2. Expression de la fonction $\phi(e, \pi)$

Les déplacements ayant la forme

$$u = M a, \tag{38}$$

on en déduit les déformations

$$e = \partial u = \partial M a = B a \tag{39}$$

par les relations

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{rr} &= \partial u_r / \partial r \\
\varepsilon_{zz} &= \partial u_z / \partial z \\
\gamma_{rz} &= \partial u_r / \partial z + \partial u_z / \partial r \\
\varepsilon_{\theta\theta} &= u/r
\end{aligned} \tag{40}$$

C'est l'ordre adopté par le programme.

La pression est définie directement par

$$p = h^T b$$

Il vient donc

$$\begin{bmatrix} e \\ \pi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B & 0 \\ 0 & h^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \bar{B} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \tag{41}$$

Il faut alors écrire

$$\begin{aligned}
\phi(e, \pi) &= \frac{1}{2} [e^T, \pi] \bar{H} \begin{bmatrix} e \\ \pi \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{2} [a^T \ b^T] \bar{B}^T \bar{H} \bar{B} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{42}$$

La matrice  $\bar{H}$  est la matrice définie en (34). Dans le cas anisotrope, il faut la définir terme à terme. Dans le cas isotrope, elle est calculée automatiquement à partir du module de Young et du coefficient de Poisson.

### 3. Intégration

L'étape suivante consiste à intégrer la matrice  $\bar{B}^T \bar{H} \bar{B}$ . Cette intégration est effectuée à l'aide d'une méthode de Gauss à 81 points. Ainsi qu'il a été montré dans un rapport antérieur [3], cette méthode permet d'obtenir la solution correcte, même pour les éléments situés sur



l'axe de révolution. L'organisation du calcul de la matrice des intégrales est nouvelle. Au lieu d'évaluer séparément chaque intégrale, on calcule la contribution de chaque point de GAUSS à toutes les intégrales simultanément, ce qui réduit considérablement le temps de calcul.

#### 4. Matrice intégrale mixte et matrice mixte

Intégrant la fonction  $\phi(e, \pi)$ , on obtient

$$\begin{aligned} \Phi &= \frac{1}{2} \int_v \phi(e, \pi) dV = \frac{1}{2} \int_v (a^T \ b^T) \bar{B}^T \bar{H} \bar{B} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} dV \\ &= \frac{1}{2} (a^T \ b^T) \begin{bmatrix} J_{aa} & J_{ab} \\ J_{ba} & J_{bb} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (43)$$

Les paramètres de déplacements  $a$  sont alors exprimés en termes des déplacements généralisés par

$$q = Ca ,$$

où  $C$  est la matrice de connexion. Il vient donc

$$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C^{-1} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q \\ b \end{bmatrix}$$

$$\text{et } \Phi = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} q^T & b^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_{qq} & K_{qb} \\ K_{bq} & L_{bb} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q \\ b \end{bmatrix} \quad (44)$$

$$\begin{aligned}
\text{avec} \quad K_{qq} &= C^{-1T} J_{aa} C^{-1} \\
K_{qb} &= C^{-1T} J_{ab} \\
K_{bq} &= J_{ba} C^{-1} \\
K_{bb} &= J_{bb}
\end{aligned}
\tag{45}$$

### 5. Calcul des forces de pression

L'élément admet, sur le côté 1-2, une pression constante ou linéairement variable. Par convention, la pression imposée est positive si elle est dirigée vers l'intérieur de l'élément et ce, indépendamment de la numérotation des noeuds. (fig. 2)

Le principe du calcul est le suivant (fig. 3). La normale au côté 1 et dirigée vers l'intérieur a la direction et le sens du vecteur obtenu en orthogonalisant le vecteur joignant le noeud 1 au noeud 3, au côté 1-2. Ceci détermine le sens dans lequel agissent les pressions, et permet donc de faire la transformation en axes structuraux. Le reste du calcul est classique; sur le côté 1-2

$$p = \beta_1 + \beta_2 s$$

$$u_n = \sum_{i=1}^k \alpha_i s^{i-1}$$

$$\int_0^1 p u_n ds = \sum_{i=1}^k \int_0^1 (\alpha_i \beta_1 s^{i-1} + \alpha_i \beta_2 s^i) ds =$$

$$\sum_{i=1}^k \alpha_i \beta_1 \frac{1^i}{i} + \sum_{i=1}^k \alpha_i \beta_2 \frac{1^{i+1}}{i+1} =$$

$$\sum_{i=1}^k \alpha_i \left[ \frac{\beta_1}{i} + \frac{\beta_2}{i+1} \right] = \sum_{i=1}^k \alpha_i d_i$$

On transforme alors les  $\alpha_i$  en termes des déplacements généralisés, l'orientation étant donnée par la normale :

$$\begin{bmatrix} u_{n1} \\ \vdots \\ u_{nk+1} \end{bmatrix} = Lq = C_{12} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_{k+1} \end{bmatrix}$$

et

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_{k+1} \end{bmatrix} = C_{12}^{-1} Lq,$$

L étant une matrice de transformation d'axes, et  $C_{12}$  la matrice de connexion des déplacements normaux sur 12. Les charges sont alors données par

$$g = L^T C_{12}^{-1T} d \quad (46)$$

## 6. Calcul des tensions moyennes

On a vu en (27) que les tensions sont données par

$$t = \frac{\partial \phi}{\partial e} = \text{les quatre premières lignes de } \bar{H} \begin{bmatrix} e \\ \pi \end{bmatrix} \quad (47)$$

En coordonnées curvilignes, il convient de calculer directement des moyennes. On choisit, pour la plus grande facilité d'interprétation, les moyennes sur la surface méridienne :

$$\bar{t} = \int_{\Delta} t \, dr dz \quad / \quad \int_{\Delta} dr dz \quad (48)$$

Le calcul est aisé :

$$\bar{t} = S \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}, \quad (49)$$

$$\text{avec } S = \int_{\Delta} \left[ \begin{array}{c} 4 \text{ prem. lignes de } (\bar{H} \bar{B}) \end{array} \right] dr dz \quad \int_{\Delta} dr dz \quad (50)$$

et la matrice des tensions est donnée par

$$T = S \begin{bmatrix} C^{-1} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \quad (51)$$

### 7. Charges et tensions thermiques

On a vu en (36) que l'introduction de la température équivaut à remplacer  $e$  par  $(e - x \cdot \theta)$ , où  $\theta$  est l'accroissement de température et  $x$  le vecteur des coefficients de dilatation thermique:

$$x^T = (\alpha_{rr}, \alpha_{zz}, 0, \alpha_{\theta\theta})$$

On peut encore écrire

$$y^T = (\alpha_{rr}, \alpha_{zz}, 0, \alpha_{\theta\theta}, 0)$$

Il vient alors les termes thermiques

$$- \theta y^T \bar{H} \begin{bmatrix} e \\ \pi \end{bmatrix} + \text{invariant}$$

Ces termes ont deux effets

#### 1) Ils introduisent une charge thermique :

$$\begin{aligned} - \int_V y^T \bar{H} \begin{bmatrix} e \\ \pi \end{bmatrix} dv &= - \int_V y^T \bar{H} \bar{B} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} dv \\ &= - \int_V \theta y^T \bar{H} \bar{B} dv \begin{bmatrix} C^{-1} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q \\ b \end{bmatrix} = - g^T \begin{bmatrix} q \\ b \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

d'où  $g = h$ , avec

$$h = \begin{bmatrix} C^{-1T} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \int_V \overline{B}^T \overline{H} y \, dv$$

2) Ils nécessitent une correction des tensions (tensions de Duhamel)

$$t_d = -\theta k \text{ (4 prem. lignes de } \overline{H} y \text{)}$$

Pour cette correction on choisit évidemment la même moyenne que pour les tensions issues des déplacements.

### 8. Condensation

Lorsque le degré  $k$  est égal à 3, il apparaît deux "modes-bulles", indépendants de l'assemblage. On peut condenser avec ces modes, deux paramètres de pression, à condition que ceux-ci correspondent à une pression variable.

En conséquence, pour  $k=3$ , le programme définit automatiquement une pression de degré 1. Les deux paramètres supplémentaires sont alors condensés juste après les "bulles". Cette condensation se fait sans risque, car les "bulles" apportent toujours une contribution aux termes diagonaux.

### 9. Précautions relatives à la condensation des pressions

Pour un corps incompressible, le terme diagonal relatif à la pression est nul. Quand le corps est quasi-incompressible, il est très petit.

Lors de la résolution, deux cas peuvent se présenter :

- l'élimination du degré de liberté de pression a lieu après celle d'un degré de liberté lié par celle-ci (déplacement normal à l'interface de l'élément) et le terme diagonal n'est plus nul. Dans ce cas, la résolution se fait sans difficulté.

- l'élimination du degré de liberté de pression a lieu avant celle des degrés de liberté qui lui sont liés. Dans ce cas, le pivot est nul et la résolution ne peut se faire.

Il est donc essentiel de respecter la règle suivante :

Le degré de liberté de pression d'un élément ne peut être condensé qu'après au moins un déplacement normal .

Le rôle du degré de liberté de pression est, en fait, semblable à celui des multiplicateurs des contraintes linéaires et, à ce sujet, on pourra consulter le manuel théorique du programme SAMCEF [5] . Voici quelques procédés qui permettent de résoudre le problème:

a) On peut déclarer les degrés de liberté de pression parmi les coordonnées retenues au sens de la résolution de SAMCEF. Ces degrés de liberté forment alors la dernière sous-structure. Mais cet artifice grossit artificiellement la largeur de bande et peut, pour de grosses applications, rendre la résolution impossible.

b) Si l'élément est de degré 2 ou 3 , il suffit que la pression soit condensée au même moment qu'une interface (non fixée ) de l'élément. La condensation pourra alors se faire. Pour arriver à ce résultat, on peut définir convenablement le découpage en sous-structures. Ce procédé ne peut convenir pour les éléments de degré 1, qui n'ont de ddl qu'aux noeuds.

c) On peut définir des éléments fictifs, sans raideur ni masse, reliant les pressions entre elles, de façon à retarder leur condensation.

En outre, on remarquera qu'à chaque DDL de pression, il correspond un pivot négatif.

Lors de l'impression des résultats, les pressions apparaissent parmi les déplacements.

10. Remarque

Il convient de ne pas confondre la pression moyenne , degré de liberté, qui est le terme constant de la moyenne  $(\sigma_{rr} + \sigma_{zz} + \sigma_{\theta\theta})/3$  et la pression appliquée sur un côté. Il s'agit de grandeurs tout-à-fait différentes.

Chapitre 3 - Applications1. Cylindre en état plan de déformation, soumis à une traction extérieure

Il s'agit d'un cylindre compressible soumis à une traction uniforme à sa périphérie (fig. CT1) . Il s'agit de représenter l'état plan de déformation. En conséquence, les déplacements axiaux sont fixés aux deux extrémités. Les données sont

Module de Young :  $2,1 \cdot 10^4$  daN/mm<sup>2</sup>

Coefficient de Poisson : 0,3

Rayon extérieur : 2 mm

Densité de force : 100 bars

Les résultats sont repris aux figures CT2 et CT3

Les déplacements radiaux sont parfaitement linéaires, conformément à la solution théorique :

r	$10^5 u_r$
0	0
1	2,476190
2	4,952381

Les tensions radiales valent 1 hbar partout, les tensions axiales 0,6 hbar, La moyenne de ces valeurs est :

$$2,6/3 = 0,866667$$

Or les pressions moyennes d'éléments valent précisément

$$- 0,866667,$$

ce qui est correct. La tension axiale doit valoir

$$(\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta}) \text{ . Effectivement ,}$$

$$\sigma_{zz} = 0,6 = 0,3(1+1)$$

Le même problème a été passé avec  $\nu = 0,5$ .

Cette fois, les déplacements doivent être nuls. On obtient effectivement des déplacements de l'ordre de  $10^{-20}$ .

Quant aux tensions, elles sont uniformes et valent :

$$\sigma_{rr} = 1$$

$$\sigma_{\theta\theta} = 1$$

$$\sigma_{zz} = 1$$

La pression vaut (-1). On vérifie d'autre part que

$$\sigma_{\theta\theta} = 0,5 (\sigma_{rr} + \sigma_{zz}) .$$

Enfin, on a repassé ce problème en introduisant explicitement des charges équivalentes, calculées indépendamment du programme. Elles sont telles que  $2 \pi r p = 1$ , soit

$$p = \frac{1}{2 \pi r} = \frac{1}{4 \pi} = 7,957747 \cdot 10^{-2}$$

Pour un cylindre incompressible, les déplacements doivent être nuls.

On obtient



Degré dépl.	Dépl. max.	Energie	Pression moyenne
2	$1,46 \cdot 10^{-12}$	$6,918756 \cdot 10^{-19}$	$- 7,957755 \cdot 10^{-2}$
3	$5,3610^{-21}$	$1,844212 \cdot 10^{-21}$	$- 7,957747 \cdot 10^{-2}$

### Essais de température

Le même cylindre a été soumis à une température constante et une force répartie sur la périphérie. La solution exacte est, dans ce cas :

$$u_r = \left[ (1+\nu) \alpha T - \frac{p(1+\nu)(1-2\nu)}{E} \right] r$$

$$u_z = 0$$

$$\sigma_r = - p$$

$$\sigma_\theta = - p$$

$$\sigma_z = - 2 p - E\alpha T$$

Dans notre cas,

$$E = 2,1 \cdot 10^4 \text{ dan/mm}^2$$

$$\nu = 0,3$$

$$\alpha = 10^{-6}$$

$$T = 100^\circ\text{C}$$

$$p = - 100 \text{ bar}$$

La solution exacte est alors donnée par

$$u_r = \left[ (1+\nu) \alpha T - \frac{p(1+\nu)(1-2\nu)}{E} \right] r$$

$$= (1,3 + 0,247619) \cdot 10^{-4} r = 1,547619 \cdot 10^{-4} r$$

Les résultats sont les suivants :

r	solution exacte	solution obtenue (degré 3)
0	0	0
1	$1,547619 \cdot 10^{-4}$	$1,547619 \cdot 10^{-4}$
2	$3,095238 \cdot 10^{-4}$	$3,095238 \cdot 10^{-4}$

Pour les tensions on a uniformément

$$\sigma_r = 1 \text{ hbar}$$

$$\sigma_z = -1,5 \text{ hbar}$$

$$\sigma_\theta = 1 \text{ hbar}$$

Or les valeurs théoriques sont

$$\sigma_r = \sigma_\theta = -p = 1 \text{ hbar},$$

$$\sigma_z = \nu(\sigma_r + \sigma_\theta) - E \alpha T = 0,6 - 2,1 \cdot 10^4 \cdot 10^{-6} \cdot 10^2 = -1,5 \text{ hbar}$$

Les résultats coïncident donc avec la solution théorique.

Le même problème a été passé au deuxième degré, pour  $\nu = 0,5$  mais sans la pression. Dans le cas, la solution théorique est

$$u_r = (1,5 \cdot 10^{-4} + 0) r . \text{ On a effectivement les résultats suivants}$$

r	0	1	2
$u_r$	0	$1,5 \cdot 10^{-4}$	$3 \cdot 10^{-4}$

Les tensions normales et circonférencielles sont nulles, tandis que la tension axiale vaut  $-2,1$ . Elle est bien égale à la valeur théorique donnée par

$$\sigma_z = - E \alpha T = - 2,1 \cdot 10^4 \cdot 10^{-6} \cdot 10^2 = - 2,1$$

Ici encore, on retombe sur les résultats théoriques.

En troisième lieu, on a repassé ce problème au troisième degré, avec  $\nu=0,5$  et avec la pression.

Les déplacements théoriques sont les mêmes que ci-dessus, et les résultats concordent avec cette solution. Quant aux tensions, elles doivent vérifier les relations

$$\sigma_\theta = \sigma_r = - p = 1 \text{ hbar}$$

$$\sigma_z = \nu(\sigma_r + \sigma_\theta) - E \alpha T = - p - 2,1 = 1,1 \text{ hbar}$$

Ce sont les résultats obtenus.

Enfin, la même structure a été soumise à une température linéairement variable et à la pression, pour  $\nu = 0,3$  (fig. T2)

La solution théorique de ce problème s'obtient aisément à partir de l'équation de Navier

$$\frac{2(1-\nu)}{1-2\nu} \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{u} - \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{u} = \frac{2(1+\nu)}{1-2\nu} \alpha \operatorname{grad} T$$

Pour un déplacement de la forme

$$\vec{u} = (u(r), 0, 0),$$

on a évidemment  $\operatorname{rot} \vec{u} = 0$

On peut donc écrire

$$(1+\nu) \operatorname{div} u = (1+\nu) \alpha T + A ;$$

soit  $\operatorname{div} u = \frac{1+\nu}{1-\nu} \alpha T + \frac{A}{1+\nu}$

Posant  $\frac{1+\nu}{1-\nu} \alpha T = 3kr$  ;  $\frac{A}{1+\nu} = 2C$ ,

on obtient alors

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r u) = 3kr + 2C$$

$$\frac{d}{dr} (ru) = 3kr^2 + 2Cr$$

$$ru = kr^3 + Cr^2 + D$$

$$u = kr^2 + Cr + \frac{D}{r}$$

Le cylindre passant par le centre, le dernier terme doit être nul.

Les déformations sont alors données par

$$\epsilon_{rr} = \frac{du}{dr} = 2kr + C \quad ; \quad \epsilon_{rr} - \alpha T = C + \frac{5\nu-1}{1+\nu} kr$$

$$\epsilon_{\theta\theta} = \frac{u}{r} = kr + C \quad ; \quad \epsilon_{\theta\theta} - \alpha T = C - \frac{2(1-2\nu)}{1+\nu} kr$$

$$\epsilon_{zz} = 0 \quad ; \quad \epsilon_{zz} - \alpha T = -\frac{3(1-\nu)}{1+\nu} kr$$

La tension radiale s'exprime par.

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= 2G \left[ (\epsilon_{rr} - \alpha T) + \frac{\nu}{1-2\nu} (\epsilon_{rr} + \epsilon_{\theta\theta} + \epsilon_{zz} - 3\alpha T) \right] \\ &= 2G \left[ \frac{C}{1-2\nu} - kr \right] \end{aligned}$$

A la périphérie, on doit avoir

$$\sigma_{rr} = -p,$$

ce qui détermine la constante C :

$$C = (1-2\nu) \left[ kR - \frac{p}{2G} \right] ,$$

où R est le rayon extérieur.

Dans notre cas,

$$\alpha = 10^{-6}$$

$$\alpha T = 10^{-4} r = k = 0,61904762 \cdot 10^{-4}$$

$$E = 2,1 \cdot 10^4 \text{ daN/mm}^2 = C = 0,74285714 \cdot 10^{-4}$$

Le tableau suivant donne la comparaison des résultats théoriques et numériques.

r (mm)	u(théorique)	u(obtenu)
1	1,36190476	1,361905
2	3,96190476	3,961905

On constate que la correspondance est parfaite.

## Cylindre fretté

Cet exemple est destiné à tester le comportement de l'élément au voisinage des éléments qui peuvent lui être joints en pratique : élément de volume, éléments de coque et de membrane axisymétrique. En outre, on a défini une matrice de Hooke anisotrope très spéciale : il s'agit de celle qui reproduit exactement les caractéristiques du type 13, c'est-à-dire transforme l'élément en un simple élément déplacement. Il s'agit donc de bloquer les pressions, qui n'ont pas de raideur. Enfin, on a introduit les coefficients de dilatation thermique selon la procédure anisotrope. La géométrie du problème (fig. CF1) est telle qu'une différence de comportement des deux éléments se manifesterait par une dissymétrie des résultats.

### Les données sont les suivantes

Module de Young :  $2,6 \cdot 10^4$  daN/mm<sup>2</sup>  
 Coefficient de Poisson : 0,3  
 Epaisseur des coques : 0,1 mm  
 Coefficient de dilatation thermique :  $10^{-6}$   
 Température : 100°C  
 Rayon intérieur : 10 mm  
 Rayon extérieur : 11 mm  
 Hauteur du cylindre : 2 mm  
 Fixations : fixation du mode rigide au milieu du cylindre.

La seule mise en charge consiste en la température. Il s'agit ici d'une dilatation libre, et il n'y aura donc pas de tensions. Le problème est passé au degré 3.

Les résultats sont les suivants :

Noeud	$10^3 \cdot \mu_r$
1	1,000000
3	1,000000
4	1,100002
6	1,100002

On constate qu'ils sont parfaitement symétriques.



## Cylindre composite sous pression interne

Il s'agit d'un cylindre en état plan de déformation, dont la partie interne, en matériau très souple et quasi-incompressible, est enserrée dans un cylindre mince en acier. Les données sont les suivantes (fig. CC1)

Module de Young de la partie centrale :  $E = 23,0769 \text{ daN/mm}^2$

Module de Young de la peau :  $E_c = 2,1 \cdot 10^4 \text{ daN/mm}^2$

Pression interne : 100 bars

Rayon intérieur : 200 mm

Rayon extérieur : 800 mm

Coefficient de Poisson du cylindre intérieur :  $\nu = 0,4995$

Epaisseur de la coque :  $t = 10 \text{ mm}$

L'idéalisation est représentée sur la figure (CC1). Le même problème a été passé avec des éléments cinématiquement admissibles (type 13) et des éléments déplacements-pression (type 9), aux degrés 1, 2 et 3.

On trouvera les résultats dans les tableaux CC1 à CC4. Ces résultats sont repris sur les figures CC2 à CC5.

Le tableau CC1 donne les déplacements aux noeuds situés sur le plan central de l'idéalisation. Dans le tableau CC2, on trouvera les tensions radiales. Il s'agit de moyennes d'éléments, sauf aux deux extrémités : à l'intérieur, on a repris la pression appliquée, tandis que pour la peau, on a évalué la pression à partir de l'effort circonférentiel dans la coque, par la formule des chaudières

$$p = \frac{N_{\theta\theta}}{r}$$

Les tableaux CC3 et CC4 donnent respectivement les tensions axiales et l'énergie pour les diverses idéalizations.

Au degré 3, les deux types d'éléments ont un comportement très semblable, comme en témoignent les résultats. Par contre, au degré 2 et surtout au degré 1, l'écart se creuse. Alors que l'élément déplacements-pression donne toujours des résultats très satisfaisants,

l'élément cinématiquement admissible devient nettement plus raide. Au degré 1, ses résultats sont franchement inacceptables. L'énergie est plus de dix fois trop faible, les déplacements sont d'un tout autre ordre de grandeur, et les tensions oscillent de façon anormale. Des erreurs aussi importantes ont déjà été constatées par HERRMANN [1] pour un cylindre du même type.

On constate donc que, même au degré 1, l'élément de type 9 donne d'excellents résultats pour  $\nu = 0,4995$ .

Les courbes de tensions radiales montrent qu'à l'interface entre la structure centrale et la peau, les tensions radiales se transforment convenablement en efforts circonférentiels de la coque, tant pour le type 9 que pour le type 13.

D'autres analyses ont été faites, pour comparer le comportement de l'élément pour  $\nu = 0,4995$  et pour  $\nu = 0,5$ . Les résultats sont portés aux figures CC7 et CC8. On constatera que les différences de résultats sont minimales.

Tableau CCl - Déplacements radiaux

r (mm)	Degré 1		Degré 2		Degré 3	
	ASP13	ASP9	ASP13	ASP9	ASP13	ASP9
100	0,3494440	2,136978	2,031934	2,039822	2,038486	2,026051
175	0,1902892	1,110893	0,8538457	1,159072	1,133362	1,152387
250	0,1409909	0,8056194	0,7281640	0,8007589	0,796191	0,8013795
325	0,1080402	0,6010287	0,5078640	0,6095363	0,6019375	0,6106072
400	0,09001300	0,4900606	0,4203625	0,4896328	0,4836039	0,4900628

Tableau CC2 - Tensions radiales (dAN/mm<sup>2</sup>)

r (mm)	1 <sup>er</sup> degré		2 <sup>ème</sup> degré		3 <sup>ème</sup> degré		Provenance
	ASP13	ASP9	ASP13	ASP9	ASP13	ASP9	
100	1	1	1	1	1	1	Pression imposée
125	0,2974	0,8666	0,7720	0,8984	0,8855	0,8989	Tensions moyennes d'éléments
175	-0,2563	0,7829	0,6137	0,7988	0,7741	0,8000	
225	0,1867	0,7452	0,6333	0,7496	0,7415	0,7503	
275	0,1608	0,7206	0,6207	0,7280	0,7193	0,7292	
325	0,04839	0,7012	0,6034	0,7173	0,7076	0,7177	
375	0,1161	0,7027	0,6020	0,7089	0,7003	0,7097	
400	0,105225	0,69525	0,5985	0,70625	0,6975	0,70675	Effort dans la peau

Degré 1		Degré 2		Degré 3	
ASP13	ASP9	ASP13	ASP9	ASP13	ASP9
0,2648	0,6561	0,4815	0,6855	0,6562	0,6951
-0,2713	0,6722	0,5330	0,6859	0,6814	0,6952
0,1766	0,6826	0,6307	0,6857	0,6759	0,6952
0,1540	0,6786	0,5763	0,6858	0,6768	0,6952
0,04418	0,6707	0,5790	0,6860	0,6778	0,6952
0,1124	0,6799	0,5863	0,6860	0,6776	0,6952

Tableau CC4 - Energie

	Degré 1	Degré 2	Degré 3
ASP13	$3,723212 \cdot 10^4$	$2,157562 \cdot 10^5$	$2,513964 \cdot 10^5$
ASP9	$2,505437 \cdot 10^5$	$2,545124 \cdot 10^5$	$2,547474 \cdot 10^5$

## Etude d'un propulseur à poudre

Le propulseur est représenté à la figure PP1. Il s'agit d'une coque cylindrique en acier, présentant d'un côté un fond sphérique et terminé de l'autre côté par une tuyère. La coque est remplie d'un pain de poudre creux, hachuré sur la figure.

Le problème consiste à étudier cette structure sous une pression intérieure de 100 bar.

Les données sont les suivantes :

### Coque :

Module de Young :  $E = 2,1 \cdot 10^4 \text{ daN/mm}^2$

Coefficient de Poisson :  $\nu = 0,3$

Epaisseur : 5mm

### Poudre :

Module de Young :  $E = 10 \text{ daN/mm}^2$

Coefficient de Poisson :  $\nu = 0,5$

On suppose que le déplacement axial de la coque est fixé à l'extrémité de la tuyère. Le découpage par éléments finis est représenté à la figure PP2. Pour assurer une bonne condensation des multiplicateurs, le découpage en sous-structures a été spécifié expressément, de façon que la structure soit analysée par tranches. Ce découpage est représenté par des traits pointillés sur la figure PP2.

Du fait que les éléments sont de degré 2, on est alors certain que les multiplicateurs soient condensés en même temps que des déplacements normaux d'interface de la sous-structure, le nombre de ces déplacements excède toujours le nombre de multiplicateurs.

Le problème comporte 852 degrés de liberté, répartis en 29 sous-structures. Il a exigé 92,2 secondes CPU sur ordinateur IBM 370/158.

Les résultats font apparaître une forte variation des tensions dans la coque, au droit de la zone de décollement de la poudre. Les efforts dans la coque sont repris dans le tableau suivant :

Elément	$\sigma_{ss}$ (N)	$\sigma_{ss}$ (M)	$\sigma_{ext}$	$\sigma_{int}$
131	17,8	- 0,24	17,6	18,0
132	18,4	+ 0,54	18,9	17,9
133	18,3	- 0,69	17,6	19,0
134	18,5	- 1,06	17,4	19,6
135	19,0	0,91	19,9	18,1
136	19,2	0,67	19,9	18,5
137	19,4	- 0,25	19,2	19,7
138	19,4	+ 0,08	19,5	19,3
139	19,5	- 0,01	19,5	19,5
140	19,5	0,03	19,5	19,5
141	19,5	- 0,01	19,5	19,5
142	19,4	- 0,00	19,4	19,4
143	19,4	0,00	19,4	19,4
144	19,4	0,00	19,4	19,4
145	19,4	- 0,01	19,4	19,4
146	19,5	- 0,01	19,5	19,5
147	19,5	+ 0,02	19,5	19,5
148	19,5	0,01	19,5	19,5
149	19,5	- 0,01	19,5	19,5
150	19,5	- 0,01	19,5	19,5
151	19,6	- 0,02	19,6	19,6
152	19,6	0,16	19,8	19,4
153	19,7	- 0,70	19,0	20,4
154	19,8	- 1,74	18,1	21,5
155	19,9	5,61	25,5	14,3
156	20,0	28,2	48,2	- 8,2
157	20,0	-21,1	- 1,1	41,1
158	27,9	- 0,02	21,9	21,9
159	19,2	8,30	27,5	10,9
160	10,7	- 6,21	4,5	16,9
161	7,5	- 1,12	6,4	8,6
162	7,5	- 0,58	6,9	8,1
163	10,0	- 0,03	10,0	10,0
164	13,7	- 0,70	13,0	14,4
165	17,6	- 1,84	15,8	19,4
166	20,7	68,4	89,1	-47,7



Ces résultats sont représentés à la figure PP3.

On a calculé les efforts au niveau de la jonction de la coque à la poudre. et ils sont représentés sur la figure PP4.

On constate que, dans ce cas-ci, la pression sur la coque varie peu au voisinage du décollement. Cet effort de jonction est évalué comme suit : pour chaque noeud, on divise la charge par un facteur tenant compte de la surface sur laquelle elle agit. Ces calculs sont repris dans le tableau suivant :

Efforts sur le pain de poudre

Noeud 1	Noeud 2	effort	facteur de réduction	effort réduit
72		$2,04938 \cdot 10^4$	2	$1,02469 \cdot 10^4$
72	75	$4,10486 \cdot 10^4$	4	$1,02622 \cdot 10^4$
75		$2,05649 \cdot 10^4$	2	$1,02825 \cdot 10^4$
75	79	$4,12126 \cdot 10^4$	4	$1,03032 \cdot 10^4$
79		$1,54318 \cdot 10^4$	1,5	$1,02878 \cdot 10^4$
79	83	$2,05017 \cdot 10^4$	2	$1,02508 \cdot 10^4$
83		$1,017174 \cdot 10^4$	1	$1,017174 \cdot 10^4$
83	87	$2,00215 \cdot 10^4$	2	$1,00108 \cdot 10^4$
87		$1,01486 \cdot 10^4$	1	$0,96242 \cdot 10^4$
87	91	$2,06822 \cdot 10^4$	2	$1,03411 \cdot 10^4$
91		$1,021017 \cdot 10^4$	1	$1,021017 \cdot 10^4$
91	95	$2,01586 \cdot 10^5$	2	$1,00793 \cdot 10^4$
95		$1,035256 \cdot 10^4$	1	$1,035256 \cdot 10^4$

Les efforts réduits sont représentés à la figure PP4.

On constate qu'ils varient peu dans la zone de décollement, et, en tout cas, restent positifs : la géométrie choisie ne favorise donc pas le décollement.

Enfin, on trouvera en figure PP5 une représentation de la déformée de la coque et du pain de poudre dans cette même région.

Références

- [ 1 ] L.R. HERRMANN  
Elastic equations for incompressible and nearly incompressible materials by a variational theorem  
AIAA Journal, Vol.3 n°10, pp 1896-1900
- [ 2 ] PIN TONG  
An assumed stress hybrid finite element method for an incompressible and nearly incompressible material  
Int. J. Solids Structures, 1969, Vol.5, pp 655-461  
Pergamon Press
- [ 3 ] J.-F. DEBONGNIE  
Elément de coque à géométrie de révolution  
Rapport L.T.A.S. VF-24, Juin 1974
- [ 4 ] A.M. MOL  
Eléments à symétrie axiale  
Rapport L.T.A.S. SF-29, Décembre 1973
- [ 5 ] Manuel théorique du programme SAMCEF. Rapport L.T.A.S. IF-4

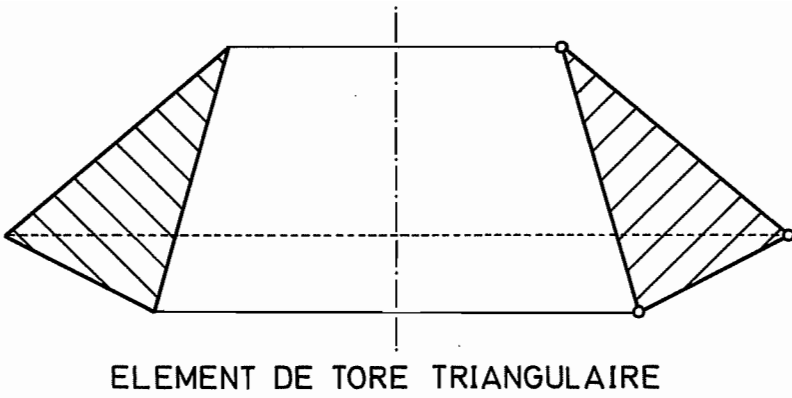


FIG. 1

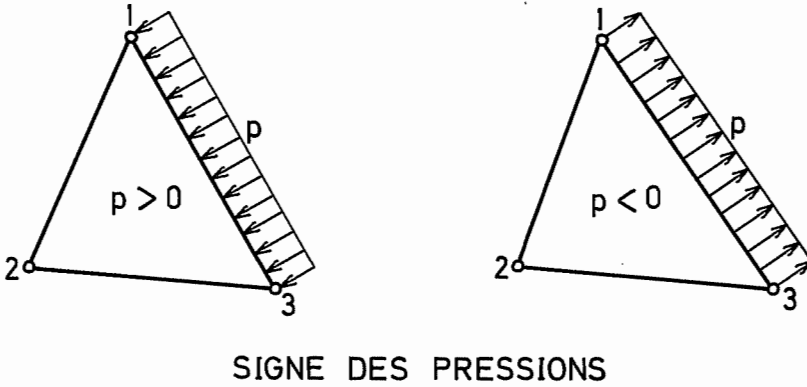
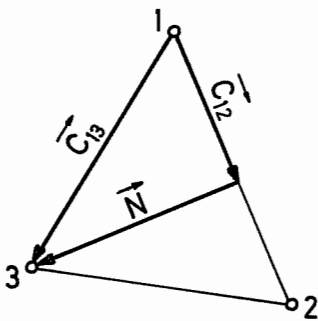


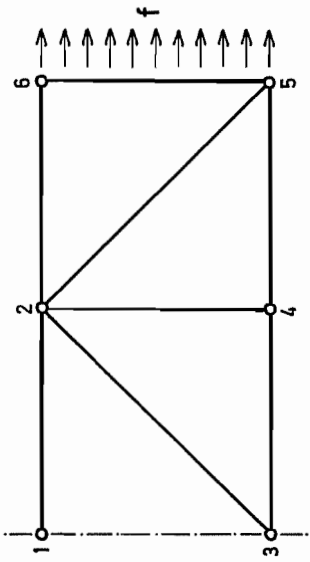
FIG. 2



$$\vec{N} = \vec{C}_{13} - \frac{\vec{C}_{13} \cdot \vec{C}_{12}}{\vec{C}_{12} \cdot \vec{C}_{12}} \vec{C}_{12}$$

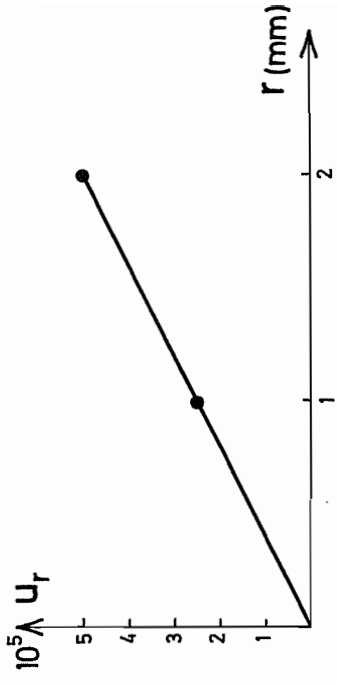
FIG. 3

DETERMINATION DE LA NORMALE INTERIEURE



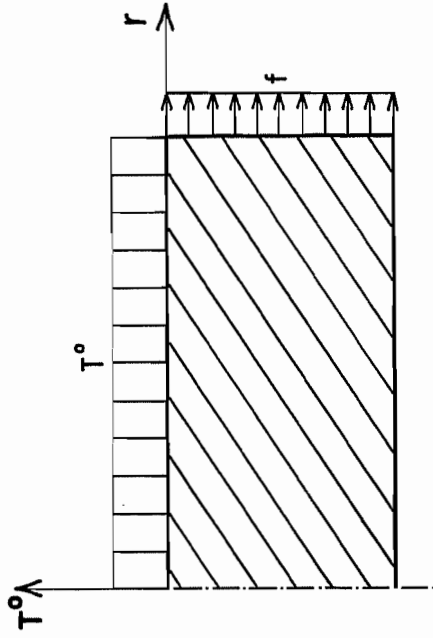
CYLINDRE COMPRESSIBLE  
SOU MIS A UNE TRACTION PERIPHERIQUE

FIG. CT1



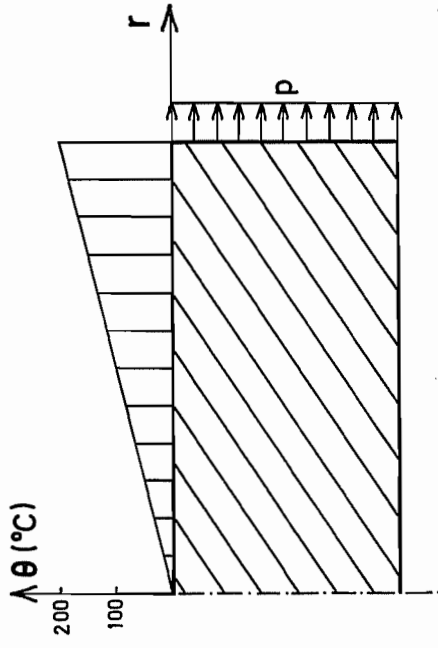
DEPLACEMENTS RADIAUX

FIG. CT2



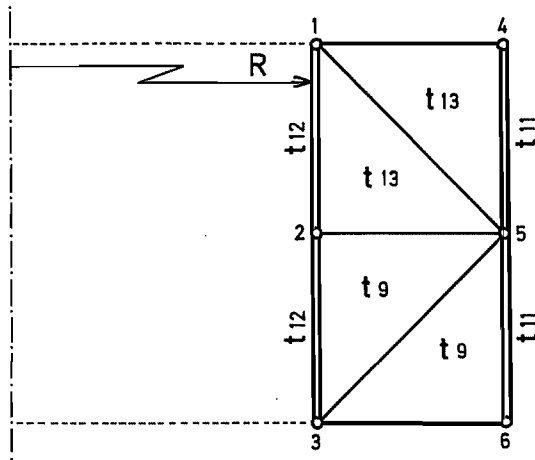
TEMPERATURE CONSTANTE  
FORCE A LA PERIPHERIE

FIG. T1



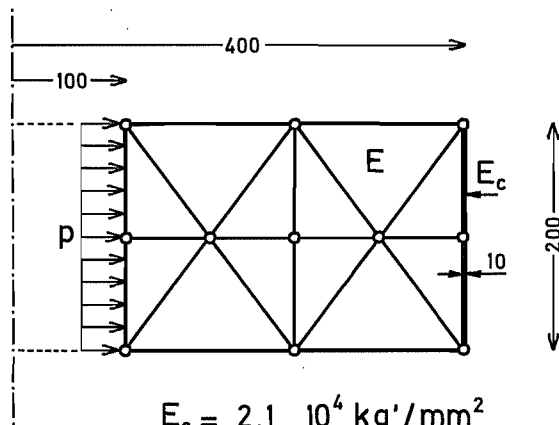
CYLINDRE SOUMIS A UNE TEMPERATURE  
LINEAIREMENT VARIABLE

FIG. T2



CYLINDRE FRETTE

FIG. CF1



$$E_c = 2,1 \cdot 10^4 \text{ kg'/mm}^2$$

$$E = 23,0769 \text{ kg'/mm}^2$$

$$p = 1 \text{ kg'/mm}^2$$

IDEALISATION DU CYLINDRE COMPOSITE

FIG. CC1

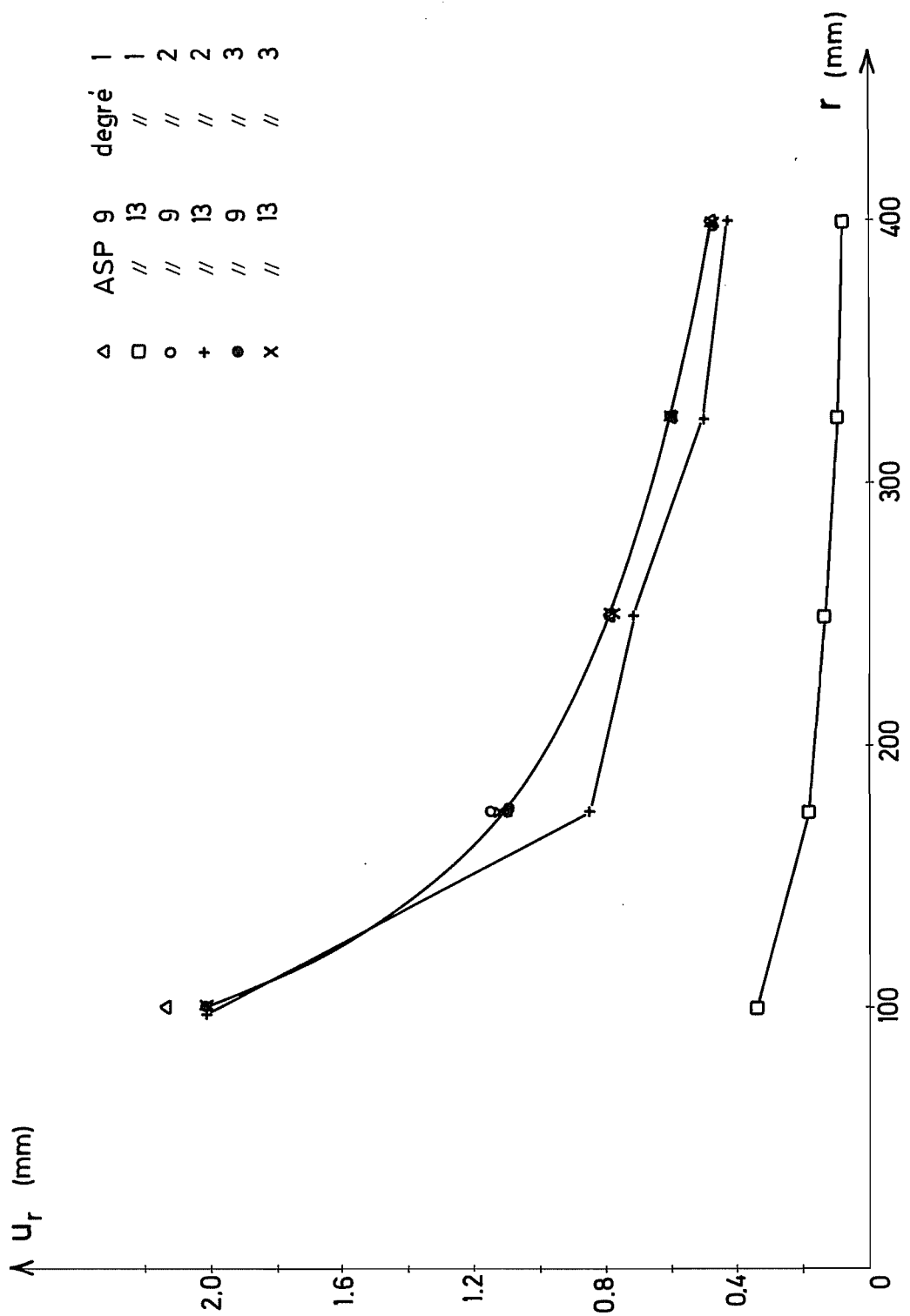


FIG. CC2 DEPLACEMENTS RADIAUX

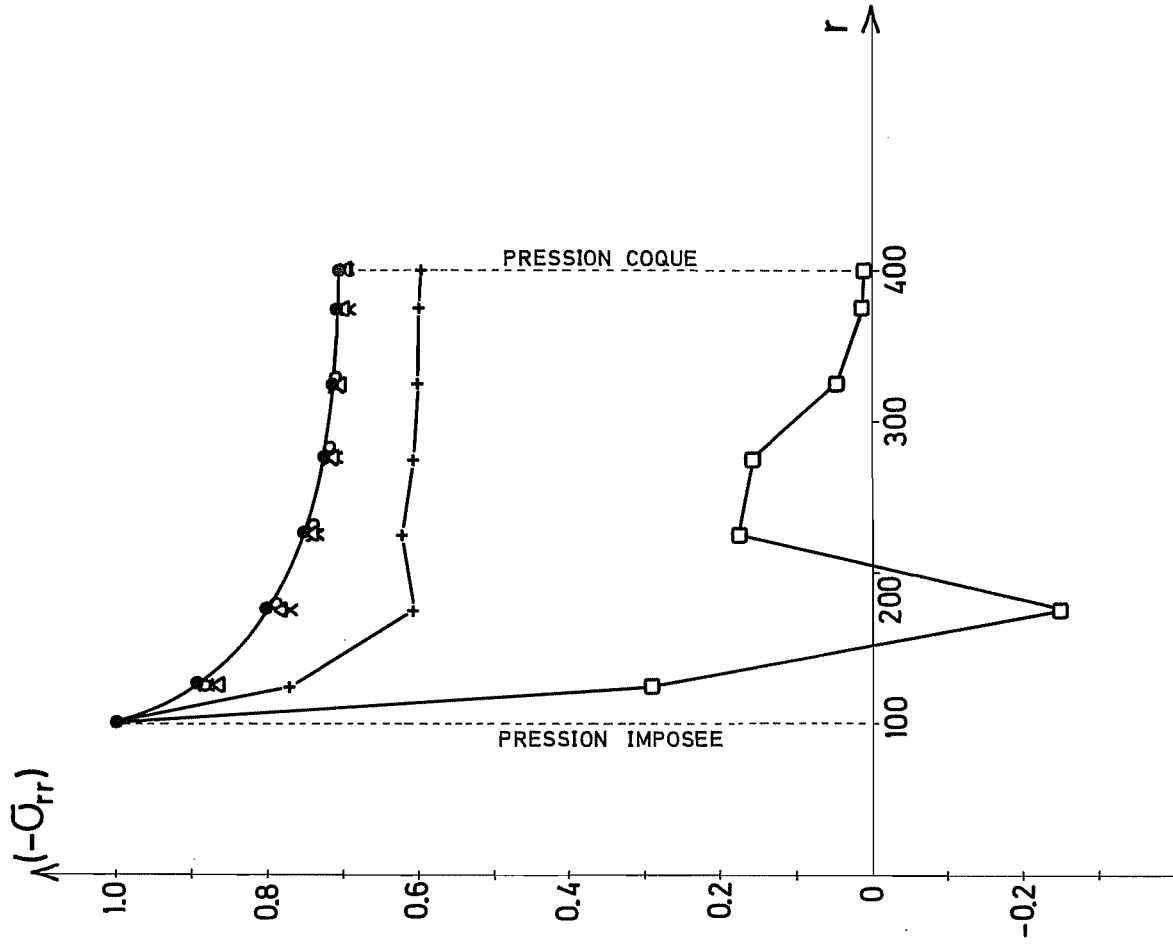


FIG. CC3 TENSIONS RADIALES



+	x	o	•	□	▽	ASP 13	degré	1
						//	//	1
						//	//	2
						//	//	2
						//	//	3
						//	//	3

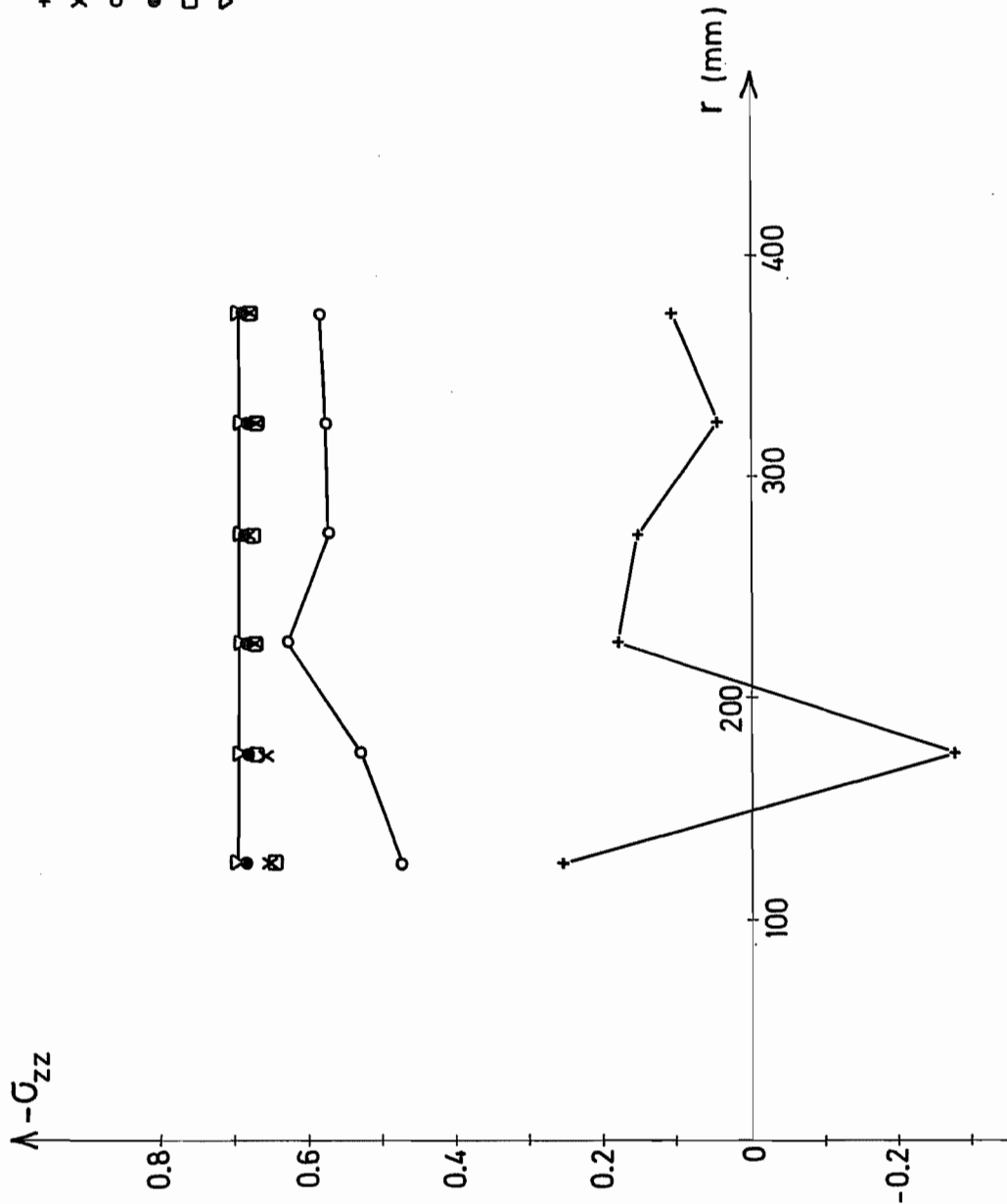


FIG. CC4 TENSIONS AXIALES

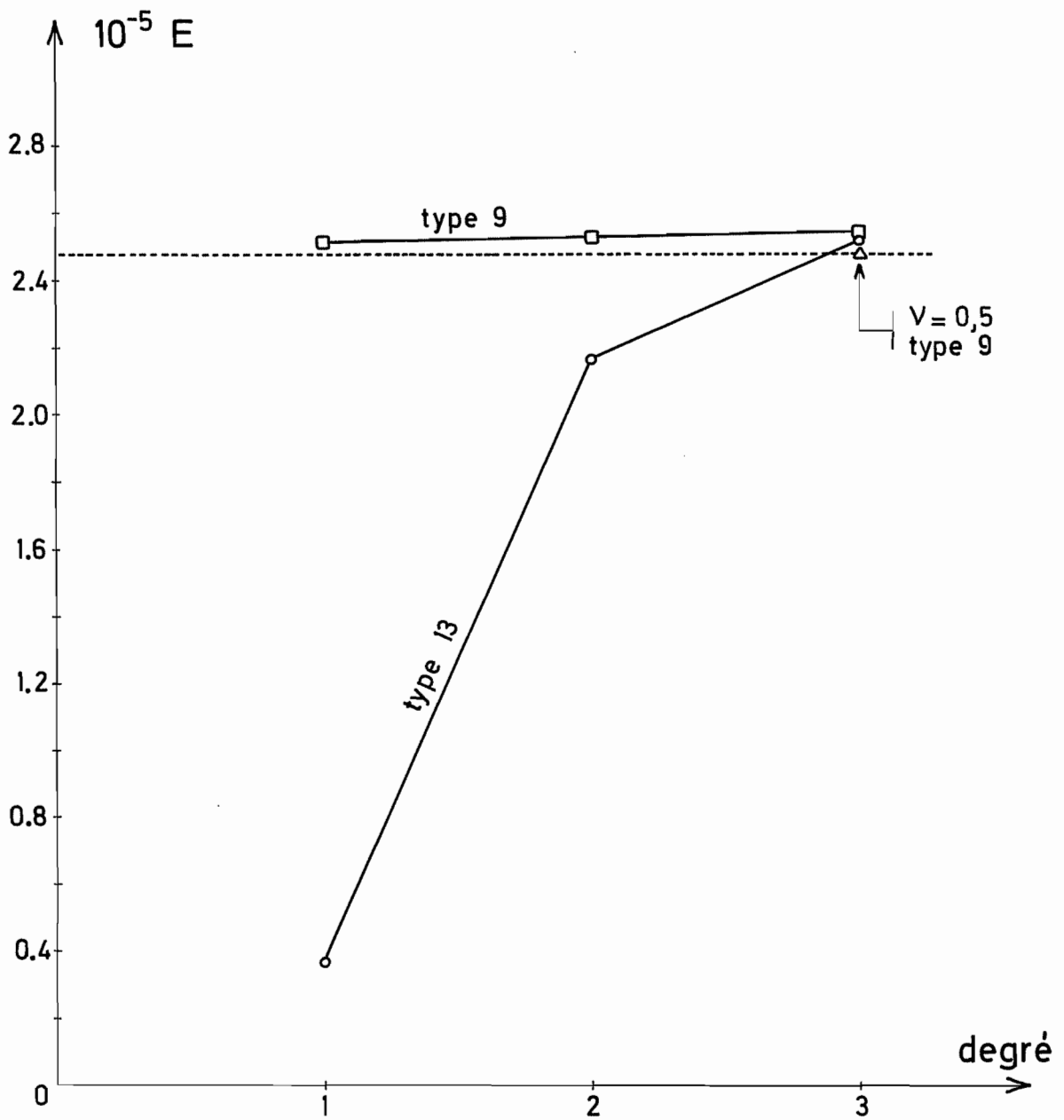


FIG. CC5

CONVERGENCE EN ENERGIE  $V = 0,4995$

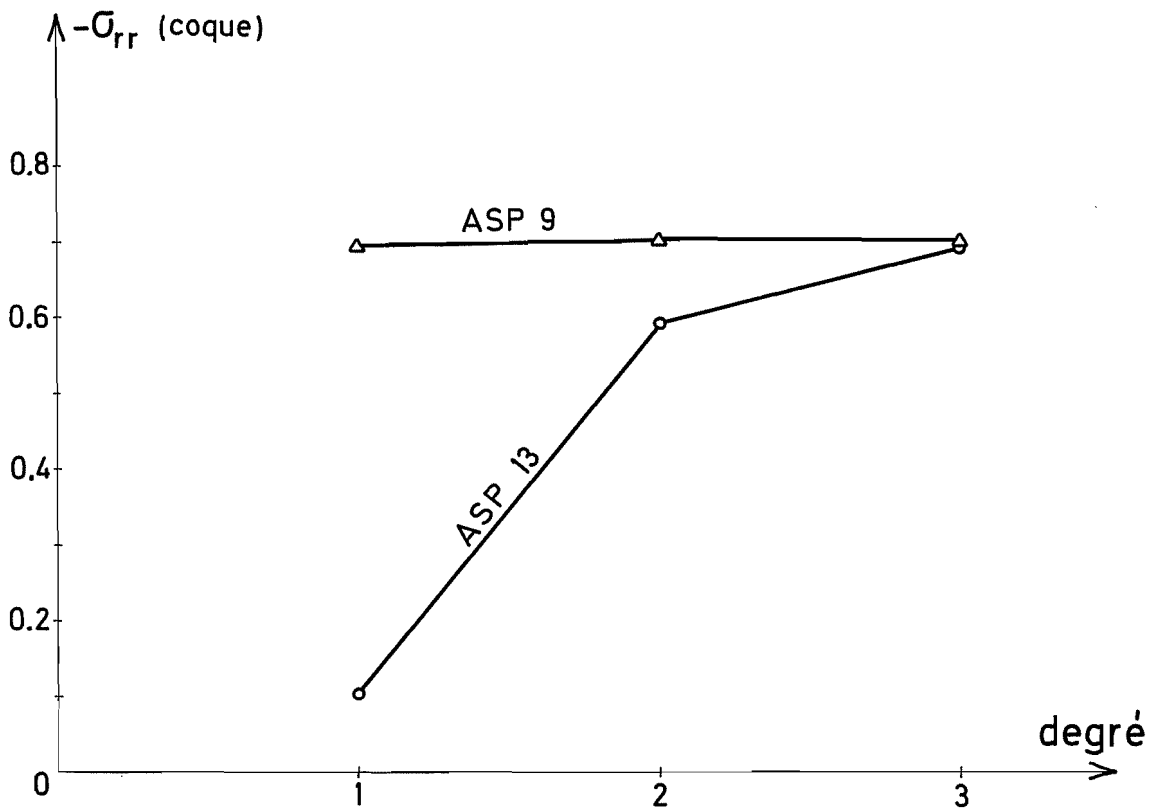


FIG. CC 6

PRESSION APPLIQUEE A LA COQUE  
PAR LA PARTIE CENTRALE

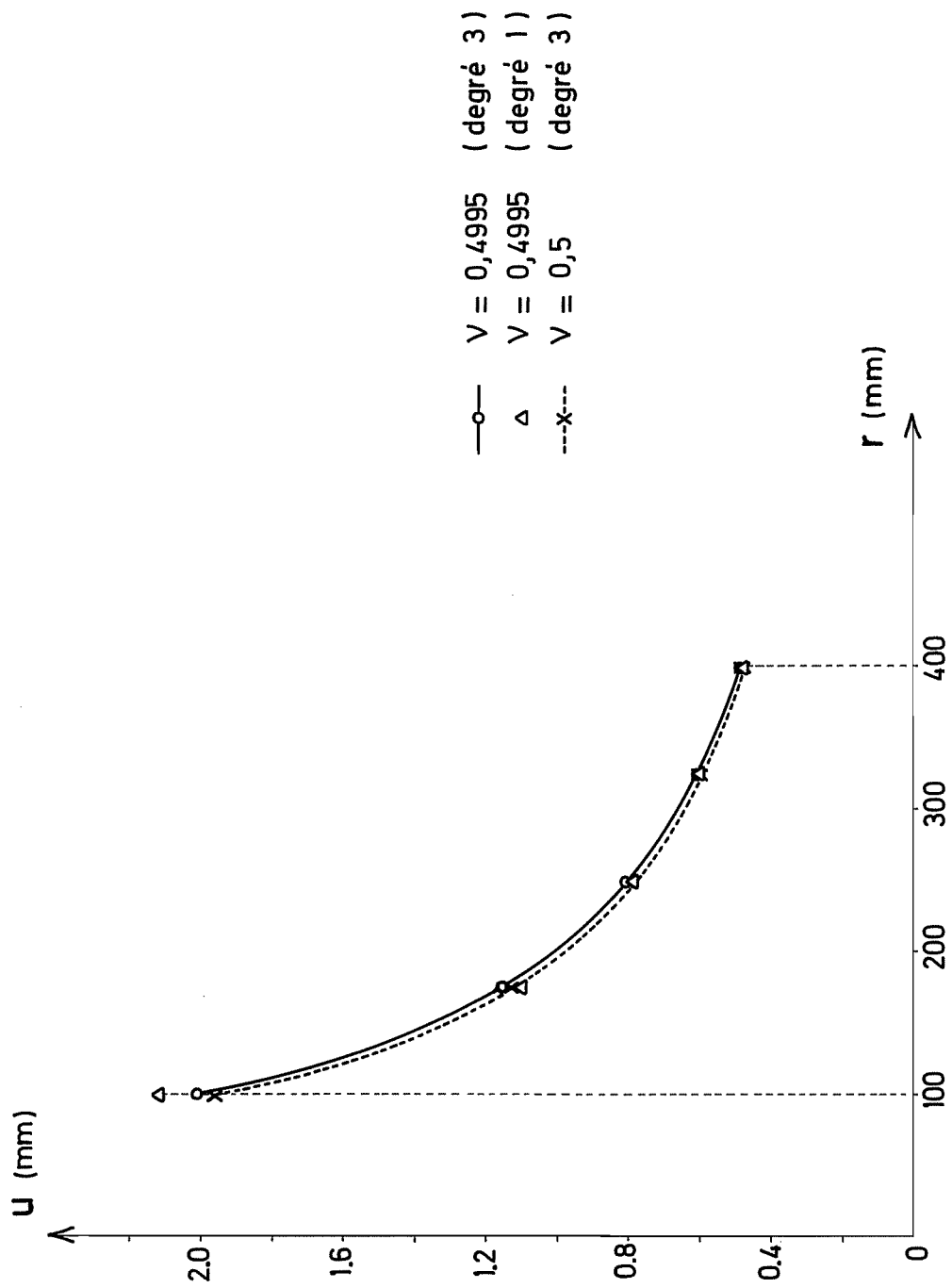
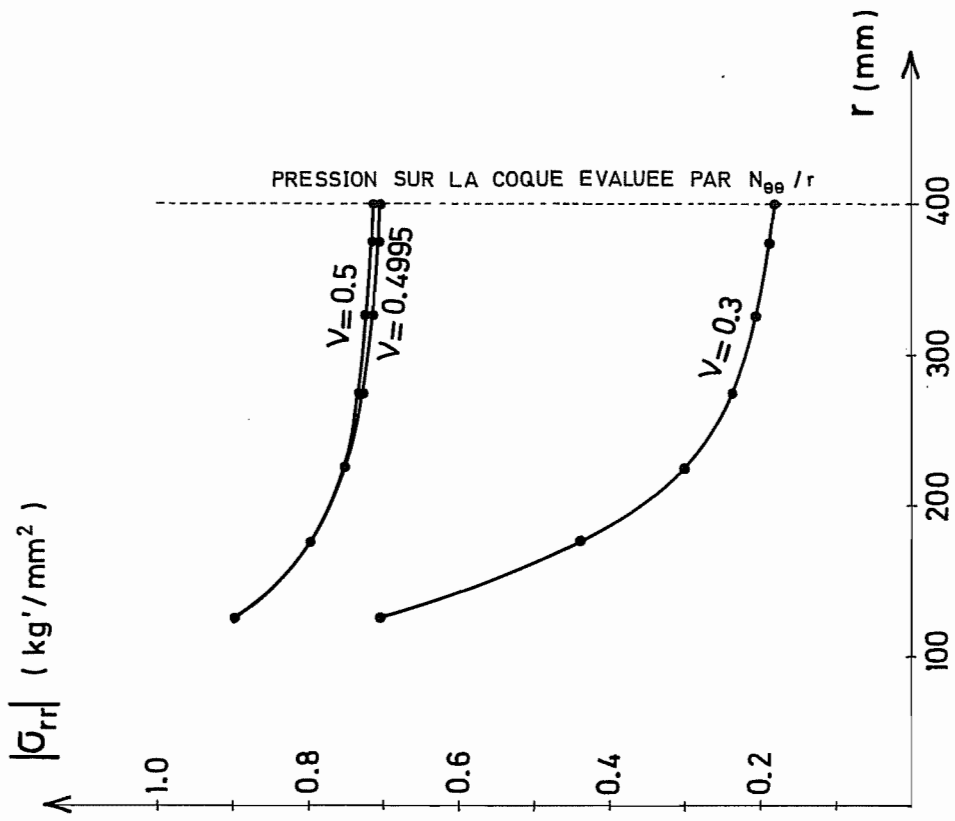
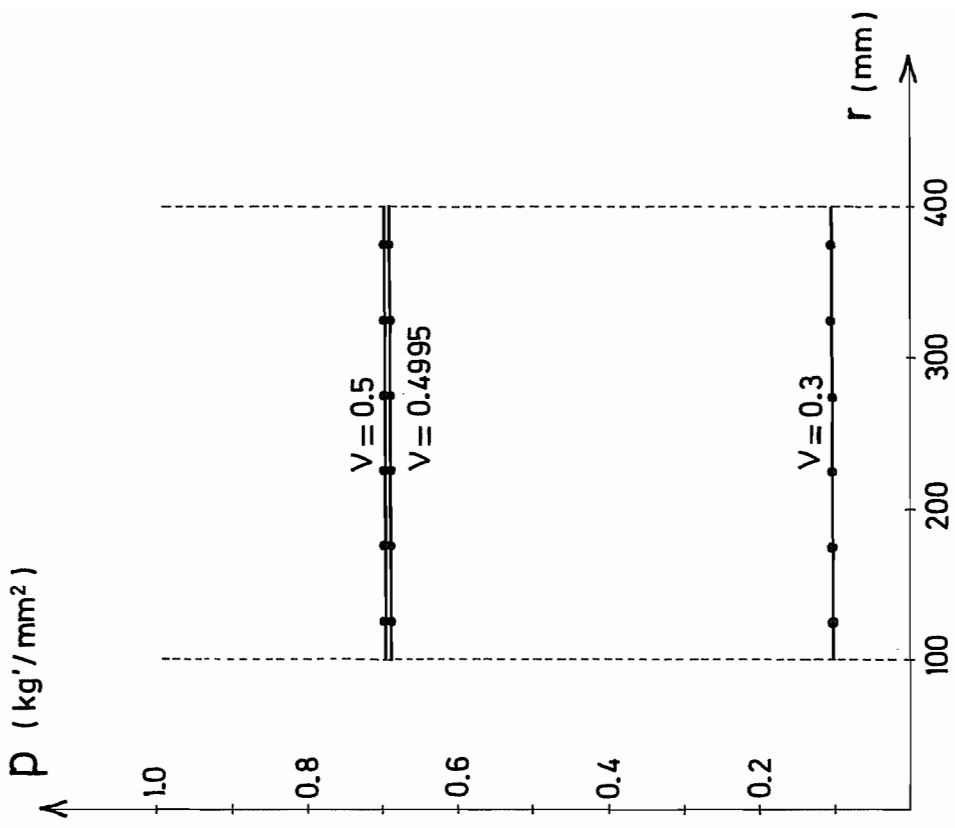


FIG. CC7 DEPLACEMENTS RADIAUX



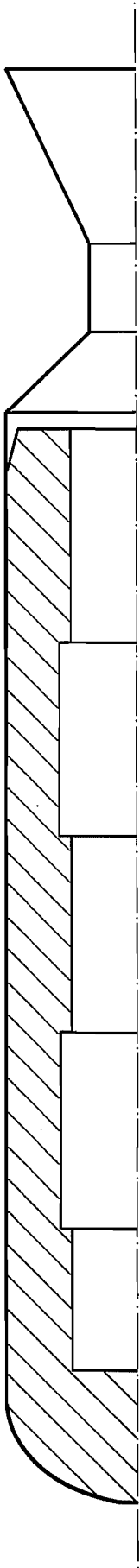
TENSIONS RADIALES POUR DIFFERENTES VALEURS  
DU COEFFICIENT DE POISSON

FIG. CC8



PRESSION MOYENNE POUR DIFFERENTES VALEURS  
DU COEFFICIENT DE POISSON

FIG. CC9



echelle : 1/2

FIG. PP1 PROPULSEUR A POWDRE

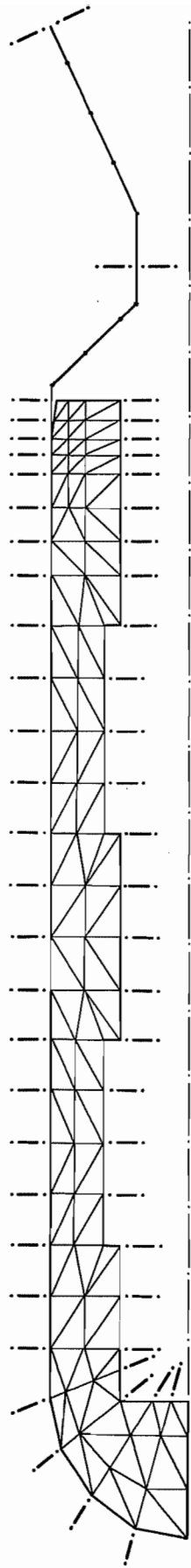


FIG. PP2      MODELE PAR ELEMENTS FINIS

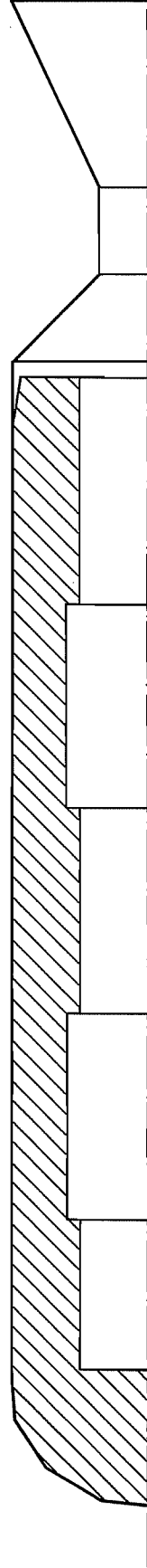
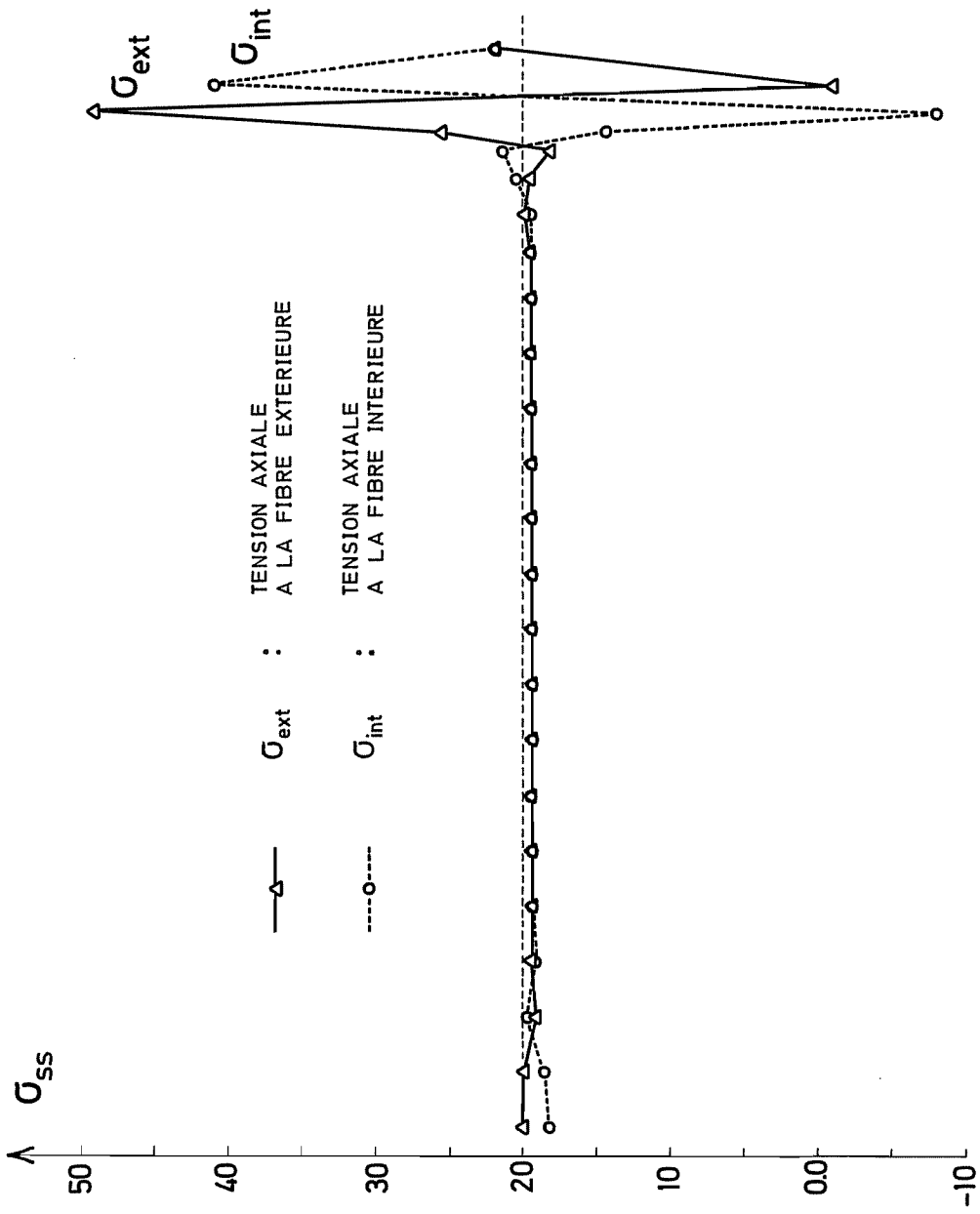


FIG. PP3 TENSIONS AXIALES DANS LA COQUE



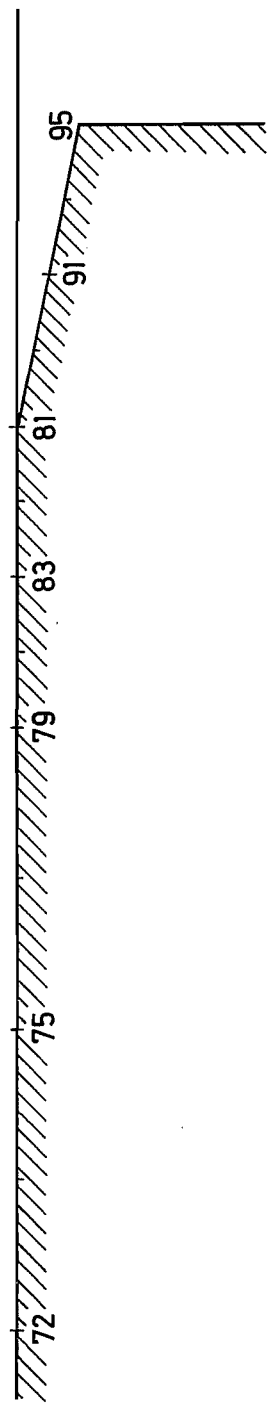
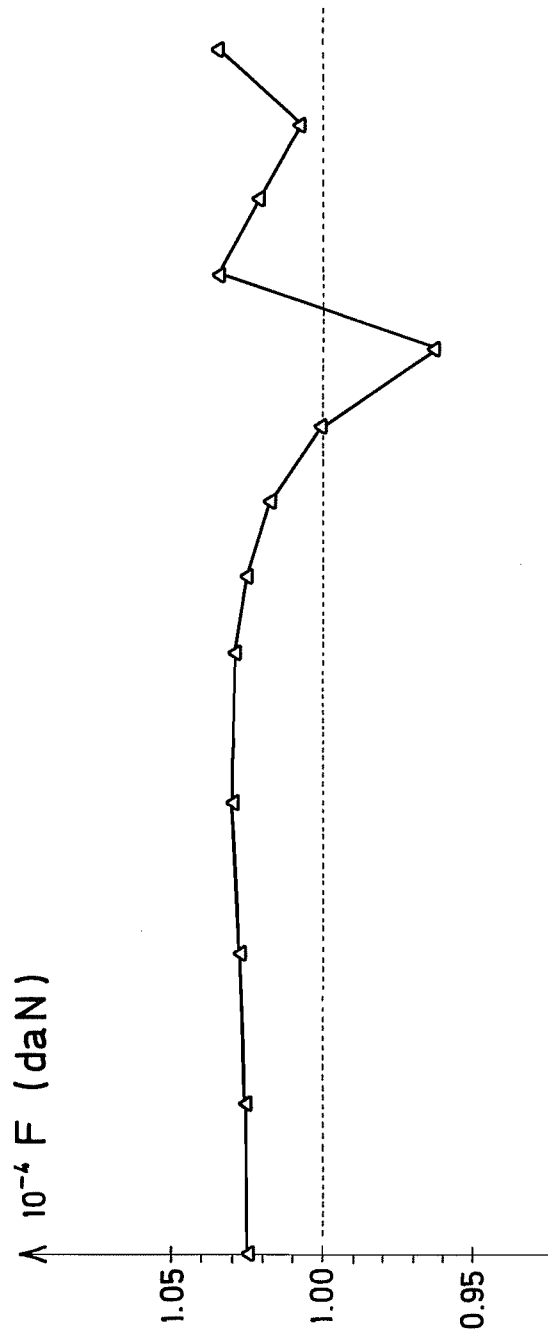
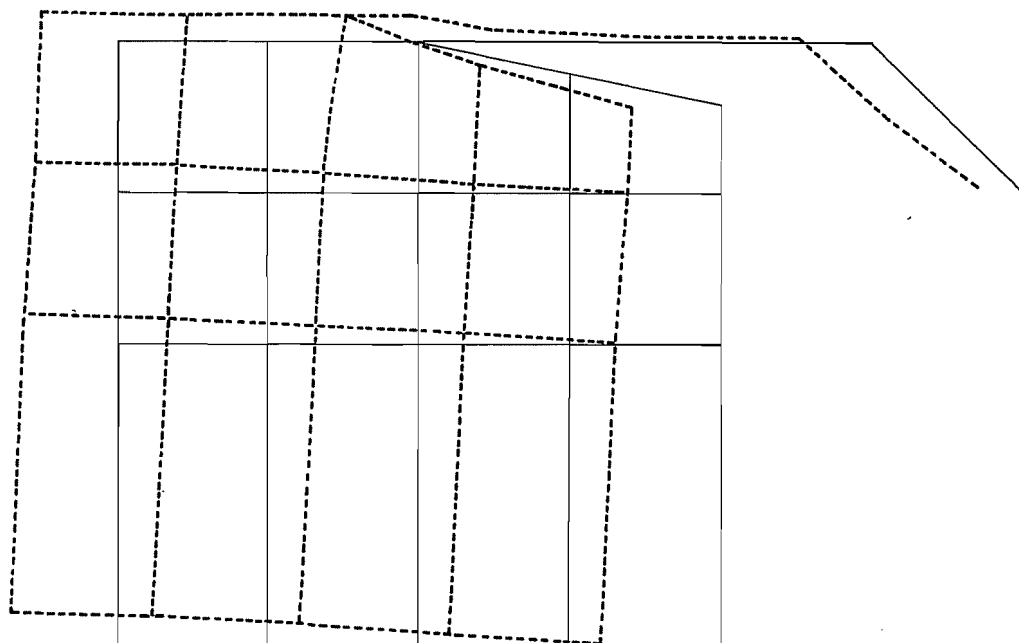


FIG. PP4 EFFORTS DE JONCTION DU PAIN DE POWDRE ET DE LA COQUE



DEFORMEE A LA JONCTION DE LA COQUE ET LA POWDRE

FIG. PP5