MÉMOIRE

SUR

LES COURBES DU TROISIÈME ORDRE

PAR

M. F. FOLIE,
MEMBRE DE L'ACADÉMIE ROYALE DE BELGIQUE

ET

M. C. LE PAIGE,
PROFESSEUR A L'UNIVERSITÉ DE LIÉGE.

(SECONDE PARTIE.)

(Présenté à la Classe des Sciences, dans la séance du 4 mars 1882.)

MÉMOIRE

SUR

LES COURBES DU TROISIÈME ORDRE.

CHAPITRE PREMIER.

HOMOGRAPHIE.

Dans la première partie de ce travail, nous avons exposé successivement les théories de l'homographie, de l'involution et du rapport anharmonique du troisième ordre.

Nous nous proposons maintenant d'en faire l'application aux cubiques.

Nous devrons faire connaître d'abord quelques conséquences se déduisant sans peine des résultats donnés au commencement de notre mémoire : nous nous bornerons d'ailleurs à rappeler les propositions que nous aurons à employer, en renvoyant, pour la démonstration, aux notes spéciales publiées sur ce sujet.

Nous avons dit : la relation

$$f = \Sigma a_{ikl} x_i y_k z_l = 0,$$

définit trois séries homographiques.

Parmi les covariants de la forme f, nous avons surtout fait remarquer les trois formes quadratiques Σ_1, Σ_2, Σ_3, et le covariant trilinéaire k.

On peut vérifier sans peine que les trois formes Σ ont un même discriminant Δ; nous l'avons appelé le *discriminant* de f.

Si Δ n'est pas nul, les covariants Σ, égalés à zéro, ont des racines distinctes.

Représentons par u_1, u_2; v_1, v_2; w_1, w_2, les facteurs linéaires de ces trois formes quadratiques : nous avons fait voir (*) que, dans ce cas, f peut s'écrire

$$f = \lambda u_1 v_1 w_1 + \lambda' u_2 v_2 w_2. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Si, au contraire, $\Delta = 0$, deux cas peuvent se présenter.

Lorsque, en même temps que Δ, deux covariants Σ s'annulent identiquement, la forme f est décomposable (**); si cette condition n'est pas remplie, les trois covariants Σ sont des carrés, et la forme trilinéaire ne peut être ramenée à la forme canonique (1).

Comme seconde expression canonique de f, nous avons employé

$$\begin{aligned} f = \lambda_1(x_1 - \delta_1 x_2)(y_1 - \delta'_1 y_2)(z_1 - \delta''_1 z_2) + \lambda_2(x_1 - \delta_2 x_2)(y_1 - \delta'_2 y_2)(z_1 - \delta''_2 z_2) \\ + \lambda_3(x_1 - \delta_3 x_2)(y_1 - \delta'_3 y_2)(z_1 - \delta''_3 z_2). \quad . \quad (2) \end{aligned}$$

Les propriétés dont nous venons de parler nous seront fort utiles dans la suite de ce travail.

Théorème I. — *Le lieu des intersections des rayons homologues de trois faisceaux homographiques est une cubique, passant par les centres des trois faisceaux.*

Si nous représentons par

$$\alpha = 0, \quad \beta = 0, \quad \gamma = 0,$$

les trois côtés d'un triangle qui a pour sommets les centres des faisceaux, les équations de trois droites passant par ces sommets pourront s'écrire

$$x_2\alpha - x_1\beta = 0, \quad y_2\beta - y_1\gamma = 0, \quad z_2\gamma - z_1\alpha = 0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

(*) Voir, sur les formes trilinéaires, outre la première partie de ce travail, les Mémoires suivants de M. C. Le Paige : *Comptes rendus*, t. XCII, p. 1048 et p. 1103; *Atti dell' Accademia de Nuovi Lincei*, t. XXXIV; *Bull. de l'Acad. roy. de Belg.*, 3e série, t. II, p. 40.

(**) Ire partie, p. 11.

Si ces droites appartiennent à trois faisceaux homographiques, nous aurons la relation

$$f = \Sigma a_{ikl} x_i y_k z_l = 0. \qquad (4)$$

En éliminant les x, les y et les z entre les équations (3) et (4), nous trouvons, conformément au principe de la théorie des faisceaux (*), le lieu des points triples de ces intersections.

Nous avons ainsi l'équation

$$(a_{111} + a_{222})\alpha\beta\gamma + a_{112}\alpha^2\beta + a_{121}\alpha\gamma^2 + a_{211}\beta^2\gamma + a_{122}\alpha^2\gamma + a_{212}\alpha\beta^2 + a_{221}\beta\gamma^2 = 0, \qquad (5)$$

équation d'une cubique passant par les centres des trois faisceaux.

THÉORÈME II. — *Toute courbe du troisième ordre peut être engendrée par les intersections des rayons homologues de trois faisceaux homologues, ayant leurs centres en trois points quelconques de la courbe.*

En représentant (**) encore par

$$\alpha = 0, \quad \beta = 0, \quad \gamma = 0,$$

les côtés d'un triangle qui a ses trois sommets en trois points quelconques d'une cubique C_3, l'équation de cette courbe peut s'écrire

$$A_{112}\alpha^2\beta + A_{113}\alpha^2\gamma + A_{122}\alpha\beta^2 + A_{223}\beta^2\gamma + A_{133}\alpha\gamma^2 + A_{233}\beta\gamma^2 + 2A_{123}\alpha\beta\gamma = 0. \qquad (6)$$

Pour l'identifier avec l'équation (5), il suffira de poser

$$\begin{aligned} a_{111} &= A_{123} + \theta; & a_{112} &= A_{112}, & a_{121} &= A_{133}, & a_{211} &= A_{223}, \\ a_{122} &= A_{113}, & a_{212} &= A_{122}, & a_{221} &= A_{233}, & a_{222} &= A_{123} - \theta. \end{aligned}$$

La forme trilinéaire dépend, on le voit, d'une indéterminée θ.

Par suite, c'est d'une infinité de manières que l'on peut engendrer une

(*) F. FOLIE, *Bull. de l'Acad. roy. de Belg.*, 2e série, t. XLVI, p. 193; *Bull. de Darboux*, 2e série, t. III, p. 278.

(**) C. LE PAIGE, *Sur la théorie des formes trilinéaires*, C. R., t. XCIII, p. 264.

cubique donnée par les intersections de trois faisceaux homographiques, ayant leurs centres en trois points donnés de cette courbe.

Ceci va nous conduire à la démonstration de propriétés essentielles des cubiques.

Si nous calculons le discriminant de la forme trilinéaire

$$f = (A_{123} + \theta)x_1y_1z_1 + A_{112}x_1y_1z_2 + A_{133}x_1y_2z_1 + A_{223}x_2y_1z_1 + A_{113}x_1y_2z_2 + A_{122}x_2y_1z_2 \\ + A_{233}x_2y_2z_1 + (A_{123} - \theta)x_2y_2z_2,$$

nous aurons

$$\begin{aligned} -\frac{\Delta}{2} = \theta^4 &+ 2\theta^2[A_{113}A_{223} - A_{123}^2 + A_{133}A_{122} + A_{112}A_{233}] + 4\theta[A_{122}A_{233}A_{113} - A_{112}A_{133}A_{223}] \\ &+ \big[A_{123}^4 + A_{223}^2A_{113}^2 + A_{133}^2A_{122}^2 + A_{112}^2A_{233}^2 - 2A_{123}^2(A_{223}A_{113} + A_{133}A_{122} + A_{112}A_{233}) \\ &\quad - 2A_{113}A_{223}A_{133}A_{122} - 2A_{133}A_{122}A_{112}A_{233} - 2A_{112}A_{233}A_{113}A_{223} \\ &\quad + 4A_{123}(A_{112}A_{133}A_{223} + A_{122}A_{113}A_{233})\big] \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (7) \end{aligned}$$

D'après cela, nous pouvons donner à θ une infinité de valeurs qui rendent Δ négatif; alors les trois équations

$$\Sigma_1 = 0, \quad \Sigma_2 = 0, \quad \Sigma_3 = 0,$$

auront leurs racines réelles.

Pour toutes ces valeurs de θ, qui n'annulent pas Δ, la forme trilinéaire peut s'écrire

$$f = \lambda u_1v_1w_1 + \lambda' u_2v_2w_2,$$

ou, plus explicitement,

$$f = \lambda_1(x_1 - \delta_1x_2)(y_1 - \delta_1'y_2)(z_1 - \delta_1''z_2) + \lambda_2(x_1 - \delta_2x_2)(y_1 - \delta_2'y_2)(z_1 - \delta_2''z_2).$$

Nous nous occuperons tantôt de ce cas.

Mais, de plus, nous pouvons choisir θ de quatre manières distinctes, de telle sorte que Δ s'annule.

Alors puisque, en général, aucun des covariants Σ ne s'évanouit identiquement, ces trois covariants Σ sont des carrés, et la forme canonique (1) est impossible.

Il vient, en conséquence :

$$\Sigma_1 = (x_1 - \delta_1 x_2)^2; \quad \Sigma_2 = (y_1 - \delta'_1 y_2)^2; \quad \Sigma_3 = (z_1 - \delta''_1 z_2)^2.$$

Les trois droites, représentées par les équations

$$\alpha - \delta_1\beta = 0; \quad \beta - \delta'_1\gamma = 0, \quad \gamma - \delta''_1\alpha = 0,$$

sont les côtés d'un triangle inscrit à la cubique.

En effet, d'après la propriété essentielle des formes Σ (*), si l'on donne à $\frac{x_1}{x_2}$ et à $\frac{y_1}{y_2}$ les valeurs δ_1, δ'_1, $\frac{z_1}{z_2}$ est indéterminé.

Par suite, on a la propriété suivante, connue :

Théorème III. — *Étant donnés trois points sur une cubique, on peut, en général, inscrire à cette cubique, quatre triangles dont les côtés passent par ces trois points.*

La forme biquadratique (7) est assez remarquable.

Représentons-la par B_θ^4.

Elle possède deux invariants

$$i = (BB')^4; \quad j = (BB')^2(B'B'')^2(B''B)^2.$$

On vérifie aisément que ces deux invariants i et j sont les deux invariants, multipliés par des facteurs numériques, de la forme ternaire (6), invariants que nous désignerons, suivant l'usage, par S et T.

Nous aurons

$$i = 4S, \qquad j = 8T.$$

En conséquence, le discriminant de la quartique B_θ^4 est donné par

$$R = i^3 - 6j^2 = 64(S^3 - 6T^2).$$

Comme on le fait d'ordinaire, nous dirons que

$$S^3 - 6T^2$$

est le discriminant de la forme cubique.

(*) Ire partie, p. 6.

Ainsi :

Le discriminant du discriminant de la forme trilinéaire, regardé comme une fonction de θ, ne diffère, que par un facteur numérique, du discriminant de la cubique.

Si nous ne démontrons pas directement le caractère d'invariance des fonctions S et T, c'est afin de ne pas allonger inutilement notre travail, en revenant sur des points connus des géomètres : ce caractère ressortira d'ailleurs de ce qui va suivre.

On remarquera seulement, croyons-nous, combien la théorie que nous exposons introduit, d'une manière simple et naturelle, la notion des deux invariants fondamentaux de la forme cubique ternaire, invariants dont la découverte, on le sait, est due à M. Aronhold (*).

Nous allons faire voir, brièvement, comment on peut déduire, sans difficulté, de ce qui précède, l'interprétation des relations telles que

$$R=0; \quad S=0, \quad T=0, \quad \text{etc.}$$

Si nous choisissons la relation d'homographie déterminée par une des valeurs de θ qui annulent Δ, les trois covariants Σ sont des carrés.

Mais on a la relation (**)

$$\frac{1}{2}\Sigma_1\Sigma_2\Sigma_3 + \frac{1}{2}\Delta f^2 = -k^2,$$

k étant un covariant trilinéaire de f, dont l'expression développée est :

$$\begin{aligned} k = & \left[a_{111}^2 a_{222} + 2a_{112}a_{121}a_{211} - a_{111}(a_{112}a_{221} + a_{121}a_{212} + a_{211}a_{122})\right]x_1y_1z_1 \\ & - \left[a_{112}^2 a_{221} + 2a_{111}a_{122}a_{212} - a_{112}(a_{121}a_{212} + a_{211}a_{122} + a_{111}a_{222})\right]x_1y_1z_2 \\ & - \left[a_{121}^2 a_{212} + 2a_{111}a_{122}a_{221} - a_{121}(a_{112}a_{221} + a_{211}a_{122} + a_{111}a_{222})\right]x_1y_2z_1 \\ & - \left[a_{211}^2 a_{122} + 2a_{111}a_{212}a_{221} - a_{211}(a_{121}a_{212} + a_{112}a_{221} + a_{111}a_{222})\right]x_2y_1z_1 \\ & + \left[a_{122}^2 a_{211} + 2a_{112}a_{121}a_{222} - a_{122}(a_{111}a_{222} + a_{212}a_{121} + a_{112}a_{221})\right]x_1y_2z_2 \\ & + \left[a_{212}^2 a_{121} + 2a_{112}a_{211}a_{222} - a_{212}(a_{111}a_{222} + a_{221}a_{112} + a_{122}a_{211})\right]x_2y_1z_2 \\ & + \left[a_{221}^2 a_{112} + 2a_{211}a_{121}a_{222} - a_{221}(a_{111}a_{222} + a_{122}a_{211} + a_{121}a_{212})\right]x_2y_2z_1 \\ & - \left[a_{222}^2 a_{111} + 2a_{122}a_{212}a_{221} - a_{222}(a_{112}a_{221} + a_{121}a_{212} + a_{211}a_{122})\right]x_2y_2z_2. \quad \quad (8) \end{aligned}$$

(*) *Journal de Crelle*, t. XXXIX.

(**) C. Le Paige, *Bull. de l'Acad. roy. de Belg.*, 3e série, t. II, p. 43.

Par suite, si $\Delta = 0$, k est le produit des racines carrées des trois covariants Σ_1, Σ_2, Σ_3.

Supposons maintenant $R = 0$.

L'équation $\Delta = 0$ a une racine double, qui est en même temps racine de l'équation $\frac{d\Delta}{d\theta} = 0$, c'est-à-dire de

$$\theta^3 + \theta\left[A_{113}A_{223} + A_{133}A_{122} + A_{112}A_{233} - A_{123}^2\right] + \left[A_{122}A_{233}A_{113} - A_{112}A_{133}A_{223}\right] = 0\,. \quad . \quad (9)$$

Or, si, dans l'expression de k, donnée plus haut, nous remplaçons les lettres a_{ikl} par les A_{ikl}, l'interprétation de (9) est aisée.

En effet, représentons par δ_1, δ_1', δ_1'', comme nous l'avons fait ci-dessus, les racines doubles des Σ, on a

$$k = m(x_1 - \delta_1 x_2)(y_1 - \delta_1' y_2)(z_1 - \delta_1'' z_2).$$

L'équation (9) revient à

$$\delta_1\delta_1'\delta_1'' = 1.$$

Comme nous savons que le covariant k est décomposable en trois facteurs linéaires, lorsque $\Delta = 0$, puisque les trois covariants Σ s'annulent identiquement, il suffit de vérifier que l'on a

$$\frac{-k_{222}}{k_{111}} = 1, \quad \text{ou} \quad k_{111} + k_{222} = 0.$$

Or

$$k_{111} = (A_{123} + \theta)^2(A_{123} - \theta) + 2A_{112}A_{133}A_{223} - (A_{123} + \theta)\left[A_{112}A_{233} + A_{133}A_{122} + A_{223}A_{113}\right],$$

$$-k_{222} = (A_{123} - \theta)^2(A_{123} + \theta) + 2A_{233}A_{122}A_{113} - (A_{123} - \theta)\left[A_{112}A_{233} + A_{133}A_{122} + A_{223}A_{113}\right].$$

L'équation

$$k_{111} + k_{222} = 0,$$

ne diffère donc pas de l'équation (9).

Par suite, les droites représentées par

$$\alpha - \delta_1\beta = 0, \quad \beta - \delta_1'\gamma = 0, \quad \gamma - \delta_1''\alpha = 0,$$

concourent.

Donc, pour la racine double de l'équation $\Delta = 0$, les trois côtés du triangle inscrit à la cubique concourent. Deux des quatre triangles coïncident et se réduisent à un point.

Il n'en peut être ainsi que si la cubique a un point double.

En conséquence, on retrouve ce théorème connu :

Lorsque le discriminant de la cubique s'annule, la courbe possède un point double.

Si l'on a, à la fois, $S = 0$, $T = 0$, ou, ce qui revient au même, $i = 0$, $j = 0$, l'équation $\Delta = 0$, possède, comme on le sait, un facteur triple.

On démontrerait, par une méthode analogue à celle que nous venons d'employer, que, dans ce cas, la cubique possède un point de rebroussement.

Comme nous le faisions observer plus haut, de ceci ressort le caractère d'invariance des fonctions S et T, car la propriété de posséder un point double ou un point de rebroussement se conserve dans la projection.

On sait encore que la forme biquadratique Δ est le carré d'une expression quadratique lorsque Δ ne diffère de son hessien que par un facteur.

Cette condition entraîne les deux relations suivantes :

$$\left.\begin{array}{c} A_{122}A_{233}A_{113} - A_{112}A_{133}A_{223} = 0, \\ A_{113}A_{223}A_{133}A_{122} + A_{133}A_{122}A_{112}A_{233} + A_{112}A_{233}A_{113}A_{223} - A_{123}(A_{112}A_{133}A_{223} + A_{122}A_{113}A_{233}) = 0. \end{array}\right\} \quad (10)$$

Et l'on voit sans peine que, dans ce cas, la cubique se décompose en une droite et une conique.

Il en est encore ainsi lorsqu'il est possible de déterminer une valeur de θ annulant identiquement un des covariants Σ : Σ_1, par exemple.

Nous avons vu (*) que, si $\Sigma_1 \equiv 0$, on a les conditions

$$a_{111}a_{122} - a_{112}a_{121} = 0,$$

$$a_{211}a_{222} - a_{221}a_{212} = 0,$$

$$(a_{112}a_{221} - a_{122}a_{211})(a_{121}a_{212} - a_{122}a_{211}) = 0.$$

(*) 1re partie, p. 10.

Si nous remplaçons les a_{ikl} par les A_{ikl}, ces conditions deviennent

$$(A_{123} + \theta)A_{113} - A_{112}A_{133} = 0,$$
$$(A_{123} - \theta)A_{223} - A_{233}A_{122} = 0,$$

d'où l'on déduit :

$$\left.\begin{aligned} & 2A_{123}A_{113}A_{223} - A_{113}A_{233}A_{122} - A_{112}A_{133}A_{223} = 0; \\ \text{et} \quad & \\ & (A_{112}A_{233} - A_{113}A_{223})(A_{133}A_{122} - A_{113}A_{223}) = 0. \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (11)$$

De $\Sigma_2 = 0$, ou de $\Sigma_3 = 0$, on déduirait des conditions analogues :

$$\left.\begin{aligned} 2A_{123}A_{122}A_{133} - A_{113}A_{233}A_{122} - A_{112}A_{133}A_{223} = 0, \\ (A_{113}A_{223} - A_{122}A_{133})(A_{122}A_{133} - A_{112}A_{233}) = 0; \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (12)$$

$$\left.\begin{aligned} 2A_{123}A_{112}A_{233} - A_{113}A_{233}A_{122} - A_{112}A_{133}A_{223} = 0, \\ (A_{122}A_{133} - A_{112}A_{233})(A_{112}A_{233} - A_{113}A_{223}) = 0. \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (13)$$

Si l'un des systèmes (10), (11), (12) ou (13) est vérifié, la cubique est décomposable.

Ces quatre systèmes de conditions correspondent aux cas où la forme ternaire (6) a un facteur linéaire de la forme

$$p\alpha + q\beta + r\gamma,$$

ou d'une des formes

$$p\alpha + q\beta, \quad q\beta + r\gamma, \quad r\gamma + p\alpha.$$

Il y a encore le cas, tout à fait simple, où ce facteur est α, β, ou γ.

L'emploi des formes trilinéaires nous conduit encore à une notion importante, celle du *genre*.

D'après ce que nous venons de voir, nous pouvons considérer les rapports $\frac{x_1}{x_2}$, $\frac{y_1}{y_2}$, $\frac{z_1}{z_2}$, comme caractérisant chaque terne de rayons homologues.

Pour avoir trois rayons donnant un point de la courbe, il faut que

$$x_1y_1z_1 = x_2y_2z_2.$$

Représentons par λ, μ, ν, les trois rapports donnés. Nous aurons, pour déterminer les différents points de la courbe, les équations

$$\left.\begin{aligned} a_{111}\lambda\mu\nu + a_{112}\lambda\mu + a_{211}\mu\nu + a_{121}\nu\lambda + a_{122}\lambda + a_{212}\mu + a_{221}\nu + a_{222} = 0, \\ \lambda\mu\nu - 1 = 0. \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (14)$$

Ces deux équations peuvent être considérées comme caractérisant une homographie du troisième ordre et du premier rang (*).

On peut donc énoncer ce théorème :

THÉORÈME IV. — *Toute cubique peut être engendrée par les intersections des rayons homologues d'une* H_1^3.

Nous pourrons exprimer deux des rapports λ, μ en fonction du troisième. En effet, en éliminant ν, par exemple, nous aurons :

$$\lambda^2(a_{112}\mu^2 + a_{122}\mu) + \lambda\left[a_{212}\mu^2 + (a_{111} + a_{222})\mu + a_{121}\right] + (a_{211}\mu + a_{221}) = 0.$$

Si nous employons les coefficients de la cubique, cette équation devient

$$\lambda^2(A_{112}\mu^2 + A_{113}\mu) + \lambda\left[A_{122}\mu^2 + 2A_{123}\mu + A_{133}\right] + (A_{223}\mu + A_{233}) = 0.$$

On en déduit

$$\lambda = \frac{A_{122}\mu^2 + 2A_{123}\mu + A_{133} + \sqrt{P}}{2(A_{112}\mu^2 + A_{113}\mu)};$$

d'où

$$\nu = \frac{2(A_{112}\mu + A_{113})}{A_{122}\mu^2 + 2A_{123}\mu + A_{133} + \sqrt{P}} = \frac{A_{122}\mu^2 + 2A_{123}\mu + A_{133} - \sqrt{P}}{2(A_{223}\mu + A_{233})},$$

$$P = A_{122}^2\mu^4 + 4(A_{122}A_{123} - A_{112}A_{223})\mu^3 + (4A_{123}^2 + 2A_{122}A_{133} - 4A_{112}A_{233} - 4A_{113}A_{223})\mu^2 + 4(A_{123}A_{133} - A_{113}A_{233})\mu + A_{133}^2. \quad (15)$$

Cette forme P, égalée à zéro, donne un des groupes de ramification de (14).

On en déduit ce théorème :

Par un point donné, sur une cubique, on peut, en général, mener quatre tangentes à la courbe.

La forme P a les mêmes invariants que Δ.

Comme on vient de le voir, les coordonnées de la cubique peuvent, en général, s'exprimer à l'aide de fonctions rationnelles de μ et d'un radical carré portant sur P, expression du quatrième degré en μ.

La cubique la plus générale est donc du genre un.

(*) 1re partie, p. 13. Voir, sur le système de deux formes trilinéaires, un Mémoire de M. C. Le Paige, inséré aux *Atti dell' Accademia de' Nuovi Lincei*, t. XXXV, 1882.

Il n'en est plus de même quand le discriminant de Δ, et par suite de P, s'annule.

En effet, si l'on a seulement

$$i^3 - 6j^2 = 0,$$

ou, à la fois,

$$i = 0, \quad j = 0,$$

le radical ne portera plus que sur une expression quadratique de μ.

Nous avons vu, plus haut, que la courbe avait alors, soit un point double, soit un point de rebroussement.

Par suite,

Les cubiques à point double ou à point de rebroussement sont du genre zéro.

De la signification géométrique de l'équation $P = 0$, il résulte encore que, dans ces deux cas, les cubiques sont de la quatrième classe ou de la troisième.

Bien que ces théorèmes soient connus, nous n'avons pas cru inutile de faire voir qu'ils se déduisent facilement de la méthode que nous avons employée.

Ils découlent, en quelque sorte, immédiatement et nécessairement, de l'idée des faisceaux homographiques.

Nous aurions pu augmenter le nombre de ces propositions connues, ou nouvelles, qui dérivent de cette notion fondamentale : notre but n'étant pas d'écrire un traité des cubiques, mais un simple mémoire sur ces courbes, il nous a paru suffisant d'indiquer les méthodes générales.

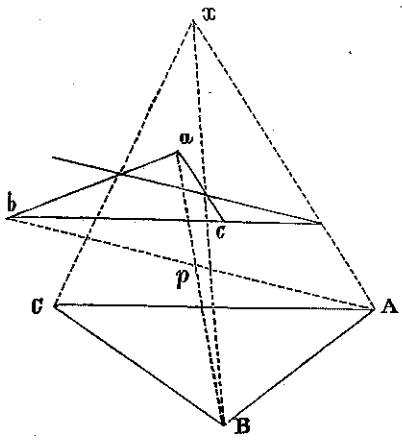
Nous avons dit ailleurs (*) que notre méthode contient, comme cas particulier ou comme conséquence, les méthodes de Chasles, de Grassmann et de Schröter.

Cela est à peu près évident pour la première. En effet, si nous laissons fixe un rayon du premier faisceau, les deux autres appartenant à une H_1^2, décrivent une conique. A chaque rayon du premier faisceau, correspond une conique, et vice versâ. De plus, on s'aperçoit que les coniques correspondant aux différents rayons forment elles-mêmes un faisceau.

Quant à la seconde méthode, rappelons d'abord brièvement en quoi elle consiste.

(*) *Bull. de l'Acad.*, 3e série, t. I, p. 613.

Soient deux triangles ABC, *abc* : le lieu des points x tels que les droites xA, xB, xC rencontrent les côtés bc, ca, ab en trois points situés en ligne droite est une cubique passant par les sommets des triangles et en outre par les points r, r', r'', intersections des côtés ab, AB; bc, BC; ca, CA.



Comme nous le voyons, la relation d'homographie correspondant à ce mode de génération est complètement déterminée : elle a la forme

$$x_1y_1z_1 + x_2y_2z_2 = 0.$$

Les trois covariants Σ sont représentés par les droites Ab, Ac; Bc, Ba; Ca, Cb.

Il résulte de là que ces six droites constituent un système de deux trilatères se coupant en neuf points de la courbe (*).

En conséquence Ab, Ba, par exemple, se coupent en un point p de la courbe.

On voit, par suite, que le quadrilatère ab, AB, aB, bA a ses six sommets sur la courbe.

Les points a, A, b, B, c, C constitueront six points de Schröter; ils permettent de construire linéairement autant de points de la courbe qu'on le voudra, mais comme une suite discontinue. En effet, p, r forment un nouveau couple de points et on peut les employer comme on l'a fait pour a, A et ainsi de suite.

Nous nous bornons à cette simple indication : elle suffit pour montrer que le système de Grassmann se déduit, comme cas particulier, de notre méthode et de quelle manière celle-ci conduit aux points conjugués de Schröter.

(*) Voir plus bas les propriétés de ces trilatères.

Sur la méthode de Grassmann et sa comparaison avec celle de Schröter, voir un Mémoire de Clebsch, inséré aux *Math. Ann.*, t. V, p. 424.

CHAPITRE II.

INVOLUTIONS.

Théorème V. — *Toutes les cubiques ayant sept points communs sont coupées par une transversale et des points qui appartiennent à une* I_2^3 (involution de troisième ordre et du second rang).

Ce théorème se démontre pour ainsi dire sans calcul.

Prenons pour centres des trois faisceaux trois des sept points donnés.

L'équation de la cubique prendra la forme

$$C_3 \equiv A_{112}\alpha^2\beta + A_{113}\alpha^2\gamma + A_{122}\beta^2\alpha + A_{223}\beta^2\gamma + A_{133}\gamma^2\alpha + A_{233}\beta\gamma^2 + 2A_{123}\alpha\beta\gamma = 0.$$

Si, de plus, la cubique doit passer par quatre autres points donnés, il sera possible de déterminer linéairement quatre des paramètres en fonction des trois autres, de telle sorte que l'équation deviendra

$$C_3 \equiv \lambda' C_3' + \lambda'' C_3'' + \lambda''' C_3''' = 0.$$

De là résulte immédiatement le théorème énoncé.

Nous avons vu, précédemment, que toute cubique peut être engendrée par les intersections des rayons homologues de trois faisceaux homographiques.

Soit

$$f = 0,$$

l'équation d'homographie caractérisant une cubique donnée, équation qui contient, nous l'avons vu, une indéterminée θ.

f peut toujours prendre la forme (2)

$$f \equiv \lambda_1 (x_1 - \delta_1 x_2)(y_1 - \delta'_1 y_2)(z_1 - \delta''_1 z_2) + \lambda_2 (x_1 - \delta_2 x_2)(y_1 - \delta'_2 y_2)(z_1 - \delta''_2 z_2) \\ + \lambda_3 (x_1 - \delta_3 x_2)(y_1 - \delta'_3 y_2)(z_1 - \delta''_3 z_2) = 0.$$

La cubique peut donc toujours être représentée par une équation de la forme

$$C_3 \equiv \lambda_1 (\alpha - \delta_1 \beta)(\beta - \delta'_1 \gamma)(\gamma - \delta''_1 \alpha) + \lambda_2 (\alpha - \delta_2 \beta)(\beta - \delta'_2 \gamma)(\gamma - \delta''_2 \alpha) \\ + \lambda_3 (\alpha - \delta_3 \beta)(\beta - \delta'_3 \gamma)(\gamma - \delta''_3) = 0,$$

ou

$$C_3 \equiv \lambda_1 \alpha_1 \beta_1 \gamma_1 + \lambda_2 \alpha_2 \beta_2 \gamma_2 + \lambda_3 \alpha_3 \beta_3 \gamma_3 = 0. \quad \ldots \ldots \quad (16)$$

Nous avons ici un système de trois trilatères, en involution avec la courbe.

Lorsque nous n'imposerons aucune condition particulière à ces trois trilatères, nous dirons qu'ils sont involutifs avec la courbe.

Il résulte, de la forme même de l'équation (16), que l'on peut énoncer ce théorème :

Théorème VI. — *Une transversale rencontre une cubique et un système de trois trilatères involutifs avec la courbe, en douze points qui sont en involution* I_2^3.

Cette même équation (16) peut être interprétée différemment.

En effet, la distance d'un point quelconque à la droite dont l'équation est $\alpha_1 = 0$, est proportionnelle à la fonction α_1, où l'on remplace les coordonnées par celles du point donné.

On arrive donc au théorème suivant :

Théorème VII. — *Il existe une relation linéaire entre les produits des distances d'un point de la cubique aux côtés de trois trilatères involutifs.*

Mais nous pouvons particulariser davantage les systèmes de trilatères associés.

En effet, comme nous l'avons vu, nous disposons d'abord de l'indéterminée θ; ensuite, lorsque les coefficients de f sont entièrement déterminés par le choix de θ, trois des neuf quantités δ sont encore complétement arbitraires (*).

Nous pourrons donc nous imposer les quatre conditions suivantes :

$$\delta_1\delta_2''\delta_3' = 1,$$

$$\delta_1'\delta_2\delta_3'' = 1,$$

$$\delta_1''\delta_2'\delta_3 = 1,$$

$$\delta_1'\delta_2''\delta_3 = 1.$$

Les trois trilatères associés auront alors, outre les trois centres des faisceaux, quatre autres points communs.

Nous dirons, dans ce cas, qu'ils sont *trijugués*.

Les théorèmes VI et VII sont évidemment applicables à ces figures, dont nous verrons, par la suite, l'utilité.

THÉORÈME VIII. — *Toutes les cubiques qui ont huit points communs sont coupées, par une transversale, en des points qui appartiennent à une* I_1^3.

Ce théorème peut se démontrer comme le théorème V, mais il peut aussi être regardé comme une conséquence de cette proposition.

En effet, soient 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, les points donnés.

Toutes les cubiques qui passent par ces points appartiennent, à la fois, aux deux faisceaux

$$F_2^3(1, 2, \ldots, 6, 7) \quad \text{et} \quad F_2^3(1, 2, \ldots, 6, 8).$$

Par suite, elles déterminent, sur une transversale, les groupes communs aux deux involutions I_2^3, caractérisées par ces deux faisceaux.

Or ces groupes communs appartiennent à une I_1^3 (**).

(*) C. LE PAIGE, *Sur la théorie des formes trilinéaires*, ATTI DELL' ACC. DE' NUOVI LINCEI.
(**) 1re partie, p. 20.

De cette propriété découle, immédiatement, le théorème connu :

THÉORÈME IX. — *Toutes les cubiques passant par huit points ont un même neuvième point commun.*

Soient, de nouveau, 1, 2, 3, ... 8 les points donnés, et soient C_3, C'_3, C''_3, etc., des cubiques qui passent par ces huit points.

Deux d'entre elles C_3, C'_3, par exemple, se coupent en un neuvième point 9.

Par 9, menons une transversale 9X qui coupe C_3 et C'_3 en des points ab, $a'b'$.

Or, *si dans une involution* I_1^n, *il existe un point tel qu'il lui corresponde deux groupes distincts de* (n—1) *points, cette involution se décompose en un point fixe (le point donné) et une involution* I_1^{n-1} (*).

(*) Ce théorème est presque évident, car soient

$$p_x = 0,$$

l'équation du point, et

$$a_x^{n-1} = 0, \quad b_x^{n-1} = 0,$$

l'équation des deux groupes qui lui correspondent. On pourra prendre comme groupes caractéristiques

$$p_x a_x^{n-1} = 0; \quad p_x b_x^{n-1} = 0,$$

et l'équation de l'involution deviendra

$$p_x a_x^{n-1} + \lambda p_x b_x^{n-1} = p_x (a_x^{n-1} + \lambda b_x^{n-1}) = 0.$$

Si cette démonstration ne paraissait pas suffisante, en voici une seconde, un peu moins simple.

Soient

$$a_x^n = 0, \quad b_x^n = 0,$$

les deux équations qui définissent deux groupes.

La relation entre les points en involution est donnée par

$$\frac{a_x^n b_y^n - a_y^n b_x^n}{(xy)} = 0;$$

Dans l'involution déterminée par les cubiques C_3, C_3', C_3'', etc., sur la transversale 9X, au point 9 correspondent les groupes distincts, *a*, *b* ; *a'*, *b'* : par suite, le point 9 fait partie de tous les ternes de l'involution et toute cubique de ce faisceau passe par 9.

On sait que le théorème que nous venons d'établir peut se démontrer de bien des manières distinctes; nous avons employé la méthode précédente afin de déduire, autant que possible, toutes les propriétés fondamentales des cubiques, des théories de l'involution et de l'homographie.

Corollaires. — I. *Si parmi les neuf points d'intersection de deux cubiques, il y en a six sur une conique, les trois autres sont sur une droite; et réciproquement.*

II. *Si un triangle* ABC *rencontre une cubique en neuf points* c, c', c''; a, a', a''; b, b', b'', *situés sur les côtés* AB, BC, CA, *on a la relation*

$$\frac{Ac\,.\,Ac'\,.\,Ac''\,.\,Ba\,.\,Ba'\,.\,Ba''\,.\,Cb\,.\,Cb'\,.\,Cb''}{Ab\,.\,Ab'\,.\,Ab''\,.\,Ca\,.\,Ca'\,.\,Ca''\,.\,Bc\,.\,Bc'\,.\,Bc''}=1. \qquad \text{(Théor. de Carnot.)}$$

Menons les transversales cb'', $c'b'$ $c''b$, qui coupent la cubique en trois nouveaux points x, y, z, situés en ligne droite, et BC en trois points x', y', z'.

mais

$$\frac{a_x^n b_y^n - a_y^n b_x^n}{(xy)} = \Sigma C_{ik} x_1^i x_2^{n-i-l} y_1^k y_2^{n-k-l} = 0, \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (17)$$

où C_{ik} est l'élément du résultant calculé par la méthode de Cauchy.

Si pour une détermination y_1, y_2, l'équation (17) a plus de $(n-1)$ racines, cette équation doit être identique : par suite le résultant de a_x^n et de b_x^n sera nul et l'on aura

$$a_x^n + \lambda b_x^n = p_x(\alpha_x^{n-1} + \lambda\beta_x^{n-1}) = 0,$$

ce qui démontre le théorème.

On a les égalités

$$\frac{Ac\,.\,Bx'\,.\,Cb''}{Ab''\,.\,Cx'\,.\,Bc} = 1\,,$$

$$\frac{Ac'\,.\,By'\,.\,Cb'}{Ab'\,.\,Cy'\,.\,Bc'} = 1\,,$$

$$\frac{Ac''\,.\,Bz'\,.\,Cb}{Ab\,.\,Cz'\,.\,Bc''} = 1\,.$$

D'où, en multipliant,

$$\frac{Ac\,.\,Ac'\,.\,Ac''\,.\,Cb\,.\,Cb'\,.\,Cb''\,.\,Bx'\,.\,By'\,.\,Bz'}{Ab\,.\,Ab'\,.\,Ab''\,.\,Bc\,.\,Bc'\,.\,Bc''\,.\,Cx'\,.\,Cy'\,.\,Cz'} = 1\,.$$

Mais les deux trilatères ac'', $a'c'$, $a''c$; AB, AC, $\overline{xz}$, sont en involution I_1^3 avec la cubique.

En employant une des formes de l'involution I_1^3 (*), on a

$$\frac{Bx'\,.\,By'\,.\,Bz'}{Ba\,.\,Ba'\,.\,Ba''} = \frac{Cx'\,.\,Cy'\,.\,Cz'}{Ca\,.\,Ca'\,.\,Ca''}\,.$$

En combinant avec l'égalité précédente, on trouve le résultat énoncé.

Dans le chapitre précédent, nous avons vu que l'on peut toujours, et cela d'une infinité de manières, choisir θ de telle sorte que la relation d'homographie, caractéristique de la cubique donnée, puisse se mettre sous la forme (1)

$$f \equiv \lambda_1(x_1 - \delta_1 x_2)(y_1 - \delta_1' y_2)(z_1 - \delta_1'' z_2) + \lambda_2(x_1 - \delta_2 x_2)(y_1 - \delta_2' y_2)(z_1 - \delta_2'' z_2).$$

Par suite, l'équation de la courbe peut toujours s'écrire

$$C_3 \equiv \lambda_1(\alpha - \delta_1\beta)(\beta - \delta_1'\gamma)(\gamma - \delta_1''\alpha) + \lambda_2(\alpha - \delta_2\beta)(\beta - \delta_2'\gamma)(\gamma - \delta_2''\alpha) = 0\,,$$

ou

$$C_3 \equiv \lambda_1\alpha_1\beta_1\gamma_1 + \lambda_2\alpha_2\beta_2\gamma_2 = 0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (18)$$

(*) C. Le Paige, *Mémoire sur quelques applications de la théorie des formes algébriques*, p. 41.

Les deux trilatères dont les côtés ont pour équations

$$\alpha_1 = 0, \quad \beta_1 = 0, \quad \gamma_1 = 0;$$

$$\alpha_2 = 0, \quad \beta_2 = 0, \quad \gamma_2 = 0,$$

se coupent en neuf points qui appartiennent à la cubique.

Nous avons dit que ces trilatères sont *conjugués* à la courbe (*).

Il résulte de l'équation (18) :

THÉORÈME X. — *Une transversale coupe la cubique et les côtés de deux trilatères conjugués en neuf points qui appartiennent à une* I_1^3.

La démonstration qui précède établit, du même coup, l'existence de ces systèmes de trilatères conjugués, passant par trois points pris à volonté sur la courbe.

On en déduit également la généralisation du théorème de Pappus.

THÉORÈME XI. — *Le rapport des produits des distances d'un point de la courbe, aux côtés de deux trilatères conjugués, est constant.*

COROLLAIRE. *A une cubique, on peut inscrire un système de deux quadrilatères conjugués.*

Nous appelons quadrilatères *conjugués* à une cubique, deux quadrilatères tels qu'un côté du premier rencontre tous les côtés du second, un seul excepté, en des points situés sur la courbe. Les côtés qui ne se rencontrent pas sur la courbe sont dits opposés (**).

Considérons les transversales 123, 1′2′3′; puis les droites 11′, 22′,

(*) F. FOLIE, *Fondement d'une Géométrie supérieure cart.*, p. 5.

(**) *Ibidem*, pp. 13 et 22. Voir dans le même travail une démonstration différente des théorèmes X, XI et XII.

$33'$; $12'$, $23'$, $31'$, qui déterminent deux nouvelles transversales $1''2''3''$, $p''q''r''$.

Les deux quadrilatères

$$11'1'',\quad 22'2'',\quad 33'3'',\quad p''q''r'';$$

$$23'r'',\quad 31'p'',\quad 12'q'',\quad 1''2''3''$$

satisfont à la définition donnée plus haut.

L'existence de ces quadrilatères conjugués est importante, parce qu'elle permet d'établir un théorème remarquable, extension, aux cubiques, du théorème de Pascal.

Appelons δ_1, δ_2, δ_3, δ_4; δ'_1, δ'_2, δ'_3, δ'_4 les côtés de deux quadrilatères conjugués, δ_1, δ'_1; δ_2, δ'_2, etc., étant les côtés opposés, et conservons, pour le surplus, les notations précédentes.

Soient A et B les points d'intersection des deux premiers couples de côtés; menons la transversale AB.

Cette transversale rencontre la cubique en trois points a, b, c, et les côtés δ_3, δ'_3; δ_4, δ'_4 en des points p, p'; q, q', que nous supposerons distincts pour le moment.

Nous pouvons observer que les six droites

$$11'1'',\quad 22'2'',\quad 33'3'',\quad 123,\quad 1'2'3',\quad 1''2''3''$$

et

$$12'q'',\quad 23'r'',\quad 31'p'',\quad 123,\quad 1'2'3',\quad p''q''r'',$$

forment deux systèmes de trilatères conjugués.

AB rencontre le premier système en des points A, B, p; t, t', q' et le second, en des points A, B, p'; t, t', q.

Par suite, d'après le théorème X, les systèmes suivants sont en involution I_1^3 :

$$a,\ b,\ c;\quad A,\ B,\ p;\quad t,\ t',\ q';$$

$$a,\ b,\ c;\quad A,\ B,\ p';\quad t,\ t',\ q.$$

De là se déduisent les égalités

$$\frac{Aa.Ab.Ac}{At.At'.Aq'}=\frac{Ba.Bb.Bc}{Bt.Bt'.Bq'}=\frac{pa.pb.pc}{pt.pt'.pq'},$$

$$\frac{Aa.Ab.Ac}{At.At'.Aq}=\frac{Ba.Bb.Bc}{Bt.Bt'.Bq}=\frac{p'a.p'b.p'c}{p't.p't'.p'q}.$$

D'où

$$\frac{Aq'}{Aq}=\frac{Bq'}{Bq}.$$

En conséquence, q coïncide avec q', et de même p avec p'.
On en conclut ce théorème :

Théorème XII. — *Les côtés opposés de deux quadrilatères conjugués à une cubique se coupent en quatre points situés en ligne droite* (*).

Autrement encore :

Soient $\delta_1\delta_2\delta_3\delta_4$; $\delta'_1\delta'_2\delta'_3\delta'_4$, deux quadrilatères conjugués à la courbe.

Par la notation $\delta_1(pqr)$, nous indiquerons que le côté δ_1 rencontre la cubique aux points p, q et r.

On aura ainsi, conformément à la définition :

$$\begin{array}{ll}
\delta_1(pqr), & \delta'_1(p'p''p'''), \\
\delta_2(p'q'r'), & \delta'_2(qq''q'''), \\
\delta_3(p''q''r''), & \delta'_3(rr'r'''), \\
\delta_4(p'''q'''r'''), & \delta'_4(p, q', r'').
\end{array}$$

$p'p''qq''rr'$ sont sur une conique, puisque la cubique $\delta_1\delta_2\delta_3$ rencontre la courbe donnée en neuf points, dont trois $p\,q'\,r''$ sont sur la droite δ'_4. (Théor. IX, corol. I.)

(*) F. Folie, F. G. S. C., p. 22.

Par suite, les droites $\delta_1\delta'_1$; $\delta_2\delta'_2$; $\delta_3\delta'_3$ se coupent en trois points situés sur une droite Δ (Théor. de Pascal).

De même $p'\, p'''\, q\, q'''\, p\, q'$ sont sur une conique.

$\delta_1\delta'_1$; $\delta_2\delta'_2$, $\delta_4\delta'_4$ se coupent sur une droite qui ne peut différer de Δ, puisqu'elle a, avec celle-ci, deux points communs.

On peut démontrer la même chose pour les autres combinaisons de trois couples de côtés opposés.

CHAPITRE III.

RAPPORT ANHARMONIQUE.

Ainsi que nous venons de le voir, la cubique donnée peut toujours être représentée par l'équation

$$C_3 \equiv \lambda_1\alpha_1\beta_1\gamma_1 + \lambda_2\alpha_2\beta_2\gamma_2 + \lambda_3\alpha_3\beta_3\gamma_3 = 0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16)$$

où les équations :

$$\alpha_1\beta_1\gamma_1 = 0; \quad \alpha_2\beta_2\gamma_2 = 0, \quad \alpha_3\beta_3\gamma_3 = 0,$$

représentent trois trilatères trijugués à la courbe.

Ces trois trilatères ont sept points communs. Nous appellerons *points trijugués* les six points composés des trois centres des faisceaux et des trois points d'intersection des côtés $\alpha_1, \beta_3, \gamma_2$; $\alpha_2, \beta_1, \gamma_3$; $\alpha_3, \beta_2, \gamma_1$.

Soit m un point quelconque de la courbe, dont les coordonnées sont p, q, r.

Désignons par 1, 2, 3, 4, 5, 5, 6 les points trijugués; soient x_i, y_i, z_i les coordonnées du point i, i prenant les valeurs 1, 2, 3 ..., 6.

L'équation (16) pourra s'écrire

$$\lambda_1 \begin{vmatrix} p & q & r \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} p & q & r \\ x_3 & y_3 & z_3 \\ x_4 & y_4 & z_4 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} p & q & r \\ x_5 & y_5 & z_5 \\ x_6 & y_6 & z_6 \end{vmatrix} + \lambda_2 \begin{vmatrix} p & q & r \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_4 & y_4 & z_4 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} p & q & r \\ x_3 & y_3 & z_3 \\ x_6 & y_6 & z_6 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} p & q & r \\ x_5 & y_5 & z_5 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$$

$$\lambda_3 + \begin{vmatrix} p & q & r \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_6 & y_6 & z_6 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} p & q & r \\ x_3 & y_3 & z_3 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} p & q & r \\ x_5 & y_5 & z_5 \\ x_4 & y_4 & z_4 \end{vmatrix} = 0.$$

chacun des déterminants représente l'aire d'un triangle : cette égalité devient donc

$$\lambda_1(m12)(m34)(m56) + \lambda_2(m14)(m36)(m52) + \lambda_3(m16)(m32)(m54) = 0.$$

Remplaçant l'aire par le produit de deux côtés et du sinus de l'angle compris, sinus que nous représenterons par (ik), on a :

$$\lambda_1 . m1 . m2(12)m3 . m4(34)m5 . m6(56) + \lambda_2 . m1 . m4(14)m3 . m6(36)m5 . m2(52)$$
$$+ \lambda_3 m1 . m6(16)m3 . m2(32)m5 . m4(54) = 0.$$

On en déduit encore

$$\lambda_1(12)(34)(56) + \lambda_2(14)(36)(52) + \lambda_3(16)(32)(54) = 0.$$

Si l'on divise par le premier terme, cette égalité devient :

$$1 + \lambda'_1 \frac{(14)\,(36)\,(52)}{(12)\,(34)\,(56)} + \lambda'_2 \frac{(16)\,(32)\,(54)}{(12)\,(34)\,(56)}.$$

Les quotients qui figurent dans le premier membre sont des rapports anharmoniques (*).

Nous les représenterons par

$$\mathfrak{J}^m_{462}, \quad \mathfrak{J}^m_{624},$$

pour indiquer à la fois, par l'indice supérieur, l'origine du faisceau des droites, et par l'indice inférieur, l'ordre de ces rayons.

Nous pouvons donc énoncer le théorème suivant :

Théorème XIII. — *Il existe une relation linéaire entre les rapports anhar-*

(*) I^{re} partie, p. 29.

moniques, du troisième ordre, du faisceau obtenu en joignant un point quelconque de la cubique à six points trijugués (*).

Soient m, m', m'', trois points de la courbe, on a les égalités

$$1 + \lambda_1' \mathfrak{J}^m_{462} + \lambda_2' \mathfrak{J}^m_{624} = 0,$$

$$1 + \lambda_1' \mathfrak{J}^{m'}_{462} + \lambda_2' \mathfrak{J}^{m'}_{624} = 0,$$

$$1 + \lambda_1' \mathfrak{J}^{m''}_{462} + \lambda_2' \mathfrak{J}^{m''}_{624} = 0.$$

On en déduit la relation

$$\begin{vmatrix} 1 & \mathfrak{J}^m_{462} & \mathfrak{J}^m_{624} \\ 1 & \mathfrak{J}^{m'}_{462} & \mathfrak{J}^{m'}_{624} \\ 1 & \mathfrak{J}^{m''}_{462} & \mathfrak{J}^{m''}_{624} \end{vmatrix} = 0. \qquad (19)$$

Si nous exprimons le théorème sur la constance du rapport anharmonique des coniques, à l'aide des mêmes notations, nous obtiendrons la relation de forme tout à fait identique

$$\begin{vmatrix} 1 & \mathfrak{J}^m_{42} \\ 1 & \mathfrak{J}^{m'}_{42} \end{vmatrix} = 0.$$

Le théorème XIII, ou celui qui est exprimé par l'équation (19), peut être ramené aisément au théorème VI, appliqué aux trilatères trijugués.

Supposons que les trois points m, m', m'' soient en ligne droite, et désignons par I, II, III; I', II', III'; I'', II'', III'', les points où cette droite rencontre les trois trilatères trijugués; puis, comme tantôt, par $m\alpha_1$, $m\alpha_2$, etc., les distances de m aux droites α_1, α_2, etc.

(*) C. Le Paige, *Bulletins de l'Académie royale de Belgique*, 2e série, t. XLV, p. 94.

On a

$$2(m12) = \overline{12}.m\alpha;\quad 2(m'12) = \overline{12}.m'\alpha_1;\quad 2(m''12) = \overline{12}.m''\alpha_1,\quad \text{etc.}$$

De plus,

$$\frac{m\alpha_1}{m\mathrm{I}} = \frac{m'\alpha_1}{m'\mathrm{I}} = \frac{m''\alpha_1}{m''\mathrm{I}} = p,\quad (12) = \frac{2(m12)}{m1.m2}.$$

Par suite,

$$(12) = \frac{\overline{12}.m\alpha_1}{m1.m2} = p.\frac{\overline{12}.m\mathrm{I}}{m1.m2},$$

et d'autres formules analogues.

En introduisant ces expressions dans (19), on arrive à la relation

$$\begin{vmatrix} m\mathrm{I}.m\mathrm{II}.m\mathrm{III}. & m\mathrm{I}'.m\mathrm{II}'.m\mathrm{III}'. & m\mathrm{I}''.m\mathrm{II}''.m\mathrm{III}'' \\ m'\mathrm{I}.m'\mathrm{II}.m'\mathrm{III}. & m'\mathrm{I}'.m'\mathrm{II}'.m'\mathrm{III}'. & m'\mathrm{I}''.m'\mathrm{II}''.m'\mathrm{III}'' \\ m''\mathrm{I}.m''\mathrm{II}.m''\mathrm{III}. & m''\mathrm{I}'.m''\mathrm{II}'.m''\mathrm{III}'. & m''\mathrm{I}''.m''\mathrm{II}''.m''\mathrm{III}'' \end{vmatrix} = 0,$$

équation qui exprime que les quatre ternes de points m, m', m''; I, II, III; I', II', III'; I'', II'', III'' appartiennent à une I_2^3 (*).

Les deux théorèmes XIII et VI sont donc, chacun en un certain sens, plus généraux l'un que l'autre, et cessent d'être complètement identiques, comme ils le sont dans la théorie des coniques.

A un autre point de vue, on peut signaler l'identité de forme entre les théorèmes XIII et VI.

En effet, si nous développons le déterminant (19), nous avons la relation

$$\mathfrak{I}_{462}^{m}\mathfrak{I}_{624}^{m'} - \mathfrak{I}_{624}^{m}\mathfrak{I}_{462}^{m'} + \mathfrak{I}_{624}^{m}\mathfrak{I}_{462}^{m''} - \mathfrak{I}_{462}^{m}\mathfrak{I}_{624}^{m''} + \mathfrak{I}_{462}^{m'}\mathfrak{I}_{624}^{m''} - \mathfrak{I}_{624}^{m'}\mathfrak{I}_{462}^{m''} = 0.$$

D'un autre côté, le théorème VI peut s'exprimer par l'égalité

$$\mathfrak{I}_{2'}\mathfrak{I}'_{3'} - \mathfrak{I}_{3}\mathfrak{I}'_{2'} + \mathfrak{I}_{1'}\mathfrak{I}'_{2'} - \mathfrak{I}_{2}\mathfrak{I}'_{1} + \mathfrak{I}_{3'}\mathfrak{I}'_{1'} - \mathfrak{I}_{1}\mathfrak{I}'_{3'} = 0\ (^{**}).$$

(*) C. Le Paige, *Mémoire sur quelques applications, etc.*, p. 57.
(**) Ire partie, p. 19.

Le théorème VI peut se conclure immédiatement du mode de génération des cubiques, en se rappelant la propriété suivante de l'homographie du troisième ordre et du second rang.

Si neuf points

$$\begin{matrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{matrix}$$

sont tels que les ternes de points obtenus en formant les termes du déterminant composé de ces neuf éléments appartiennent à l'homographie, les points triples de cette homographie sont en involution I_2^3 *avec les ternes composés des colonnes de ce déterminant* (*).

Les considérations qui précèdent ont pour but de faire voir jusqu'à quel point les théorèmes fondamentaux des cubiques s'impliquent entre eux.

Occupons-nous maintenant des trilatères conjugués.

Deux de ces trilatères se coupent en neuf points situés sur la courbe.

Choisissons six de ces intersections, de telle sorte que chacun des six côtés contienne deux de ces points; nous excluons, par exemple, parmi les neuf intersections, les trois points pris comme centres des faisceaux.

Ces points seront les *sommets* des deux trilatères.

Alors, en partant de l'équation

$$C_3 = \lambda_1\alpha_1\beta_1\gamma_1 + \lambda_2\alpha_2\beta_2\gamma_2 = 0,$$

et en faisant les calculs analogues à ceux qui précèdent, nous arrivons à cette propriété :

Théorème XIV. — *Le rapport anharmonique du faisceau de six droites,*

(*) C. Le Paige, *Atti dell' Accad. de' Nuovi Lincei*, mémoire cité.

obtenu en joignant un point quelconque de la cubique aux sommets de deux trilatères conjugués, est constant (*).

A son tour, le théorème XIV peut conduire au théorème X, et ce dernier peut se déduire immédiatement de la génération des cubiques.

Nous ne répéterons pas la démonstration de ces proprositions, démonstration entièrement semblable à celle que nous avons donnée plus haut pour les trilatères trijugués.

(*) F. Folie, *Bull. de l'Acad. roy. de Belgique*, 2e série, t. XLIV, p. 473.

CHAPITRE IV.

CONSTRUCTIONS.

Nous devons maintenant appliquer les théories qui précèdent à la construction des cubiques. Pour y arriver, nous employerons les théories exposées dans le chapitre II, 1re partie, et dans le chapitre II de la seconde partie, c'est-à-dire celles qui sont relatives à l'involution.

Nous commencerons par résoudre un certain nombre de problèmes fondamentaux dont nous aurons à nous servir ensuite.

Bien que nous ayons toujours traité jusqu'ici, suivant en cela l'ordre qui nous paraissait le plus logique, l'involution I_2^3 avant l'involution I_1^3, nous croyons préférable, dans le cas actuel, de suivre l'ordre inverse.

Nous aurons l'occasion de nous appuyer sur deux théorèmes, en quelque sorte évidents, que nous rappellerons d'abord, pour ne pas interrompre, dans la suite, l'ordre des déductions.

A.) *Toutes les coniques qui passent par trois points fixes, dont l'un situé sur une conique* C_2, *déterminent, sur cette conique, des points appartenant à une* I_2^3.

B.) *Toutes les coniques qui passent par quatre points fixes, dont l'un situé sur une conique* C_2, *déterminent, sur cette conique, des points appartenant à une* I_1^3.

Problème I. — *On donne sept points* $1, 1', 1''; 2, 2', 2''; 3$ *d'une involution* I_1^3; *construire les deux autres points du terne* $3, 3', 3''$.

Supposons que les sept points donnés soient distribués sur une droite quelconque.

Par 3, menons une droite arbitraire δ.

Joignons 1 et 2, 1′ et 2′ à deux points arbitraires I, I′ de δ.

Au trilatère 1′I′, 2I, II′, inscrivons un triangle dont les côtés passent respectivement par 1″, 2″ et a, intersection de 1I et de 2′I′ (*).

Soit δ' le côté de ce triangle, passant par a et I″, p, q ses sommets.

Les cubiques 1′I′, 1I, 1″I″ et 2′I′, 2I, 2″I″ se coupent en neuf points, dont six, I, I′, I″; p, q, a, sont situés sur les droites δ, δ'; les trois autres

$$(1'I',\, 2I) = \alpha''; \quad (1I,\, 2''I'') = \alpha'; \quad (1''I'',\, 2'I') = \alpha,$$

sont donc situés sur une droite δ''.

Les intersections de δ', δ'' avec la droite de 32″2′...1 déterminent les points 3′, 3″.

Ce problème a été résolu différemment par Poncelet et par M. Em. Weyr (**).

Problème II. — *On donne onze points 1, 1′, 1″; 2, 2′, 2″; 3, 3′, 3″; 4, 4′, d'une involution* I_2^3; *construire le douzième 4″.*

Première solution. Au moyen du problème précédent, complétons les involutions

$$1,\ 1',\ 1'',\ 2,\ 2',\ 2'',\ 4; \quad 1,\ 1',\ 1'',\ 3,\ 3',\ 3'',\ 4.$$

Nous obtenons ainsi des ternes

$$4 4_1' 4_1''; \quad 4_1 4_2' 4_2'',$$

qui appartiennent à l'involution donnée.

(*) Steiner, *Werke*, 1ter Bd, s. 511. Chasles, G. S., 1re éd., p. 222.

(**) Poncelet, *Traité des propriétés projectives, etc.*, t. II, p. 242.

Em. Weyr, *Gründzüge einer Theorie der cubischen Involutionen*, pp. 23 et 37.

Pour les cas particuliers, même mémoire passim. Ce travail contenant la solution de la plupart des problèmes relatifs à une I_1^3, nous n'avons pas cru nécessaire de nous étendre sur ce sujet.

Mais, dans une involution I_2^3, à un point fixe correspondent des couples de points appartenant à une I_1^2.

Dans le cas actuel, cette involution quadratique est déterminée par les couples $4_1'4_1''$; $4_2'4_2''$. Il suffira donc de chercher le point $4''$, homologue de $4'$, dans cette involution.

Bien qu'il semble, à première vue, que l'on doive employer des constructions du second degré pour arriver à la détermination de $4''$, nous allons voir qu'il n'en est rien.

Nous pouvons toujours supposer que les points donnés soient transportés sur une conique, de telle sorte que nous ayons les points

$$x_1x_2x_3\,; \quad y_1y_2y_3, \quad z_1z_2z_3, \quad u_1u_2.$$

Menons les droites x_1x_2; y_1y_2 qui se coupent en B.

La droite u_1B déterminera, sur la conique, le point A.

x_3A et y_3A détermineront, par leurs intersections avec x_1x_2, y_1y_2, les points A′ et B′.

De même, x_1x_2 et z_1z_2 se coupent en un point B_1.

B_1u_1 donne le point A_1 et les droites x_3A_1, z_3A_1 donnent, par leurs intersections avec x_1x_2, z_1z_2, les points A_1', B_1'.

Les deux droites A′B′, $A_1'B_1'$ se coupent en un point ϖ.

En joignant ϖ au point u_2, nous obtenons, sur la conique, le point u_3.

En effet, nous voyons que, par la première partie de la construction, celle qui donne la droite A′B′, nous avons déterminé le couple complétant, avec u_1, l'involution déterminée par les deux ternes $x_1x_2x_3$; $y_1y_2y_3$.

Car les couples de côtés opposés du quadrangle ABA′B′ sont des coniques satisfaisant aux conditions du théorème (B).

Nous pouvons remarquer, dans cette construction, que les couples de points x_1x_2; y_1y_2, z_1z_2 peuvent être imaginaires, ou être donnés par couples, de telle sorte qu'il n'est pas nécessaire de les construire individuellement, c'est-à-dire de chercher les intersections de la droite x_1x_2, par exemple, avec la conique.

Le couple u_1u_2 pourrait même être imaginaire sans que la construction devienne impossible.

En effet, supposons que l'on ait construit le groupe des éléments neutres, ou la droite qui, par ses intersections avec C_2, détermine ce groupe : cette droite coupe la droite u_1u_2 en un point S; il suffira de mener, par S, une droite qui coupe la conique en deux points réels $u'_1u'_2$: ces deux points peuvent être substitués à u_1u_2 pour la construction de u_3.

Pour le démontrer, observons que, à u_3, il correspond des couples de points u_1u_2, $u'_1u'_2$, etc., en involution. Les éléments neutres en font nécessairement partie, de telle sorte que u_1u_2 et ces deux points caractérisent l'involution.

Quant à la construction du groupe neutre (ou hessien des points triples), on peut faire usage de la solution suivante, ou chercher, par exemple, les involutions I_1^2, $I_1'^2$ correspondant à des points arbitraires p_1, p'_1 et construire le groupe commun à ces deux involutions. Toutes ces constructions sont d'ailleurs linéaires.

En effet, dans la solution précédente, il suffit de s'arrêter à la détermination du point ϖ, relatif à un point u_1. En déterminant de même un point ρ relatif à un autre point U_1, la droite $\varpi\rho$ est la droite cherchée.

Seconde solution. Nous avons vu que la relation d'homographie $f=0$ peut s'écrire

$$f=\lambda_1 u_1 v_1 w_1 + \lambda_2 u_2 v_2 w_3 = 0,$$

ou

$$\lambda_1(x_1-\delta_1)(y_1-\delta'_1)(z_1-\delta''_1)+\lambda_2(x_1-\delta_2)(y_1-\delta'_2)(z_1-\delta''_2)=0,$$

les x, y, z, et les δ représentant des distances à une origine fixe sur une droite, par exemple.

Par suite, si x_1, y_1, z_1; X_1, Y_1, Z_1, représentent deux groupes de l'homographie, on a

$$\frac{(x_1-\delta_1)(y_1-\delta'_1)(z_1-\delta''_1)}{(X_1-\delta_1)(Y_1-\delta'_1)(Z_1-\delta''_1)}=\frac{(x_1-\delta_2)(y_1-\delta'_2)(z_1-\delta''_2)}{(X_1-\delta_2)(Y_1-\delta'_2)(Z_1-\delta''_2)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (20)$$

Si les points appartiennent à une I_2^3, les trois covariants Σ deviennent identiques entre eux et au hessien des points triples (*).

(*) 1re partie, p. 17.

On a

$$\delta_1 = \delta_1' = \delta_1''\,; \quad \delta_2 = \delta_2' = \delta_2''.$$

De l'équation (20), on conclut que les deux points δ_1, δ_2, appartiennent à toutes les I_1^3, caractérisées par deux ternes quelconques de l'involution I_2^3 donnée.

Supposons maintenant que les trois groupes de points $x_1x_2x_3$; $y_1y_2y_3$; $z_1z_2z_3$ soient représentés sur une conique C_2, et rappelons-nous le mode suivant de représentation d'une I_1^3 :

Tous les triangles inscrits à une conique C_2 *et circonscrits à une seconde conique* Σ_2 *déterminent, par leurs sommets, une involution* I_1^3 (*).

Par suite, on retrouve ce théorème :

Lorsqu'on inscrit trois triangles à une conique C_2, *les trois coniques inscrites à ces triangles, pris deux à deux, ont une tangente commune.*

Cette tangente peut d'ailleurs se construire linéairement. Désignons-la par h.

Elle détermine, d'après ce qui précède, par son intersection avec C_2, les éléments neutres de l'involution donnée.

Mais, outre les neuf points $x_1x_2x_3$, $y_1y_2y_3$, $z_1z_2z_3$, qui nous ont servi à déterminer h, nous nous sommes donné deux points d'un terne : u_1, u_2.

La conique déterminée par les cinq tangentes x_1x_2, x_2x_3, x_3x_1, u_1u_2, h permettra de construire u_3, en achevant le triangle circonscrit, dont deux des sommets sont u_1, u_2 (**).

Il existe encore d'autres solutions de ces questions que nous n'exposerons pas, du moins pour le moment.

PROBLÈME III. — *Connaissant les points triples d'une involution* I_2^3, *et deux points d'un terne, compléter ce terne.*

(*) EM. WEYR. *Op. cit.*
(**) C. LE PAIGE, *Sitzb. der k. Akad. der Wiss. zu Wien*, Bd. LXXXIV, s. 236.

Supposons que les points triples t_1, t_2, t_3, et les deux points donnés u_1, u_2 soient sur une conique C_2.

Construisons les tangentes à la conique en t_1, t_2, t_3; ces trois tangentes constituent un nouveau triangle $T_1T_2T_3$.

Les côtés opposés t_1t_2, T_1T_2; t_2t_3, T_2T_3; t_3t_1, T_3T_1, des deux triangles se coupent en trois points α_3, α_1, α_2, situés sur une droite h.

Cette droite n'est autre chose que la hessienne des points triples; en effet, toutes les coniques qui passent par α_1, α_2, t_3 déterminent, sur C_2, une I_2^3 (théor. A).

Or, une droite quelconque, passant par t_3 constitue, avec h, une de ces coniques : par suite les deux intersections de h avec C_2 donnent bien les éléments neutres de l'involution.

Pour compléter le terne, il suffit de faire passer une conique par α_1, α_2, t_3, u_1, u_2; elle coupera C_2 en u_3; ce problème est linéaire, car on connaît déjà les trois points communs t_3, u_1, u_2.

La construction suivante mène d'ailleurs aisément à la détermination de u_3.

Joignons les points u_1, α_2 par une droite qui coupe C_2 en p.

La droite t_2p coupe h en k, et ku_2 rencontre la conique au point cherché u_3.

En effet, appelons h_1, h_2 les points d'intersection, réels ou imaginaires, de h avec C_2.

Les trois ternes $u_1h_1h_2$; u_1pt_2, $u_1u_2u_3$ font partie de l'involution. Donc u_3 est l'homologue de u_2 dans l'involution quadratique déterminée par les deux groupes h_1h_2, pt_2.

La construction précédente repose sur la détermination du groupe neutre de l'involution; mais cette détermination ne peut plus s'effectuer à l'aide des deux triangles $t_1t_2t_3$, $T_1T_2T_3$, lorsque deux des points triples t_2, t_3, par exemple, sont imaginaires.

Dans ce cas, on peut y substituer la détermination suivante de la droite h_1h_2.

Par t_1 menons la tangente à C_2. Cette tangente coupe la droite t_2t_3 en un point S.

Menons la seconde tangente St'_1.

Puis, par le même point S, une transversale $St'_2t'_3$.

Les deux tangentes en $t'_2t'_3$ se coupent en un point a situé sur $t_1t'_1$.

Les deux droites $t'_2 t'_1$, $t'_3 t'_1$, déterminent sur $t'_3 a$, $t'_2 a$, deux points A, B, et la droite AB passe par S.

A chaque droite $St'_2 t'_3$ correspond donc une droite SAB, et réciproquement. Il suffira de construire, dans cette H_1^2, le rayon correspondant à $St_2 t_3$.

La démonstration de cette construction serait un peu longue : il nous suffira de dire qu'elle repose sur le théorème suivant :

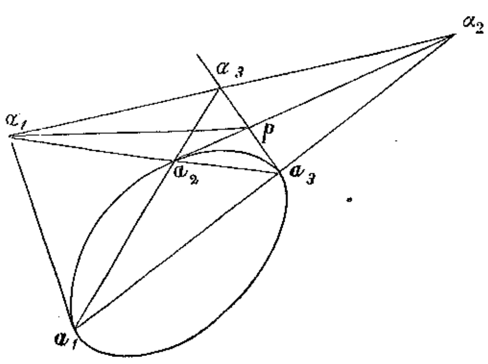
Les points triples d'une involution I_2^3 *forment un groupe de l'involution particulière* I_1^3 *qui a pour points triples les deux éléments neutres.*

Ce théorème se déduit immédiatement d'une propriété connue, des formes cubiques, à savoir qu'une telle forme peut toujours s'écrire :

$$a\zeta^3 + b\eta^3,$$

ζ et η étant les facteurs du hessien, propriété qui est un cas particulier du théorème que nous avons mentionné plus haut sur la forme canonique d'une forme trilinéaire (*).

D'après la remarque faite au problème II, la solution sera toujours possible, même si le groupe donné, $u_1 u_2$, est imaginaire.



La construction suivante de la hessienne des points triples est encore plus simple.

Soient a_1, a_2, a_3 les points triples; les tangentes à la courbe en a_1, a_2, a_3 déterminent, sur les côtés du triangle, les trois points, en ligne droite, α_1, α_2, α_3.

Soit, de plus, p, le pôle de $a_2 a_3$. On voit que $\alpha_1\alpha_3\alpha_2$ est conjuguée harmonique de $\alpha_1 a_2 a_3$, par rapport aux deux droites $\alpha_1 p$, $\alpha_1 a_1$.

(*) C. Le Paige, *Comptes rendus*, t. XCII, p. 1049.

Comme il est toujours possible de construire le pôle de $a_2 a_3$, même si ces deux points sont imaginaires, la construction précédente de la hessienne a toute la généralité désirable.

Problème IV. — *Construire les points triples d'une involution déterminée par trois ternes de points* $x_1x_2x_3$, $y_1y_2y_3$, $z_1z_2z_3$.

Soient t_1, t_2, t_3 les points triples.

Ils sont conjugués harmoniques des groupes $x_1x_2x_3$, $y_1y_2y_3$, $z_1z_2z_3$ (*).

En conséquence, $t_1t_2t_3$ peut être regardé comme un terne appartenant à la fois aux trois involutions qui ont pour points triples les groupes $x_1x_2x_3$, $y_1y_2y_3$, $z_1z_2z_3$.

On est donc ramené à la solution de cette question :

Problème V. — *Construire le groupe commun à trois involutions* I_2^3, $I_2'^3$, $I_2''^3$, *données par leurs points triples.*

Supposons que ces points triples soient donnés par les équations

$$a_x^3 = 0, \quad b_x^3 = 0, \quad c_x^3 = 0.$$

Les trois involutions sont alors définies par les équations :

$$a_0x_1x_2x_3 + a_1(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1) + a_2(x_1 + x_2 + x_3) + a_3 = 0, \quad \ldots \quad (a)$$

$$b_0x_1x_2x_3 + b_1(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1) + b_2(x_1 + x_2 + x_3) + b_3 = 0, \quad \ldots \quad (b)$$

$$c_0x_1x_2x_3 + c_1(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1) + c_2(x_1 + x_2 + x_3) + c_3 = 0. \quad \ldots \quad (c)$$

Les groupes communs à (a) et à (b) forment une I_1^3; ceux qui sont communs à (b) et à (c) une involution $I_1'^3$.

Il faut donc construire les deux coniques d'involution de ces deux I_1^3, $I_1'^3$, ce qui est aisé puisqu'il suffit de construire deux groupes de ces involutions.

(*) 1re partie, p. 16, théor. II. Combiné avec la définition des points conjugués harmoniques, p. 22, théor. IX.

Ces deux coniques ont quatre tangentes communes. L'une est la hessienne du groupe $b_x^3 = 0$; les trois autres forment un triangle inscrit dont les sommets représentent les points cherchés.

Pour démontrer ce qui précède, il suffit d'éliminer x, par exemple, entre (a) et (b), puis entre (b) et (c); puis d'éliminer y entre les deux équations obtenues.

On trouve finalement l'équation

$$(bb')^2 b_x b'_x \left[(ab)(bc)(ca) a_x b_x c_x\right]^2 = 0 \;(*),$$

ce qui démontre le théorème.

Quant à la construction d'un groupe de I_1^3, par exemple, choisissons un point p_1. A ce point, dans (a) et (b) correspondent deux involutions quadratiques faciles à construire, par le problème III; le groupe $p_2 p_3$, commun à ces deux involutions, constitue, avec p_1, un terne de I_1^3.

Nous nous sommes quelque peu étendus sur ces diverses questions, parce qu'elles nous seront utiles dans ce qui va suivre, et aussi parce qu'elles nous paraissent offrir quelque intérêt au point de vue de la représentation des formes algébriques.

En général, il suffit de connaître neuf points d'une cubique pour déterminer complètement la courbe, comme cela ressort immédiatement de ce qui précède.

La construction des cubiques reviendra donc à déterminer autant de points de la courbe qu'on le voudra, à l'aide de neuf points donnés.

Nous ramènerons ces questions à la solution de trois, ou plutôt de deux problèmes, car le premier ne nous sera même pas nécessaire, et, si nous le donnons, c'est afin de ne laisser de côté aucun des problèmes fondamentaux.

Problème VI. — *Étant donnés neuf points d'une cubique, déterminer les intersections de cette courbe avec une droite* Δ.

(*) C. Le Paige, *Sitzb. der k. Akad. der Wiss. zu Wien*, Bd. LXXXIV, s. 235.

Soient 1, 2 ..., 6, a, b, c, les neuf points donnés.

Le faisceau de cubiques $F_2^3(1, 2, \ldots, 6, a)$ détermine, sur Δ, une involution I_2^3 (théor. V, p. 15). Pour obtenir des ternes de cette involution, nous pourrons employer les cubiques décomposables $(12345)(6a)$, $(12346)(5a)$, $(1345a)(23)$, par exemple (*).

Par le problème IV, nous déterminerons les points triples de cette involution.

En faisant la même chose pour les faisceaux $F_2^3(1, 2, \ldots, 6, b)$, $F_2^3(1, 2, \ldots, 6, c)$, nous n'aurons plus qu'à appliquer le problème V, car la cubique à construire, appartenant aux trois faisceaux, détermine, sur Δ, le groupe commun aux trois involutions.

Il peut se faire que les neuf points ne déterminent pas une cubique; nous verrons, au problème VIII, dans quel cas cela pourra se présenter.

Problème VII. — *Étant donnés neuf points d'une cubique, déterminer les intersections de cette courbe avec une droite Δ qui passe par un des neuf points donnés.*

Soit c le point par lequel passe Δ.

Les deux faisceaux $F_2^3(1, \ldots, 6, a)$, $F_2^3(1, \ldots, 6, b)$ déterminent sur Δ deux involutions I_2^3. Dans chacune d'elles, au point c correspond une involution I_1^2, facile à déterminer par le problème III. Le groupe commun à ces deux involutions quadratiques est le couple d'intersections à construire.

Problème VIII. — *Étant donnés neuf points d'une cubique, déterminer la troisième intersection de cette courbe avec une droite Δ qui passe par deux des neuf points donnés.*

Soient b et c les points situés sur Δ.

Le faisceau $F_2^3(1, 2, \ldots, 6, a)$ détermine sur Δ une I_2^3.

(*) Par (12345), etc., nous désignons la conique passant par les cinq points 1, 2, 3, 4, 5.

Par F_k^n, nous désignons les courbes d'ordre n en nombre k^{plement} infini qui passent par les points donnés.

Par le problème II, nous déterminerons le point qui complète le terne dont on connaît bc.

Si le groupe bc représente le hessien des points triples de l'involution caractérisée par le faisceau, le problème est indéterminé, car bc constituant, avec un point quelconque de Δ, un terne de l'involution, il existera une infinité de cubiques passant par les neuf points.

Il est donc toujours facile de déterminer si, par un groupe de neuf points donnés, il passe une seule cubique, ou s'il en passe une infinité.

Problème IX. — *Étant donnés neuf points d'une cubique, construire un système de trilatères trijugués à la courbe.*

Soient 1, 2, ..., 9, les points donnés.

Choisissons-en quatre arbitrairement, 1, 2, 3, 4, par exemple.

Par le problème VIII, on peut contruire les points d'intersection $1'$, $2'$, $3'$ de la courbe avec les transversales 14, 24, 34.

Les points $11'$, $22'$, $33'$ sont six points trijugués.

Les trois systèmes de droites $13'$, $22'$, $31'$; $12'$, $21'$, $33'$; $11'$, $23'$, $32'$, constituent un système de trois trilatères ayant sept points communs avec la courbe.

Problème X. — *Étant donnés neuf points d'une cubique, construire un système de trilatères conjugués à la courbe.*

Choisissons encore arbitrairement quatre points 1, 2, 3, 4. Puis déterminons les intersections $1'$, $3'$ des droites 12, 34 avec la courbe.

Les droites 13, 24, $1'3'$ coupent la courbe en trois nouveaux points $1''$, $2''$, $3''$, situés en ligne droite.

Nous avons maintenant les deux systèmes suivants de trois droites $121'$, $343'$, $1''2''3''$; $131''$, $242''$, $1'3'3''$ qui constituent deux trilatères conjugués.

Problème XI. — *Construire une cubique dont on connaît neuf points.*

Première solution. A l'aide de ces neuf points, construisons un système de trois trilatères trijugués; puis prenons deux des neuf points donnés, 89, par exemple, non compris parmi les sommets des trilatères.

La transversale 89 coupe les trois trilatères en neuf points qui caractérisent une I_2^3.

Il suffira, par le problème II, de compléter le terne 89. Si nous employons deux autres points, 87, nous déterminerons un nouveau point de la courbe.

Celui-ci, joint au précédent, nous permettra d'en construire un troisième, et ainsi de suite, à l'aide d'intersections de lignes droites.

Seconde solution. A l'aide des neuf points, construisons un système de deux trilatères conjugués.

Puis autour d'un des neuf points donnés, 9, par exemple, non situé sur les côtés des trilatères, faisons pivoter une transversale.

Dans chacune de ses positions, cette transversale coupera les deux trilatères en deux ternes de points, caractérisant une I_1^3.

Il suffira, par le problème I, de compléter le terne dont 9 est un point.

Nous ferons observer que, de l'ensemble des constructions qui précèdent, il résulte que l'on peut construire, par des intersections de lignes droites, autant de points d'une cubique, qu'on le veut, étant donnés neuf points qui déterminent cette courbe.

En effet, cette question a été ramenée au problème VIII.

Dans le faisceau $F_2^3(1, 2, \ldots, 6, a)$ que nous avons employé pour résoudre cette question, nous pouvons employer les cubiques décomposables suivantes :

$$(12345)(6a), \quad (12346)(5a), \quad (12456)(3a).$$

Ces cubiques donneront trois ternes de points :

$$x_1x_2x_3; \quad y_1y_2y_3; \quad z_1z_2z_3$$

sur la droite Δ.

Parmi ces points, les trois x_3, y_3, z_3 seront toujours réels.

Les trois couples x_1x_2, y_1y_2, z_1z_2, intersections de Δ avec une conique, peuvent être imaginaires.

Mais, comme nous l'avons fait observer à l'occasion du problème II, cette circonstance importe peu.

En effet, il faut représenter les neuf points sur une conique C_2 quelconque. Voyons donc comment sera représenté, sur cette conique que nous pouvons choisir arbitrairement, et supposer donnée, par exemple, par cinq points A, B, C, D, E, un couple tel que x_1x_2.

Il faut trouver les intersections de Δ avec la conique (12345) (*).

Menons les droites 12, 23; 14, 24; 15, 25 qui détermineront, sur Δ, des couples α, α'; β, β'; γ, γ'.

Si parmi les cinq points A, B, C, D, E, nous en choisissons un arbitrairement, il faudra déterminer les intersections de cette conique avec les droites $A\alpha$, $A\alpha'$, ... $A\gamma'$, problèmes linéaires, puisque l'on connaît une des intersections A.

Nous obtenons ainsi, sur la conique C_2, six nouveaux points p, p'; q, q'; r, r' qui définissent une homographie.

Par des intersections de lignes droites, il sera possible de trouver la droite qui, par ses intersections avec C_2, représente les points doubles de cette homographie.

Ces intersections représentent les intersections de Δ avec C_2. Elles peuvent être imaginaires, puisque, pour la solution du problème II, il nous suffit de connaître la droite qui unit ces deux points.

Nous n'entrerons pas dans le détail des modifications que cette construction peut présenter lorsqu'un certain nombre des points qui déterminent la cubique sont imaginaires, parce que ces questions touchent plutôt à la théorie des coniques.

On aurait, par exemple, à résoudre des questions analogues à la suivante :

(*) La solution de cette question est celle qui a été donnée par STEINER, *Werke*, Ier Band, S. 512.

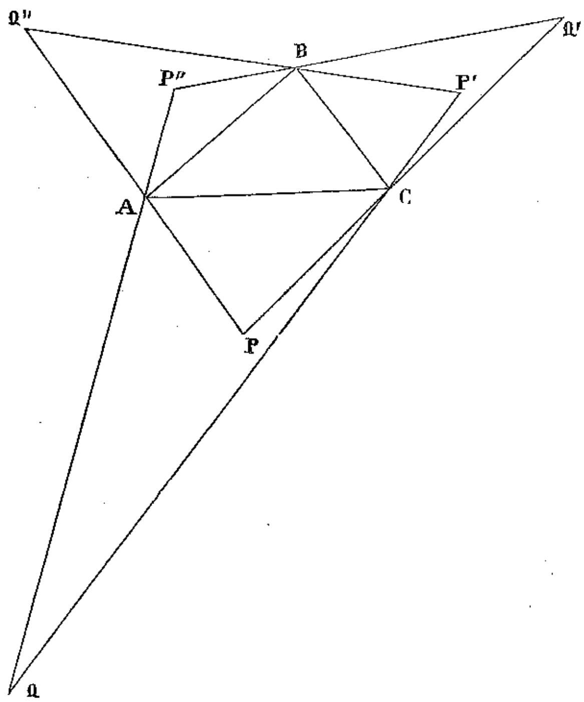
Trouver les intersections d'une droite Δ avec une conique passant par trois points et par les intersections d'une droite δ avec une conique C_2 (*).

De la remarque finale du problème II, il résulte même que les deux points de la cubique, passant par Δ, peuvent être imaginaires, sans que la solution cesse d'être possible.

Rien n'empêche, par exemple, que la cubique soit déterminée par quatre couples de points imaginaires et un neuvième point réel.

Nous avons vu, dans le chapitre premier, que les trois centres des faisceaux homographiques étant donnés, les trois covariants Σ sont représentés par un système de trilatères conjugués.

On peut donc demander de représenter en quelque sorte graphiquement les éléments de l'homographie, et, pour cela, de construire un système de trilatères conjugués passant par trois points situés sur la courbe.



Soient A, B, C les trois centres donnés.

Par A menons une transversale quelconque qui rencontre la courbe en deux points P'', Q, déterminés par le problème VII.

Ensuite $P''B$ détermine Q'; $Q'C$, P; PA, Q''; $Q''B$, P'; $P'C$ passera par Q.

En effet, la courbe donnée, et les deux trilatères $P''AB$; $Q''BP'$, $Q'CP$; $Q''AP$, $P''BQ'$, $P'C$ ont huit

(*) Voir, par exemple, FIEDLER, *Darstellende Geometrie*, 2te Auf. s. 117.

points communs. Donc les trois cubiques passent par le même neuvième point, c'est-à-dire que $P'C$ coupe la courbe en Q.

Les droites $P''AQ$, $Q''AP$; $P''BQ'$, $Q''BP'$; $P'CQ$, $Q'CP$ représentent les trois covariants Σ.

L'une de ces six droites est choisie arbitrairement.

Parmi les six points P, P', P'', Q, Q', Q'' deux exigent une construction du second degré; mais la construction de tous les autres se fera par la ligne droite (*).

Nous sommes ainsi ramenés aux conclusions du chapitre premier.

Le choix arbitraire d'une des six droites correspond au choix de l'indéterminée θ; de plus, les trois covariants Σ ayant même discriminant, dès que l'une des racines de l'un d'eux est connue, les racines des autres peuvent s'en déduire par des équations linéaires.

Il est facile de voir qu'un système de cinq points, tels que $ABP''Q''C$, peut être employé pour la génération de la courbe par la méthode de Chasles : les quatre points $ABP''Q''$ constituant la base du faisceau de coniques, et C, le centre du faisceau de droites.

On voit que l'on peut prendre arbitrairement quatre de ces cinq points.

(*) Voir C. Le Paige, *Comptes rendus*, t. XCIII, p. 509.