FONDEMENTS

D'UNE

GÉOMÉTRIE SUPÉRIEURE CARTÉSIENNE;

PAR

F. FOLIE,

CORRESPONDANT DE L'ACADÉMIE ROYALE DE BELGIQUE.

(Présenté à la classe des sciences le 9 octobre 1869.)

PRÉFACE.

Je pense qu'il convient d'expliquer en quelques mots le long intervalle qui sépare la présentation des différentes parties de ce travail à l'Académie.

La première partie qui traite des courbes planes et des surfaces du second degré, et dont les résultats m'étaient acquis au mois de mai et de juin 1869 (*), avait été présentée à la classe dans les séances successives du 9 octobre et du 8 novembre de cette même année et dans celle du 5 février 1870.

Des analystes distingués voulurent bien me faire quelques observations relatives au mode de démonstration de l'un des théorèmes les plus importants, et je cherchai à éclaircir le point qui leur paraissait douteux.

Frappé sur ces entrefaites par de grands deuils qui m'obligèrent pendant plusieurs mois à renoncer à tout travail, ce n'est qu'à la fin de cette année que j'ai pu mettre la dernière main à mon Mémoire.

Peut-être eût-il été désirable que je pusse le remanier; mais d'une part, le peu de temps dont je dispose ne me l'eût pas permis; d'autre part, en le laissant sous sa première forme, j'avais l'avantage d'indiquer au lecteur la marche qui a été suivie dans l'invention. Je me suis donc borné à signaler par quelques notes datées les passages qui pouvaient sembler douteux, et je les ai élucidés dans une *addition* également datée.

En cherchant à donner à ces éclaircissements leur forme la plus simple, je suis arrivé à démontrer très-brièvement mon extension du théorème de

(*) J'ai consigné les principaux résultats dans des plis cachetés déposés à l'Académie vers ces époques.

Pascal, et en même temps à donner à ce théorème et à celui de Desargues une généralisation que je n'avais pas prévue, quoique j'eusse déjà étendu ces théorèmes aux courbes planes des cinq premiers ordres, et leurs corrélatifs à celles des cinq premières classes : cette généralisation qui porte sur toutes les courbes algébriques trouvera place dans l'*addition* dont je viens de parler.

Pour les surfaces du troisième ordre et pour celles de la troisième classe, j'avais depuis longtemps préparé un travail dans lequel j'étendais à ces surfaces, entre autres théorèmes, ceux de Pascal et de Brianchon. Il a été interrompu comme l'autre, et afin de prendre date, j'ai présenté à l'Académie, dans la séance du 3 décembre, une démonstration purement géométrique de ces théorèmes. Dans le présent mémoire je démontre analytiquement les théorèmes de Pappus, de Desargues et de Pascal pour les surfaces du troisième ordre, et leurs corrélatifs pour celles de la troisième classe.

La partie de mon travail relative aux coordonnées triédriques était également à peu près terminée au commencement de cette année ; je n'ai pas encore pu la reprendre ; j'espère toutefois l'achever prochainement.

Peut-être, si j'ai quelque loisir, pourrai-je étendre davantage encore ces théorèmes qui renferment en germe toute une géométrie supérieure cartésienne et qui seront accueillis avec plaisir, je l'espère, par les géomètres.

Je n'ai pas encore pu m'occuper des constructions auxquelles doivent conduire mes théorèmes : ce sont là des desiderata qui méritent que de jeunes géomètres y consacrent leurs efforts. J'y applaudirai de tout cœur.

Qu'il me soit permis d'adresser mes remercîments à MM. Clebsch et Gilbert pour les éclaircissements qu'ils ont bien voulu me donner.

Liége, 17 décembre 1870.

FONDEMENTS

D'UNE

GÉOMÉTRIE SUPÉRIEURE CARTÉSIENNE.

PREMIÈRE PARTIE.

PRÉLIMINAIRES.

L'Académie des sciences de Bruxelles, qui s'honore d'avoir reçu dans son sein cette pléiade de savants illustres à laquelle restera désormais attaché dans l'histoire le nom de géomètres belges, avait pressenti, il y aura bientôt un demi-siècle, que les théorèmes de Pascal et de Brianchon devaient avoir leurs analogues dans les surfaces du second degré; et elle avait mis cette question au concours à deux reprises différentes, sans toutefois que les efforts tentés par les géomètres les plus éminents eussent paru couronnés de succès.

Si ces propriétés avaient été découvertes par voie d'extension des propriétés du plan à celles de l'espace, leur auteur n'eût pas manqué de se poser ces autres problèmes : Existe-t-il des propriétés analogues pour les courbes et les surfaces de degrés supérieurs? Et il les eût résolus, si sa méthode avait porté en elle-même le caractère de généralisation.

On dirait que les méthodes des Steiner, des Möbius, des Carnot, des Poncelet, des Gergonne, des Chasles, des Dandelin, des Quetelet, des Brasseur restent comme frappées d'impuissance vis-à-vis de ces beaux problèmes; nous voudrions en rechercher la cause.

Élève de Brasseur, nous avons appris à son école à admirer les travaux des géomètres qui, depuis Monge, ont ouvert tant de voies nouvelles d'investigation; mais nous sommes toujours resté convaincu néanmoins, avec Lamé, de la supériorité des méthodes analytiques, supériorité qu'ont fait ressortir avec tant d'éclat d'éminents géomètres modernes, particulièrement en Allemagne et en Angleterre.

Nous avons déjà émis cette opinion dans des travaux antérieurs, et l'on voudra bien nous permettre de rappeler à ce sujet qu'en partant de cette simple idée qu'un déplacement rectiligne infiniment petit d'un point matériel peut être considéré comme s'effectuant sur une courbe à laquelle la direction de ce déplacement est tangente, nous en avons déduit par l'analyse seule, toute la théorie du mouvement d'un corps solide, et que nous sommes arrivé à des théorèmes qui avaient échappé à l'auteur de la théorie des couples (*). Nous avons été heureux de l'approbation que l'un des savants modernes les plus illustres a bien voulu accorder à ces travaux dans une note adressée à l'Académie des sciences de Paris (**).

Pour le sujet qui nous occupe, la supériorité de la méthode analytique nous semble consister en ce qu'elle peut, par cela même qu'elle est analytique, étendre immédiatement à l'espace les propriétés qu'elle a démontrées pour le plan, ou à des courbes d'un degré supérieur les propriétés qu'elle a démontrées pour les courbes du second degré. C'est ainsi que nous verrons la même méthode, au moyen de laquelle nous arrivons aux théorèmes de Pascal et de Brianchon, trouver immédiatement les théorèmes analogues pour les surfaces, ainsi que pour les courbes de degrés supérieurs; ou bien la méthode qui conduit à la génération d'une courbe du second degré, trouver également celle des surfaces et celles des courbes de degrés supérieurs.

On verra à l'évidence pourquoi l'involution de Desargues est particulièrement propre aux courbes et aux surfaces du second degré, tandis qu'elle ne l'est pas à celles d'un degré supérieur; mais en outre on sera conduit à donner à cette idée de l'involution une extension que la géométrie supérieure ne semble pas avoir prévue (***); et l'on reconnaîtra que l'analyse est une méthode puissante, non-seulement de généralisation, mais d'invention.

(*) Voir les *Bulletins de l'Académie*, 2me série, t. XX, nº 8, et t. XXIV, nºs 9 et 10.

(**) Voir les *Comptes rendus*, séance du 11 mars 1868. Note de M. Clausius à l'occasion de l'envoi de la traduction de son ouvrage sur la Théorie mécanique de la chaleur par M. F. Folie.

(***) Depuis que ce travail a été écrit, nous avons trouvé dans la nouvelle édition du *Traité des propriétés projectives*, de Poncelet (t. II, p. 240 et suiv.), cette extension de l'idée de l'involution, qui ne paraît pas avoir été remarquée des géomètres, malgré sa haute importance. 1871.

On nous répondra peut-être avec Poinsot que c'est une *heureuse analyse* qui nous a conduit à ces résultats ; nous faisons si peu de difficulté de le reconnaître que nous sommes étonné que Descartes lui-même, lorsqu'il a fait cette découverte splendide qui renfermait en germe toute l'analyse moderne, ou les géomètres qui lui ont succédé, n'aient presque fait aucun usage de l'idée qui nous sert de point de départ, et qui est venue à l'esprit de plus d'un. Mais de ce que, comme le fait remarquer Poinsot, l'on ne dit pas une *heureuse synthèse*, s'ensuit-il que la synthèse fasse des découvertes sans qu'il lui soit nécessaire de partir d'une idée heureuse, et l'idée même du couple n'est-elle pas une preuve manifeste de la puissance qui réside dans tout point de vue nouveau d'où l'on examine le domaine d'une science, quel que soit du reste l'instrument dont on se sert pour l'explorer ?

L'idée donc, voilà le fonds commun sur lequel on doit s'appuyer dans la synthèse comme dans l'analyse ; plus cette idée sera générale, plus aussi elle sera féconde ; mais des deux méthodes qui servent à la développer, il nous semble que l'on doit préférer celle qui est susceptible par elle-même de la plus grande généralisation.

Après avoir pris l'analyse pour base de nos théorèmes fondamentaux, nous n'essayerons pas cependant, par amour pour une prétendue unité de méthode, d'appliquer les mêmes procédés de démonstration à tous les corollaires, et nous ferons, au contraire, usage, sans aucun scrupule, dans la déduction de ces corollaires, de la méthode qui nous paraîtra la plus simple et la plus naturelle.

Vouloir accorder à un procédé une préférence exclusive, qui porte souvent à dédaigner tous les autres, c'est non-seulement se priver volontairement d'une des plus grandes ressources, qui est la combinaison des moyens, mais c'est même forcer les yeux de l'intelligence à se fixer dans une direction unique, tandis que par sa nature elle cherche à embrasser tout l'horizon d'un seul regard.

L'idée qui nous a servi de point de départ consiste dans la génération d'une ligne ou d'une surface au moyen des intersections de systèmes de lignes ou de surfaces mobiles en vertu de la variation de certains paramètres ; c'est donc, si l'on veut, une application de cette méthode des coefficients indéterminés qui a déjà été la source de tant de progrès. Cette méthode ne nous semble pas épuisée, et nous aurons l'occasion d'en montrer d'autres applications.

Le titre même de notre travail indique suffisamment que nous n'avons voulu que poser les bases d'une méthode qui conduit aux plus belles propriétés de la géométrie supérieure, sans invoquer d'autres principes que ceux de la géométrie analytique la plus élémentaire (*). C'est dire que nous ne nous appuierons pas sur ceux qui ont été employés en géométrie supérieure, tels que le rapport anharmonique, l'involution, le principe des transversales, celui des polaires réciproques, et que nous rechercherons par l'analyse seule, soit ces principes mêmes, soit les théorèmes fondamentaux qui en découlent.

Déduire les corollaires de nos théorèmes serait une entreprise qui exigerait peut-être des années de travail; et en effet, si l'étude seule des propriétés des coniques au moyen de ces théorèmes conduit à des développements qui forment la matière de plusieurs volumes, on imagine aisément combien de conséquences on pourrait déduire des théorèmes similaires que nous donnerons pour les courbes algébriques jusqu'au cinquième ordre ou à la cinquième classe, pour les surfaces jusqu'au troisième degré ou à la troisième classe en général.

C'est là un champ que nous ne faisons que défricher, et sur lequel ceux qui voudront poursuivre ces recherches sont certains de faire une ample moisson de découvertes.

Notre travail se partage tout naturellement en deux parties, la géométrie supérieure plane et la géométrie supérieure dans l'espace; dans l'une comme dans l'autre, nous avertissons dès à présent qu'en parlant de points, de droites ou de plans, nous sous-entendrons toujours qu'ils peuvent être réels ou imaginaires; et l'on verra que cette manière générale d'envisager l'étude de l'espace, qui a été si heureusement introduite par les Steiner et les Chasles, donne lieu à bien des rapprochements qui, sans elle, seraient restés inaperçus.

(*) Nous avons fait choix du titre de géométrie cartésienne pour indiquer que nous ne faisons usage que des coordonnées suffisantes, et non des coordonnées surabondantes (polygonales ou polyédriques) dont la découverte est due à Bobillier et à Plücker. 1871.

LIVRE I.

GÉOMÉTRIE SUPÉRIEURE PLANE.

Terminologie et notations. Dans un précédent travail (*), nous avons donné le nom d'*Analogie* (dérivé du grec ἀνάλογοσ) à la relation qui exprime que deux fonctions sont entre elles dans un rapport constant pour toutes les valeurs des variables; nous avons appelé ces deux fonctions *analogiques*, et nous avons employé le signe $\div$ pour désigner cette relation.

Ainsi, au lieu d'écrire :

$$F = kf, \quad F' = k'f',$$

relations dans lesquelles les lettres F, f, etc., désignent des fonctions de certaines variables; k, k', etc., des constantes, nous écrivons :

$$F \div f, \quad F' \div f',$$

et nous énonçons ces relations en disant que F est *analogique* à f, ou que F et f sont *analogiques*.

Le peu d'intérêt qu'offre la connaissance des rapports k, k' en géométrie supérieure, nous a décidé à les supprimer dans la notation comme dans le discours; et le rôle essentiel que l'*analogie* joue dans tout notre travail nous fait espérer qu'on voudra bien excuser ce néologisme.

Nous appellerons *polygones conjugués de* n *côtés inscrits à une courbe du* n^{me} *ordre,* deux polygones tels que chaque côté de l'un passe par l'un des points d'intersection de chaque côté de l'autre avec la courbe. Fig. I et III.

(*) *Bulletins de l'Académie*, 2me sér., t. XXVIII, n° 7.

De même nous appellerons *polygones conjugués de* n + 1 *côtés inscrits à une courbe du* n^me^ *ordre*, deux polygones tels que chaque côté de l'un passe par l'un des points d'intersection de chaque côté de l'autre, un seul excepté, avec la courbe; les *côtés opposés* dans ces deux polygones seront ceux qui n'auront pas de point commun sur la courbe.

Fig. II et V.

Ainsi, deux triangles conjugués inscrits à une conique sont, par exemple, deux triangles de côtés respectifs A, B, C, et a, b, c, tels que A passe par l'un des deux points d'intersection de b et c avec la conique; B par l'intersection de c et par l'une de celles de a; et enfin C par l'autre intersection de a et de b; et les côtés opposés dans ces deux triangles sont A et a, B et b, C et c, parce qu'ils ne se coupent pas deux à deux sur la courbe.

Pour tracer ces deux triangles, on commencera par former le premier au moyen de trois côtés A, B, C qui coupent chacun la courbe en deux points; le second se formera en joignant ces points deux à deux par des droites distinctes de A, B, C, ce qui pourra se faire de huit manières différentes.

Les deux triangles A, B, C; a, b, c forment évidemment un hexagone inscrit, mais on verra que la dénomination de triangles conjugués inscrits se prête immédiatement à une généralisation que ne comporte pas la dénomination d'hexagone inscrit.

Nous appellerons *polygones conjugués de* n *sommets circonscrits à une courbe de la* n^me^ *classe*, deux polygones circonscrits de n sommets, tels que chaque sommet de l'un soit le point de concours de n côtés de l'autre passant respectivement par les n sommets de celui-ci.

Fig. VI.

De même nous appellerons *polygones conjugués de* n + 1 *sommets circonscrits à une courbe de la* n^me^ *classe*, deux polygones circonscrits de n + 1 sommets, tels que chaque sommet de l'un soit le point de concours de n côtés passant respectivement par tous les sommets de l'autre, un seul excepté; les *sommets opposés* dans ces deux polygones seront deux sommets par lesquels ne passera pas un même côté.

Fig. VII.

Ainsi, deux triangles conjugués circonscrits à une conique se tracent en menant de chacun des trois points A, B, C deux tangentes à la conique; l'une des tangentes menées par A coupe l'une de celles menées par B en c; l'autre tangente menée par B coupe l'une de celles menées par C en a; enfin les deux autres tangentes menées par C et A se coupent en b. Les sommets opposés sont A et a, B et b, C et c, parce qu'ils ne sont pas situés, deux à deux, sur l'un des côtés.

Ici encore, on voit qu'à un même triangle circonscrit ABC peuvent répondre huit triangles conjugués *abc*.

Les deux triangles ABC et *abc* forment évidemment un hexagone circonscrit; mais le même motif de généralisation que nous avons fait valoir plus haut nous oblige à rejeter cette dernière dénomination.

Nous justifierons les définitions qui précèdent par les théorèmes qui font l'objet de notre travail, et nous renverrons dès à présent le lecteur aux figures I à VII, où il verra des systèmes de triangles conjugués ABC et *abc*, et de quadrilatères conjugués ABCD et *abcd* inscrits à une courbe du troisième ordre (fig. I et II); de quadrilatères conjugués ABCD et *abcd* et de pentagones conjugués ABCDE et *abcde* inscrits à une courbe du quatrième ordre (fig. III et V); des systèmes de triangles (ou plutôt *trigones*) conjugués P, P′, O et I, II, III, et de quadrilatères (ou *tétragones*) conjugués O, I, II, III et O′, I′, II′, III′ circonscrits à une courbe de la troisième classe.

Nous insistons de nouveau sur la nécessité de se représenter ces systèmes de polygones conjugués comme pouvant être imaginaires dans certaines courbes; mais on comprend qu'il ne peut pas entrer dans notre plan de discuter, dans cette étude générale, tous les cas particuliers qui pourront se présenter; un lecteur familier avec la géométrie supérieure s'apercevra immédiatement que nos démonstrations sont applicables et aux cas réels et aux cas imaginaires.

CHAPITRE I.

COORDONNÉES RECTILIGNES PONCTUELLES.

Art. I. — *Théorèmes généraux.*

Lemme fondamental. Représentons par δ_n la distance d'un point x, y à une droite $a_n x + b_n y + c_n = 0$; toute courbe du n^{me} ordre pourra se représenter par l'équation :

$$\delta_0 \delta_1 C_{n-2} = k \delta'_0 \delta'_1 \ldots \delta'_{n-1} \quad \ldots \ldots \quad (1),$$

dans laquelle les paramètres de δ_0 et de δ_1 sont donnés, tandis que ceux de $\delta'_0 \ldots \delta'_{n-1}$, et ceux de C_{n-2} qui représente une fonction complète du $(n-2)^{me}$ degré en x et y, sont à déterminer ainsi que k.

En effet, l'équation d'une courbe du n^{me} ordre renferme $\frac{n(n+3)}{2}$ paramètres, ce qui fournira un nombre égal d'équations; C_{n-2} renferme $\frac{(n-2)(n+1)}{2}$ paramètres à déterminer; le second membre de l'équation précédente en renferme $2n + 1$; et l'on a identiquement :

$$\frac{n(n+3)}{2} = \frac{(n-2)(n+1)}{2} + 2n + 1,$$

ce qu'il fallait démontrer.

L'équation de la courbe étant vérifiée par chacune des équations $\delta_0 = 0$, $\delta_1 = 0$, $C_{n-2} = 0$, combinée avec l'une quelconque des équations $\delta' = 0$, il en résulte que chacune des lignes du premier système (qui sont deux droites données et une courbe du $(n-2)^{me}$ ordre), coupe chacune des droites $\delta' = 0$ du second système en tous points situés sur la courbe. On peut donc dire que les droites δ' sont des transversales qui unissent deux à deux les intersections des sécantes données δ_0 et δ_1 avec la courbe du n^{me} ordre, et que ces transversales vont recouper la courbe en d'autres points qui sont tous situés sur la ligne C_{n-2} (*).

(*) Nous dirons souvent pour abréger la droite δ ou la courbe C_n, au lieu de la droite $\delta = 0$ ou la courbe $C_n = 0$.

Nous sommes ainsi amené à l'énoncé suivant, qui a été donné d'une manière plus générale par Gergonne (*), sans qu'il indique toutefois la forme de l'équation (1) :

I. Théorème fondamental. *Soient données une courbe du* n^{me} *ordre et deux sécantes qui la coupent chacune en* n *points : si l'on joint les points d'intersection de la première à ceux de la seconde par* n *transversales qui ne partent pas deux à deux d'un même point de la courbe (ce qui peut se faire de*

(*) *Annales de mathématiques*, t. XVII. Nous n'insistons pas sur la démonstration précédente, parce que le lecteur pourra recourir, soit à celle de Gergonne, soit à la suivante, que nous devons à une obligeante communication de M. Clebsch, et qui est beaucoup plus générale et plus élégante que ces dernières.

Soit $f=0$ l'équation d'une courbe du n^{me} ordre; δ_0 et δ_1 deux transversales de cette courbe.

Supposons d'abord qu'elles ne passent pas par un point de f; et soient $\delta'_0 \ldots \delta'_{n-1}$ les sécantes qui relient deux à deux leurs points d'intersection avec la courbe.

La courbe $\varphi = f - k\delta'_0 \ldots \delta'_{n-1} = 0$ a, avec chacune des droites δ_0 et δ_1, n points communs; mais on peut déterminer k de telle sorte que $\varphi=0$ passe par le point (δ_0, δ_1) : alors φ a $n+1$ points communs avec δ_0 et δ_1; donc elle les contient tout entières, et par suite

$$\varphi = \delta_0 \delta_1 C_{n-2},$$

d'où

$$f = \delta_0 \delta_1 C_{n-2} + k\delta'_0 \delta'_1 \ldots \delta'_{n-1}.$$

Supposons en second lieu que (δ_0, δ_1) soit sur f, en un point simple, et que ni δ_0 ni δ_1 ne soient tangentes en ce point; alors l'une des sécantes $\delta'_0 \ldots$ devra réunir les deux points de δ_0 et de δ_1 qui se sont confondus en ce point unique, sans quoi l'une d'entre elles coïnciderait avec δ_0 ou δ_1.

Soit donc δ_0 la tangente à f, en ce point; nous aurons :

$$\frac{d\delta'_0}{dx} = \mu \frac{df}{dx}; \quad \frac{d\delta'_0}{dy} = \mu \frac{df}{dy}.$$

Par suite, on pourra déterminer k de telle sorte qu'en ce point φ ait un point double; car, pour celui-ci, l'on doit avoir

$$\frac{df}{dx} - k\frac{d\delta'_0}{dx}\delta'_1 \ldots \delta'_{n-1} = 0,$$

$$\frac{df}{dy} - k\frac{d\delta'_0}{dy}\delta'_1 \ldots \delta'_{n-1} = 0,$$

d'où

$$k = \frac{1}{\mu\delta'_1 \ldots \delta'_{n-1}}.$$

k étant ainsi déterminé, φ a de nouveau $n+1$ points communs avec δ_0 et δ_1; donc, etc.

Le même procédé est applicable aux cas qui sont exclus de la démonstration précédente (1870).

1.2...(n—1)..... *manières différentes), ces* n *transversales couperont la courbe en* n(n — 2) *autres points dont le lieu sera de l'ordre* n — 2.

Comme nous venons de le dire, il est géométriquement visible que l'équation de la courbe peut se mettre de 1.2.3 ..... (n—1) manières différentes sous la forme (1), puisqu'il existe le même nombre de systèmes de n transversales δ' reliant deux à deux les points d'intersection des sécantes δ_0 et δ_1 avec la courbe.

La démonstration purement analytique de cette propriété est moins aisée. On voit bien qu'en mettant l'équation (1) sous la forme

$$\begin{aligned}&(y + a_0x + b_0)\,(y + a_1x + b_1)\,(ky^{n-2} + k\gamma_0x^{n-2} + k\gamma_1y^{n-3}x + \ldots)\\ &-(y + \alpha_0x + \beta_0)\,(y + \alpha_1x + \beta_1)\ldots(y + \alpha_{n-1}x + \beta_{n-1}) = 0,\end{aligned}$$

et en l'identifiant avec l'équation donnée,

$$y^n + A_0x^n + A_1y^{n-1}x + \ldots = 0$$

multipliée par $k - 1$, si l'on considère k, $k\gamma_0$, $k\gamma_1 \ldots \alpha_0$, $\beta_0 \ldots$ comme inconnues, les équations qui les détermineront seront des degrés respectifs $1, 2, \ldots n$; on pourra donc en conclure que l'équation finale résultante sera en général du degré $1.\ 2 \ldots n$, et que l'on aura par suite $1.\ 2 \ldots n - 1$ systèmes de n transversales δ'; mais il faut bien reconnaître que sans la considération géométrique qui précède, l'exactitude absolue de cette conclusion ne serait pas tout à fait hors de doute, à cause de la difficulté de la détermination du degré de l'équation finale résultant de ce système d'équations incomplètes.

Remarque. Ce lieu des nouvelles intersections des transversales avec la courbe, qui est de l'ordre $n - 2$, sera en général une courbe de cet ordre; mais dans des cas particuliers il pourra se réduire à un ou plusieurs systèmes de droites et d'une courbe d'ordre moins élevé, ou à plusieurs courbes moins élevées, ce qui se reconnaîtra aux caractères suivants :

Si, parmi ces $n(n - 2)$ points, il y en a $n - 1$ distincts qui sont en ligne droite, le lieu se réduira à cette droite et à une courbe de l'ordre $(n - 3)$.

Si $2n - 3$ points distincts sont sur une conique, le lieu se réduira à cette conique et à une courbe du $(n - 4)^{me}$ ordre, etc.

Si deux systèmes, l'un de $n-1$, l'autre de $n-2$ points distincts, sont en ligne droite, le lieu se réduira à ces deux droites et à une courbe de l'ordre $n-4$; et ainsi de suite.

Si $n-3$ systèmes de ces points, le premier de $n-1$, le deuxième de $n-2$, le troisième de $n-3$, etc., le $(n-3)^{me}$ de trois points distincts sont en ligne droite, le lieu se réduira à un système de $n-2$ droites. Or, ces $n-2$ droites, de même que les deux sécantes données, rencontrant les n transversales en tous points situés sur la courbe, nous voyons que nous aurons affaire, dans ce cas particulier très-remarquable, *à un système de deux polygones conjugués de* n *côtés inscrits à une courbe du* n^me^ *ordre*, c'est-à-dire *tels que chaque côté de l'un passe par l'un des points d'intersection de chacun des côtés de l'autre avec la courbe.* Fig. I et III.

Ce cas est possible pour toutes les courbes jusqu'au cinquième ordre inclusivement; au delà, il ne peut se réaliser que pour des courbes particulières.

En effet, il faut, dans ce cas, que l'équation puisse se mettre sous la forme

$$\delta_0\delta_1 \ldots \delta_{n-1} = k\delta'_0 \ldots \delta'_{n-1} \qquad (2),$$

équation qui renferme $4n+1$ paramètres à déterminer. Or, celle de la courbe en renferme $n\frac{(n+3)}{2}$; il faut donc que $4n+1$ soit au moins égal à $n\frac{(n+3)}{2}$, condition qui n'est pas remplie au delà de $n=5$ (*).

Pour les courbes des cinq premiers ordres, qui sont toutes réductibles à cette forme, ainsi que pour les courbes particulières d'ordres supérieurs qui y sont réductibles, nous pourrons énoncer ce théorème :

(*) Nous ferons voir dans l'*Addition* que, pour les courbes du quatrième et du cinquième ordre, qui sont, avec celles du deuxième et du troisième, les seules auxquelles tous les théorèmes de cette Première Partie soient applicables, il est toujours possible de mener deux sécantes telles que leurs transversales déterminent des systèmes multiples de polygones conjugués.

C'est à ces systèmes de polygones conjugués que s'appliquent le corollaire III ainsi que le théorème de Pascal qui en découle.

Nous prouverons au reste directement ce théorème dans l'*Addition*, et nous ferons en outre remarquer, dès à présent, que nous lui donnerons, dans cette même *Addition*, une généralité telle qu'il s'applique à toutes les courbes algébriques (1870).

II. EXTENSION DU THÉORÈME DE PAPPUS. *Dans un système de deux polygones conjugués de* n *côtés inscrits à une courbe du* n^{me} *ordre, les produits des distances d'un point de la courbe aux côtés de chacun de ces polygones sont analogiques.*

CAS PARTICULIER. Un cas particulier du théorème fondamental est celui dans lequel on fait coïncider les deux sécantes primitives : dans ce cas les transversales qui relient les points d'intersection des deux sécantes deviennent des tangentes à la courbe, et l'on est conduit à cette propriété :

COROLLAIRE. *Si, par les* n *points d'intersection d'une sécante avec une courbe du* n^{me} *ordre, on mène à celle-ci* n *tangentes, elles détermineront sur la courbe* n (n — 2) *points d'intersection dont le lieu sera de l'ordre* (n — 2).

Ce corollaire donne naturellement lieu aux mêmes cas particuliers que le théorème I; et entre autres au cas dans lequel le lieu de l'ordre $n - 2$ se réduit à $n - 2$ droites. On voit immédiatement que le théorème II s'énoncera, dans ce cas particulier très-remarquable :

COROLLAIRE DU THÉORÈME DE PAPPUS. *Si les tangentes menées aux* n *points d'intersection d'une sécante avec une courbe du* n^{me} *ordre déterminent par leurs* n (n — 2) *intersections avec la courbe un système de* n — 2 *transversales, le produit du carré de la distance d'un point quelconque de la courbe à cette sécante par ses distances aux transversales, et le produit de ses distances à toutes les tangentes, sont analogiques.*

Nous nous écarterions de notre but si nous déduisions du théorème de Pappus les autres corollaires auxquels il donne lieu, soit par la combinaison des différents systèmes de deux polygones conjugués inscrits de n côtés, qui sont, comme nous l'avons vu, au nombre de $1 . 2 \ldots\ldots (n - 1)$, ayant pour côtés communs les deux sécantes primitives, soit en faisant coïncider deux points d'intersection d'une même sécante, ce qui la transforme en une tangente.

Nous indiquerons plus bas quelques-unes de ces applications à des courbes d'un ordre déterminé ; mais il est un point sur lequel nous devons fixer notre attention, parce que nous en partirons pour arriver au théorème de Pascal. C'est celui-ci :

III. Corollaire. *Lorsque, dans une courbe du* n^{me} *ordre, il existe des systèmes de deux polygones conjugués inscrits de* n *côtés, il existera également des systèmes de deux polygones conjugués inscrits de* (n + 1) *côtés* (*).

En effet, considérons un système de deux sécantes s et s' qui coupent la courbe en $0, 1, 2 \ldots (n-1)$; $0', 1', 2' \ldots (n'-1')$; et supposons que les transversales $(0, 0')$, $(1, 1')$, $(2, 2') \ldots (n-1, n'-1')$, que nous désignerons respectivement par $t_0, t_1, t_2 \ldots t_{n-1}$, déterminent par leurs nouvelles intersections avec la courbé $(n-2)$ systèmes de n points situés en ligne droite : $u_0, u_1, \ldots\ldots u_{n-3}$.

Nous aurons ainsi le système de polygones conjugués inscrits de n côtés

$$s, s', u_0 \ldots u_{n-3}; \quad t_0, t_1 \ldots t_{n-1}.$$

Si nous joignons actuellement les points $0 \ldots 0' \ldots$ par les $n-3$ transversales $t_0 \ldots t_{n-4}$, qui sont les mêmes que celles du système précédent, puis par $(n-3, n'-2')$, $(n-2, n'-1')$, $(n-1, n'-3')$, que nous appellerons T_{n-3}, T_{n-2}, T_{n-1}, ce nouveau système de transversales déterminera, par ses intersections avec la courbe, $n-2$ nouveaux systèmes de n points situés en ligne droite $U_0, U_1 \ldots U_{n-3}$, ainsi qu'il résulte de la remarque que nous avons faite au sujet de l'équation (2); de sorte que nous obtenons par ce moyen un nouveau système de polygones conjugués inscrits de n côtés

$$s, s', U_0, \ldots U_{n-3}; \quad t_0, \ldots t_{n-4}, T_{n-3}, T_{n-2}, T_{n-1}.$$

Ces deux systèmes de deux polygones conjugués inscrits de n côtés ont $n-1$ côtés communs, $s, s', t_0 \ldots t_{n-4}$; si nous ne tenons pas compte de ces côtés, les $2\,\{2n-(n-1)\}$ ou les $2(n+1)$ côtés restants formeront un système de deux polygones conjugués inscrits de $n+1$ côtés, *c. q. f. d.*

Mettons l'équation (2) sous la forme :

$$(y - a_0x - b_0) \ldots\ldots (y - a_{n-1}x - b_{n-1}) = k'(y - a'_0x - b'_0) \ldots (y - a'_{n-1}x - b'_{n-1});$$

et menons aux différentes droites $y - a_0x - b_0 = 0$, etc., par un point

(*) Comme nous l'avons dit plus haut, nous prouverons dans l'*Addition* la possibilité de l'existence des polygones conjugués que nous considérons ici (1870).

x, y de la courbe, des parallèles qui coupent l'axe des Y à des distances représentées par les lettres $\gamma_0 \ldots$; ces parallèles auront des équations de la forme $y = a_0 x + \gamma_0$, etc.; d'où $y - a_0 x = \gamma_0$, et, par suite, l'équation précédente pourra s'écrire :

$$(\gamma_0 - b_0) \ldots (\gamma_{n-1} - b_{n-1}) = k' (\gamma'_0 - b'_0) \ldots (\gamma'_{n-1} - b'_{n-1}) \quad \ldots \ldots \quad (3).$$

Remarquons maintenant que si, par le même point x, y de la courbe, nous menons une transversale D qui coupe les côtés $\delta_0 \ldots \delta_{n-1}$, $\delta'_0 \ldots \delta'_{n-1}$ des deux polygones conjugués inscrits en $O \ldots O_{n-1}$, $O' \ldots O'_{n-1}$ et la courbe en $M \ldots M_{n-1}$, nous aurons des relations de la forme

$$\gamma_0 - b_0 = OM \cdot \frac{\sin (D, \delta_0)}{\sin (Y, \delta_0)}; \quad \gamma_1 - b_1 = O_1 M \frac{\sin (D, \delta_1)}{\sin (Y, \delta_1)}, \text{ etc.};$$

et par suite l'équation (3) s'écrira :

$$OM \ldots O_{n-1}M \frac{\sin (D, \delta_0) \ldots \sin (D, \delta_{n-1})}{\sin (Y, \delta_0) \ldots \sin (Y, \delta_{n-1})} = k' . O'M \ldots O'_{n-1} M \frac{\sin (D, \delta'_0) \ldots \sin (D, \delta'_{n-1})}{\sin (Y, \delta'_0) \ldots \sin (Y, \delta'_{n-1})}.$$

Mais pour les autres points d'intersection $M_1 \ldots M_{n-1}$ de la transversale avec la courbe, nous n'aurons qu'à changer dans cette relation M en $M_1 \ldots M_{n-1}$; nous obtiendrons ainsi n relations de la même forme, d'où nous déduirons :

$$\frac{OM . O_1M \ldots O_{n-1}M}{O'M . O'_1M \ldots O'_{n-1}M} = \frac{OM_1 . O_1M_1 \ldots O_{n-1}M_1}{O'M_1 . O'_1M_1 \ldots O'_{n-1}M_1} = \cdots = \frac{OM_{n-1} . O_1M_{n-1} \ldots O_{n-1}M_{n-1}}{O'M_{n-1} . O'_1M_{n-1} \ldots O'_{n-1}M_{n-1}} \quad (4).$$

Nous arrivons ainsi à une relation excessivement remarquable entre les $3n$ points d'intersection d'une transversale avec une courbe du n^{me} ordre et avec les $2n$ côtés d'un système de deux polygones conjugués inscrits.

Quand cette relation existe pour six points d'une droite, on dit que ces six points sont en involution. Nous sommes donc amené tout naturellement à étendre la même notion aux $3n$ points déterminés sur la transversale, et à dire que ces $3n$ points, qui satisfont à la relation (4), sont en involution.

Cette relation à n membres caractérise l'involution de $3n$ points, absolument comme la relation à deux membres

$$\frac{OM \cdot O_1M}{O'M \cdot O'_1M} = \frac{OM_1 \cdot O_1M_1}{O'M_1 \cdot O'_1M_1}$$

caractérise l'involution de $3 \times 2 = 6$ points.

Nous pourrons donc énoncer le théorème suivant :

IV. Extension du théorème de Desargues. *Lorsque l'on a un système de deux polygones conjugués de* n *côtés inscrits à une courbe du* n^{me} *ordre, une transversale quelconque rencontre les* 2n *côtés de ces polygones et la courbe en* 3n *points qui sont en involution* (*).

On voit clairement par là pourquoi l'involution de six points, la seule connue jusqu'à ce jour, est particulièrement, nous pourrions même dire exclusivement propre aux coniques, de même qu'elle l'est, comme nous le verrons, aux surfaces du second degré, et pourquoi elle doit être à peu près impuissante dans l'étude des courbes et des surfaces d'un degré supérieur.

On pourrait mettre la relation (4), comme celle de l'involution de six points, sous différentes formes; nous ne nous y arrêterons pas, et nous passerons immédiatement à l'extension du fameux théorème de Pascal sur les coniques aux courbes des troisième, quatrième et cinquième ordres.

Cette extension se fonde sur le lemme suivant :

Lemme algébrique. *Si l'on a une relation à* $n + 1$ *membres de la forme*

$$\frac{xx_1 \dots x_{n-1}}{x'x'_1 \dots x'_{n-1}} = \frac{(x + a)(x_1 + a) \dots (x_{n-1} + a)}{(x' + a)(x'_1 + a) \dots (x'_{n-1} + a)} = \dots = \frac{(x + a_{n-1})(x_1 + a_{n-1}) \dots (x_{n-1} + a_{n-1})}{(x' + a_{n-1})(x'_1 + a_{n-1}) \dots (x'_{n-1} + a_{n-1})}$$

dans laquelle $a \dots a_{n-1}$ *sont des constantes, chacun des termes des numérateurs sera respectivement égal à l'un des termes des dénominateurs.*

En effet, il est évident d'abord que si cette égalité existe, la relation sera satisfaite; d'autre part, que cette égalité peut donner lieu à $1.2 \dots n$ solu-

(*) On trouvera dans l'*Addition* une généralisation beaucoup plus considérable encore de ce théorème (1870).

tions différentes : car on peut faire x égal à l'une des n valeurs x' ou x'_1 ...... ou x'_{n-1}; puis x_1 à l'une quelconque de ces valeurs, sauf celle qu'on a prise pour x, ce qui en donne $n-1$; puis x_2 à l'une quelconque de ces mêmes valeurs, sauf les deux précédentes, ce qui en donne $n-2$, et ainsi de suite; ce qui fait qu'on aura en tout $n(n-1)(n-2)\ldots 3.2.1$ solutions.

Si l'on démontre maintenant que la relation donnée n'en admet pas davantage, le lemme sera établi.

Or, cette relation peut se décomposer dans les équations suivantes, au nombre de n :

$$\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{x}\right)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{x_1}\right)\cdots\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{x_{n-1}}\right)=\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{x'}\right)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{x'_1}\right)\cdots\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{x'_{n-1}}\right)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\left(\frac{1}{a_{n-1}}+\frac{1}{x}\right)\left(\frac{1}{a_{n-1}}+\frac{1}{x_1}\right)\cdots\left(\frac{1}{a_{n-1}}+\frac{1}{x_{n-1}}\right)=\left(\frac{1}{a_{n-1}}+\frac{1}{x'}\right)\left(\frac{1}{a_{n-1}}+\frac{1}{x'_1}\right)\cdots\left(\frac{1}{a_{n-1}}+\frac{1}{x'_{n-1}}\right).$$

Nous les écrirons, en posant $\frac{1}{a}=\alpha$, $\frac{1}{x}=\xi$, etc. :

$$(\alpha+\xi)(\alpha+\xi_1)\ldots(\alpha+\xi_{n-1})=(\alpha+\xi')(\alpha+\xi'_1)\ldots(\alpha+\xi'_{n-1})$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$(\alpha_{n-1}+\xi)(\alpha_{n-1}+\xi')\,..\,(\alpha_{n-1}+\xi_{n-1})=(\alpha_{n-1}+\xi')(\alpha_{n-1}+\xi'_1)\,..\,(\alpha_{n-1}+\xi'_{n-1}).$$

On voit aisément que ce système de n équations du n^{me} degré peut se réduire à l'une d'entre elles et à $n-1$ équations du $(n-1)^{me}$ degré de la forme :

$$(\alpha-\alpha_1)\,\Sigma\xi_1\,..\,\xi_{n-1}+(\alpha^2-\alpha_1^2)\,\Sigma\xi_2\,..\,\xi_{n-2}+\,..\,+(\alpha^{n-1}-\alpha_{n-1}^{n-1})\,\Sigma\xi=\text{etc.}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$(\alpha-\alpha_{n-1})\,\Sigma\,.\,\xi_1\,..\,\xi_{n-1}+(\alpha^2-\alpha_{n-1}^2)\,\Sigma\xi_2\,..\,\xi_{n-2}+\,..\,+(\alpha^{n-1}-\alpha_{n-1}^{n-1})\,\Sigma\xi=\text{etc.}$$

Celles-ci à leur tour se réduiront à un système formé de l'une d'entre elles et de $n-2$ équations du $(n-2)^{me}$ degré, et ainsi de suite; de sorte que le système primitif se réduira à n équations, la première du n^{me} degré, la deuxième du $(n-1)^{me}$ degré, etc., la n^{me} du premier; et l'on voit que, sous cette forme, elles ne peuvent admettre au plus que $1.2\ldots n$ solutions, *c.q.f.d.* (*).

V. Corollaire du théorème de Desargues. *Si deux systèmes de deux polygones conjugués de* n *côtés inscrits à une courbe du* n^me *ordre sont situés de telle manière que* (n + 1) *couples de côtés se coupent sur une même droite, les* (n — 1) *autres couples de côtés se couperont sur cette même droite* (**).

En effet, si nous désignons, comme plus haut, par $O\ldots O_{n-1}$; $O'\ldots O'_{n-1}$ les points d'intersection d'une transversale avec le premier système de polygones conjugués inscrits; de même par $P\ldots P_{n-1}$; $P'\ldots P'_{n-1}$ ceux de la même transversale avec le second système; par $M\ldots M_{n-1}$ ses points d'intersection avec la courbe, la relation (4), appliquée aux deux systèmes de polygones, s'écrira :

$$\frac{OM\ldots O_{n-1}M}{O'M\ldots O'_{n-1}M}=\cdots=\frac{OM_{n-1}\ldots O_{n-1}M_{n-1}}{O'M_{n-1}\ldots O'_{n-1}M_{n-1}};\quad\text{et}\quad\frac{PM\ldots P_{n-1}M}{P'M\ldots P'_{n-1}M}=\cdots=\frac{PM_{n-1}\ldots P_{n-1}M_{n-1}}{P'M_{n-1}\ldots P'_{n-1}M_{n-1}}.$$

Mais par hypothèse P, $P_1\ldots P_{n-1}$, P′ coïncident respectivement avec

(*) A cette démonstration, qui n'est peut-être pas entièrement rigoureuse, on préférera certainement la suivante, que nous devons à une obligeante communication de M. Gilbert. Reprenons les équations qui expriment l'involution de $3n$ points, et considérons les deux fonctions de degré n en z :

$$\frac{(x+z)(x_1+z)\ldots(x_{n-1}+z)}{xx_1\ldots x_{n-1}}\quad\text{et}\quad\frac{(x'+z)(x'_1+z)\ldots(x'_{n-1}+z)}{x'x'_1\ldots x'_{n-1}}.$$

Elles sont égales pour $z=0$; elles sont en outre égales, en vertu des relations qui expriment l'involution, pour n autres valeurs $z=a$, $z=a_1$, $\ldots z=a_{n-1}$; or, on sait que deux fonctions entières de degré n qui sont égales pour $n+1$ valeurs de la variable sont identiques; donc nos deux fonctions le sont; et, par suite, les coefficients de z^n étant égaux, les dénominateurs le sont.

Quel que soit z, on a donc identiquement :

$$(x+z)(x_1+z)\ldots(x_{n-1}+z)=(x'+z)(x'_1+z)\ldots(x'_{n-1}+z).$$

Ces deux polygones identiques, égalés à zéro, donnent les mêmes racines pour z. Celles du premier sont

$$-x,\quad -x_1\ldots,\quad -x_n;$$

celles du second

$$-x',\quad -x'_1\ldots,\quad -x'_n;$$

le théorème est donc démontré (1870).

(**) Ce corollaire recevra, dans l'*Addition*, la même généralisation que le théorème (1870).

$O, O_1 \ldots O_{n-1}, O'$; de sorte que les deux relations précédentes pourront s'écrire, en réunissant en un seul tous les facteurs communs :

$$\frac{C}{O'_1M \ldots O'_{n-1}M} = \frac{C_1}{O'_1M_1 \ldots O'_{n-1}M_1} = \cdots = \frac{C_{n-1}}{O'_1M_{n-1} \ldots O'_{n-1}M_{n-1}};$$

et

$$\frac{C}{P'_1M \ldots P'_{n-1}M} = \frac{C_1}{P'_1M_1 \ldots P'_{n-1}M_1} = \cdots = \frac{C_{n-1}}{P'_1M_{n-1} \ldots P'_{n-1}M_{n-1}};$$

d'où l'on tire :

$$\frac{O'_1M \ldots O'_{n-1}M}{P'_1M \ldots P'_{n-1}M} = \cdots = \frac{O'_1M_{n-1} \ldots O'_{n-1}M_{n-1}}{P'_1M_{n-1} \ldots P'_{n-1}M_{n-1}}.$$

Si nous posons actuellement

$$O'_1M = x; \quad O'_2M = x_1 \ldots O'_{n-1}M = x_{n-2}; \quad O'_1M = x + a \ldots O'_{n-1}M = x + a_{n-2}, \text{ etc.};$$

et si nous employons les mêmes lettres, affectées d'accents, pour désigner les distances $P'M\ldots$, ces relations deviendront :

$$\frac{xx_1 \ldots x_{n-2}}{x'x'_1 \ldots x'_{n-2}} = \frac{(x+a)(x_1+a) \ldots (x_{n-2}+a)}{(x'+a)(x'_1+a) \ldots (x'_{n-2}+a)} = \cdots = \frac{(x+a_{n-2})(x_1+a_{n-2}) \ldots (x_{n-2}+a_{n-2})}{(x'+a_{n-2})(x'_1+a_{n-2}) \ldots (x'_{n-2}+a_{n-2})};$$

et l'on en conclura, en vertu du *lemme algébrique* qui précède, que chacun des x est respectivement égal à l'un des x'; ou que chacun des points $P'_1 \ldots P'_{n-1}$ coïncide respectivement avec l'un des points $O'_1 \ldots O'_{n-1}$, *c. q. f. d.*

Remarque. Il est à remarquer que la démonstration suppose qu'aucun des points O ou P de la transversale ne coïncide avec l'un des points M où elle coupe la courbe, puisque le premier membre, dans ce cas, serait indéterminé.

Ce corollaire, combiné avec celui du théorème de Pappus (III), conduit de la manière la plus immédiate à l'extension du théorème de Pascal, que nous énoncerons sous cette forme :

VI. Extension du théorème de Pascal. *Dans un système de deux polygones conjugués de* n + 1 *côté sinscrits à une courbe du* n^me^ *ordre, les côtés opposés se coupent en* n + 1 points situés en ligne droite (*).

Fig. II et V.

(*) Ce théorème, comme celui de Desargues, sera généralisé beaucoup plus encore dans l'*Addition* (1870).

En effet, nous avons vu (II) qu'un système de deux polygones conjugés inscrits de $n+1$ côtés peut se décomposer en deux systèmes de deux polygones conjugués inscrits de n côtés ayant $n-1$ côtés communs. Or, si nous considérons la droite qui unit les points d'intersection de deux côtés du premier système avec les côtés opposés du second, cette droite coupera les $n-1$ côtés communs aux deux systèmes en $n-1$ points, lesquels, joints aux deux points d'intersection précédents, forment un système de $n+1$ points en ligne droite; nous pouvons donc dire que nous avons affaire à deux systèmes de polygones conjugués inscrits de n côtés, situés de telle manière que $n+1$ couples de côtés se coupent sur une même droite; il en résulte donc que les $n-1$ autres couples de côtés se couperont sur cette droite, *c. q. f. d.*

La remarque faite à la fin du corollaire précédent prouve que ce sont les points d'intersection de deux couples de côtés opposés qu'on doit unir par une droite pour pouvoir appliquer ce corollaire; pour la même raison, ce seront encore les autres couples de côtés *opposés seulement* qui se couperont sur cette droite, parce que les couples de côtés non opposés des deux polygones se coupent sur la courbe et que le corollaire n'est pas applicable à ce cas.

Tels sont les principaux théorèmes qui servent de fondement à la géométrie supérieure, si l'on y joint le théorème de Carnot, qui a déjà été démontrée analytiquement de la manière la plus générale (*). Avant d'en établir les corrélatifs, nous nous arrêterons quelques instants à l'application de ces théorèmes aux courbes des cinq premiers ordres, pour lesquelles seules elle est toujours possible, en nous bornant toutefois à ceux que nous croyons nouveaux.

Art. II. — *Coniques.*

Tous les théorèmes précédents sont connus pour ces courbes; toutefois celui de Pappus n'avait été donné que pour les deux côtés opposés d'un quadrilatère inscrit; il résulte immédiatement de notre énoncé général que ce théorème s'applique également aux deux diagonales, ou, en d'autres termes, à un quadrilatère complet.

(*) Nous nous occuperons, dans un autre chapitre, de la généralisation du théorème de Newton.

Cet énoncé devient en effet, pour les coniques, le suivant :

THÉORÈME DE PAPPUS GÉNÉRALISÉ. *Dans un système de deux polygones conjugués de deux côtés inscrits à une conique, les produits des distances d'un point de la courbe aux côtés des deux polygones sont analogiques.*

Si donc nous prenons sur une conique quatre points 0, 1, 2, 3, et que nous considérions comme côtés de nos deux polygones (0, 1) et (2, 3) pour le premier (0, 2) et (1, 3) pour le second, nous aurons, en appelant δ_0, δ_2, δ'_0, δ'_1 les distances d'un point de la conique à ces côtés :

$$\delta_0 \cdot \delta_2 \div \delta'_0 \cdot \delta'_1 .$$

Mais en considérant comme premier polygone (1, 2) et (3, 0); comme second (0, 2) et (1, 3), nous aurons de même :

$$\delta_1 \cdot \delta_3 \div \delta'_0 \cdot \delta'_1 ;$$

de ces deux analogies résulte :

$$\delta_0 \cdot \delta_2 \div \delta_1 \cdot \delta_3 \div \delta'_0 \cdot \delta'_1 ,$$

ce qui démontre le théorème.

Dans un précédent travail (*), nous avons déduit cette généralisation d'un corollaire du théorème particulier de Pappus, donné par M. Chasles dans son *Traité des coniques*, et nous en avons tiré quelques théorèmes très-généraux relatifs à des polygones inscrits à ces courbes; nous n'y reviendrons pas.

ART. III. — *Courbes du troisième ordre.*

Le théorème fondamental I, appliqué aux courbes du troisième ordre, s'énoncera :

Fig. I. THÉORÈME FONDAMENTAL. *Étant données deux sécantes qui coupent chacune en trois points une courbe du troisième ordre, si l'on joint les points d'intersection de la première à ceux de la seconde par trois transversales qui ne partent pas d'un même point de la courbe, ces transversales couperont la courbe en trois points qui seront en ligne droite.*

(*) *Bulletins de l'Académie*, 2e sér., t. XXVIII, n° 7.

On peut faire coïncider les deux sécantes, auquel cas les droites qui unissent leurs points d'intersection deux à deux deviendront des tangentes, et l'on arrive à cette propriété connue :

PREMIER CAS PARTICULIER. *Si, aux trois points d'intersection d'une sécante avec une courbe du troisième ordre, on mène à celle-ci des tangentes, ces dernières couperont la courbe en trois points situés en ligne droite.*

Si les deux sécantes partent d'un même point de la courbe, on arrivera de même à cette autre propriété :

DEUXIÈME CAS PARTICULIER. *Si, par un point d'une courbe du troisième ordre, on lui mène une tangente et deux sécantes, la tangente et chaque système de transversales reliant entre eux les deux autres points d'intersection des deux sécantes, couperont la courbe en trois points qui seront en ligne droite.*

Le théorème II, appliqué aux courbes du troisième ordre, s'énoncera :

EXTENSION DU THÉORÈME DE PAPPUS. *Dans un système de deux triangles conjugués inscrits à une courbe du troisième ordre, les produits des distances d'un point quelconque de la courbe aux côtés de chacun de ces triangles sont analogiques.*

Ainsi, en désignant par δ_0, δ_1, δ_2 et δ'_0, δ'_1, δ'_2 les trois côtés des deux triangles conjugués qui forment un hexagone complet inscrit (*), c'est-à-dire dont les neuf sommets sont sur la courbe, nous aurons : Fig. 1.

$$\delta_0 \,.\, \delta_1 \,.\, \delta_2 \div \delta'_0 \,.\, \delta'_1 \,.\, \delta'_2 .$$

Le lecteur appliquera aisément ce théorème aux deux cas particuliers mentionnés plus haut.

Il est à remarquer que deux sécantes quelconques δ_0 et δ_1, qui ne se coupent pas sur la courbe, donnent lieu à six systèmes distincts de triangles conjugués inscrits, puisqu'on peut joindre l'un des points d'intersection de

(*) Il vaudrait mieux dire avec Steiner un *sélatère* (Sechsseit), c'est-à-dire une figure formée de *six côtés*, en réservant le nom d'*hexagone* à une figure de *six sommets*. Nous attendrons que ces dénominations nouvelles soient consacrées par une autorité.

[Le lecteur voudra bien se rappeler que ce travail a été écrit avant la publication de la remarquable *Géométrie de direction* de M. P. Serret, qui emploie une autre terminologie, 1871].

la première à l'un quelconque des trois points de la seconde, puis le second point de la première à l'un quelconque des deux autres de la seconde; et enfin les deux troisièmes entre eux.

On voit par là qu'on pourra déduire différents corollaires des deux théorèmes précédents; en outre, on pourra les appliquer à des systèmes de polygones conjugués d'un nombre de côtés plus considérable.

Nous verrons un exemple remarquable de ces polygones conjugués inscrits dans le corollaire suivant; nous laisserons au lecteur le soin d'y appliquer le théorème de Pappus.

Corollaire. *Dans une courbe du troisième ordre on peut inscrire un système de deux quadrilatères conjugués.*

Nous ne nous arrêterons pas à la démonstration de ce corollaire, qui n'est, du reste, autre chose que le corollaire plus général qui précède (IV), parce que nous aurons l'occasion d'y revenir dans le théorème de Pascal.

Extension du théorème de Desargues. *Lorsque l'on a un système de deux triangles conjugués inscrits à une courbe du troisième ordre, une transversale quelconque rencontre les côtés de ces deux triangles et la courbe en trois séries de trois points qui sont en involution.*

Ce théorème n'est qu'un cas particulier de celui que nous avons donné sous le numéro III.

Nous pourrons faire sur ce théorème la même remarque que sur le précédent relativement aux corollaires qu'on en peut déduire; nous ne mentionnerons que les suivants :

Corollaire. *Si deux systèmes de triangles conjugués inscrits à une courbe du troisième ordre sont tels que quatre couples de leurs côtés se coupent en quatre points situés en ligne droite, les deux autres couples de côtés se couperont sur cette droite.*

Ce corollaire résulte immédiatement de celui que nous avons donné sous le numéro IV, et l'on en déduit aisément le théorème de Pascal pour les courbes du troisième ordre :

Extension du théorème de Pascal. *Dans un système de deux quadrilatères conjugués inscrits à une courbe du troisième ordre, les côtés opposés se coupent en quatre points situés en ligne droite.*

Appelons A, B, C, D les quatre côtés du premier quadrilatère; a, b, c, d ceux du second, chaque côté du premier, tel que A, coupant les trois côtés non opposés du second b, c, d en trois points situés sur la courbe. Fig. II.

Nous pouvons décomposer la figure en deux systèmes de triangles conjugués inscrits, satisfaisant à la condition énoncée dans le corollaire précédent. En effet, si l'on joint le point d'intersection de B et c à celui de b et C par une droite auxiliaire e, les trois transversales a, d, e, qui s'appuient sur les deux sécantes B et C, rencontreront la courbe, en vertu du théorème fondamental, en trois points situés en ligne droite, et qui détermineront une nouvelle auxiliaire f. Actuellement, considérons les deux systèmes de triangles conjugués inscrits BCf et a, d, e; b, c, f et ADe; la droite qui unit les points d'intersection de A et a, B et b, coupe les côtés e et f communs aux deux systèmes de triangles conjugués; nous pourrons donc dire que quatre couples de côtés A et a, B et b, e et e, f et f se coupent sur cette droite; les deux autres couples C et c, D et d se coupent donc sur la même droite, *c.q.f.d.* Dans la figure, ces quatre points sont désignés par $\alpha, \beta, \gamma, \delta$.

Art. IV. — *Courbes du quatrième ordre.*

Le théorème fondamental I, appliqué à ces courbes, s'énoncera :

Théorème fondamental. *Étant données deux sécantes qui coupent chacune en quatre points une courbe du quatrième ordre, si l'on joint les points d'intersection de la première à ceux de la seconde par quatre transversales qui ne partent pas deux à deux d'un même point de la courbe (ce qui peut se faire de 1.2.3.4 manières différentes), ces quatre transversales détermineront sur la courbe huit autres points qui seront situés sur une conique.*

Remarque. Si trois de ces nouveaux points sont en ligne droite, il est clair que la conique se réduira à un système de deux droites; or, il est aisé d'obtenir ce résultat (*). A cet effet, après avoir mené une sécante quelconque d, par deux de ses points d'intersection avec la courbe, on mènera deux Fig. III.

(*) Nous ne donnons que sous réserves cette construction, dont la généralité n'est pas suffisamment établie (1870).

transversales A et f se coupant en un point p de la courbe; la seconde sécante c unira deux des autres points d'intersection q et r de ces transversales; mais si l'on considère que p est un point double d'intersection de deux transversales avec la courbe, en le joignant à l'un des points d'intersection d'une autre transversale, on pourra dire qu'on a trois points d'intersection de trois transversales situés en ligne droite; et par conséquent, les quatre transversales A, B, C, D qui relient deux à deux les points d'intersection des sécantes, sans partir d'un même point de la courbe, détermineront sur celle-ci deux systèmes de quatre points en ligne droite; appelons ces deux droites a et b. Nous voyons que nous obtenons ainsi un système de deux quadrilatères conjugués inscrits *abcd* et ABCD; c'est-à-dire tels que chaque côté du premier passe par l'un des points d'intersection des quatre côtés de l'autre avec la courbe. Donc :

Théorème. *Dans une courbe du quatrième ordre, il est toujours possible d'inscrire un système de deux quadrilatères conjugués (réels ou imaginaires)* (*).

Cas particulier. Si l'on fait coïncider les deux sécantes $\delta_0\, \delta_1$, l'un des systèmes de transversales se réduira à un système de tangentes, et le théorème fondamental s'énoncera :

Théorème. *Étant donnée une sécante qui coupe une courbe du quatrième ordre en quatre points, si par ces points on mène à la courbe des tangentes, elles détermineront par leurs nouvelles intersections huit points qui seront en général situés sur une conique.*

Fig. IV. Pour des positions particulières de la sécante, cette conique pourra se réduire à un système de deux droites.

Si nous appliquons aux deux quadrilatères conjugués ABCD et *abcd*, le théorème de Pappus (II), en désignant par δ_0, δ_1, δ_2, δ_3 les distances d'un point quelconque de la courbe aux côtés du premier quadrilatère, et par les mêmes lettres affectées d'un accent, les distances de ce même point aux côtés du second, le théorème II nous donnera la relation :

$$\delta_0\delta_1\delta_2\delta_3 \div \delta'_0\delta'_1\delta'_2\delta'_3,$$

que l'on peut énoncer :

(*) Voir l'*Addition*.

THÉORÈME DE PAPPUS. *Si l'on inscrit à une courbe du quatrième ordre un système de deux quadrilatères conjugués, les produits des distances d'un point quelconque de la courbe aux quatre côtés de ces deux quadrilatères sont analogiques.*

CAS PARTICULIER DU THÉORÈME DE PAPPUS. Pour appliquer au cas particulier dont nous venons de parler le théorème de Pappus, il suffit, dans la relation qui précède, de regarder les δ comme les distances d'un point aux trois sécantes, et les δ' comme ses distances aux quatre tangentes, et de faire $\delta_0 = \delta_1$, puisque les deux premières coïncident; cette relation deviendra donc : Fig. IV.

$$\delta_0^2 \delta_2 \delta_3 \div \delta'_0 \delta'_1 \delta'_2 \delta'_3.$$

On pourrait déduire du théorème fondamental sur les quadrilatères conjugués et du théorème de Pappus une foule de corollaires, en combinant entre eux différents systèmes de ces quadrilatères; l'une des combinaisons les plus remarquables est celle qui conduit au théorème de Pascal, et qui se fonde sur le corollaire suivant, auquel le lecteur appliquera aisément le théorème de Pappus.

COROLLAIRE. *Dans une courbe du quatrième ordre, on peut inscrire un système de deux pentagones conjugués.*

Soient en effet deux sécantes g et k qui coupent la courbe en 0, 1, 2, 3 et en 0′, 1′, 2′, 3′; et dont les transversales déterminent des systèmes multiples de quadrilatères conjugués (*). Supposons que les droites 00′, 11′, 22′, 33′ que nous désignerons par f, A, B, C coupent la courbe en deux séries de quatre points situés en ligne droite; appelons ces droites d et e. Fig. V.

On pourra unir 00′, 12′, 23′, 31′; et ces droites que nous appellerons f, c, a, b, détermineront également, par leurs intersections, deux droites D et E. On formera ainsi deux systèmes de deux quadrilatères conjugués :

1° $degk$ et ABCf;

2° DEgk et $abcf$.

(*) Voir l'*Addition*.

En supprimant les côtés f, g, k communs à ces deux systèmes, on voit que ceux-ci se réduiront à

$$abcde \text{ et } ABCDE,$$

ou à un système de deux pentagones conjugués inscrits, c'est-à-dire tels que chaque côté a du premier passe par l'un des points d'intersection des côtés non opposés B, C, D, E de l'autre avec la courbe.

Le théorème de Desargues, pour les courbes du quatrième ordre, s'énoncera :

Extension du théorème de Desargues. *Lorsque l'on a un système de deux quadrilatères conjugués inscrits à une courbe du quatrième ordre, une transversale quelconque rencontre les huit côtés de ces quadrilatères et la courbe en douze points qui sont en involution* (*).

Parmi les nombreux corollaires de ce théorème, nous ne citerons que le suivant :

Corollaire. *Si deux systèmes de deux quadrilatères conjugués inscrits à une courbe du quatrième ordre sont situés de telle manière que cinq couples de côtés se coupent sur une même droite, les trois autres couples de côtés se couperont deux à deux sur cette même droite.*

Les démonstrations générales que nous avons données de ces deux propositions nous dispensent d'y revenir; c'est sur le dernier corollaire et sur celui qui le précède que se fonde le théorème de Pascal :

Extension du théorème de Pascal. *Dans un système de deux pentagones conjugués inscrits à une courbe du quatrième ordre, les côtés opposés se coupent en cinq points situés en ligne droite.*

Fig. V. Nous avons vu, en effet, que les deux pentagones conjugués $abcde$ et ABCDE peuvent se décomposer en deux systèmes de quadrilatères conjugués :

$$degk \text{ et } ABCf,$$
$$DEgk \text{ et } abcf$$

ayant trois côtés communs f, g, k.

Or, si nous joignons entre eux par une droite les points d'intersection α de

(*) Ce théorème et le suivant seront généralisés dans l'*Addition* (1870).

A et a, β de B et b, nous pourrons dire que cinq couples de côtés A et a, B et b, f et f, g et g, k et k se coupent en cinq points situés en ligne droite; les trois autres couples de côtés C et c, D et d, E et e se couperont donc en γ, δ, ε sur cette même droite.

Nous avons fait voir, dans la démonstration générale, que la proposition n'est applicable qu'aux intersections des côtés opposés.

ART. V. — *Courbes du cinquième ordre.*

Les développements dans lesquels nous sommes entré au sujet des courbes du troisième et du quatrième ordre, et qui sont déjà peut-être un peu longs, nous font croire que le lecteur, familiarisé maintenant avec l'application des théorèmes généraux, éprouverait quelque répugnance à nous suivre, si nous répétions ces mêmes développements pour les courbes du cinquième ordre.

Nous nous bornerons donc, en général, à l'énoncé des théorèmes fondamentaux, à part quelques éclaircissements que nous donnerons dans les propositions un peu difficiles.

THÉORÈME FONDAMENTAL. *Soit donnée une courbe du cinquième ordre, et deux sécantes qui la coupent chacune en cinq points; si l'on joint les points d'intersection de la première à ceux de la seconde par cinq transversales qui ne partent pas deux à deux d'un même point de la courbe (ce qui peut se faire de* $1 \cdot 2 \ldots 5$ *manières différentes), ces cinq transversales couperont la courbe en quinze autres points dont le lieu sera en général une courbe du troisième ordre.*

Le cas particulier le plus remarquable qu'offre ce théorème général se déduit de cette considération que si, parmi ces quinze points, il y en a deux systèmes, l'un de quatre, l'autre de trois points en ligne droite, le lieu des quinze points se réduira à un système de trois droites, et l'on pourra énoncer cette proposition :

THÉORÈME. *Dans une courbe du cinquième ordre, on peut inscrire un système de deux pentagones conjugués (réels ou imaginaires)* (*).

(*) Voir l'*Addition*.

En faisant coïncider les deux sécantes primitives, nous arriverons à ce théorème :

THÉORÈME. *Si par les cinq points d'intersection d'une sécante avec une courbe du cinquième ordre, on mène à celle-ci des tangentes, elles couperont la courbe en quinze points qui seront situés en général sur une courbe du troisième ordre.*

Pour des positions particulières de la sécante, cette courbe du troisième ordre pourra se réduire à un système de trois droites.

Nous nous bornerons à l'énoncé analytique du théorème de Pappus pour les deux cas mentionnés dans les théorèmes précédents; en employant des notations analogues à celles dont nous avons fait usage plus haut, nous aurons, pour ces deux cas, les relations :

EXTENSION DU THÉORÈME DE PAPPUS :

$$\delta_0\delta_1\delta_2\delta_3\delta_4 \div \delta'_0\delta'_1\delta'_2\delta'_3\delta'_4.$$

CAS PARTICULIER :

$$\delta_0^2 \,.\, \delta_2\delta_3\delta_4 \div \delta'_0\delta'_1\delta'_2\delta'_3\delta'_4.$$

Le théorème de Desargues que nous avons démontré d'une manière tout à fait générale, s'énoncera :

EXTENSION DU THÉORÈME DE DESARGUES. *Lorsqu'on a un système de deux pentagones conjugués inscrits à une courbe du cinquième ordre, une transversale quelconque rencontre les dix côtés de ces pentagones et la courbe en quinze points qui sont en involution* (*).

L'un des corollaires les plus importants de cette proposition capitale est le suivant, dont nous pouvons également omettre la démonstration :

COROLLAIRE. *Si, deux systèmes de deux pentagones conjugués inscrits à une courbe du cinquième ordre, sont situés de telle manière que six couples de côtés se coupent sur une même droite, les quatre autres couples de côtés se couperont sur la même droite.*

Enfin ce corollaire, combiné avec le suivant, fournit la démonstration directe du théorème de Pascal pour les courbes du cinquième ordre :

(*) Ce théorème, de même que celui de Pascal, sera généralisé dans l'*Addition* (1870).

Soit un système de deux sécantes k et i rencontrant la courbe en 0, 1, 2, 3, 4, et en 0′, 1′, 2′, 3′, 4′; et supposons que les transversales

$$\begin{array}{lccccc} & 00', & 11', & 22', & 33', & 44' \\ \text{que nous appellerons} & & & & & \\ & g, & h, & \text{A}, & \text{B}, & \text{C} \end{array}$$

coupent la courbe en trois séries d, e, f de cinq points situés en ligne droite.

Supposons de même que les transversales

$$\begin{array}{lccccc} & 00', & 11', & 23', & 34', & 42', \\ \text{que nous appellerons} & & & & & \\ & g, & h, & c, & a, & b \end{array}$$

déterminent également sur la courbe trois séries D, E, F de cinq points situés en ligne droite (*).

Nous aurons ainsi deux systèmes de pentagones conjugués :

1° ghABC et $kidef$;

2° $ghabc$ et kiDEF;

et si nous supprimons les côtés g, h, k, i communs à ces deux systèmes, ceux-ci se réduiront à

$abcdef$ et ABCDEF

ou à *un système de deux hexagones conjugués inscrits*, c'est-à-dire *tels que chaque côté de l'un*, a, *passe par l'un des points d'intersection de chacun des côtés* B, C, D, E, F *de l'autre avec la courbe, un seul* A *excepté;* A et a *s'appellent pour cette raison côtés opposés*.

Ce système d'hexagones jouit de la propriété suivante :

Extension du théorème de Pascal. *Dans un système de deux hexagones conjugués inscrits à une courbe du cinquième ordre, les côtés opposés se coupent en six points situés en ligne droite.*

En effet, nous venons de voir que nos deux hexagones conjugués $abcdef$

(*) Voir l'*Addition.*

et ABCDEF se décomposent en deux systèmes de pentagones conjugués :

1° kiABC et $ghdef$;

2° $kiabc$ et ghDEF.

Or, ces deux systèmes sont situés de telle manière que la droite qui unit les points d'intersection α, β des côtés opposés A et a, B et b, coupe six couples de côtés opposés :

A et a, B et b, g et g, h et h, k et k, i et i,

en six points situés évidemment sur cette droite; donc, en vertu du corollaire précédent, les quatre autres couples de côtés opposés C et c, D et d, E et e, F et f se couperont également sur cette droite.

La démonstration générale que nous avons donnée de ce corollaire montre pourquoi les côtés opposés seuls jouissent de cette propriété.

Nous venons de déduire de la forme générale sous laquelle nous avons mis l'équation des courbes du n^{me} ordre l'extension des théorèmes de Pappus, de Desargues et de Pascal aux courbes algébriques jusqu'au cinquième ordre, et la discussion dans laquelle nous sommes entré au sujet des systèmes de polygones conjugués de l'ordre de la courbe a fait voir que, pour le troisième ordre, à deux sécantes arbitraires, correspondent $1 . 2 . 3$ systèmes de triangles conjugués; que, pour le quatrième ordre, à une sécante arbitraire, correspondent $1 . 2 . 3 . 4$ systèmes de quadrilatères conjugués; que pour le cinquième ordre enfin, il n'y a plus d'arbitraire, dans une sécante, que sa direction ou l'un de ses points.

Si nous voulions étendre les applications de nos théorèmes généraux au delà du cinquième ordre, elles seraient limitées, d'abord à des courbes tout à fait particulières et à un système unique de polygones conjugués du même ordre; ensuite, aux théorèmes de Pappus et de Desargues seulement; parce que, du moment où il n'existe qu'un seul système de polygones conjugués du n^{me} ordre, il ne peut pas en exister de l'ordre $n + 1$, ce qui est indispensable à l'application du théorème de Pascal.

C'est ainsi, par exemple, que pour les courbes du sixième ordre de la forme

$$\delta_0 \dots \delta_5 = k\delta'_0 \dots \delta'_5$$

il existe un système unique d'hexagones conjugués inscrits, auquel on peut appliquer les théorèmes de Desargues et de Pascal; mais, par cela même que ce système est unique, il n'existera pas de système d'eptagones conjugués inscrits.

Il n'y a en effet rien d'arbitraire dans l'équation précédente, qui est celle d'une courbe toute particulière, et l'équation générale des courbes du sixième ordre ne peut évidemment pas se mettre sous cette forme, puisqu'elle renferme vingt-sept paramètres, et qu'il n'y en a que vingt-cinq dans l'équation précédente.

A plus forte raison en est-il de même pour les courbes d'un ordre supérieur.

Nous ne pouvons donc pas mettre les équations générales des courbes d'un ordre supérieur au cinquième sous cette forme, qui nous a conduit à appliquer l'extension que nous avons donnée à l'idée de l'involution.

Par quoi faudra-t-il remplacer l'involution dans ces courbes? C'est là un problème qui mérite certainement de faire l'objet des efforts des géomètres, et sur lequel nous appelons leur attention (*).

Dans le chapitre suivant, nous rechercherons les théorèmes corrélatifs de ceux que nous venons d'établir.

(*) On verra dans l'*Addition* que nous avons réussi à appliquer l'involution, et par suite les théorèmes de Desargues et de Pascal, à toutes les courbes algébriques (1870).

CHAPITRE II.

COORDONNÉES RECTILIGNES TANGENTIELLES.

Quoique ce système de coordonnées ait été assez fréquemment mis en usage, nous croyons devoir en fixer le sens d'une manière précise, parce que nos idées sur ce sujet nous semblent différer, sous quelques rapports, de celles de certains auteurs modernes.

Soit $\Delta = \mathrm{LX} + \mathrm{MY} + \mathrm{N} = 0$ l'équation d'une droite en coordonnées rectilignes x, y; L, M, N étant des fonctions linéaires de ces coordonnées de la forme $ax + by + c$, etc.; a, b, c représentant des constantes.

Pour que cette droite soit déterminée, il faut que X et Y le soient.

Or, la distance d'un point x, y à cette droite est $\delta = k(\mathrm{LX} + \mathrm{MY} + \mathrm{N})$, où k est une fonction connue de X et de Y. Si l'on se donne une relation $\delta_1 = \lambda\delta_2$, on saura seulement que le rapport des distances des points $Q_1(x_1, y_1)$ et $Q_2(x_2, y_2)$ à la droite Δ est égal à λ, ce qui a lieu pour toute droite Δ passant par un point P de la droite Q_1Q_2 tel que $\frac{PQ_1}{PQ_2} = \lambda$.

De même, si l'on se donne une relation $\delta_3 = \lambda'\delta_4$, on saura seulement que le rapport des distances des points $Q_3(x_3, y_3)$ et $Q_4(x_4, y_4)$ à la droite Δ est égal à λ', ce qui a lieu pour toute droite Δ passant par un point P′ de la droite Q_3Q_4 tel que $\frac{P'Q_3}{P'Q_4} = \lambda'$.

Mais si l'on se donne les deux relations simultanées

$$\delta_1 = \lambda\delta_2, \quad \delta_3 = \lambda'\delta_4,$$

puisque la première convient à toutes les droites qui passent par P, la seconde à toutes celles qui passent par P′, il est évident que ces deux relations simultanées détermineront la droite PP′; et en effet elles peuvent être regardées comme deux équations à deux inconnues X et Y, et suffisent par conséquent pour déterminer celles-ci.

Nous pourrons appeler ces dernières les *coordonnées tangentielles* de la droite Δ, quoiqu'il fût plus exact d'employer une autre dénomination, telle que celle de *déterminantes tangentielles*, puisque, à proprement parler, X et Y ne sont pas des coordonnées. Nous dirons aussi que $\Delta = 0$ est l'équation de la droite Δ en coordonnées tangentielles, les valeurs de ces coordonnées X et Y étant supposées connues.

Actuellement, si nous ne donnons entre X et Y qu'une seule relation, $F(X, Y) = 0$, il est clair que la droite Δ pourra occuper une infinité de positions différentes ; l'enveloppe de toutes ces positions sera une courbe dont il nous sera permis de regarder $F(X, Y) = 0$ comme l'équation en coordonnées tangentielles, et dont on trouvera l'équation en coordonnées rectilignes par la méthode connue des enveloppes.

Mais, sans qu'il soit nécessaire de rechercher cette équation, on peut affirmer que si $F(X, Y)$ est du n^{me} degré en X et Y, la courbe sera de la n^{me} classe, c'est-à-dire que, par un point, on pourra en général lui mener n tangentes.

En effet, nous savons que $\Delta = 0$ est l'équation d'une tangente déterminée par un système de valeurs de X et Y satisfaisant à $F(X, Y) = 0$. Pour que cette tangente passe pour un point x', y' il faudra que la relation $\Delta' = 0$ soit satisfaite, Δ' étant ce que devient Δ si l'on y change x *et* y en x' *et* y'.

Or, de ces deux relations $\Delta' = 0$ et $F(X, Y) = 0$, la première est du premier degré, la seconde du n^{me} en X et Y ; elles donneront par conséquent en général n systèmes de valeurs pour ces inconnues, et par suite n tangentes passant par x', y', *c.q.f.d.*

Art. I. — *Théorèmes généraux.*

Cette nouvelle forme $F(X, Y) = 0$ de l'équation des courbes planes va nous permettre d'établir, parallèlement aux théorèmes que nous avons démontrés pour les courbes du n^{me} ordre, les théorèmes corrélatifs pour celles de la n^{me} classe.

Lemme fondamental. *Représentons par* Δ_n *une fonction de la forme*

$$(ax_n + by_n + c)\,X + (a'x_n + b'y_n + c')\,Y + a''x_n + b''y_n + c''$$

dans laquelle a, b, c, etc., *sont des constantes*; x_n, y_n *les coordonnées rectilignes d'un point* P_n; X, Y, *des coordonnées tangentielles ; toute courbe de la* n^{me} *classe pourra se réprésenter par l'équation*

$$\Delta_0\Delta_1 C_{n-2} = k\Delta'_0\Delta'_1 \dots \Delta'_{n-1},$$

dans laquelle les paramètres x_0, y_0, x_1, y_1 *de* Δ_0 *et* Δ_1 *sont donnés, tandis que* x'_0, y'_0, etc., *sont à déterminer, ainsi que* k *et les* $(n-2)(n+1)$ *paramètres de la fonction* C_{n-2} *qui est du* $(n-2)^{me}$ *degré en* X *et* Y.

En effet, l'équation d'une courbe de la n^{me} classe, étant du n^{me} degré en X et Y, renferme $n\frac{(n+3)}{2}$ paramètres, ce qui fournira un nombre égal d'équations; et l'équation précédente renferme

$$\frac{(n-2)(n+1)}{2} + 2n + 1 = \frac{n(n+3)}{2}$$

paramètres à déterminer, *c. q. f. d.*

L'équation de la courbe étant satisfaite par chacune des équations $\Delta_0 = 0$, $\Delta_1 = 0$, $C_{n-2} = 0$ combinée avec l'une quelconque des équations $\Delta' = 0$, il en résulte :

1° Que chacune des droites $P_0P'_0$, $P_0P'_1 \dots$, $P_1P'_0$, $P_1P'_1 \dots$ déterminées par les équations simultanées $\Delta_0 = 0$ et $\Delta'_0 = 0$; $\Delta_0 = 0$ et $\Delta'_1 = 0$, etc.; $\Delta_1 = 0$ et $\Delta'_0 = 0$; $\Delta_1 = 0$ et $\Delta'_1 = 0$, etc., sont des tangentes à cette courbe;

2° Que les tangentes menées par $P'_0 \dots P'_{n-1}$ à la courbe $Cn - 2 = 0$ sont en même temps tangentes à la courbe donnée; et, en effet, les deux équations simultanées $\Delta'_0 = 0$ et $C_{n-2} = 0$ déterminent les tangentes menées par P'_0 à la courbe $C_{n-2} = 0$; et ces deux équations satisfont identiquement à celle de la courbe donnée. Il revient au même de dire que les tangentes menées par $P'_0 \dots P'_{n-1}$ à la courbe donnée, sont également tangentes à la courbe $C_{n-2} = 0$.

Or, si nous observons que ces dernières tangentes passent par les points d'intersection $P'_0 \dots P'_{n-1}$ des premières tangentes $P_0P'_0$ et $P_1P'_0$, etc., deux à deux, et que celles-ci sont menées, les unes par le point P_0, les autres par le point P_1, nous pourrons déduire du lemme fondamental l'énoncé suivant :

I'. Théorème fondamental. *Si de chacun de deux points on mène les* n *tangentes à une courbe de la* n^{me} *classe, et que par chacun des* n *points d'intersection d'une tangente du premier système avec une tangente du second (ce qui peut présenter* $1.2\ldots.\mathrm{n}$ *combinaisons différentes), on mène les* $\mathrm{n}-2$ *autres tangentes à la courbe, ces* $\mathrm{n}(\mathrm{n}-2)$ *tangentes envelopperont une courbe de la* $(\mathrm{n}-2)^{\mathrm{me}}$ *classe.*

Remarque. Dans des cas particuliers, cette courbe pourra se réduire à un ou plusieurs systèmes de points et d'une courbe de classe moins élevée, ou à plusieurs courbes moins élevées; nous n'examinerons, parmi ces cas, que le plus intéressant, celui dans lequel cette courbe se réduit à un système de $n-2$ points, c'est-à-dire le cas où les $n(n-2)$ tangentes se groupent en $n-2$ systèmes de n tangentes concourant en un même point; et il suffit pour cela que $n-3$ systèmes, le premier de $n-1$ tangentes, le second de $n-2$, etc., le $(n-3)^{\mathrm{me}}$ de 3 tangentes, concourent respectivement en $n-3$ points.

Dans ce cas, par chacun de ces $n-2$ points, comme par chacun des deux points donnés, passent n tangentes à la courbe; or, ces tangentes qui concourent, par hypothèse, au nombre de n, en $n-2$ points, ont été menées par les n points d'intersection, deux à deux, des tangentes des deux premiers systèmes, et il va de soi que ces deux premiers systèmes passent aussi par ces n points; de sorte que nous avons deux systèmes de n points tels, que chaque droite qui relie un point du premier système à un point du second est tangente à la courbe, ou bien *un système de deux polygones conjugués de* n *sommets circonscrits à la courbe.* Fig. VI.

Ce cas est possible pour toutes les courbes jusqu'à la cinquième classe inclusivement; au delà il ne peut se réaliser que pour des courbes particulières. Nous croyons inutile de répéter la démonstration que nous avons donnée de la propriété similaire pour les courbes du n^{me} ordre, et à laquelle il n'y a pas un mot à changer pour l'appliquer ici (*).

(*) Après avoir établi, dans l'*Addition*, l'existence des polygones conjugués dans les courbes des cinq premiers ordres, nous ne reviendrons pas sur les propriétés corrélatives des courbes des cinq premières classes, propriétés qui résultent à l'évidence du principe de dualité (1870).

L'équation d'une courbe de la n^{me} classe pourra se réduire, dans ce cas, à la forme :

$$\Delta_0 \ldots \Delta_{n-1} = k\Delta'_0 \ldots \Delta'_{n-1};$$

et nous pourrons, en vertu de la remarque précédente, l'énoncer de cette manière :

II'. Extension du théorème corrélatif de celui de Pappus. *Dans un système de deux polygones conjugués de* n *sommets circonscrits à une courbe de la* n^{me} *classe, les produits des distances d'une tangente quelconque aux sommets de ces deux polygones sont analogiques.*

Cas particulier. Si nous appliquons le théorème fondamental I' au cas particulier où les deux points primitifs coïncident, il est clair qu'alors les points d'intersection des couples de tangentes vont se confondre avec les points de contact de celles-ci; car à mesure que les deux points se rapprochent, les points de contact des deux tangentes menées de ces points à la même branche de la courbe, vont se rapprocher également, et entre eux, et du point d'intersection de ces tangentes; de sorte qu'à la limite, ces trois points coïncideront dans le point unique de contact. Ceci admis, le théorème fondamental aura pour corollaire :

Corollaire. *Si d'un point on mène les* n *tangentes à une courbe de la* n^{me} *classe, et par les points de contact de chacune de celles-ci les* $n-2$ *autres tangentes à la courbe, ces* $n(n-2)$ *nouvelles tangentes envelopperont une courbe de la* $(n-2)^{me}$ *classe.*

Cette courbe pourra se réduire à un système de points et d'une courbe de classe moindre ; le cas le plus remarquable est celui où elle se réduit à un système de $(n-2)$ points; alors on peut appliquer le théorème II' qui s'énoncera :

Corollaire. *Si d'un point on mène* n *tangentes à une courbe de la* n^{me} *classe, et que les* $n-2$ *autres tangentes menées par les points de contact de chacune de celles-ci concourent,* n *à* n, *en* $n-2$ *points, le produit du carré de la distance d'une tangente quelconque au point donné par ses distances à ces* $n-2$ *points, et le produit de ses distances aux* n *points de contact, sont analogiques.*

Parmi les nombreux corollaires que l'on peut encore déduire des deux théorèmes précédents, nous n'examinerons que le plus essentiel, celui qui doit nous conduire à l'extension du théorème de Brianchon.

III'. Corollaire. *Lorsque, dans une courbe de la* n^me^ *classe, il existe des systèmes multiples de deux polygones conjugués circonscrits de* n *sommets, il existera également des systèmes de deux polygones conjugués circonscrits de* n + 1 *sommets.*

En effet, par chacun des deux points P et P' soient menées n tangentes à la courbe; désignons ces tangentes par $0, 1, \ldots (n-1); 0', 1', \ldots (n-1)'$; et supposons que les $n-2$ nouvelles tangentes menées par chacun des points d'intersection $(0, 0') = i_0, (1, 1') = i_1, \ldots (n-1, n'-1') = i_{n-1}$ se groupent en $n-2$ systèmes de n tangentes concourant en $n-2$ points $q_0, q_1 \ldots q_{n-3}$.

Si, actuellement, nous menons les $n-2$ nouvelles tangentes par chacun des $n-3$ points $i_0 \ldots i_{n-4}$ précédents, et en outre par les trois points $(n-3, n'-2')$, $(n-2, n'-1')$, $(n-1, n'-3')$ que nous appellerons I_{n-3}, I_{n-2}, et I_{n-1}; toutes ces tangentes vont, en vertu de la remarque précédente, se grouper également en $n-2$ systèmes de n tangentes concourant en $n-2$ points $Q_0, Q_1 \ldots Q_{n-3}$; nous aurons ainsi les deux systèmes de deux polygones conjugués circonscrits de n sommets

$$P,\ P',\ i_0 \ldots i_{n-4},\ i_{n-3},\ i_{n-2},\ i_{n-1};\quad q_0,\ q_1 \ldots q_{n-3},$$

ce qui donne en tout $2n$ sommets; et

$$P,\ P',\ i_0 \ldots i_{n-4},\ I_{n-3},\ I_{n-2},\ I_{n-1};\quad Q_0,\ Q_1 \ldots Q_{n-3},$$

ce qui donne également $2n$ sommets.

Ces deux systèmes de deux polygones conjugués circonscrits de n sommets ont les $n-1$ premiers sommets communs P, P', $i_0 \ldots i_{n-4}$; et si nous ne tenons pas compte de ces sommets, les $2\,\{2n-(n-1)\}$ ou les $2(n+1)$ sommets restants formeront un système de deux polygones conjugués circonscrits de $n+1$ sommets, c'est-à-dire de deux polygones de $n+1$ sommets, tels que chaque sommet de l'un soit le point de concours de n tangentes menées par chacun des sommets de l'autre, un seul excepté; *c. q. f. d.*

Le théorème II′ peut se mettre sous une autre forme qui rendra manifeste l'extension du théorème corrélatif de celui de Desargues.

Soit donné un système de deux polygones conjugués de n sommets circonscrits à une courbe de la n^{me} classe; désignons par $0, 1, \ldots. n-1$ et par $0', 1' \ldots . n'-1'$ les sommets de ces deux polygones.

D'un point S menons à la courbe n tangentes $t, t', \ldots . t^{(n-1)}$; appelons

$\Delta_0 \ldots . \Delta_{n-1}$ les distances des sommets $0 \ldots n-1$ à t; etc.,
$\Delta_0^{(n-1)} \ldots . \Delta_{n-1}^{(n-1)}$ les distances de ces sommets à t_{n-1};
$s_0 \ldots . s_{n-1}$ les distances de ces sommets au point S;

employons les mêmes notations, en affectant les indices d'accents, pour désigner les mêmes distances comptées dans le second polygone $0' \ldots n'-1'$; enfin représentons par (t, s_0), etc., l'angle de la tangente t avec la droite s_0 qui unit le point S au sommet 0, etc.

Il est évident que nous aurons :

$$\Delta_0 = s_0 \sin(t, s_0) \ldots . \Delta_0^{(n-1)} = s_0 \sin(t^{(n-1)}, s_0)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\Delta_{n-1} = s_{n-1} \sin(t, s_{n-1}) \ldots . \Delta_{n-1}^{(n-1)} = s_{n-1} \sin(t^{(n-1)}, s_{n-1});$$

et que les mêmes relations existent pour le second polygone, et s'écriraient en accentuant les indices.

Or, en vertu du théorème II′, l'équation de la courbe peut s'écrire :

$$\Delta_0 \ldots \Delta_{n-1} = k\Delta_{0'} \ldots . \Delta_{n'-1'}.$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\Delta_0^{(n-1)} \Delta_{n-1}^{(n-1)} = k\Delta_{0'}^{(n-1)} \Delta_{n'-1'}^{(n-1)}.$$

Si, dans ces n relations, nous substituons aux Δ leurs valeurs précédentes, et que nous égalions entre elles les n valeurs que ces relations donnent pour k, les facteurs s disparaîtront au numérateur et au dénominateur, et nous aurons :

$$\frac{\sin(t, s_0) \ldots \sin(t, s_{n-1})}{\sin(t, s_{0'}) \ldots \sin(t, s_{n'-1'})} = \ldots\ldots = \frac{\sin(t^{(n-1)}, s_0) \ldots \sin(t^{(n-1)}, s^{n-1})}{\sin(t^{n-1}, s_{0'}) \ldots \sin(t^{n-1}, s^{n'-1'})} \quad \ldots \quad (4').$$

Nous avons trouvé dans le chapitre des coordonnées rectilignes une relation de la même forme relative à $3n$ points, et nous avons été amené, par une généralisation toute naturelle, à donner à cette propriété le nom d'involution.

De même, nous dirons que la relation précédente, à n membres, caractérise l'involution de $3n$ droites, et que ces $3n$ droites sont en involution.

Nous pourrons donc énoncer ce théorème :

IV'. Extension du théorème corrélatif de celui de Desargues. *Lorsque l'on a un système de deux polygones conjugués de* n *sommets circonscrits à une courbe de la* n^{me} *classe, si d'un point on mène à cette courbe* n *tangentes et les* 2n *droites qui aboutissent aux sommets de ces deux polygones, ces* 3n *droites seront en involution* (*).

Ce théorème montre pourquoi l'involution de six droites, de même que celle de six points, ne peut avoir de puissance que dans la théorie des coniques, tandis que pour les autres courbes, il était nécessaire de donner à cette notion de l'involution l'extension à laquelle nous sommes arrivé dans les théorèmes IV et IV'.

Nous ne nous arrêterons pas aux différentes formes sous lesquelles on peut mettre la relation ($4'$) qui exprime l'involution de $3n$ droites, et nous passerons immédiatement à l'extension du théorème de Brianchon aux courbes de la n^{me} classe, extension qui se fonde sur le corollaire suivant :

V'. Corollaire du théorème corrélatif de celui de Desargues. *Si deux systèmes de deux polygones conjugués de* n *sommets circonscrits à une courbe du* n^{me} *ordre, sont situés de telle manière que les droites qui relient* (n + 1) *couples de sommets concourent en un même point, les droites qui relieront les* (n — 1) *autres couples de sommets concourront en ce même point.*

Désignons par $0 \ldots n-1$, $0' \ldots n'-1'$; $0 \ldots N-1$, $0' \ldots N'-1'$, les sommets des deux systèmes de polygones conjugués circonscrits; supposons que les droites 00, $11 \ldots (n-1, N-1)$ et $0'0'$ concourent en un point S.

De ce point menons n tangentes à la courbe, et $2n$ droites

$$s_0 \ldots s_{n-1},\ s_{0'} \ldots s_{n'-1'};\ S_0 \ldots S_{n-1},\ S_{0'} \ldots S_{n'-1'}$$

aboutissant aux $2n$ sommets des deux polygones.

(*) Nous énoncerons ce théorème sous une forme plus générale encore dans l'*Addition* (1870).

Par hypothèse $s_0 \ldots . s_{n-1}$ et $s_{0'}$ coïncident respectivement avec $S_0 \ldots S_{n-1}$ et $S_{0'}$. Il en résulte que si nous appliquons le théorème IV' à nos deux systèmes de polygones conjugués, et que nous divisions membre à membre les deux relations à n membres fournies par ce théorème, nous obtiendrons les relations plus simples :

$$\frac{\sin(t, s_{1'}) \ldots \sin(t, s_{(n-1)'})}{\sin(t, S_{1'}) \ldots \sin(t, S_{(n-1)'})} = \cdots = \frac{\sin(t^{(n-1)}, s_{1'}) \ldots \sin(t^{(n-1)}, s_{(n-1)'})}{\sin(t^{(n-1)}, S_{1'}) \ldots \sin(t^{(n-1)}, S_{(n-1)'})} .$$

Il est aisé de conclure de là, en vertu d'un lemme algébrique analogue à celui que nous avons démontré plus haut, que chacun des s doit se confondre respectivement avec l'un des S; ainsi, par exemple, que $s_{1'}$ coïncide avec $S_{1'}$; autrement dit les droites qui unissent le point S aux sommets 1' et 1' des deux polygones se confondent, ou bien la droite 1'1' passe par S; et de même des autres, *c. q. f. d.*

Remarque. Il est à remarquer que la démonstration suppose qu'aucune des tangentes menées par S à la courbe, ne se confond avec l'une des droites qui unissent ce point S aux sommets des deux polygones, puisque, dans ce cas, le premier membre des relations précédentes deviendrait indéterminé.

En combinant les deux corollaires III' et V' on arrive immédiatement à l'extension du théorème de Brianchon, que nous énoncerons sous cette forme :

VI'. Extension du théorème de Brianchon. *Dans un système de deux polygones conjugués de* n + 1 *sommets circonscrits à une courbe de la* n^me^ *classe, les droites qui relient les sommets opposés concourent en un même*
Fig. VII. *point* (*).

En effet, en vertu du théorème II', un système de deux polygones conjugués circonscrits de $n+1$ sommets peut se décomposer en deux systèmes de deux polygones conjugués circonscrits de n sommets, ayant $n-1$ sommets communs. Or, si nous considérons les droites qui relient respectivement deux sommets du premier de ces polygones aux sommets opposés du

(*) Ce théorème recevra, dans l'*Addition*, la même généralisation que le précédent.

second, ces deux droites se couperont en un point par lequel nous pouvons faire passer les droites qui unissent entre eux les $n-1$ sommets communs aux deux polygones, puisque, ces sommets coïncidant, la droite qui les unit est entièrement indéterminée. Nous pouvons donc dire que les droites qui unissent $n+1$ couples de sommets opposés (les deux premiers et les $n-1$ sommets coïncidants) concourent en un même point; et par le corollaire V′ on voit que les droites qui unissent les $n-1$ autres couples de sommets opposés, concourront en ce même point, *c.q.f.d.*

En vertu de la remarque que nous avons faite plus haut, ce sont les droites unissant les sommets opposés seulement qui concourent en un même point; car celles qui uniraient deux sommets non opposés seraient tangentes à la courbe, et, dans ce cas, le corollaire V′ ne serait pas applicable.

Les théorèmes que nous venons de démontrer sont tous des corrélatifs de ceux que nous avons établis dans le chapitre des coordonnées rectilignes, et ils forment avec ceux-ci et les théorèmes de Carnot et de Newton (*), la base de la géométrie supérieure. Nous aurions pu déduire ces théorèmes corrélatifs du principe de dualité; nous avons préféré les démontrer directement, afin de donner pour base commune à tous nos théorèmes les principes élémentaires de la géométrie analytique.

Nous allons, en quelques mots, reprendre ces derniers théorèmes pour les courbes des cinq premières classes, auxquelles, comme nous le savons, ils sont toujours applicables.

Art. II. — *Coniques.*

Tous ces théorèmes sont connus pour les coniques; toutefois, le corrélatif de celui de Pappus n'avait été donné que pour les deux couples de sommets opposés d'un quadrilatère circonscrit; l'énoncé du théorème II′ montre immédiatement que la même propriété existe relativement au troisième couple de sommets opposés du quadrilatère complet. Nous ne nous arrête-

(*) Nous avons dit plus haut pourquoi nous avons cru inutile de démontrer le théorème de Carnot; la même raison nous fait omettre son corrélatif; quant au théorème de Newton, nous le démontrerons plus loin, en faisant usage d'un autre système de coordonnées.

rons pas davantage sur ce sujet, qui a déjà donné lieu, comme nous l'avons dit à propos du théorème de Pappus, à un travail antérieur de notre part.

Le théorème de Brianchon, pour pouvoir se généraliser aisément, doit s'énoncer comme l'indique le théorème VI′ :

THÉORÈME DE BRIANCHON. *Dans un système de deux triangles conjugués circonscrits à une conique, les droites qui unissent les sommets opposés concourent en un même point.*

ART. III. — *Courbes de la troisième classe.*

Le théorème I′ s'énoncera, pour ces courbes :

Fig. VI. THÉORÈME FONDAMENTAL. *Si de deux points on mène deux systèmes de trois tangentes à une courbe de la troisième classe, et que par chacun des points d'intersection d'une tangente du premier système avec une tangente du second, on mène à la courbe une nouvelle tangente, les trois nouvelles tangentes concourront en un même point.*

On voit que nous obtenons ainsi un système de deux triangles conjugués de sommets P, P′, O et I, II, III, tels que les trois tangentes menées par l'un des sommets du premier passent respectivement par les trois sommets du second.

De plus, on peut arriver de six manières différentes à deux systèmes semblables, en partant des deux mêmes points P et P′. Car, au lieu de prendre les intersections des tangentes 1 et 1′, 2 et 2′, 3 et 3′ pour sommets du triangle conjugué, on peut combiner chacune des tangentes 1, 2 ou 3 avec chacune des tangentes 1′, 2′ ou 3′, ce qui peut se faire de six manières.

Il est aisé de déduire de ce théorème le cas particulier pour lequel les deux points P′ et P coïncident.

Le théorème corrélatif de celui de Pappus s'énoncera :

EXTENSION DU THÉORÈME CORRÉLATIF DE CELUI DE PAPPUS. *Dans un système de deux triangles conjugués circonscrits à une courbe de la troisième classe, les produits des distances d'une tangente quelconque aux sommets de chacun de ces triangles sont analogiques.*

L'expression analytique de ce théorème sera, en désignant par $\Delta_0, \Delta_1, \Delta_2$

les distances d'une tangente aux trois sommets du premier triangle, et par Δ_0', Δ_1', Δ_2' ses distances aux sommets du second :

$$\Delta_0 \,.\, \Delta_1 \,.\, \Delta_2 \div \Delta_0' \,.\, \Delta_1' \,.\, \Delta_2'.$$

Dans le cas particulier mentionné plus haut, elle devient :

$$\Delta_0^2 \,.\, \Delta_3 \div \Delta_1' \,.\, \Delta_2' \,.\, \Delta_3'.$$

En combinant deux systèmes différents de triangles conjugués ayant pour sommets communs P et P′ et pour autres sommets O, I, II, III, et O′, I′, II′, III′, et supprimant les sommets communs, nous aurons un système de deux quadrilatères conjugués circonscrits, c'est-à-dire tels que chaque sommet de l'un, O, soit le point de concours de trois tangentes menées respectivement par chacun des sommets I′, II′, III′ de l'autre, un seul O′ excepté.

Celui-ci est dit, pour cette raison, opposé au premier O. Donc :

Théorème. *Dans une courbe de la troisième classe, on peut circonscrire un système de deux quadrilatères conjugués.* Fig. VII.

Il est facile d'appliquer à ce cas le théorème corrélatif de celui de Pappus.

Le théorème corrélatif de celui de Desargues s'énoncera :

Extension du théorème corrélatif de celui de Desargues. *Lorsqu'on a un système de deux triangles conjugués circonscrits à une courbe de la troisième classe, si par un point quelconque on mène à cette courbe trois tangentes et les six droites qui aboutissent aux sommets de ces triangles, ces neuf droites seront en involution.*

On voit par là que l'involution de six droites doit être à peu près impuissante dans l'étude des courbes de la troisième classe, et qu'il était nécessaire d'étendre cette idée de l'involution à un système de $3n$ droites pour en tirer tout le parti possible.

De ce théorème on peut déduire de nombreux corollaires, dont l'un des plus importants est celui-ci :

Corollaire. *Si deux systèmes de triangles conjugués circonscrits à une courbe de la troisième classe sont situés de telle manière que les droites qui relient quatre couples de sommets concourent en un même point, les droites* *qui relient les deux autres couples de sommets concourront en ce même point.*

La démonstration générale que nous avons donnée du corollaire V′, dont celui-ci n'est qu'un cas particulier, nous dispense d'y revenir.

Au moyen de ce corollaire, nous pouvons immédiatement démontrer le théorème de Brianchon par les courbes de la troisième classe :

Fig. VII. EXTENSION DU THÉORÈME DE BRIANCHON. *Dans un système de deux quadrilatères conjugués circonscrits à une courbe de la troisième classe, les droites qui relient les quatre couples de sommets opposés concourent en un même point.*

Nous avons vu, en effet, qu'un système de deux quadrilatères conjugués circonscrits peut se décomposer en deux systèmes de triangles conjugués circonscrits ayant deux sommets communs.

Soient O, I, II, III et O′, I′, II′, III′, les sommets de nos deux quadrilatères, et P, P′ deux nouveaux sommets communs à deux systèmes de triangles conjugués circonscrits dont les sommets de ces quadrilatères font partie. Ces deux systèmes seront :

P, P′, O et I, II, III,
P, P′, O′ et I′, II′, III′.

Or, les quatre droites qui relient respectivement les sommets O et O′, I et I′, P et P, P′ et P′ peuvent être censées concourir au point d'intersection *i* des deux droites O, O′ et I, I′ ; donc, en vertu du corollaire précédent, les droites II, II′ et III, III′ concourront en ce même point.

Il résulte de la démonstration générale du corollaire V′, que ce sont les droites qui relient les couples de sommets opposés seulement qui concourent au même point.

ART. IV. — *Courbes de la quatrième classe.*

Le théorème fondamental I′ devient pour ces courbes :

THÉORÈME FONDAMENTAL. *Si de deux points on mène deux systèmes de quatre tangentes à une courbe de la quatrième classe, et que par chacun des points d'intersection d'une des tangentes du premier système avec une de celles du second, on mène à la courbe deux nouvelles tangentes, ces huit tangentes envelopperont en général une conique.*

Si trois de ces tangentes concourent en un même point, la conique se réduira à un système de deux points, c'est-à-dire que les huit tangentes se grouperont en deux systèmes de quatre tangentes concourant en un même point.

En nommant P et P' les deux premiers points; II, III, IV, V les points d'intersection des systèmes de tangentes; O et I les points de concours des quatre couples de tangentes menées respectivement par ces points, on voit que nous avons affaire à *un système de deux quadrilatères conjugués circonscrits*

$$P, P', O, I \quad \text{et} \quad II, III, IV, V,$$

c'est-à-dire *tels que chaque sommet de l'un soit le point de concours des tangentes menées par les quatre sommets de l'autre.*

Comme on peut combiner les quatre premières tangentes deux à deux de $1.2.3.4$ manières différentes, on formera autant de systèmes de deux quadrilatères conjugués circonscrits, tels par exemple que

$$P, P', O, I, \quad \text{et} \quad II, III, IV, V,$$
$$P, P', O, I', \quad \text{et} \quad II', III', IV', V' \ (^*).$$

Si dans ces deux systèmes nous supprimons les sommets communs, nous voyons que nous aurons un système de deux pentagones conjugués circonscrits.

En appliquant à l'un des systèmes de quadrilatères conjugués circonscrits, le théorème corrélatif de celui de Pappus, nous conclurons que :

Extension du théorème corrélatif de celui de Pappus. *Lorsqu'on a un système de deux quadrilatères conjugués circonscrits à une courbe de la quatrième classe, les produits des distances d'une tangente quelconque aux sommets de ces deux quadrilatères, sont analogiques.*

Propriété dont l'expression analytique est :

$$\Delta_0\Delta_1\Delta_2\Delta_3 \div \Delta'_0\Delta'_1\Delta'_2\Delta'_3,$$

en faisant usage de notations analogues aux précédentes.

Si nous faisons coïncider les deux points P et P', il est manifeste que ce

(*) L'existence de ces systèmes multiples de quadrilatères conjugués circonscrits sera établie dans l'*Addition* (1870).

point unique peut être considéré comme point de concours de systèmes de tangentes menées par les points de contact des tangentes primitives passant par P et P′, et par conséquent la courbe enveloppe du deuxième degré, dont il est question dans le théorème général, pourra aussi se réduire à un système de deux points, comme dans le cas particulier. Donc :

Corollaire. *Si d'un point on mène quatre tangentes à une courbe de la quatrième classe, et par les points de contact de chacune de celles-ci les deux autres tangentes à la courbe, ces huit nouvelles tangentes formeront deux systèmes de quatre droites, qui envelopperont une conique, ou qui concourront chacun en un même point.*

Le théorème corrélatif de celui de Pappus, appliqué au cas particulier, s'énoncera :

Corollaire. *Le produit du carré de la distance d'une tangente quelconque au premier point par ses distances aux deux points de concours des nouvelles tangentes, et le produit de ses distances aux points de contact des premières tangentes, sont analogiques;*

Ce qui s'exprime par la relation :

$$\Delta_0^2 \,.\, \Delta_2 \,.\, \Delta_3 \div \Delta'_0 \,.\, \Delta'_1 \,.\, \Delta'_2 \,.\, \Delta'_3 \,.$$

Le corrélatif du théorème de Desargues, IV′, s'énonce pour les courbes de la quatrième classe :

Extension du théorème corrélatif de celui de Desargues. *Lorsque l'on a un système de deux quadrilatères conjugués circonscrits à une courbe de la quatrième classe, si d'un point on mène à cette courbe quatre tangentes et les huit droites qui aboutissent aux sommets de ces quadrilatères, ces douze droites sont en involution* (*).

Nous n'insisterons plus sur l'importance de l'extension que nous avons donnée à l'idée de l'involution, ni sur les corollaires auxquels donne lieu le théorème capital qui précède, et nous en conclurons immédiatement l'extension du théorème de Brianchon au moyen du corollaire suivant :

(*) Nous avons déjà dit plus haut que ce théorème sera généralisé dans l'*Addition*, de même que celui de Brianchon qui en découle (1870).

Corollaire. *Si deux systèmes de deux quadrilatères conjugués circonscrits à une courbe de la quatrième classe sont situés de telle manière, que les droites qui relient cinq couples de sommets concourent en un même point, les droites qui relieront les trois autres couples de sommets concourront en ce même point.*

Pour la démonstration, voir le théorème général V′.

Appliquons ce corollaire aux deux systèmes de quadrilatères conjugués circonscrits mentionnés plus haut :

P, P′, O, I et II, III, IV, V,
P, P′, O, I′ et II′, III′, IV′, V′.

Nous pourrons dire que, dans ces deux systèmes, les droites qui relient I à I′, II à II′, P à P, P′ à P′, O à O concourent au point d'intersection i de I, I′ avec II, II′; et par suite les droites III, III′; IV, IV′; V, V′ concourent en ce même point.

Or, comme les sommets I, II, III, IV, V et I′, II′, III′, IV′, V′ sont ceux de deux pentagones conjugués circonscrits, nous pourrons énoncer le théorème :

Extension du théorème de Brianchon. *Dans un système de deux pentagones conjugués circonscrits à une courbe de la quatrième classe, les droites qui relient les sommets opposés concourent en un même point.*

Art. V. — *Courbes de la cinquième classe.*

Pour ces courbes comme pour celles du cinquième ordre, nous nous bornerons à énoncer les théorèmes généraux.

Théorème fondamental. *Si de deux points on mène deux systèmes de cinq tangentes à une courbe de la cinquième classe, et que par les points d'intertersection de ces tangentes deux à deux on mène trois autres tangentes à la courbe, ces quinze nouvelles tangentes envelopperont en général une courbe de la troisième classe.*

Si parmi ces nouvelles tangentes deux systèmes, le premier de quatre tangentes, le second de trois, concourent en un même point, ce qui est toujours possible, les quinze tangentes formeront trois systèmes de cinq droites concourant en un même point.

Nous aurons ainsi *un système de deux pentagones conjugués circonscrits à une courbe de la cinquième classe,* système pour lequel l'application du théorème corrélatif de celui de Pappus donnera la relation

$$\Delta_0 \cdot \Delta_1 \cdot \Delta_2 \cdot \Delta_3 \cdot \Delta_4 \div \Delta'_0 \cdot \Delta'_1 \cdot \Delta'_2 \cdot \Delta'_3 \cdot \Delta'_4 .$$

COROLLAIRE. *Si d'un point on mène cinq tangentes à une courbe de la cinquième classe, et que par les points de contact de celles-ci l'on mène les trois autres tangentes à la courbe, ces quinze tangentes formeront trois systèmes de cinq droites qui envelopperont en général une courbe de la troisième classe.*

Ce lieu de la troisième classe pourra, dans des cas particuliers, se réduire à une conique et un point, ou à trois points qui seront chacun le point de concours de cinq de ces tangentes.

Le corrélatif du théorème de Pappus s'exprimera, pour ce dernier cas, par la relation :

$$\Delta_0^2 \cdot \Delta_2 \cdot \Delta_3 \cdot \Delta_4 \div \Delta'_0 \cdot \Delta'_1 \cdot \Delta'_2 \cdot \Delta'_3 \cdot \Delta'_4 .$$

Le corrélatif de celui de Desargues s'énoncera :

THÉORÈME. *Lorsque l'on a un système de deux pentagones conjugués circoncrits à une courbe de la cinquième classe, si d'un point on mène à cette courbe cinq tangentes et les dix droites qui aboutissent aux sommets de ces deux pentagones, ces quinze droites seront en involution* (*).

Le corollaire le plus important de ce théorème est celui-ci :

COROLLAIRE. *Si deux systèmes de deux pentagones conjugués circonscrits à une courbe de la troisième classe sont situés de telle manière, que les droites qui unissent six couples de sommets concourent en un même point, les droites qui unissent les quatre autres couples de sommets concourront en ce même point.*

Considérons actuellement un système de deux pentagones conjugués circonscrits formés en menant par les deux points P et P' deux systèmes de cinq

(*) Ce théorème, ainsi que celui de Brianchon, donné plus bas, seront généralisés dans l'*Addition* (1870).

tangentes : 0, 1, 2, 3, 4, etc.; puis en menant par chacun des points 00′, 11′, 22′, 33′, 44′ trois nouvelles tangentes pour former le premier système des pentagones; enfin par chacun des points 00′, 11′, 23′, 34′, 41′ trois nouvelles tangentes pour former le second; supposons que ces quinze tangentes concourent cinq à cinq en un même point (*).

Ces deux systèmes de pentagones circonscrits dont nous désignerons les sommets par :

$$\begin{array}{lll} \mathrm{P, P', O, O', I} & \text{et} & \mathrm{II, III, IV, V, VI,} \\ \mathrm{P, P', O, O', I'} & \text{et} & \mathrm{II', III', IV', V', VI',} \end{array}$$

formeront, si nous supprimons les sommets communs, un *système de deux hexagones conjugués circonscrits.*

Or nous pouvons dire que les droites qui unissent les six sommets I et I′, II et II′, P et P, P′ et P′, O et O, O′ et O′ concourent en un même point i, intersection de I, I′ avec II, II′; donc les droites qui uniront les trois autres couples de sommets opposés concourront en ce même point; d'où le théorème :

Extension du théorème de Brianchon. *Dans un système de deux hexagones conjugués circonscrits à une courbe de la cinquième classe, les six droites qui unissent les couples de sommets opposés concourent en un même point.*

Le lecteur familier avec la géométrie supérieure aura peut-être trouvé trop de longueurs dans cette exposition. Il eût préféré sans doute nous la voir borner aux théorèmes généraux ; mais nous avons craint qu'une aussi grande concision n'entraînât trop d'obscurités. C'est pour rendre plus aisée l'intelligence de ces théorèmes que nous avons cru utile de les appliquer aux quatre premiers genres de courbes algébriques ; si nous ne sommes pas parvenu à garder une juste mesure, on voudra bien nous le pardonner en faveur de nos intentions ; pour ce qui nous concerne, nous eussions de beaucoup préféré nous borner aux seuls théorèmes généraux (**).

Il nous reste encore à démontrer et à généraliser le fameux théorème de Newton sur les coniques; nous ferons usage, à cet effet, d'un autre système de coordonnées dont nous nous occuperons au chapitre suivant.

(*) L'existence de ces systèmes sera établie dans l'*Addition* (1870).

(**) C'est à ces théorèmes seulement que nous nous attacherons dans l'*Addition.*

ADDITION.

(Décembre 1870.)

Comme nous l'avons annoncé dans la préface de ce travail, le but que nous nous proposons dans cette *Addition* est :

En premier lieu, de reprendre quelques points sur lesquels des analystes distingués ont bien voulu appeler notre attention, et d'élucider ces points de manière à ne laisser subsister aucun doute sur l'existence des figures auxquelles se rapportent nos théorèmes;

En second lieu, de donner une démonstration fort simple du théorème de Pascal tel que nous l'avons énoncé pour les courbes planes jusqu'au cinquième ordre, et de faire servir ce mode même de démonstration à donner à ce théorème une extension telle qu'il s'applique, sous une forme très-générale, à toutes les courbes algébriques;

En troisième lieu enfin, d'étendre à toutes ces courbes le théorème de Desargues.

Nous nous bornerons, dans cette *Addition*, au cas des coordonnées rectilignes ponctuelles, en faisant remarquer que toutes nos démonstrations pourront, par le moyen des coordonnées tangentielles, s'appliquer aux figures corrélatives, de sorte que nous nous dispenserons même d'énoncer les théorèmes qui se rapportent à ces figures, et qui ne sont, au reste, que la généralisation de ceux que nous avons donnés dans le chapitre précédent.

§ I. Existence des systèmes multiples de polygones conjugués inscrits dans les courbes du quatrième et du cinquième ordre.

Le point essentiel que nous avons à élucider est l'existence de systèmes multiples de polygones conjugués du n^{me} ordre, inscrits à une courbe du même ordre, et ayant deux sécantes communes, pour $n = 4$ et $n = 5$, existence sur laquelle nous avons fondé l'extension du théorème de Pascal à ces courbes.

Nous commencerons par faire remarquer, comme on le verra plus bas, que ce théorème peut s'établir indépendamment de cette existence, et d'une manière très-simple; que, pour les courbes du quatrième ordre, il existe des systèmes de polygones conjugués du quatrième et du cinquième ordre en nombre triplement indéfini, c'est-à-dire dans lesquels trois paramètres sont arbitraires; que, pour le cinquième ordre, il existe des systèmes de polygones conjugués du sixième ordre en nombre défini, tandis que ceux du cinquième sont en nombre simplement indéfini (*).

Il semble résulter de là que, parmi ces systèmes en nombre indéfini de polygones conjugués du quatrième ou du cinquième ordre inscrits à une courbe de même ordre, il existera des systèmes multiples de polygones conjugués ayant deux sécantes communes, et qui donneront naissance, ainsi qu'on l'a vu dans la première partie, à des systèmes de polygones conjugués de l'ordre immédiatement supérieur.

Ceci toutefois n'est qu'une induction qui a besoin d'être confirmée : pour le quatrième ordre, cette confirmation est très-aisée; pour le cinquième, elle présente plus de difficultés.

Mettons l'équation des courbes du quatrième ordre sous la forme

$$C_4 = \alpha\beta\gamma\delta + k\alpha'\beta'\gamma'\delta' = 0,$$

$\alpha\ldots$ désignant des fonctions linéaires de la forme $y - ax - b$.

Le second membre renfermant dix-sept paramètres, il en est trois que nous pouvons nous donner arbitrairement, par exemple k et les deux paramètres de α; il est clair que les quatorze autres paramètres, ceux de $\beta\ldots\ldots\delta'$, seront

(*) On a déjà vu dans la première partie que les équations de ces courbes peuvent se mettre sous la forme :

$$\delta_1 \ldots \delta_4 - k\delta'_1 \ldots \delta'_4 = C_4 = 0,$$
$$\delta_1 \ldots \delta_5 - k\delta'_1 \ldots \delta'_5 = C_5 = 0;$$

mais on peut aussi les mettre sous la forme suivante

$$\delta_1 \ldots \delta_5 - k\delta'_1 \ldots \delta'_5 = \Delta \,.\, C_4 = 0,$$
$$\delta_1 \ldots \delta_6 - k\delta'_1 \ldots \delta'_6 = \Delta \,.\, C_5 = 0;$$

tous les δ, δ' et Δ représentant des fonctions linéaires dans lesquelles il y a deux paramètres à déterminer.

Ces formes d'équations rendent manifestes l'existence et le nombre des polygones conjugués.

déterminés en fonction de ces trois paramètres arbitraires au moyen de quatorze équations de condition.

Si nous faisons voir que l'équation de cette courbe peut aussi se mettre sous la forme

$$C_4 = \alpha\beta\Gamma\Delta + k'\alpha'\beta'\Gamma'\Delta' = 0,$$

il sera prouvé que l'on peut construire, sur les sécantes α et β, des systèmes multiples de quadrilatères conjugués inscrits à C_4.

Or, si nous nommons Γ', Δ' les diagonales du quadrilatère dont les couples de côtés opposés sont γ', δ' et α, β, l'ensemble de ces diagonales pourra se représenter par une équation de la forme

$$(1 + m)\,\Gamma'\Delta' = \gamma'\delta' + m\alpha\beta,$$

dans laquelle m sera une fonction déterminée des paramètres de α, β, γ', δ', et, par suite, une fonction déterminée des trois paramètres arbitraires.

De même l'ensemble des diagonales Γ, Δ du quadrilatère dont les couples de côtés opposés sont γ, δ et α', β' sera représenté par

$$(1 + m')\,\Gamma\Delta = \gamma\delta + m'\alpha'\beta',$$

m' étant, comme m, une fonction déterminée des trois paramètres arbitraires.

Remplaçons, dans l'équation $C_4 = 0$, $\gamma\delta$ et $\gamma'\delta'$ par leurs valeurs tirées des deux précédentes, nous aurons :

$$C_4 = \alpha\beta\left[(1 + m')\,\Gamma\Delta - m'\alpha'\beta'\right] + k\alpha'\beta'\left[(1 + m)\,\Gamma'\Delta' - m\alpha\beta\right] = 0;$$

et comme m et m' sont des fonctions déterminées de trois paramètres arbitraires, k et les deux paramètres de α, si nous posons $m' + km = 0$, cette relation déterminera k en fonction des deux paramètres de α qui restent encore arbitraires, et l'équation de C_4 deviendra

$$C_4 = (1 + m')\,\alpha\beta\Gamma\Delta + k(1 + m)\,\alpha'\beta'\Gamma'\Delta' = 0,$$

ou plus simplement :

$$C_4 = \alpha\beta\Gamma\Delta + k'\alpha'\beta'\Gamma'\Delta' = 0;$$

équation dans laquelle tous les paramètres sont déterminés en fonction de ceux de α, restés arbitraires; d'où il résulte que, sur une sécante donnée α, on peut construire des systèmes multiples de quadrilatères conjugués.

Ces systèmes multiples sont donc en nombre indéfini.

L'existence de systèmes multiples de quadrilatères conjugués ayant deux sécantes communes est ainsi établie de la manière la plus générale pour les courbes du quatrième ordre.

Pour celles du cinquième, le même mode de transformation de leur équation ne nous a pas semblé généralement praticable : nous indiquerons toutefois le résultat auquel il nous a conduit, et qui mettra peut-être sur la voie d'une plus grande généralisation.

Soit l'équation d'une courbe du cinquième ordre mise sous la forme

$$C_5 = \alpha\beta\gamma\delta\varepsilon + k\alpha'\beta'\gamma'\delta'\varepsilon' = 0,$$

ce qui est toujours possible, puisqu'on a vingt paramètres à déterminer au moyen de vingt équations, k étant arbitrairement donné.

Considérons les transversales $\Gamma'\Delta'E'$ qui relient, d'une autre manière que les transversales $\gamma'\delta'\varepsilon'$, les intersections de ces dernières avec α et β; nous aurons :

$$\gamma'\delta'\varepsilon' + m'\Gamma'\Delta'E' = (1 + m')\alpha\beta D,$$

m' étant, par un raisonnement analogue au précédent, une fonction déterminée de k. Car les six droites du premier membre peuvent être regardées comme les côtés de deux triangles conjugués au lieu du second ordre $\alpha\beta = 0$, et par suite les côtés opposés de ces triangles doivent se couper sur une droite $D = 0$.

De même, en désignant par Γ, Δ, E trois transversales qui relient, d'une autre manière que γ, δ, ε, les intersections de celles-ci avec α' et β', nous aurons :

$$\gamma\delta\varepsilon + m\Gamma\Delta E = (1 + m)\alpha'\beta' D'.$$

Si nous remplaçons, dans l'équation $C_5 = 0$, $\gamma\delta\varepsilon$ et $\gamma'\delta'\varepsilon'$ par leurs valeurs tirées des deux précédentes, elle prendra la forme :

$$C_5 = \alpha\beta\left[(1 + m)\alpha'\beta' D' - m\Gamma\Delta E\right] + k\alpha'\beta'\left[(1 + m')\alpha\beta D - m'\Gamma'\Delta'E'\right] = 0;$$

et elle se réduira à

$$C_5 = \alpha\beta\Gamma\Delta E + k'\alpha'\beta'\Gamma'\Delta'E' = 0,$$

si l'on pose $1 + m = k(1 + m')$, ce qui détermine k, et si, de plus, la droite D coïncide avec D'.

Dans ce cas la multiplicité des polygones conjugués construits sur α et β est encore démontrée.

Cette condition limite-t-elle l'existence de la propriété à des genres particuliers de courbes, ou limite-t-elle simplement le nombre des systèmes multiples de polygones conjugués, c'est là une question assez délicate que nous ne sommes pas en mesure de trancher.

Quoi qu'il en soit, l'on voit que toutes les courbes du quatrième ordre renferment des systèmes multiples de quadrilatères conjugués formés sur les mêmes sécantes, et que, pour les courbes du cinquième ordre, la multiplicité des systèmes de pentagones conjugués formés sur les mêmes sécantes est également établie, au moins pour certains genres de ces courbes.

Dans le paragraphe suivant on démontrera, au reste, que cette multiplicité n'est pas nécessaire le moins du monde à l'existence du théorème de Pascal, quoique ce soit par elle que nous soyons arrivé d'abord à l'expression particulière de ce théorème qui est relative aux polygones conjugués du $(n+1)^{\text{me}}$ ordre; et ce mode de démonstration permettra d'étendre le théorème, même en le généralisant, à toutes les courbes algébriques.

§ II. Généralisation du théorème de Pascal.

Dans ce second paragraphe, nous commencerons d'abord par établir d'une manière directe le théorème de Pascal pour les courbes algébriques jusqu'au cinquième ordre inclusivement, et par l'étendre à des systèmes de polygones conjugués d'un ordre supérieur à ceux de Pascal pour les courbes des quatre premiers ordres. Nous indiquerons ensuite une généralisation de ce théorème qui le rendra applicable, non-seulement à des systèmes de figures conjuguées moins particulières que les polygones conjugués inscriptibles aux courbes des cinq premiers ordres, mais par cela même à ces systèmes de figures conjuguées dans toutes les courbes algébriques.

L'extension que nous avons donnée au théorème de Pascal pour les cinq premiers ordres peut se fonder très-simplement sur cette considération que l'équation $C_n = 0$ de ces courbes peut toujours se mettre sous la forme :

$$\delta_1 \ldots \delta_{n+1} - k\delta'_1 \ldots \delta'_{n+1} = \Delta C_n = 0,$$

où Δ et les δ sont des fonctions linéaires.

En effet, si l'on considère, d'une part, le nombre total des paramètres, ceux de C_n excepté, d'autre part, le nombre d'équations à satisfaire, on trouvera, pour le premier, $4n + 7$, et pour le second, $\frac{(n+1)(n+4)}{2}$: or ce dernier est toujours égal ou inférieur au précédent pour $n \overline{\gtrless} 5$, *c. q. f. d.*

Cette forme d'équation est évidemment l'expression analytique du théorème de Pascal : car les côtés δ coupant les côtés δ' en des points tous situés sur le lieu $\Delta C_n = 0$, ceux de ces côtés qui ne se couperont pas sur $C_n = 0$, c'est-à-dire les côtés opposés, se couperont sur la droite $\Delta = 0$.

Les polygones conjugués inscrits que nous venons de considérer étaient du $(n+1)^{me}$ ordre : nous allons voir que les polygones conjugués d'un ordre supérieur existent pour les courbes des quatres premiers ordres, et donnent lieu au théorème suivant, dont quelques cas particuliers sont connus :

SECONDE EXTENSION DU THÉORÈME DE PASCAL. *Dans un système de deux polygones conjugués du* $(\mathrm{n}+\mathrm{p})^{me}$ *ordre inscrits à une courbe du* n^{me} *ordre, les côtés non adjacents se coupent sur un lieu du* p^{me} *ordre.*

Nous entendons par côtés non adjacents ceux qui ne se rencontrent pas sur la courbe.

En effet, l'équation $C_n = 0$ peut s'écrire, jusqu'au quatrième ordre inclusivement, en supposant $p > 1$:

$$\delta_1 \ldots \delta_{n+p} - k\delta'_1 \ldots \delta'_{n+p} = C_n \, . \, C'_p = 0 \ (^*).$$

Car le nombre total des paramètres, ceux de C_n exceptés, est

$$4(n+p) + 1 + \frac{p(p+3)}{2};$$

(*) Cette équation pourrait même prendre la forme plus particulière :

$$\delta_1 \ldots \delta_{n+p} - k\delta'_1 \ldots \delta'_{n+p} = C_n \Delta_1 \ldots \Delta_p = 0,$$

pour quelques valeurs de p que le lecteur déterminera aisément.

celui des équations à satisfaire : $\frac{(n+p)(n+p+3)}{2}$. La différence entre ces deux nombres est

$$4(n+p)+1-n\left(\frac{n+3}{2}+p\right);$$

et elle sera positive pour $n < 5$, *c. q. f. d.*

On établirait du reste, comme précédemment, que cette forme d'équation est l'expression analytique du théorème énoncé.

On remarquera que, pour $n = 2$, la différence entre le nombre des paramètres et celui des équations est $2(n+p)$; c'est-à-dire qu'on peut se donner arbitrairement tous les sommets des deux polygones conjugués d'ordre $(n+p)$ inscrits à une conique;

Que, pour $n = 3$, cette différence est $n+p+1$; c'est-à-dire qu'on peut se donner les sommets de l'un des polygones, ainsi qu'un sommet du polygone conjugué, dans les courbes du troisième ordre;

Enfin que pour $n = 4$, cette différence est constamment égale à 3; c'est-à-dire qu'il n'y a plus trois sommets arbitraires, quel que soit l'ordre des polygones, quand la courbe est du quatrième ordre.

Il est aisé d'étendre ces théorèmes à toutes les courbes algébriques, pourvu qu'au lieu de systèmes de polygones conjugués, qui n'existent plus au delà du cinquième ordre, on envisage les systèmes plus généraux que nous allons définir.

Nous appellerons *figures conjuguées du* n^me^ *ordre inscrites à une courbe du même ordre* celles qui sont formées, d'une part, des n transversales qui réunissent deux à deux les n points d'intersection de deux sécantes avec la courbe; d'autre part, de ces deux sécantes et du lieu, d'ordre $n-2$, des nouvelles intersections des transversales avec la courbe.

Par *systèmes de figures conjuguées* nous entendons les différentes figures conjuguées que l'on peut former en réunissant deux à deux, dans un ordre quelconque, les n points d'intersection de deux mêmes sécantes.

Pour ces figures conjuguées, nous établirons d'abord un théorème en un certain sens plus particulier que celui de Pascal, quoiqu'il s'applique à toutes les courbes algébriques; puis le théorème de Pascal proprement dit pour ces courbes ; enfin la généralisation complète de ce théorème, dans laquelle les deux précédents rentreront naturellement comme cas particuliers.

Théorème. *Si* n — 2 *transversales sont communes à deux systèmes de figures conjuguées du* n^{me} *ordre inscrites à une courbe du même ordre, ces deux systèmes se couperont en tous points situés sur cette courbe.*

L'équation de la courbe pourra en effet, en vertu de l'hypothèse renfermée dans l'énoncé même, s'écrire sous les deux formes :

$$\delta_1\delta_2 C_{n-2} - k\,\delta'_1 \ldots \delta'_{n-2}\delta'_{n-1}\delta'_n = C_n = 0,$$
$$\delta_1\delta_2 C'_{n-2} - k'\delta'_1 \ldots \delta'_{n-2}\beta'_{n-1}\beta'_n = C_n = 0.$$

D'où l'on déduit par multiplication :

$$\beta'_{n-1}\beta'_n C_{n-2} - k_1\delta'_{n-1}\delta'_n C'_{n-2} = C_n = 0,$$

car ce lieu doit renfermer C_n, puisqu'il passe par l'intersection des deux précédents qui sont C_n même ; et il ne peut renfermer davantage, puisqu'il est de l'ordre n.

Cette nouvelle forme d'équation démontre le théorème.

Celui de Pascal s'énoncera, pour toutes les courbes algébriques :

Première généralisation du théorème de Pascal. *Si* n — 3 *transversales sont communes à deux systèmes de figures conjuguées du* n^{me} *ordre inscrites à une courbe du même ordre, les points d'intersection de ces figures qui n'appartiennent pas à cette courbe seront en ligne droite.*

Par hypothèse, l'équation de la courbe peut s'écrire :

$$\delta_1\delta_2 C_{n-2} - k\,\delta'_1 \ldots \delta'_{n-3}\delta'_{n-2}\delta'_{n-1}\delta'_n = C_n = 0,$$

et

$$\delta_1\delta_2 C'_{n-2} - k'\delta'_1 \ldots \delta'_{n-3}\beta'_{n-2}\beta'_{n-1}\beta'_n = C_n = 0.$$

D'où, par multiplication, on obtient un lieu :

$$\beta'_{n-2}\beta'_{n-1}\beta'_n C_{n-2} - k_1\delta'_{n-2}\delta'_{n-1}\delta'_n C'_{n-1} = \Delta C_n = 0;$$

car ce lieu doit renfermer C_n, et, comme il est de l'ordre $n+1$, il doit renfermer en outre une droite $\Delta = 0$.

On se convaincra que cette dernière forme est l'expression du théorème, par un raisonnement identique à celui que nous avons fait pour le cas particulier au commencement de ce second paragraphe.

Voici enfin la généralisation complète du théorème :

SECONDE GÉNÉRALISATION DU THÉORÈME DE PASCAL. *Si* p *transversales sont communes à deux systèmes de figures conjuguées du* n^{me} *ordre inscrites à une courbe du même ordre, les points d'intersection de ces figures, qui n'appartiennent pas à cette courbe, se trouveront sur un lieu de l'ordre* n — p — 2.

Par hypothèse l'équation de la courbe peut s'écrire :

$$\delta_1\delta_2 C_{n-2} - k\,\delta'_1 \ldots \delta'_p\delta'_{p+1} \ldots \delta'_n = C_n = 0,$$

et

$$\delta_1\delta_2 C'_{n-2} - k'\delta'_1 \ldots \delta'_p\beta'_{p+1} \ldots \beta'_n = C_n = 0.$$

D'où, par multiplication, on obtient le lieu

$$\beta'_{p+1} \ldots \beta'_n C_{n-2} - k_1\delta'_{p+1} \ldots \delta'_n C'_{n-2} = C_n . C''_{n-p-2} = 0.$$

Nous n'insisterons pas davantage sur la démonstration, qui est analogue aux précédentes, et nous ferons seulement observer que les transversales non communes se coupent nécessairement sur le lieu d'ordre $n - p - 2$; car si elles se coupaient sur la courbe donnée, elles auraient avec elle plus de n points communs; et que, quant aux deux courbes d'ordre $n - 2$ qui font partie des systèmes de figures conjuguées, comme elles ont $(n - 2)p$ points communs entre elles et avec la courbe donnée, leurs points d'intersection qui sont situés sur le lieu d'ordre $n - p - 2$ seront au nombre de

$$(n - 2)(n - p - 2).$$

Sans aucun doute, en partant de formes plus générales encore de l'équation des courbes algébriques, et en les combinant entre elles et les interprétant comme nous venons de faire, on arriverait à des théorèmes d'une plus grande généralité encore; de même, il existe d'autres expressions analytiques du théorème de Pascal relatives à des dispositions particulières des systèmes de polygones conjugués. Mais en nous arrêtant à tous ces détails, nous perdrions de vue l'objet essentiel de ce travail, qui est l'extension des théorèmes fondamentaux de la haute géométrie aux courbes supérieures.

Peut-être le lecteur se dira-t-il que toutes ces généralisations que nous venons de donner du théorème de Pascal ne sont que des cas particuliers de ce théorème de Gergonne :

Si, parmi les m^2 intersections de deux courbes du degré m, il y en a mp sur une courbe du degré p, les $m(m-p)$ autres se trouveront sur une courbe du degré $(m-p)$.

Et en effet, on retrouve ce théorème au fond de tous les précédents. Mais ceux-ci étaient, ce nous semble, des cas particuliers assez remarquables pour faire l'objet d'une mention spéciale. Et que de fois n'arrive-t-il pas que l'on trouve dans une vérité beaucoup plus que n'y avait vu celui qui l'a découverte! Ce n'est souvent que quand ces conséquences nouvelles ont été établies par une autre voie, qu'on les voit ressortir clairement de la vérité dans laquelle elles se trouvaient implicitement renfermées. Peut-être pouvons-nous penser qu'il en est ainsi de nos énoncés, avec d'autant plus de raison qu'ils avaient d'abord soulevé quelques difficultés, pour l'éclaircissement desquelles nous avons écrit cette *Addition.*

§ III. Généralisation du théorème de Desargues.

Le théorème de Pascal pouvant être considéré comme un corollaire de celui de Desargues, on conçoit que l'extension que nous venons de donner au premier de ces théorèmes devait éveiller en nous l'idée que le second était susceptible de la même extension.

Et en effet, en partant d'une notion algébrique que nous ne pouvons développer aujourd'hui, mais sur laquelle nous reviendrons peut-être quelque jour, nous avons cru pouvoir conclure à priori à l'extension du théorème de Desargues à deux figures conjuguées du n^{me} ordre inscrites à une courbe de même ordre; et nous n'avons eu aucune peine à en établir la démonstration, d'une manière indépendante de la notion qui nous avait conduit à étendre le théorème à toutes les courbes algébriques.

Première généralisation du théorème de Desargues. *Dans un système* *de deux figures conjuguées du* n^{me} *ordre, inscrites à une courbe de même ordre, une droite quelconque coupe les deux figures conjuguées et la courbe en* 3n *points en involution.*

Soit
$$C_n = \delta_1\delta_2 C_{n-2} - k\delta'_1\delta'_2 \ldots \delta'_n = 0$$

l'équation d'une courbe du n^{me} ordre rapportée à deux figures conjuguées.

Considérons une droite D qui coupe

$$C_n \quad \text{aux points } O_1, O_2, \ldots O_n;$$
$$\delta_1, \delta_2 \text{ et } C_{n-2} \quad \text{aux points } M_1, M_2 \text{ et } M_3, M_4 \ldots M_n;$$

et

$$\delta'_1, \delta'_2 \ldots \delta'_n \quad \text{aux points } M'_1, M'_2 \ldots M'_n.$$

Par le point O_1, dont nous désignerons les coordonnées par x, y, menons à l'axe des y une parallèle qui coupe l'axe des x en P, et δ_1, δ_2 et C_{n-2} en N_1, N_2 et $N_3 \ldots N_n$.

Il est clair d'abord que δ_1, qui est une fonction $y - ax - b$, représente O_1N_1 : car $O_1P = y$; $N_1P = ax + b$, puisque N_1 est sur la droite δ_1; donc $O_1N_1 = y - ax - b = \delta_1$.

De même $O_1N_2 = \delta_2$; $O_1N'_1 = \delta'_1$, etc.

Ensuite, on voit que C_{n-2} représente le produit des segments $O_1N_3 . O_1N_4 \ldots O_1N_n$: car, en considérant l'abscisse x du point O_1 comme constante, et désignant par $y_3 \ldots y_n$ les ordonnées des points d'intersection de la parallèle menée par ce point à l'axe des y avec la courbe C_{n-2}, il est évident que

$$C_{n-2} = (y - y_3) \ldots (y - y_n);$$

et comme $y = O_1P$, $y_3 = N_3P \ldots y_n = N_nP$, la proposition est démontrée.

L'équation de la courbe C_n nous donne donc :

$$O_1N_1 . O_1N_2 . O_1N_3 \ldots O_1N_n = kO_1N'_1 . O_1N'_2 \ldots O_1N'_n.$$

Mais dans les triangles $O_1N_1M_1$, $O_1N_2M_2$, $O_1N'_1M'_1 \ldots O_1N'_nM'_n$, on a :

$$O_1N_1 = O_1M_1 \frac{\sin(D\delta_1)}{\sin(Y\delta_1)}, \text{ etc.};$$

et en vertu du théorème de Carnot :

$$O_1N_3 \,.\, O_1N_4 \,.\,.\, O_1N_n = h \quad O_1M_3 \,.\, O_1M_4 \ldots O_1M_n,$$

le rapport h étant constant, quelque soit le point O_1, pour une même direction des sécantes O_1N_n et O_1M_n, c'est-à-dire Y et D.

Substituant ces valeurs dans l'équation précédente, nous aurons :

$$h\frac{\sin(D\delta_1)}{\sin(Y\delta_1)}\cdot\frac{\sin(D\delta_2)}{\sin(Y\delta_2)}\,.\,O_1M_1\,.\,O_1M_2\,.\,O_1M_3\ldots O_1M_n =$$
$$k\frac{\sin(D\delta'_1)}{\sin(Y\delta'_1)}\cdot\frac{\sin(D\delta'_2)}{\sin(Y\delta'_2)}\cdots\frac{\sin(D\delta'_n)}{\sin(Y\delta'_n)}\,.\,O_1M'_1\,.\,O_1M'_2\ldots O_1M'_n;$$

d'où

$$\frac{O_1M_1\,.\,O_1M_2\ldots O_1M_n}{O_1M'_1\,.\,O_1M'_2\ldots O_1M'_n}=\frac{k}{h}\,\frac{\sin(Y\delta_1)}{\sin(D\delta_1)}\,\frac{\sin(Y\delta_2)}{\sin(D\delta_2)}\,\frac{\sin(D\delta'_1)}{\sin(Y\delta'_1)}\cdots\frac{\sin(D\delta'_n)}{\sin(Y\delta'_n)}.$$

Et comme pour tous les autres points d'intersection $O_2 \ldots O_n$ de la droite D avec la courbe C_n nous aurons des relations analogues, dans lesquelles le second membre sera constant, il s'ensuivra :

$$\frac{O_1M_1\,.\,O_1M_2\ldots O_1M_n}{O_1M'_1\,.\,O_1M'_2\ldots O_1M'_n}=\frac{O_2M_1\,.\,O_2M_2\ldots O_2M_n}{O_2M'_1\,.\,O_2M'_2\ldots O_2M'_n}=\cdots=\frac{O_nM_1\,.\,O_nM_2\ldots O_nM_n}{O_nM'_1\,.\,O_nM'_2\ldots O_nM'_n};\ c.\,q.\,f.\,d.$$

On déduira de ce théorème la démonstration de celui de Pascal, comme nous l'avons fait dans la première partie.

Enfin on peut étendre le théorème de Desargues à des figures plus générales encore que les précédentes.

Si nous appelons *système de lieux conjugués à un lieu du* n^me^ *ordre* un double système de deux lieux, l'un d'ordre $n-p$, l'autre d'ordre p, tel que toutes les intersections des deux lieux du premier système avec les deux lieux du second soient sur le lieu d'ordre n, l'équation de ce dernier pourra toujours s'écrire, comme on s'en assurera aisément :

$$C_n = C_{n-p}C_p - kC'_{n-p}C'_p = 0;$$

et en appliquant à cette forme d'équation les raisonnements dont nous avons fait usage dans la démonstration précédente, on en conclura le théorème suivant :

SECONDE GÉNÉRALISATION DU THÉORÈME DE DESARGUES (*). *Lorsqu'un double système de deux lieux, l'un d'ordre* n — p, *l'autre d'ordre* p, *est conjugué à un lieu du* n^{me} *ordre, une transversale quelconque rencontre la figure en* 3n *points qui sont en involution.*

Cette expression générale du théorème de Desargues renferme, comme cas particuliers, toutes celles que nous en avons données jusqu'à présent, et elle ne peut manquer d'être d'un grand secours dans l'étude des courbes supérieures : le théorème de Desargues, en effet, exprime, si l'on peut ainsi dire, la loi de construction d'un lieu par le moyen de lieux d'un ordre inférieur, et les autres théorèmes fondamentaux de la géométrie supérieure n'en sont, pour la plupart, que des corollaires.

Il est tellement aisé, en suivant la marche indiquée dans le deuxième chapitre, d'appliquer aux courbes des classes supérieures les théorèmes corrélatifs des précédents, que nous croyons pouvoir laisser au lecteur le soin d'en formuler les énoncés.

CHAPITRE III.

COORDONNÉES BIPOLAIRES.

Nous nous contenterons de montrer par un exemple unique le parti que l'on peut tirer de la méthode précédente en faisant usage d'autres coordonnées.

Nous choisissons de préférence le système bipolaire parce qu'il n'altère pas le degré de l'équation de la courbe.

Il serait tout aussi aisé d'appliquer notre méthode à un autre système quelconque de coordonnées.

(*) Comp. Poncelet, *Traité des propriétés projectives*, 2^{me} éd., t. II, p. 246 ; 1871.

Soient pris comme pôles deux points fixes O et P, et comme coordonnées bipolaires d'un point M les cotangentes des angles φ et ψ que les rayons vecteurs OM et PM font avec l'axe des pôles. Fig. VIII.

Posons $OM = r$, $PM = q$, $OP = p$; et soient x, y les coordonnées du point M par rapport à deux axes rectangulaires d'origine O, OP étant pris pour axe des x.

A l'inspection de la figure on voit immédiatement qu'on a :

$$\frac{x}{p} = \frac{r\cos\varphi}{p} = \frac{\sin\psi\cos\varphi}{\sin(\varphi+\psi)} = \frac{\cot\varphi}{\cot\varphi + \cot\psi},$$

$$\frac{y}{p} = \frac{1}{\cot\varphi + \cot\psi}.$$

Au moyen de ces formules de transformation, on s'assure aisément que l'équation d'une courbe en coordonnées rectilignes ne change pas de degré, lorsqu'on la transforme en coordonnées bipolaires.

Nous allons en déduire l'équation générale de la droite dans ce nouveau système.

Faisons pour abréger $\cot\varphi = \beta$; $\cot\psi = \gamma$, de sorte que β et γ seront les coordonnées courantes d'un point.

Si nous déterminons une droite au moyen des segments x_0 et y_0 qu'elle intercepte sur les deux axes, son équation sera :

$$\frac{x}{x_0} + \frac{y}{y_0} = 1;$$

ou bien, en remplaçant

$$x \text{ par } \frac{p\beta}{\beta+\gamma} \text{ et } y \text{ par } \frac{p}{\beta+\gamma}:$$

$$\frac{p\beta}{x_0} + \frac{p}{y_0} = \beta + \gamma;$$

et enfin, si nous posons :

$$1 - \frac{p}{x_0} = k \text{ et } \frac{p}{y_0} = f$$

l'équation de la droite, en coordonnées bipolaires, deviendra :

$$\gamma + k\beta = f.$$

Il est à remarquer que si k est constant, toutes les droites représentées par cette équation passeront par un même point situé sur l'axe des pôles; que si, au contraire, f l'est, elles passeront par un point situé sur une perpendiculaire élevée en O à cet axe. En outre, on trouve facilement que si Δ représente la distance de l'origine O à la droite, la distance d'un point quelconque à cette même droite sera donnée par

$$\delta = \Delta \cdot \frac{\gamma + k\beta - f}{\beta + \gamma}.$$

Enfin, si l'on voulait passer de coordonnées obliques à des coordonnées bipolaires, en désignant par a la cotangente de l'angle que l'axe des y mené en O fait avec l'axe des x, qui est toujours l'axe des pôles OP, et faisant $a' = \sqrt{1 + a^2}$, on trouverait :

$$\frac{x}{p} = \frac{\beta - a}{\beta + \gamma} \text{ et } \frac{y}{p} = \frac{a'}{\beta + \gamma};$$

de sorte que l'équation

$$\frac{x}{x_0} + \frac{y}{y_0} = 1$$

deviendrait :

$$\frac{p(\beta - a)}{x_0} + \frac{pa'}{y_0} = \beta + \gamma;$$

et si l'on pose :

$$1 - \frac{p}{x_0} = k \text{ et } p\left(\frac{a'}{y_0} - \frac{a}{x_0}\right) = f,$$

l'équation de la droite prendra de nouveau la forme :

$$\gamma + k\beta = f;$$

ici, comme plus haut, si k est constant, toutes les droites représentées par cette équation passeront par un même point de l'axe des pôles.

Indiquons par quelques exemples l'application de la méthode générale de la génération des lignes à ce nouveau système de coordonnées.

Considérons les deux équations

$$(5) \quad \ldots\ldots\ldots \quad \begin{cases} \gamma + k\beta = f, \\ \gamma + k'\beta = f', \end{cases}$$

dans laquelle k et k' sont supposés constants, f et f' variables.

Si, entre ces variables, il existe une relation de la forme

$$f^m f'^n = \mathrm{c^{te}},$$

m et n étant deux nombres entiers, positifs, et premiers entre eux, on pourra éliminer ces variables entre les équations des deux droites, et l'on obtiendra pour lieu de leurs intersections :

$$(\gamma + k\beta)^m (\gamma + k'\beta)^n = \mathrm{c^{te}}.$$

Cette génération du lieu nous conduit donc au théorème suivant, si nous nous rappelons la signification des paramètres dans le cas où les axes primitifs sont rectangulaires :

THÉORÈME I. *Étant donnés deux axes rectangulaires, et deux points fixes autres que l'origine sur l'un de ces axes, si de ces deux points on mène respectivement deux faisceaux de droites telles que le produit des puissances* m^me^ *et* n^me^ *des segments qu'elles interceptent sur le second axe soit constant, le lieu des intersections de ces droites deux à deux sera généralement une courbe de l'ordre* m + n, *qui passera par les pôles, les nombres* m *et* n *étant supposés entiers, positifs et premiers entre eux.*

On obtient une conique, si $m = n = 1$;
» une courbe du troisième ordre, si $m = 2$, $n = 1$;
» » du quatrième ordre, si $m = 3$, $n = 1$, etc.

Si, au lieu de se donner entre f et f' la relation

$$f^m f'^n = \mathrm{c^{te}},$$

on supposait donnée la relation

$$f^m = f'^n\, \mathrm{c^{te}},$$

m et n étant encore entiers, positifs et premiers entre eux, l'élimination de f et f' entre les équations des deux droites conduirait à

$$(\gamma + k\beta)^m = (\gamma + k'\beta)^n \,.\, \mathrm{c^{te}},$$

ce qui permet d'énoncer le théorème :

THÉORÈME II. *Étant donnés deux axes rectangulaires, et deux points fixes autres que l'origine sur l'un de ces axes, si de ces deux points on mène res-*

pectivement deux faisceaux de droites telles que le rapport des puissances m^me^ *et* n^me^ *des segments qu'elles interceptent sur le second axe soit constant, le lieu des intersections de ces droites deux à deux sera généralement une courbe de l'ordre* m, *les membres* m *et* n *étant supposés entiers, positifs et premiers entre eux, et* m $>$ n.

On obtient une droite, si $m = n = 1$;
» une conique, si $m = 2$, $m = 1$;
» une courbe du troisième ordre, si $m = 3$, $n = 1$ ou 2;
» » du quatrième ordre, si $m = 4$, $n = 1$ ou 3, etc.

Enfin, l'on pourrait se donner entre f et f' une relation

$$\Sigma a_1 f^{m_1} f'^{n_1} = c^{te},$$

a_1 étant un facteur constant, m_1 et n_1 des nombres entiers et positifs, et le signe sommatoire s'étendant à un nombre quelconque de termes de même forme, dans lesquels les indices 1 sont successivement changés en 2, 3, etc.

Dans ce cas le lieu des intersections des droites (3) sera évidemment de la forme

$$\Sigma a_1 (\gamma + k\beta)^{m_1} (\gamma + k'\beta)^{n_1} = c^{te},$$

et sera du degré marqué par la plus grande des sommes $m_1 + n_1$, $m_2 + n_2$, etc.

Nous obtenons ainsi un théorème très-général dont l'énoncé, analogue du reste aux deux précédents, est implicitement renfermé dans la dernière équation.

On pourrait appliquer cette méthode en faisant usage de la transformation des coordonnées obliques en coordonnées bipolaires; mais les théorèmes auxquels on arriverait ainsi seraient fort laborieux à énoncer, et ne différeraient pas, au fond, des précédents.

Un autre mode de génération des courbes, au moyen des intersections de deux faisceaux de droites, peut se déduire également bien des formules de transformation des coordonnées, soit obliques, soit rectangulaires, en coordonnées bipolaires.

Toutefois, les coordonnées bipolaires ne présentant aucun avantage sur les coordonnées rectilignes pour ce mode de génération, nous l'indiquerons brièvement au moyen de ces dernières. Nous ne l'avons pas donné au chapitre qui traite de ces coordonnées parce que notre intention était de faire découler d'un principe unique les propriétés fondamentales des courbes de tous les ordres. Quant à ces modes de génération accessoires, leur place se trouve plus naturellement ici ; au reste, c'est la simplicité seule des formules qui nous fait préférer les coordonnées rectilignes : on pourrait employer absolument de la même manière les coordonnées bipolaires.

Considérons deux faisceaux de droites, les premières partant d'un point y'_0 sur l'axe des y, les secondes d'un point x''_0 sur l'axe de x.

Les équations de ces droites pourront se mettre sous la forme :

$$1 - \frac{y}{y'_0} = \frac{x}{x'_0},$$

$$1 - \frac{x}{x''_0} = \frac{y}{y''_0}.$$

Si nous considérons x'_0 et y''_0 comme des variables, reliées entre elles par une certaine équation, l'élimination de ces variables entre cette équation et les deux précédentes nous donnera l'équation du lieu des intersections des deux faisceaux.

Parmi les relations au moyen desquelles l'élimination est la plus simple, figure en première ligne l'une des deux suivantes

$$x'^m_0 y''^n_0 = c^{te} \quad \text{et} \quad x'^m_0 = c \,.\, y''^n_0,$$

m et n étant toujours supposés entiers, positifs et premiers entre eux.

Si la première relation est donnée, on aura pour équation du lieu :

$$c\left(1 - \frac{y}{y'_0}\right)^m \left(1 - \frac{x}{x''_0}\right)^n = x^m y^n.$$

Si c'est, au contraire, la seconde, l'équation du lieu sera :

$$c y^n \left(1 - \frac{y}{y'_0}\right)^m = x^m \left(1 - \frac{x}{x''_0}\right)^n.$$

Dans les deux cas, on peut donc énoncer ce théorème :

Théorème III. *Étant donnés deux points sur deux axes fixes, si l'on mène* *par ces deux points respectivement deux faisceaux de droites qui interceptent, sur l'axe qui ne passe pas par le point de concours, des segments dont les puissances respectives* m^{me} *et* n^{me} *forment un produit ou un rapport constant, le lieu de leurs intersections sera généralement une courbe de l'ordre* m + n.

Ce théorème n'est qu'une extension d'un mode connu de génération des coniques.

Nous n'insisterons pas davantage sur toutes les manières possibles d'engendrer des courbes au moyen des intersections de faisceaux de droites; les quelques exemples que nous en avons donnés montrent le rôle essentiel que jouent, dans la plupart de ces générations, et l'*analogie*, sur laquelle nous avons cru superflu de revenir encore dans l'énoncé des théorèmes, et la méthode des coefficients indéterminés, ou des paramètres variables, pour nous servir d'une expression dont le sens est moins amphibologique. Ces exemples permettront à un lecteur un peu exercé d'appliquer immédiatement ces deux procédés, dont la réunion constitue surtout notre méthode, à une multitude d'autres cas.

A mesure que nous avançons et que nous pénétrons davantage l'esprit de la méthode, nous voyons que la série des théorèmes auxquels elle peut conduire semble inépuisable; c'est une raison pour nous de nous borner aux plus importants; nous terminerons donc ces applications par l'extension du théorème de Newton, et nous indiquerons ensuite quelle est la voie qui nous semble devoir conduire à l'édification complète d'une géométrie des courbes planes au moyen des seuls principes fort simples dont nous avons fait usage jusqu'à présent.

Considérons deux rayons vecteurs bipolaires faisant avec l'axe des pôles
Fig. IX. les angles φ_1 et ψ_1 dont nous désignerons les cotangentes par β_1 et γ_1; et deux autres rayons vecteurs faisant respectivement avec les deux premiers des angles constants A et B, additifs ou soustractifs, dont les cotangentes seront désignées par p et q, et faisant avec l'axe des pôles des angles φ et ψ de cotangentes β et γ; de sorte que

$$\varphi_1 = \varphi + A, \quad \psi_1 = \psi + B;$$

d'où

$$\beta_1 = \frac{\beta p - 1}{\beta + p}, \quad \gamma_1 = \frac{\gamma q - 1}{\gamma + q}.$$

De ces formules résulte immédiatement que, s'il existe entre β_1 et γ_1 une relation du n^{me} degré, entre β et γ il en existera une qui sera généralement, mais au plus, du degré $2n$, et qui pourra se réduire à un degré moindre dans des cas particuliers; d'où le théorème suivant, qui est l'extension de celui de Newton :

Théorème IV. — Extension du théorème de Newton. *Si deux angles de grandeur constante tournent autour de leurs sommets de manière que l'intersection de deux de leurs côtés parcoure une courbe du* n$^{\text{me}}$ *ordre, les trois autres points d'intersection des quatre côtés parcourront, chacun, une courbe qui sera généralement, mais au plus, de l'ordre* 2n.

Cas particulier. Si nous nous arrêtons un instant au théorème propre de Newton, qui est relatif au cas où l'intersection des deux côtés parcourt une droite

$$\gamma_1 + k\beta_1 = f,$$

nous verrons aisément que le terme en $\beta\gamma$ de l'équation de la conique a pour facteur $q - kp - f$, de sorte que si ce terme est nul, c'est-à-dire si les angles A et B sont tels que les rayons vecteurs d'un point du lieu cherché se coupent sur la droite donnée, ce lieu se réduira à une droite, comme l'a fait remarquer Newton.

Nouveaux cas particuliers. Mais l'analyse signale d'autres cas particuliers où le lieu se réduira à une droite et à l'axe des pôles; ce sera quand le terme constant de son équation, qui est $kp + q$, ainsi que le facteur de β, qui est $fq - kpq + 1$, ou celui de γ, qui est $fp + k - pq$, viendront à disparaître ensemble.

Cet exemple fort simple montre combien l'analyse pénètre plus aisément que les autres méthodes jusqu'au cœur de la question; les cas particuliers suivants nous en donneront encore d'autres exemples.

Supposons que la relation donnée entre β_1 et γ_1 soit

$$\beta_1\gamma_1 + m\beta_1 + n\gamma_1 = C,$$

ce qui est l'équation d'une conique passant par les pôles; entre β et γ nous aurons :

$$\left(\frac{\beta p - 1}{\beta + p}\right)\left(\frac{\gamma q - 1}{\gamma + q}\right) + \text{etc.} = C;$$

d'où l'énoncé suivant, donné par Chasles (*), Steiner (**) et Brasseur (***) :

Théorème V. *Si deux angles de grandeur constante tournent autour de leurs sommets de manière que le point d'intersection de deux de leurs côtés parcoure une section conique passant par leurs sommets, les trois autres points d'intersection des côtés de ces angles décriront chacun en particulier, une section conique passant aussi par les deux sommets.*

Notre démonstration semble au premier abord n'être relative qu'au point d'intersection des seconds côtés des deux angles; on l'étend aisément aux deux autres points en faisant A ou B égal à zéro, d'où p ou $q = \infty$.

Cas particuliers. Ici encore l'analyse signale un cas particulier remarquable, celui dans lequel la constante C est égale à pq; alors le lieu des intersections des seconds côtés des angles est une droite. Le lieu des deux autres points d'intersection sera aussi une droite, pour le premier de ces points déterminé par

$$A = 0, \quad \text{si} \quad C = q;$$

pour le second déterminé par

$$B = 0, \quad \text{si} \quad C = p.$$

Ces cas particuliers constituent la réciproque du théorème de Newton.

Supposons maintenant que les angles φ_1 et ψ_1 forment une somme ou une différence constante; nous pourrons donc poser

$$\cot(\varphi \pm \psi) = C$$

ou

$$\beta\gamma \mp 1 = C(\beta \pm \gamma),$$

ce qui est l'équation d'une conique. Donc :

Théorème VI. *Si deux angles de grandeur constante tournent autour de*

(*) *Aperçu historique*, p. 337.

(**) *Systematische Entwickelung geometrischer Gestalten*, p. 299, art. 16.

(***) *Sur une nouvelle méthode d'application de la géométrie descriptive à la recherche des propriétés de l'étendue*, art. 250; Mémoires de l'Académie royale de Belgique, t. XXIX.

leurs sommets de manière que deux de leurs côtés fassent avec la droite qui unit leurs sommets des angles dont la somme ou la différence est constante, les trois autres points d'intersection des côtés de ces angles décriront, chacun en particulier, une section conique.

La démonstration qui précède n'est relative qu'au point d'intersection des seconds côtés des deux angles; on l'étendra aux deux autres points, comme on l'a fait dans le théorème V, en partant de

$$\cot(\varphi_1 \pm \psi_1) = \frac{\beta_1\gamma_1 \mp 1}{\beta_1 \pm \gamma_1} = C,$$

et en substituant à β_1 et γ_1 leurs valeurs

$$\beta_1 = \cot(\varphi + A) = \frac{\beta p - 1}{\beta + p}; \quad \gamma_1 = \cot(\varphi + B) = \frac{\gamma q - 1}{\gamma + q},$$

et faisant enfin p ou $q = \infty$.

Ce théorème a été donné sous une autre forme par M. Chasles (*) pour le premier cas, celui d'une somme constante; pour le cas d'une somme ou d'une différence constante par Steiner (**); l'analyse étend intuitivement le théorème, dans toute sa généralité, aux deux cas; elle signale aussi immédiatement les cas particuliers qui peuvent se présenter, et qui sont trop simples pour que nous nous y arrêtions. Enfin elle permet de donner à tout théorème une forme tellement générale qu'aucune autre méthode, nous semble-t-il, ne pourrait y atteindre.

Ainsi le théorème V est susceptible de la généralisation suivante :

THÉORÈME VII. — EXTENSION DU THÉORÈME V. *Si deux angles de grandeur constante tournent autour de leurs sommets de manière que le point d'intersection de deux de leurs côtés parcoure une courbe du* n^me^ *ordre passant par leurs sommets, les trois autres points d'intersection des côtés de ces angles décriront, chacun en particulier, une courbe du même ordre passant aussi par les deux sommets.*

En effet, en prenant pour pôles les deux sommets fixes, nous aurons pour

(*) *Traité des sections coniques*, art. 91.
(**) Lieu cité, p. 300, art. 18.

une courbe du n^{me} ordre passant par les pôles, une équation que nous pourrons mettre sous la forme :

$$\Sigma a' \beta_1^{m'} \gamma_1^{n'} = C,$$

où le signe sommatoire s'étend à un nombre quelconque de termes de même forme dans lesquels la somme des exposants ne dépasse pas n ; et il est clair qu'en remplaçant

$$\beta_1 \text{ par } \frac{\beta p - 1}{\beta + p}, \quad \gamma_1 \text{ par } \frac{\gamma q - 1}{\gamma + q},$$

la nouvelle équation sera au plus du n^{me} degré.

Le théorème (VI) peut de même se généraliser de la manière suivante :

Théorème VIII. — Extension du théorème VI. *Si deux angles de grandeur constante tournent autour de leurs sommets de manière que deux de leurs côtés fassent avec la droite qui unit leurs sommets des angles* φ_1 *et* ψ_1 *dont les multiples* $\mathrm{m}\varphi_1$ *et* $\mathrm{n}\psi_1$ *forment une somme algébrique constante, les trois autres points d'intersection de ces angles décriront, chacun en particulier, une courbe qui sera généralement, mais au plus, du* $(\mathrm{m}+\mathrm{n})^{\mathrm{me}}$ *ordre,* m *et* n *étant entiers, positifs et premiers entre eux.*

En effet, puisqu'on a par hypothèse

$$m\varphi \pm n\psi = C',$$

l'on en tirera

$$\cot m\varphi = \frac{a \cot n\psi \mp 1}{a \pm \cot n\psi},$$

pour l'équation du lieu cherché, a désignant la cotangente de l'angle $C' = C - mA \mp nB$. Or si l'on développe $\cot m\varphi$ et $\cot n\psi$ suivant les puissances de $\cot \varphi$ et $\cot \psi$, il est clair que l'équation sera du degré $m + n$, *c. q. f. d.*

Cas particulier. On voit aisément qu'elle s'abaissera au m^{me} degré (m étant supposé plus grand que n) si $a = \infty$ c'est-à-dire si

$$mA \pm nB = C = m\varphi_1 \pm n\psi_1,$$

ou si la somme algébrique des multiples de φ_1 et ψ_1 est égale à celle des mêmes multiples des angles constants A et B.

Nous proposerons encore au lecteur de démontrer et d'étendre le théorème suivant qui est une autre forme plus générale du théorème de Newton.

THÉORÈME IX. *Si deux angles d'un triangle tournent autour de leurs sommets de manière que deux de leurs côtés se coupent sur une droite passant par le troisième sommet, les droites qui unissent deux à deux les points d'intersection des côtés de ces angles avec les côtés opposés du triangle se couperont sur une conique.*

Ainsi soient un triangle ABC et les deux angles $m_1Am_2 = A$; $m_1Bm_2 = B$ tournant autour de A et B de manière que Am_1 et Bn_1 se coupent sur la droite fixe Cp; si l'on unit les points m_1, n_1 et m_2, n_2, ou m_1, n_2 et m_2, n_1, par des droites, les points d'intersection des deux premières et des deux secondes décriront chacun une conique. Fig. X.

Enfin, si l'on veut étendre le théorème général déduit par M. Chasles (*) de sa propriété anharmonique des points d'une conique, le système des coordonnées bipolaires conduira aisément à l'énoncé suivant :

THÉORÈME X. *Étant donnés dans un plan deux transversales et deux points fixes quelconques sur chacune d'elles; si autour de deux pôles fixes on fait tourner deux droites qui déterminent sur les deux transversales respectivement deux segments* s_1 *et* t_1, s_2 *et* t_2 *tels que*

$$\left(\frac{s_1}{t_1}\right)^m + \lambda\left(\frac{s_2}{t_2}\right)^n = \mu,$$

λ *et* μ *étant deux constantes,* m *et* n *deux nombres entiers et positifs; le point de concours des deux droites mobiles engendrera une courbe de l'ordre* $(m + n)$ *qui passera par les deux pôles.*

Nous n'avons pas fait usage, dans ce système de coordonnées, de la méthode générale que nous avons employée dans celui des coordonnées rectilignes, parce qu'elle ne nous aurait pas conduit à des théorèmes essentiellement différents de ceux que nous avons démontrés. La forme seule de l'expression analytique eût changé, et surtout celle de l'involution de $3n$ points, qui apparaîtrait, dans ce nouveau système de coordonnées, comme une relation angulaire, au lieu d'être une relation de segments. Peut-être cette

(*) *Aperçu historique*, p. 339.

autre manière de l'exprimer conduirait-elle à d'autres conséquences; mais en nous livrant à cette recherche, nous nous écarterions du but de ce travail qui est, non pas la recherche de propriétés nouvelles, mais l'édification d'une méthode destinée à faire découvrir ces propriétés.

La même raison nous engage à supprimer complétement les énoncés et les démonstrations des théorèmes corrélatifs de ceux auxquels nous a conduit l'emploi des coordonnées bipolaires. On a vu, au chapitre des coordonnées tangentielles, la méthode générale qui permet de passer d'un lieu géométrique du n^{me} ordre, défini par un système de points, à un lieu de la n^{me} classe, défini par un système de tangentes.

Cette méthode appliquée au système de coordonnées bipolaires conduirait immédiatement aux théorèmes corrélatifs des précédents.

Avant de terminer l'application de notre méthode à l'étude des courbes planes, nous en indiquerons encore une fois les caractères généraux, qui pourront être saisis plus aisément après les divers exemples que nous en avons donnés.

Une ligne courbe peut être considérée, soit comme le lieu géométrique d'un système de points, soit comme l'enveloppe d'un système de tangentes.

Occupons-nous d'abord de la première génération.

Pour qu'un point engendre une ligne, il faut qu'il varie de position suivant une loi déterminée, et par suite que les éléments qui déterminent la position de ce point soient variables, et qu'il existe entre eux une relation telle qu'en donnant à l'un d'entre eux une valeur arbitraire, les autres soient complétement déterminés.

De ce principe résulte la classification des différents modes de génération d'une courbe au moyen d'un point mobile. Ce point peut en effet :

1° Être déterminé de position par différents éléments;

2° Varier de position en vertu de différentes lois ou relations entre ces éléments.

La combinaison de tous ces modes constitutifs de génération entre eux conduirait évidemment à toutes les courbes possibles; et l'étude de chaque système de courbes sera le plus simple quand on aura trouvé l'expression la plus simple des deux modes constitutifs de sa génération.

Il est clair que chacun des modes de détermination d'un point pourrait se réduire à l'un quelconque d'entre eux; mais si l'on faisait cette réduction, la loi simple qui existait entre les éléments du premier mode affecterait une forme généralement plus compliquée, parce qu'on devrait l'exprimer au moyen des éléments du dernier; c'est ainsi que la loi simple qui relie les coordonnées polaires d'un point d'une spirale deviendrait fort compliquée si l'on exprimait ces coordonnées en fonction de coordonnées rectilignes par exemple. C'est pour cette raison que, loin de vouloir réduire à un seul les modes de détermination du point, l'on doit, au contraire, étudier la génération des courbes dans chacun de ces modes; et si la géométrie analytique a paru, à quelques esprits distingués, moins riche que la géométrie synthétique, c'est qu'ils ont cru, à tort, qu'elle était plus bornée de sa nature dans les modes de détermination du point (*).

Nous devons donc, pour établir dans un système ordonné la génération des courbes planes, commencer par rechercher quels sont tous les modes possibles de détermination du point dans le plan.

Or un point n'est déterminé de position que par rapport à d'autres points

(*) Les lignes qui suivent, extraites du mémoire de Brasseur, tout en confirmant notre opinion, témoignent de la profondeur de vues de ce géomètre éminent que nous sommes heureux d'avoir eu pour maître, et dont nous signalons avec admiration et reconnaissance les travaux à l'attention des amis de la géométrie.

« Les systèmes de lignes mentionnés dans les théorèmes précédents, font en géométrie synthétique, le même office que les systèmes de coordonnées rectilignes en géométrie analytique; et l'on voit que la géométrie synthétique est beaucoup plus riche en systèmes de coordonnées que ne l'est la géométrie analytique.

» En outre, la géométrie synthétique sait tirer un plus grand parti d'un même système de lignes considérées comme ordonnées. C'est ainsi qu'en n'ayant recours qu'à des systèmes de lignes droites, pour définir par des relations descriptives les courbes du second degré, on pourra le faire : 1° par l'intersection de deux systèmes de droites respectivement parallèles à deux droites fixes; 2° par l'intersection de deux systèmes de droites qui concourent respectivement en deux points fixes; 3° par l'intersection d'un système de droites parallèles avec un système de droites qui concourent en un même point; 4° par un seul système de droites tangentes à une même courbe du second degré. A cela nous ajouterons que parmi les divers systèmes de lignes qui, par leurs intersections, produisent un même lieu géométrique, on pourra remarquer que plus le degré de ces lignes (ordonnées) est élevé, et plus est simple l'énoncé des conditions auxquelles doivent satisfaire ces deux systèmes de lignes pour produire ce lieu géométrique. » Brasseur, l. cit., art. 38.

supposés fixes. Mais cette détermination nécessite l'introduction d'un élément autre que le point : c'est la distance, qui, avec l'idée de la droite, donne en même temps celle de la direction.

Le point et la droite, tels sont donc les deux éléments primitifs de la génération des courbes planes.

La position du point pourra se déterminer, au moyen de conventions auxiliaires, par ses distances, soit à deux points, soit à deux droites fixes, soit à un point et à une droite fixes; et en se donnant, entre ces deux distances, certaines relations, on déterminera déjà un nombre illimité de lignes planes.

Ces lignes, prises deux à deux, formeront de nouveaux systèmes au moyen desquels on pourra déterminer la position d'un point; ainsi, pour ne prendre que quelques exemples, on pourra déterminer un point;

1° Par une droite sur laquelle il est situé, et par sa distance à un point de cette droite; et cette droite elle-même, ainsi que l'origine des distances, pourront être déterminées de différentes manières;

2° Par la distance de ce point à un autre point donné, et par l'angle que la direction de cette distance fait avec une direction donnée, le point et la direction donnés pouvant être déterminés de différentes manières.

3° Par l'intersection de deux droites données, ces deux droites pouvant être également déterminées de différentes manières;

4° Par l'intersection de deux quelconques des lieux déterminés précédemment.

En faisant varier suivant une loi déterminée les deux éléments qui fixent la position d'un point, on obtiendra de nouveaux lieux géométriques; et il va de soi que l'on pourrait procéder indéfiniment de cette manière.

La loi qui relie entre eux les deux éléments de la détermination du point est la définition même du lieu géométrique engendré par ce point, et l'expression analytique de cette loi est l'équation du lieu. Les propriétés de celui-ci résulteront de l'étude de son équation au moyen des propriétés précédemment connues des éléments de détermination du point.

Ces propriétés sont de deux natures, les unes descriptives, les autres métriques.

Les premières peuvent toujours se déduire de l'équation même, quels que soient les éléments de détermination qu'on emploie; quant aux secondes, il importe, pour qu'on puisse les découvrir aisément, que l'expression analytique de ces éléments renferme déjà en elle-même une relation métrique. C'est ainsi que, dans le système des coordonnées rectilignes, où les deux éléments sont des droites, on arrive aisément aux théorèmes de Pappus et de Desargues, à cause des relations métriques qu'il est aisé de découvrir dans l'équation même de la droite.

Si l'on réalisait ce programme, on voit que l'on arriverait à une classification systématique de toutes les courbes engendrées par le mouvement d'un point; mais ce programme est nécessairement illimité, et la géométrie supérieure ne peut donc pas avoir pour objet de le réaliser, mais d'indiquer les méthodes au moyen desquelles on peut arriver aux propriétés de quelque courbe donnée que ce soit.

C'est aussi là l'objet que nous avons eu en vue en traitant les exemples qui précèdent, et la méthode à suivre dans l'étude de la courbe donnée géométriquement peut se résumer dans cette règle :

On commence par chercher, dans la définition même de la courbe, quels sont les éléments qui déterminent de la manière la plus simple la position d'un de ses points, et qui ont en même temps entre eux la relation la plus simple en vertu de la définition donnée; on recherchera quelles sont les relations métriques qui sont implicitement contenues dans l'expression analytique de ces éléments; et l'étude de l'équation de la courbe au moyen des équations de ces éléments et des propriétés descriptives et métriques de ceux-ci, conduira aux propriétés descriptives et métriques de la courbe.

Il nous resterait à développer également la génération d'une courbe considérée comme l'enveloppe d'une droite mobile; mais, comme nous l'avons déjà fait observer, et comme il ressort du reste à l'évidence du principe de dualité, à chaque système d'éléments qui déterminent la position d'un point, correspond un système d'éléments tangentiels; et par suite à toute propriété, soit descriptive, soit métrique, d'une courbe engendrée par le mouvement d'un point, répond une propriété corrélative d'une courbe engendrée par le mouvement d'une droite.

Nous avons, dans le livre qui précède, étendu, au moyen d'une analyse fort simple, les théorèmes fondamentaux de la haute géométrie aux courbes supérieures planes, pour lesquelles la plupart de ces théorèmes n'avaient pas encore été découverts, malgré la profondeur et la pénétration des géomètres qui, depuis le commencement de ce siècle, ont fait faire à la science plus de progrès qu'elle n'en avait réalisés depuis la grande époque de Descartes, Pascal, Desargues et Newton. Il nous a paru superflu de revenir sur les théorèmes qui, comme celui de Carnot et celui de Cotes, s'appliquent de la manière la plus générale à toutes les courbes algébriques planes.

La méthode que nous avons suivie nous a conduit également à d'autres propriétés fort intéressantes et très-générales, que nous publierons prochainement, mais que nous n'avons pas encore classées de manière à les faire rentrer dans le cadre de ce travail. C'est pourquoi nous préférons borner ici notre étude des courbes planes.

Dans le livre suivant, nous étendrons aux surfaces algébriques, pour autant que cette extension leur soit applicable, les théorèmes de Pappus et de Desargues, ainsi que leurs corrélatifs, les théorèmes de Pascal et de Brianchon, et enfin le théorème de Newton.

LIVRE II.

—

GÉOMÉTRIE SUPÉRIEURE DANS L'ESPACE.

La méthode que nous venons de développer dans l'étude des courbes planes peut être appliquée sans difficulté à l'étude des surfaces, et elle nous fera découvrir, pour les surfaces du second degré, tous les théorèmes analogues à ceux de Pappus et de Desargues, à leurs corrélatifs, et à ceux de Pascal et de Brianchon; nous donnerons en outre quelques corollaires principaux de ces théorèmes.

Ces mêmes théorèmes pourront s'étendre, comme nous le verrons, d'abord aux surfaces du troisième ordre et de la troisième classe, et ensuite, mais dans des cas particuliers seulement, aux surfaces d'un ordre et d'une classe supérieurs, jusqu'au cinquième inclusivement.

Deux motifs nous engagent à suivre ici la voie inverse de celle que nous avons adoptée dans l'étude des courbes planes, c'est-à-dire à remonter du particulier au général.

Le premier de ces motifs, c'est que les propriétés, précédemment énumérées, des surfaces du second degré, par la théorie desquelles nous commencerons, ne sont pas connues, et demandent, pour cette raison, à être traitées en détail, tandis que pour les coniques toutes ces propriétés étaient connues, à une légère exception près, et qu'il était inutile que nous les développions.

Le second motif tient à ce que les propriétés des surfaces du second degré ne sont pas susceptibles d'être étendues, d'une manière générale, aux surfaces d'un degré supérieur, tandis que celles des coniques pouvaient être regardées comme des cas particuliers de propriétés appartenant d'une manière générale à toutes les courbes qui ne dépassent pas le cinquième ordre ou la cinquième classe.

Nous représenterons par $S_n = 0$ l'équation complète d'une surface du n^{me} ordre, et par $P_n = 0$ l'équation d'un plan

$$A_n x + B_n y + C_n z - E_n = 0,$$

les coefficients A_n, etc., étant généralement de la forme $a_n + a'_n \sqrt{-1}$, etc.

Nous appellerons *polyèdre de* n *faces inscrit à une surface du* n^me^ *ordre* un polyèdre dont chaque face passe par n génératrices rectilignes (réelles ou imaginaires) de la surface; et *système de deux polyèdres conjugués de* n, n + 1, n + 2.... *faces, inscrits à une surface du* n^me^ *ordre,* deux polyèdres de n, $n+1$, $n+2$.... faces, tels que chaque face de l'un passe par n génératrices (réelles ou imaginaires) appartenant à n faces distinctes de l'autre polyèdre.

Ainsi un dièdre inscrit à une surface du second degré est un dièdre dont chaque face passe par deux génératrices rectilignes (réelles ou imaginaires) de la surface; et un système de deux dièdres, trièdres, ... conjugués inscrits à une surface du second degré, est un système de deux dièdres, trièdres, ... tels que chaque face de l'un passe par deux génératrices appartenant à deux faces distinctes de l'autre.

Les faces *opposées*, dans deux polyèdres conjugués de n ou $n+1$ faces inscrits à une surface du n^{me} ordre, seront celles qui ne passeront point par une même génératrice.

Il résulte de la définition du polyèdre inscrit que son intersection avec la surface forme un polygone gauche dont les côtés sont des génératrices rectilignes (réelles ou imaginaires), et que nous appelons *polygone inscrit* à la surface.

Nous insistons déjà ici même sur la puissance de cette considération des plans et des droites imaginaires, puissance qui se manifeste bien plus encore dans la théorie des surfaces que dans celle des courbes.

Afin de ne pas avoir à revenir sur ce point dans l'énoncé de chaque théorème, nous conviendrons dès à présent que chaque fois qu'il sera question d'un point, d'une droite, ou d'un plan, nous sous-entendrons qu'ils peuvent être réels ou imaginaires; et les quelques considérations générales qui suivent ne seront peut-être pas sans utilité dans l'application des théorèmes.

Tout plan imaginaire renferme une droite réelle; car l'équation

$$P + Q\sqrt{-1} = 0,$$

où P et Q sont deux fonctions linéaires et réelles de x, y, z est satisfaite par les équations simultanées $P = 0$, $Q = 0$, qui représentent une droite réelle.

Une droite imaginaire peut provenir, soit de l'intersection de deux plans imaginaires, soit de celle d'un plan réel par un plan imaginaire.

Dans le premier cas, elle n'a généralement aucun point réel, dans le second elle en a toujours un.

Car soit la droite déterminée par l'intersection des deux plans

$$P + Q\sqrt{-1} = 0 \quad \text{et} \quad P' + Q'\sqrt{-1} = 0,$$

cette droite n'aura de point réel que si les quatre équations

$$P = 0, \ Q = 0, \quad P' = 0, \ Q' = 0$$

peuvent être satisfaites par un même système de valeurs de x, y, z; dans ce cas il est clair que les équations des deux plans peuvent se ramener à la forme

$$P + Q\sqrt{-1} = 0 \quad \text{et} \quad P'' = 0,$$

Deux plans imaginaires conjugués ont une intersection réelle. Car ces deux plans, ayant des équations de la forme

$$P + Q\sqrt{-1} = 0 \quad \text{et} \quad P - Q\sqrt{-1}$$

se coupent évidemment suivant la droite réelle

$$P = 0, \quad Q = 0.$$

Il en est évidemment de même de deux plans dont les équations sont de la forme

$$P + Q\sqrt{-1} = 0 \quad \text{et} \quad a.P + b.Q\sqrt{-1} = 0.$$

De là résulte que les deux droites imaginaires, provenant de l'intersection de deux plans imaginaires conjugués ou des deux plans précédents par un plan réel, se coupent en un point réel; ou bien encore que le plan qui passe par deux droites imaginaires qui se coupent en un point réel est un plan réel. Au contraire, les deux droites imaginaires, provenant de l'intersection de deux plans réels par un plan imaginaire, se coupent en un point imaginaire.

SURFACES DU SECOND DEGRÉ.

CHAPITRE I.

COORDONNÉES RECTILIGNES PONCTUELLES.

Lemme fondamental. *Toute surface du second degré peut se représenter par une équation de la forme*

$$P_0P_2 = kP_1P_3, \qquad (1)$$

k et les paramètres de P_0 étant donnés, ceux de P_1, P_2, P_3 étant à déterminer.

En effet, l'équation complète du second degré renferme neuf paramètres; on a donc neuf équations pour déterminer les neuf paramètres inconnus.

La constante k pouvant recevoir une infinité de valeurs arbitraires, on voit qu'à tout plan donné P_0 correspondent une infinité de systèmes de plans P_2, P_1, P_3 tels que l'équation de la surface puisse se mettre sous la forme (1).

Cette équation est satisfaite par les valeurs tirées de l'équation $P_0 = 0$ ou $P_2 = 0$ combinée avec l'une des équations $P_1 = 0$ ou $P_3 = 0$; il en résulte que les quatre droites, intersections des deux plans P_0 et P_1; P_1 et P_3; P_2 et
Fig. XI. P_1; P_2 et P_3, que nous désignerons respectivement par d_0, d_3, d_1, d_2, sont

des génératrices de la surface; de plus que les droites d_0 et d_3, ainsi que d_1 et d_2, situées, les deux premières dans le plan P_0, les deux secondes dans le plan P_2, se coupent nécessairement en un point de la surface; enfin qu'il en est de même des droites d_0 et d_1 situées dans le plan P_1, d_2 et d_3 situées dans le plan P_3.

Nous avons donc affaire à *un système de deux dièdres conjugués inscrits* ou à un *quadrilatère gauche inscrit* à une surface du second degré, et formé de deux couples de génératrices appartenant à chacun de ses deux modes de génération; appelons 0, 1, 2, 3, les sommets de ce quadrilatère, respectivement opposés aux faces P_0, P_1, P_2, P_3; et δ_0, δ_1, δ_2, δ_3 les distances d'un point quelconque de la surface à ces quatre plans; en nous rappelant que la distance d'un point à un plan $P_0 = 0$ est proportionnelle à P_0, nous pourrons conclure de l'équation (1) :

I. Théorème analogue a celui de Pappus. *Dans un système de deux dièdres conjugués inscrits à une surface du second degré, les produits des distances d'un point quelconque de la surface aux deux couples de faces opposées de ces dièdres sont analogiques;* ou bien :

Quand un quadrilatère gauche est inscrit à une surface du second degré, les produits des distances d'un point quelconque de la surface aux deux couples de faces opposées du quadrilatère sont analogiques

Il est à remarquer que chaque face, passant par deux génératrices, constitue un plan tangent à la surface au point d'intersection de ces génératrices.

Ce théorème peut naturellement donner lieu à des corollaires nombreux relatifs aux polygones inscrits d'un nombre de côtés plus considérable.

Considérons, par exemple, un système de deux trièdres conjugués inscrits ou un hexagone gauche inscrit de côtés d_0, d_1, d_2, d_3, d_4, d_5; et de sommets 0, 1, 2, 3, 4, 5, et 0′, 1′, 2′; cet hexagone détermine en chacun de ses sommets un plan tangent; nous appellerons les plans tangents aux points 0, 2, 4 faces paires, les plans tangents aux points 1, 2, 3 faces impaires; enfin les plans tangents aux points 0′, 1′, 2′ faces diagonales; et nous désignerons les distances d'un point quelconque de la surface à ces neuf plans, pris dans l'ordre précédent, par Fig. XII.

$$\delta_0,\ \delta_2,\ \delta_4;\quad \delta_1,\ \delta_3,\ \delta_5;\quad \delta'_0,\ \delta'_1,\ \delta'_2.$$

Décomposons l'hexagone en deux quadrilatères

$d_0d_1d_3d_4$ et $d_0d_1d_2d_5$, de sommets 1, 4, 0', 1' et 0212';
puis en $d_2d_3d_1d_4$ et $d_2d_3d_0d_5$, de sommets 2, 4, 3, 1' et 0, 3, 0', 2';
et enfin en $d_4d_5d_0d_3$ et $d_4d_5d_2d_1$, de sommets 0, 4, 5, 0' et 2, 5, 1', 2';

et appliquons à ces quadrilatères le théorème de Pappus, nous aurons

$$\delta_0\delta_2 \div \delta_1\delta_2'; \quad \delta_1\delta_4 \div \delta_0'\delta_1';$$
$$\delta_2\delta_4 \div \delta_3\delta_1'; \quad \delta_0\delta_5 \div \delta_0'\delta_2';$$
$$\delta_0\delta_4 \div \delta_5\delta_0'; \quad \delta_2\delta_5 \div \delta_1'\delta_2'.$$

En multipliant ces analogies deux à deux, nous aurons :

$$\delta_0\delta_2\delta_4 \div \delta_0'\delta_1'\delta_2';$$

en multipliant les trois secondes entre elles :

$$\delta_0\delta_1\delta_2\delta_3\delta_4\delta_5 \div \delta_0'^2\delta_1'^2\delta_2'^2;$$

et de là nous conclurons :

$$\delta_0\delta_2\delta_4 \div \delta_1\delta_3\delta_5 \div \delta_0'\delta_1'\delta_2';$$

ce qui peut s'énoncer :

Corollaire. *Dans un système de deux trièdres conjugués inscrits à une surface du second degré, les produits des distances d'un point quelconque de la surface aux faces paires, aux faces impaires et aux faces diagonales sont analogiques;* ou bien :

Dans un hexagone formé de six génératrices appartenant trois à trois aux deux modes de génération d'une surface du second degré, les produits des distances d'un point quelconque de la surface aux faces paires, aux faces impaires et aux faces diagonales de cet hexagone sont analogiques.

Il serait facile d'étendre cette propriété à un polygone inscrit d'un nombre pair quelconque de côtés, appartenant par moitié à chacun des deux modes de génération; c'est ainsi, par exemple, que pour l'octogone on aurait

$$\delta_0\delta_2\delta_4\delta_6 \div \delta_1\delta_3\delta_5\delta_7 \div \delta_0'\delta_2'\delta_4'\delta_6' \div \delta_1'\delta_3'\delta_5'\delta_7'.$$

Il est inutile que nous nous étendions sur la démonstration qui est identique à celle que nous avons donnée d'une propriété analogue dans un travail antérieur sur les coniques (*).

On passerait d'un polygone d'un nombre pair, à un polygone d'un nombre impair de côtés, en faisant coïncider deux génératrices d'un même mode appartenant au premier de ces polygones.

Nous ne nous arrêterons pas davantage au théorème de Pappus, et nous allons montrer que la même forme générale de l'équation des surfaces du second degré, qui nous y a conduit, nous donne immédiatement le théorème de Desargues.

Cette forme est :

$$P_0P_2 = kP_1P_3. \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (1)$$

Supposons que l'équation de chacun des plans P soit de la forme

$$P = z + ax + by - c = 0.$$

Si par un point x, y, z de la surface nous menons un plan parallèle à P, et que nous appelions γ le segment que ce plan intercepte sur l'axe des z, son équation sera

$$z + ax + by - \gamma = 0;$$

de sorte que l'équation du plan P pourra s'écrire :

$$\gamma - c = 0;$$

et celle de la surface :

$$(\gamma_0 - c_0)(\gamma_2 - c_2) = k(\gamma_1 - c_1)(\gamma_3 - c_3),$$

$\gamma_0 \ldots$ étant ce que devient γ quand on affecte les paramètres a et b des indices $0 \ldots$.

Ici, comme plus haut, nous avons affaire à un système de deux dièdres conjugués inscrits, ou à un quadrilatère inscrit dont les faces opposées sont P_0 et P_2, P_1 et P_3.

Coupons actuellement les quatre faces par une transversale qui les rencontre en O et O_2, O_1 et O_3, et qui rencontre la surface en M et M'. Fig. XIII.

Supposons d'abord que les quatre plans que nous avons menés parallèlement à ces faces passent par M; la portion OM de la transversale, qui est

(*) *Bulletins de l'Académie*, 2me série, t. XXVIII, n° 7.

interceptée entre deux plans parallèles, formera avec un segment MN, parallèle à l'axe des z, et intercepté entre ces mêmes plans, un triangle OMN dont le côté MN est égal à $\gamma_0 - c_0$; nous aurons donc

$$\gamma_0 - c_0 = \mathrm{OM}\,\frac{\sin \mathrm{NOM}}{\sin \mathrm{ONM}}.$$

Supposons en second lieu que les quatre plans menés parallèlement aux faces du quadrilatère passent par M′; nous aurons de même :

$$\gamma'_0 - c_0 = \mathrm{OM'}\,\frac{\sin \mathrm{N'OM'}}{\sin \mathrm{ON'M'}}.$$

Et comme les angles NOM et N′OM′; ONM et ON′M′ ont leurs côtés parallèles, ces deux égalités divisées membre à membre donneront :

$$\frac{\gamma_0 - c_0}{\gamma'_0 - c_0} = \frac{\mathrm{OM}}{\mathrm{OM'}}.$$

De même nous obtiendrons :

$$\frac{\gamma_1 - c_1}{\gamma'_1 - c_1} = \frac{\mathrm{O_1M}}{\mathrm{O_1M'}};$$

$$\frac{\gamma_2 - c_2}{\gamma'_2 - c_2} = \frac{\mathrm{O_2M}}{\mathrm{O_2M'}};$$

et

$$\frac{\gamma_3 - c_3}{\gamma'_3 - c_3} = \frac{\mathrm{O_3M}}{\mathrm{O_3M'}};$$

d'où enfin, en vertu de l'équation de la surface

$$\frac{\mathrm{OM}\,.\,\mathrm{O_2M}}{\mathrm{OM'}\,.\,\mathrm{O_2M'}} = \frac{\mathrm{O_1M}\,.\,\mathrm{O_3M}}{\mathrm{O_1M'}\,.\,\mathrm{O_3M'}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Cette équation exprime le théorème suivant, qui est l'analogue de celui de Desargues pour les coniques :

II. Théorème analogue à celui de Desargues. *Dans un système de deux dièdres conjugués inscrits à une surface du second degré, une transversale quelconque rencontre les deux couples de faces opposées, et la surface, en trois couples de points qui sont en involution;* ou bien :

Dans un quadrilatère gauche inscrit à une surface du second degré, une *transversale quelconque rencontre les deux couples de faces opposées et la surface en trois couples de points qui sont en involution.*

L'équation (2) ne différant en rien de celle qui exprime l'involution dans les coniques, peut naturellement se mettre sous les diverses formes qu'on a données à celle-ci, et qui conviennent plus spécialement à la démonstration de certains corollaires. Parmi ceux-ci, nous ne citerons que le suivant qui nous conduira au théorème analogue à celui de Pascal.

Corollaire. *Lorsque deux systèmes de dièdres conjugués inscrits à une surface du second degré sont situés de telle manière que les intersections de trois de leurs faces deux à deux s'appuient sur une même droite, l'intersection des quatrièmes faces s'appuiera sur cette droite; si les trois premières intersections sont situées dans un même plan, la quatrième y sera également située;* ou bien :

Lorsque deux quadrilatères gauches inscrits à une surface du second degré sont situés de telle manière que les intersections de trois de leurs faces deux à deux s'appuient sur une même droite, l'intersection des quatrièmes faces s'appuiera sur cette droite; si les trois premières intersections sont situées dans un même plan, la quatrième y sera également située.

Commençons par démontrer la première partie de ce corollaire.

Si nous considérons la droite, sur laquelle s'appuient les intersections des trois couples de faces, comme une transversale qui rencontre les faces du premier quadrilatère en O, O_1, O_2, O_3; celle du second en O, O_1, O_2, O'_3, et la surface en M et M'; en appliquant le théorème de Desargues, nous aurons :

$$\frac{OM\,.\,O_2M}{OM'\,.\,O_2M'}=\frac{O_1M\,.\,O_3M}{O_1M'\,.\,O_3M'}=\frac{O_1M\,.\,O'_3M}{O_1M'\,.\,O'_3M'};$$

par suite :

$$\frac{O_3M}{O_3M'}=\frac{O'_3M}{O'_3M'};$$

d'où résulte que O_3 et O'_3 coïncident, *c. q. f. d.*

La seconde partie se démontrera au moyen de deux transversales situées dans le plan donné.

Les deux parties de ce corollaire conduisent à la conséquence suivante :

III. Théorème analogue a celui de Pascal. *Dans un système de deux* *trièdres conjugués inscrits à une surface du second degré, les faces opposées se coupent suivant trois droites situées dans un même plan ;* ou bien :

Dans un hexagone gauche formé de six génératrices appartenant trois à trois aux deux modes de génération, les faces opposées se coupent suivant trois droites situées dans un même plan.

Fig. XII. Considérons un trièdre formé de trois faces 0, 2, 4, déterminant respectivement des génératrices d_5 et d_0; d_1 et d_2; d_3 et d_4; un trièdre conjugué au premier sera formé de trois faces telles que 1, 3, 5 passant respectivement par d_0 et d_1, d_2 et d_3, d_4 et d_5. Et les faces opposées de ces deux trièdres seront celles qui n'auront aucune génératrice commune : 0 et 3, 1 et 4, 2 et 5. De même le trièdre 0′, 1′, 2′ peut être regardé comme conjugué à 0, 1, 2; et les faces opposées seront alors 0 et 0′, 1 et 1′, 2 et 2′.

Il s'agit de prouver que les faces 0 et 3, 1 et 4, 2 et 5 ou 0 et 0′, 1 et 1′, 2 et 2′ se coupent suivant trois droites situées dans un même plan.

Or les deux quadrilatères gauches inscrits 1050′ et 2340′ ont une face commune 0′; les faces 1 et 4, 2 et 5 se coupent suivant les droites 0′2′ et 0′1′ situées dans le plan 0′1′2′; donc les faces 0 et 3 se coupent suivant une droite située dans ce même plan; propriété évidente, du reste, si l'on suppose connue la double génération des surfaces du second degré, puisque cette intersection est la droite 1′2′.

Tel est donc, pour les surfaces du second degré, le théorème analogue à l'hexagramme mystique de Pascal, théorème dont l'Académie avait mis la recherche au concours dès 1826, et que Dandelin énonçait à la même époque, ainsi que son corrélatif (*), mais pour l'hyperboloïde seulement, sans qu'il parût se douter que c'était bien là le théorème demandé.

Il est vrai que certains auteurs modernes, n'imitant pas la modeste réserve de l'éminent auteur de l'*Aperçu historique,* ont donné, comme l'analogue du théorème de Pascal, une propriété découverte par ce géomètre, et au sujet de laquelle il s'exprime en ces termes (**) :

« Cette nouvelle question de l'Académie n'offrait point, comme la pre-
» mière, de grandes difficultés. Nous donnons dans la note XXXII l'énoncé

(*) *Nouveaux mémoires de l'Académie de Bruxelles*, t. III; 1826.

(**) *Aperçu historique*, p. 246.

» d'un théorème qui nous paraît la résoudre, car il exprime une propriété
» générale d'un tétraèdre et d'une surface du second degré, analogue à
» la propriété d'un triangle et d'une conique qu'exprime le théorème de
» Pascal » (*).

Envisagée sous ce point de vue, la propriété énoncée par M. Chasles présente certainement de l'analogie avec celle de Pascal; mais à un point de vue absolu, on ne peut pas affirmer qu'elle en soit l'analogue, puisqu'elle ne semble pas renfermer celle de Pascal comme cas particulier.

La propriété que nous avons énoncée, au contraire, présente indubitablement ce caractère; et quoique nous nous fussions attendu, nous l'avouons, à ce que le théorème analogue à celui de Pascal dans les surfaces du second degré nous conduisît à une propriété nouvelle de ces surfaces, et non pas simplement à une propriété qui résulte immédiatement de leur double génération, il a bien fallu nous rendre à l'évidence, et reconnaître que cette simple propriété constitue bien le théorème analogue à celui de Pascal. En effet,

1° Elle a ce dernier comme corollaire immédiat, lorsqu'on coupe par un plan les six côtés de l'hexagone gauche (**);

(*) Voici, du reste, l'énoncé de cette propriété :

Quand les six arêtes d'un tétraèdre, placé d'une manière quelconque dans l'espace, rencontrent une surface du second degré en douze points, ces douze points sont trois à trois sur quatre plans dont chacun contient trois points appartenant aux trois arêtes issues d'un même sommet du tétraèdre;

Ces quatre plans rencontrent respectivement les faces opposées à ces sommets, suivant quatre droites qui sont les génératrices d'un même mode de génération d'un hyperboloïde à une nappe. (*Aperçu historique*, p. 400.)

(**) De toutes les démonstrations qu'on a imaginées du théorème de Pascal, peut-être n'en est-il pas de plus élémentaire que celle qui se tire de cette propriété, en ce sens qu'elle n'exige que la connaissance de la double génération de l'hyperboloïde à une nappe. C'est pourquoi nous nous permettons de donner ici cette démonstration, qui pourra intéresser quelques lecteurs, et que Dandelin avait déjà fait connaître dans le travail cité plus haut.

Si nous considérons l'hexagone gauche $d_0d_1d_2d_3d_4d_5$, et dans celui-ci trois systèmes de faces opposées deux à deux, comme d_0d_1 et d_3d_4; d_1d_2 et d_4d_5; d_3d_4 et d_5d_0; il résulte évidemment de la double génération que, chaque couple de faces opposées ayant avec l'un des autres couples deux génératrices communes appartenant aux deux modes de génération, l'intersection de deux faces opposées quelconques aura un point commun avec l'intersection de deux autres faces opposées; et par suite que ces trois intersections, formant un triangle, sont situées dans un même plan.

Or, si nous menons un plan quelconque, qui coupe les six génératrices de cet hexagone aux

2° Elle donne la génération de la surface au moyen de cinq génératrices, comme le théorème de Pascal donne celle d'une conique au moyen de cinq points (*);

3° Elle est relative à deux trièdres conjugués, comme celui-ci l'est à deux triangles conjugués;

4° Elle a pour corrélative, comme nous le verrons plus bas, la propriété suivante, découverte également par Dandelin, pour l'hyperboloïde, et qui est l'application littérale du théorème de Brianchon aux surfaces du second degré :

Dans un système de deux trièdres conjugués inscrits à une surface du second degré, les droites qui unissent deux à deux les sommets opposés concourent en un même point (**).

5° Enfin nous verrons que des propriétés tout à fait analogues se manifestent dans les surfaces du troisième ordre et dans celles de la troisième classe, ainsi que dans certaines surfaces de degrés supérieurs, de même que nous avons trouvé les théorèmes analogues à ceux de Pascal et de Brianchon pour les courbes de degrés supérieurs.

S'il fallait, du reste, apporter d'autres preuves à l'appui de l'analogie, oserions-nous dire de l'identité des deux théorèmes, nous n'aurions qu'à invoquer la marche identique que nous avons suivie dans l'exposition de la théorie des courbes et de la théorie des surfaces : interprétation de l'équation, théorème de Pappus, théorème de Desargues, corollaire de celui-ci,

points 0, 1, 2, 3, 4, 5 et la surface suivant une conique passant par ces six points, il est clair que nous aurons affaire à un hexagone inscrit à cette conique, et dont les côtés opposés sont les intersections de son plan avec les faces opposées de l'hexagone gauche; mais celles-ci se coupant deux à deux suivant trois droites situées dans un même plan, ceux-là se couperont en trois points situés en ligne droite.

En donnant ce nouvel exemple du passage d'une propriété de l'espace à une propriété du plan, nous ne prétendons nullement nous déclarer partisan de cette méthode, surtout au point de vue philosophique.

(*) Nous disons *cinq* génératrices, parce que ce nombre de droites peut être indispensable pour déterminer la surface : par exemple dans le cas d'un cylindre ou d'un cône, ou encore dans le cas où deux de ces cinq génératrices en coupent deux autres. Au reste, si l'on donne trois génératrices non situées deux à deux dans un même plan, lesquelles sont suffisantes, il sera facile d'en déterminer deux autres.

(**) Nous ferons remarquer que ces trièdres étant à la fois inscrits et circonscrits, chaque propriété et sa corrélative se rapportent à une seule et même figure.

théorème de Pascal. Tous occupent dans les deux théories, et nécessairement, les mêmes places; tous se déduisent de la même manière les uns des autres; à ce titre donc nos propriétés des surfaces du second degré sont parfaitement analogues à celles des coniques. Nous ajouterons que toutes ces propriétés ont leurs corrélatives, dont nous nous occuperons plus bas; et que le théorème de Brianchon a d'une manière plus frappante peut-être que celui de Pascal, comme nous venons de le voir, son similaire dans les surfaces du second degré, ce qui complète l'analogie absolue qui existe entre nos théorèmes relatifs à ces surfaces, et ces deux théorèmes si fameux dans l'histoire de la géométrie.

Aussi nous osons espérer que tous les géomètres voudront bien se rallier à notre opinion, et nous nous en remettrons volontiers, sur ce point, au jugement du grand géomètre français, dont la loyauté et la modestie ne brillent pas moins que l'érudition et la profondeur, dans le monument qu'il a élevé à la science de l'étendue (*).

Les théorèmes que nous venons de démontrer donnent lieu à un grand nombre de conséquences que nous n'avons pas l'intention de développer aujourd'hui (**). Nous dirons toutefois qu'ils ne nous paraissent pas devoir conduire à une relation générale entre dix points d'une surface du second degré; et nous pensons que c'est par une autre voie qu'il faudra chercher cette relation (***).

Nous allons, dans le chapitre suivant, rechercher les théorèmes corrélatifs de ceux que nous venons d'établir.

(*) Les belles propriétés données par M. P. Serret, dans sa *Géométrie de direction*, comme les analogues de celles de Desargues et de Pascal, n'ont pas modifié notre manière de voir à ce sujet (1871).

(**) Le théorème de Desargues, par exemple, si l'on prend pour transversale une tangente, fournit une relation dans laquelle le point de contact est un point double d'involution, et qui conduit à d'autres propriétés remarquables du quadrilatère inscrit.

(***) Cette relation analytique générale, qui n'avait pas vu le jour à l'époque où nous écrivions ces lignes (1869), quoique le grand problème de la description d'une surface du second degré, déterminée par neuf points, eût déjà été résolu par des géomètres éminents (Hesse, Schröter, Steiner), a été donnée par M. P. Serret. (*Géométrie de direction*, p. 129.) 1871.

CHAPITRE II.

COORDONNÉES RECTILIGNES TANGENTIELLES.

Soient δ_0, δ_1, δ_2, δ_3 les distances d'un plan mobile

$$T = LX + MY + NZ + P = 0$$

à quatre points fixes 0, 1, 2, 3 de coordonnées x_0, y_0, z_0 etc;

L, M, N, P étant des fonctions linéaires de x, y, z de la forme

$$L = ax + by + cz + f;$$
$$M = a'x + b'y + c'z + f'; \text{etc.}$$

Ce plan sera déterminé si l'on connait les trois paramètres X, Y, Z; et par conséquent si l'on a entre eux trois relations distinctes, ou si l'on en a trois entre δ_0, δ_1, δ_2, δ_3 qui sont des fonctions linéaires de X, Y, Z de la forme

$$\delta_0 = \frac{L_0X + M_0Y + N_0Z + P_0}{\sqrt{(aX + a'Y + a''Z + a''')^2 + \cdots}},$$

dans lesquelles $L_0 = ax_0 + by_0 + cz_0 + f$, etc.

Une de ces relations, par exemple

$$\delta_0 = \lambda\delta_1,$$

Fig. XIV. représente, si λ est constant, un système de plans polaires de pôles P, ce point P étant déterminé sur la droite 0, 1 par la relation

$$\frac{0,\,P}{1,\,P} = \lambda.$$

De même

$$\delta_2 = \lambda'\delta_3$$

représente, si λ' est constant, un système de plans polaires de pôle P′, ce point P′ étant déterminé sur la droite 2, 3 par la relation

$$\frac{2,\,P'}{3,\,P'} = \lambda'.$$

Par suite, les deux équations simultanées

$$\delta_0 = \lambda\delta_1$$
$$\delta_2 = \lambda'\delta_3$$

représenteront un faisceau de plans qui se coupent suivant PP'.

Enfin les trois équations simultanées

$$\delta_0 = \lambda\delta_1$$
$$\delta_1 = \lambda'\delta_3$$
$$\delta_2 = \lambda''\delta_1$$

représenteront un plan passant par les trois points P, P', P'' déterminés respectivement sur 1, 0; sur 1, 3, et sur 1, 2 par les relations

$$\frac{0,\mathrm{P}}{1,\mathrm{P}} = \lambda; \quad \frac{1,\mathrm{P}'}{3,\mathrm{P}'} = \lambda'; \quad \frac{2,\mathrm{P}''}{1,\mathrm{P}''} = \lambda''.$$

Si λ, λ', λ'' sont variables, le plan

$$\mathrm{T} = \mathrm{LX} + \mathrm{MY} + \mathrm{NZ} + \mathrm{P} = 0,$$

déterminé par ces trois relations, sera lui-même variable, et ses positions successives envelopperont une certaine surface.

Si ces variables sont assujéties à la relation

$$\lambda\lambda'\lambda'' = k = c^{te},$$

l'équation de la surface enveloppe des plans mobiles sera

$$\delta_0\delta_2 = k\delta_1\delta_3.$$

Cette équation est du second degré en X, Y, Z; donc par toute droite

$$x = mz + p$$
$$y = nz + q$$

on pourra mener à cette surface deux plans tangents dont les X, Y, Z seront déterminés

1° Par deux relations indiquant qu'ils passent par cette droite, relations qui sont du premier degré;

2° Par l'équation de la surface qui est du second degré en X, Y, Z.

Pour trouver la signification géométrique de l'équation de la surface, remarquons que $\delta_0, \ldots$ est proportionnel à la distance d'un plan tangent quelconque T au point 0, ...; et qu'en outre l'équation est satisfaite par chacun des systèmes simultanés

$$\begin{array}{ll} \delta_0 = 0, & \delta_1 = 0 \\ \delta_0 = 0, & \delta_3 = 0 \\ \delta_2 = 0, & \delta_1 = 0 \\ \delta_2 = 0, & \delta_3 = 0; \end{array}$$

ce qui prouve que les droites $(0, 1)$; $(0, 3)$; $(2, 1)$; $(2, 3)$ sont des génératrices de la surface, puisque tout plan tel que

$$\delta_0 = \delta_1 = 0,$$

passant par l'une de ces droites, est tangent à la surface.

Nous avons donc affaire ici encore à un système de deux dièdres conjugués inscrits ou à un quadrilatère gauche inscrit, dont les sommets opposés sont 0 et 2; 1 et 3; et l'équation de la surface exprime le théorème suivant :

I'. Théorème analogue au corrélatif de celui de Pappus. *Dans un système de deux dièdres conjugués inscrits à une surface du second degré les produits des distances d'un plan tangent quelconque aux deux couples de sommets opposés sont analogiques;* ou bien :

Lorsqu'un quadrilatère gauche est inscrit à une surface du second degré, les produits des distances d'un plan tangent quelconque aux deux couples de sommets opposés sont analogiques.

Le lecteur déduira facilement de ce théorème les corollaires corrélatifs de ceux que nous avons déduits du théorème de Pappus (v. page 84); nous ne nous y arrêterons pas, et nous passerons à la démonstration du théorème corrélatif de celui de Desargues.

Soit T un plan tangent à la surface mené par une droite D; $p_0 \ldots$ les perpendiculaires abaissées des points 0 ... sur cette droite; désignons par $(0, \mathrm{T}) \ldots$ les angles que les plans $(p_0, \mathrm{D}) \ldots$, passant par les points 0 ... et la droite D, font avec le plan T; $\delta_0 \ldots$ représentant toujours la distance des points 0 ... à ce plan, on aura :

$$\delta_0 = p_0 \sin(0, \mathrm{T}); \ldots$$

de même, si par D on mène un second plan tangent T', on aura :

$$\delta'_0 = p_0 \sin(0, T'); \ldots$$

Et comme l'équation de la surface donne

$$\frac{\delta_0\delta_2}{\delta'_0\delta'_2} = \frac{\delta_1\delta_3}{\delta'_1\delta'_3},$$

il en résulte

$$\frac{\sin(0, T)\sin(2, T)}{\sin(0, T')\sin(2, T')} = \frac{\sin(1, T)\sin(3, T)}{\sin(1, T')\sin(3, T')};$$

d'où le théorème suivant :

II'. Théorème analogue au corrélatif de celui de Desargues. *Dans un système de deux dièdres conjugués inscrits à une surface du second degré, les deux couples de plans passant par ses sommets opposés et par une droite quelconque, et le couple de plans tangents menés par cette droite à la surface sont en involution;* ou bien :

Lorsqu'un quadrilatère gauche est inscrit à une surface du second degré, si par une droite on mène les deux plans tangents à cette surface, et les deux couples de plans passant par les sommets opposés du quadrilatère, ces trois couples de plans sont en involution.

Parmi les corollaires de cette proposition, nous ne mentionnerons que ceux qui doivent nous conduire au théorème analogue à celui de Brianchon (*).

Corollaire. *Quand deux quadrilatères gauches sont inscrits à une surface du second degré, si les droites qui unissent trois sommets du premier à trois sommets du second s'appuient sur une même droite, ou concourent en un même point, celle qui unira les deux autres sommets s'appuiera sur cette même droite, ou concourra au même point.*

Nous ne démontrerons que la première partie de ce corollaire, de laquelle il est facile de déduire la seconde.

(*) Il est facile d'énoncer le théorème précédent dans le cas où la droite par laquelle passent les six plans est tangente à la surface, et où par suite l'un de ces plans est un plan *double* d'involution.

[Fig. XV. Supposons donc que les droites qui unissent les sommets 0, 0′; 1, 1′ et 2, 2′ s'appuient sur une certaine droite D; si par cette droite D on mène les deux plans tangents à la surface, T et T′, ainsi que les couples de plans

D, 0 et D, 2; D, 1 et D, 3;

ou bien

D, 0′ et D, 2′; D, 1′ et D, 3′;

les trois couples de plans

T et T′; D, 0 et D, 2; D, 1 et D, 3;

ainsi que

T et T′; D, 0′ et D, 2′; D, 1′ et D, 3′

sont en involution; or

D, 0 et D, 0′; D, 2 et D, 2′; D, 1 et D, 1′

coïncident; donc D, 3 et D, 3′ coïncident aussi, et par suite la droite 3, 3′ s'appuie sur la droite D, *c. q. f. d.*

De chacune des parties de ce corollaire, et de la dernière plus particulièrement, on déduit immédiatement la proposition suivante :

III′. Théorème analogue a celui de Brianchon. *Dans un système de deux trièdres conjugués inscrits à une surface du second degré, les trois droites qui unissent deux à deux les sommets opposés concourent en un même point;* ou bien :

Dans un hexagone gauche formé de six génératrices appartenant trois à trois aux deux modes de génération, les trois droites qui unissent deux à deux les sommets opposés concourent en un même point (*).

Fig. XII. Considérons en effet les deux trièdres conjugués, ou l'hexagone gauche, définis précédemment, et dans ceux-ci les sommets opposés 0 et 3, 1 et 4, 2 et 5; il s'agit de prouver que les droites 0, 3; 1, 4; 2, 5 concourent en un même point.

Pour cela, décomposons l'hexagone en deux quadrilatères de sommets 0, 1, 2, 1′ et 3, 4, 5, 1′; les droites qui unissent les sommets 0 et 3, 2 et 5, sont situées dans le plan des génératrices d_2 et d_5 qui se coupent en 1′; on peut donc dire que les droites qui unissent trois sommets de l'un des quadri-

(*) Nous avons dit plus haut que ce théorème a été découvert par Dandelin pour le cas de l'hyperboloïde.

latères : 0, 2, 1′ à trois sommets de l'autre : 3, 5, 1′ concourent en un même point; donc la droite qui unit les quatrièmes sommets 1 et 4 passera par ce même point.

De même, en décomposant l'hexagone en deux quadrilatères 0, 1, 2, 1′ et 0′, 1, 2′, 4, on verra que les droites qui unissent 0 et 0′, 1 et 1, 2 et 2′ concourent en un même point; donc la droite qui unit 1′ à 4 (ou 1′ à 1, ce qui revient au même) passe par ce point; donc 0, 0′; 1, 1′; 2, 2′ concourent en un même point.

Personne ne songera à contester que ce théorème ne soit bien l'analogue de celui de Brianchon; mais il est bien évidemment aussi le corrélatif de celui que nous avons donné, sous le numéro III, au chapitre des coordonnées ponctuelles, p. 87; ce dernier est donc bien le théorème analogue à celui de Pascal.

Nous avons peut-être un peu trop insisté sur ce point; mais on voudra bien nous le pardonner en pensant à l'intérêt qu'excitait chez tous les géomètres la découverte de cette propriété, dans laquelle ils entrevoyaient la solution du fameux problème de la construction d'une surface du second degré déterminée par neuf points, et à l'espèce de désappointement qu'ils devront naturellement éprouver en reconnaissant que cette propriété, sur laquelle se fondaient tant d'espérances, n'est autre chose qu'un résultat fort simple du double mode de génération des surfaces du second degré par le mouvement d'une droite.

En exprimant cette opinion, nous ne prétendons en aucune manière méconnaître l'analogie qui existe entre le théorème de M. Chasles et celui de Pascal; comme le dit fort bien l'illustre géomètre, il existe plusieurs points de vue sous lesquels on peut envisager ce dernier théorème; et à chacun de ces points de vue correspond un énoncé différent dans l'espace (*). Pour nous, qui avons dû, en vertu de notre théorie générale des courbes, envisager nécessairement le théorème de Pascal comme relatif à deux triangles conjugués inscrits à une conique, son analogue doit être, par une conséquence logique, relatif à deux trièdres conjugués inscrits à une surface du second degré.

(*) C'est ainsi encore que nous avons lu avec beaucoup d'intérêt, depuis que ces lignes ont été écrites, les théorèmes donnés par M. Paul Serret dans sa *Géométrie de direction*.

Nous bornerons ici les conséquences que nous pourrions déduire de cette théorie des surfaces du second degré; un lecteur un peu familier avec la géométrie supérieure pourra aisément en trouver un grand nombre d'autres, en suivant la voie tracée par M. Chasles dans son traité des coniques.

Dans le chapitre suivant, nous appliquerons notre méthode à la théorie générale des surfaces du troisième ordre et de la troisième classe, ainsi qu'à certaines surfaces particulières d'ordres ou de classes supérieurs.

SURFACES DU TROISIÈME ORDRE (*).

CHAPITRE III.

COORDONNÉES RECTILIGNES PONCTUELLES.

L'équation d'une surface du troisième ordre $S_3 = 0$ peut se mettre sous cette première forme :

$$S_3 = A.B.C - kA'.B'.C'. = 0, \quad \quad (1)$$

A, A' etc. étant des fonctions linéaires de x, y, z, dont les trois paramètres sont à déterminer; et k étant également à déterminer.

En effet, cette équation renferme dix-neuf paramètres inconnus, et comme

(*) C'est à MM. Cayley et Salmon qu'on doit la découverte des vingt-sept droites remarquables d'une surface du troisième ordre; leurs propriétés, trouvées par Steiner, sont consignées, la plupart sans démonstration, dans le tome LIII du *Journal de Crelle*. L'Académie de Berlin a mis au concours pour 1866 le développement de ce mémoire, et elle a partagé le prix entre deux travaux : l'un est de M. Cremona, géomètre italien; il a été publié dans le *Journal de Crelle*, t. LXVIII; l'autre est de M. Sturm, géomètre allemand; il a paru chez Teubner à Leipzig.

Pour ne pas dépasser les bornes que nous avons voulu assigner à notre travail, nous ne démontrerons, parmi les propriétés qui sont énoncées, soit dans ces mémoires, soit dans ceux que d'autres savants ont publiés postérieurement dans le même *Journal*, que celles qui nous sont indispensables pour arriver à la démonstration d'autres propriétés, tout à fait nouvelles, et tout aussi remarquables que les premières.

le nombre de termes de l'équation générale du troisième degré à trois variables est $\frac{4.5.6}{1.2.3}=20$, nous aurons dix-neuf équations pour déterminer nos dix-neuf inconnues.

On voit immédiatement que les droites d'intersection de chacune des faces A, B, C avec chacune des faces A′, B′, C′ appartiennent à la surface; ce qui nous donne neuf génératrices situées trois à trois dans chacun des six plans, chacune d'entre elles se trouvant à la fois dans deux de ces plans. Ces neuf génératrices, ne déterminant que dix-huit paramètres, ne suffisent pas pour déterminer la surface; il faut y joindre un point de celle-ci.

On aura autant de systèmes de neuf génératrices qu'il y a de systèmes de solutions pour les dix-neuf équations dont nous venons de parler; mais il est inutile que nous abordions le problème ardu de la recherche de ce nombre; la discussion géométrique nous y conduira plus simplement.

Les deux systèmes de plans A, B, C et A′, B′, C′ forment deux trièdres tels que chaque face de l'un, A par exemple, passe par trois génératrices respectivement situées dans les trois faces de l'autre, et qui sont, pour A, les intersections A, A′; A, B′; A, C′. Ces deux trièdres forment, pour cette raison, *un système de deux trièdres conjugués inscrits.*

Cherchons à déterminer combien il existe de ces systèmes de trièdres conjugués.

Le théorème fondamental sur lequel s'appuie cette détermination est le suivant :

Un hyperboloïde, qui a trois génératrices du même mode communes avec une surface du troisième ordre, en a trois de l'autre mode également communes (Steiner).

Considérons en effet l'hyperboloïde défini par les trois génératrices

$$A, A'; \ B, B'; \ C, C';$$

et soient

$$A = \alpha A'; \ B = \beta B'; \ C = \gamma C',$$

les trois équations simultanées d'une même droite s'appuyant sur ces trois génératrices, d'où il résulte que l'une de ces équations est une conséquence nécessaire des deux autres. De plus, il est clair que β et γ seront des fonctions linéaires de α, puisque dans le plan $A = \alpha A'$ il n'existe qu'une droite qui s'appuie à la fois sur les trois génératrices.

En combinant les trois équations précédentes avec celle de la surface (1), nous obtenons :

$$\alpha\beta\gamma = k,$$

équation qui sera du troisième degré en α, et qui aura ses trois racines réelles en vertu de sa forme et des expressions linéaires de β et γ en α.

Il existe donc trois droites qui sont à la fois des génératrices du second mode de l'hyperboloïde, et des génératrices de la surface du troisième ordre.

Les neuf génératrices primitives forment six systèmes de trois génératrices non situées deux à deux dans un même plan :

$$(A, A'; B, B'; C, C'); \ (A, A'; B, C'; B', C); \text{ etc.}$$

Chacun des hyperboloïdes déterminés par l'un de ces systèmes de trois génératrices coupe la surface du troisième ordre suivant trois génératrices, dont aucune ne peut coïncider avec l'une des neuf génératrices primitives; ainsi l'hyperboloïde $(A, A'; B, B'; C, C')$ ne peut couper la surface suivant A, B' : car cette droite rencontrerait alors C, C'.

En outre les trois nouvelles génératrices, suivant lesquelles l'hyperboloïde $(A, A'; B, B'; C, C')$ coupe la surface, diffèrent de celles suivant lesquelles elle est coupée par $(A, A'; B, C'; B', C)$: sinon les deux hyperboloïdes auraient, outre A, A', une génératrice commune; mais de plus ils ont en commun les points d'intersection de B, B' et B, C', de B, B' et B', C; de C, C' et B', C; de C, C' et B, C'; donc ils coïncideraient.

On voit par là que la génératrice A, A' coupe dix droites de la surface : les six droites qui sont les nouvelles intersections des deux hyperboloïdes, et A, B'; A', B; A, C'; A', C.

Parmi ces dix droites il ne peut pas s'en trouver plus de cinq non situées deux à deux dans un même plan.

En effet si une droite D pouvait rencontrer les six droites a, b, c, d, e, f, non situées deux à deux dans un même plan, les hyperboloïdes a, b, c et a, b, d, qui auraient trois génératrices communes a, b, D, en auraient une quatrième g, qui couperait a, b, c, d et appartiendrait par suite à la surface du troisième ordre.

De même les hyperboloïdes a, b, c et a, b, e; a, b, c et a, b, f auraient une génératrice commune g' pour les premiers, g'' pour les seconds; et ces génératrices appartiendraient également à la surface du troisième ordre.

Il s'ensuivrait que l'hyperboloïde a, b, c a en commun avec cette surface les sept droites D, a, b, c, g, g', g'', ce qui serait absurde.

Il reste à faire voir qu'aucune des droites d'intersection de l'un des six hyperboloïdes avec la surface du troisième ordre ne peut coïncider avec l'une des droites d'intersection d'un autre hyperboloïde. On verrait en effet aisément que si deux de ces intersections pouvaient se confondre en une seule, ou bien celle-ci couperait six droites de la surface non situées deux à deux dans un même plan, ou bien elle serait à la fois située dans quatre faces de deux trièdres conjugués.

Chacun des six hyperboloïdes coupant la surface suivant trois génératrices différentes des neuf primitives, et distinctes entre elles; nous aurons donc en tout vingt-sept droites appartenant à cette surface (*).

Comme chacune des neuf génératrices primitives rencontre dix de ces droites, dont quatre primitives, et six autres, et que ces dix droites se partagent en cinq groupes de deux droites qui se coupent, elle formera avec celles-ci cinq triangles tritangents; nous aurons donc en tout quarante-cinq de ces triangles (Steiner).

Nous pouvons partager les vingt-sept droites en neuf triangles qui n'ont deux à deux aucune droite commune. Considérons un côté de l'un de ces triangles : il devra couper l'un des côtés de chacun des huit autres triangles : sans quoi il ne couperait pas dix droites.

De là résulte que, quand deux triangles tritangents n'ont aucune droite

(*) L'existence des vingt-sept droites pourrait encore s'établir très-simplement de la manière suivante : considérons un hyperboloïde $H_2 = AB - \alpha A'B' = 0$. Comme son intersection avec S_3 est du sixième ordre, et qu'il a quatre droites communes avec cette surface, il aura en outre une conique commune; mais on pourra déterminer α de telle sorte que cette conique se réduise à deux droites; on peut donc faire passer, par quatre génératrices formant un quadrilatère gauche, un hyperboloïde dont l'intersection avec S_3 détermine deux génératrices nouvelles; et comme il existe neuf de ces quadrilatères, nous aurons dix-huit nouvelles génératrices.

commune, leurs côtés se coupent deux à deux; et il est facile d'en déduire que ces deux triangles suffisent pour déterminer un système de trièdres conjugués, et que, par suite, les vingt-sept droites ou les quarante-cinq triangles déterminent en tout cent vingt de ces couples de trièdres (Steiner).

Nous ne nous arrêterons pas davantage à ces propriétés, dont on pourra voir les développements dans les travaux cités, et nous allons maintenant rechercher pour les surfaces du troisième ordre, l'extension des théorèmes analogues à ceux de Pappus, de Desargues et de Pascal. On verra là une preuve nouvelle de l'analogie qui existe entre les propriétés qui portent ces noms dans la théorie des coniques, et celles que nous avons données pour les surfaces du second degré.

Nous verrons les propriétés corrélatives dans l'étude des surfaces de la troisième classe.

Reprenons l'équation fondamentale (1)

$$ABC = kA'B'C';$$

en nous rappelant que les distances d'un point x, y, z aux plans A .... sont proportionnelles aux fonctions linéaires A ..., nous pourrons énoncer cette équation sous la forme :

I. Extension du théorème de Pappus. *Dans un système de deux trièdres conjugués inscrits à une surface du troisième ordre, les produits des distances d'un point quelconque de la surface aux trois faces de ces deux trièdres sont analogiques.*

En mettant l'équation de chacun des plans A .... sous la forme

$$z + ax + by - c = \gamma - c = 0,$$

et en procédant comme nous l'avons fait pour les surfaces du second degré, nous transformerons le théorème de Pappus en celui de Desargues. Dans l'énoncé de ce théorème, on voudra bien se rappeler la définition que nous avons donnée, en traitant des courbes planes, de l'involution de trois systèmes de n points, involution qui, pour le troisième ordre, est relative à trois ternes de points.

II. Extension du théorème de Desargues. *Dans un système de deux trièdres conjugués inscrits à une surface du troisième ordre, une transversale quelconque rencontre les trois couples de faces opposées et la surface en trois ternes de points qui sont en involution.*

Si nous appelons a, b, c; a', b', c' les points de rencontre de la transversale avec les faces de deux trièdres conjugués, et m, m_1, m_2 ses points de rencontre avec la surface, l'expression la plus simple de cette involution sera :

$$\frac{am\,.\,bm\,.\,cm}{a'm\,.\,b'm\,.\,c'm}=\frac{am_1\,.\,bm_1\,.\,cm_1}{a'm_1\,.\,b'm_1\,.\,c'm_1}=\frac{am_2\,.\,bm_2\,.\,cm_2}{a'm_2\,.\,b'm_2\,.\,c'm_2}.$$

Corollaire. *Lorsque deux systèmes de trièdres conjugués inscrits à une surface du troisième ordre sont situés de telle manière que les intersections de quatre couples de leurs faces s'appuient sur une même droite, les intersections des deux autres couples de faces s'appuieront sur cette droite. Si les quatre premières intersections sont situées dans un même plan, les deux autres y seront également situées.*

En effet, en désignant par les mêmes lettres que plus haut les intersections d'une transversale avec les faces du premier système de trièdres conjugués et avec la surface, et par a, b, c, a', b'_1, c'_1, ses intersections avec les faces du second système, nous aurons :

$$\begin{aligned}\frac{am\,.\,bm\,.\,cm}{a'm\,.\,b'm\,.\,c'm}&=\frac{am_1\,.\,bm_1\,.\,cm_1}{a'm_1\,.\,b'm_1\,.\,c'm_1}=\frac{am_2\,.\,bm_2\,.\,cm_2}{a'm_2\,.\,b'm_2\,.\,c'm_2}\\&=\frac{am_1\,.\,bm_1\,.\,cm_1}{a'm_1\,.\,b'_1m_1\,.\,c'_1m_1}=\frac{am_2\,.\,bm_2\,.\,cm_2}{a'm_2\,.\,b'_1m_2\,.\,c'_1m_2};\end{aligned}$$

d'où résulte, en vertu du lemme algébrique que nous avons établi relativement à l'involution de $3n$ points (page 15), que b' et b'_1, c' et c'_1 coïncident, ce qu'il fallait démontrer.

La seconde partie du corollaire s'établit au moyen de deux transversales situées dans un même plan.

Ce corollaire va nous conduire à l'extension du théorème de Pascal qui, pour les surfaces du troisième ordre, est relatif à deux systèmes de *tétraèdres conjugués inscrits.*

Nous nommons ainsi deux tétraèdres tels que chaque face de l'un passe par trois droites de la surface respectivement situées dans trois des faces du second tétraèdre. Les *faces opposées* de ces deux tétraèdres sont celles qui ne passent point par une même droite de la surface.

Commençons par prouver qu'il existe de ces systèmes de tétraèdres conjugués.

Considérons d'abord les deux trièdres conjugués :

$$A, B, f \quad \text{et} \quad D', C', e$$

dont les faces passent respectivement par les droites de la surface.

$$1, 2, 3;\ 4, 5, 6;\ 7, 10, 9'; \quad \text{et} \quad 3, 5, 7;\ 2, 6, 10;\ 1, 4, 9';$$

Ensuite les deux trièdres conjugués :

$$A', B', f \quad \text{et} \quad D, C, e$$

dont les faces passent respectivement par les droites

$$4, 8, 12;\ 1, 9, 11;\ 7, 10, 9'; \quad \text{et} \quad 10, 11, 12;\ 7, 8, 9;\ 1, 4, 9'.$$

On voit que les tétraèdres A, B, C, D et A', B', C', D' satisfont à la condition précédente, et par suite sont conjugués, puisque chaque face de l'un, telle que A, passe par une droite de B', une de C' et une de D' ; en outre on voit que cette face A est opposée à A'; etc.

Ces tétraèdres conjugués jouissent de la propriété suivante, qui est l'analogue du théorème de Pascal pour les coniques, comme on s'en assure en coupant la figure par un plan quelconque, ce qui conduit au théorème analogue à celui de Pascal pour les courbes du troisième ordre.

IV. Extension du théorème de Pascal. *Dans un système de deux tétraèdres conjugués inscrits à une surface du troisième ordre, les faces opposées se coupent suivant quatre droites situées dans un même plan.*

En effet, ces deux tétraèdres conjugués peuvent former différents systèmes de deux couples de trièdres conjugués; il suffit, pour cela, de prendre deux faces de l'un des tétraèdres, et les deux faces non opposées de l'autre, pour former le premier système de trièdres, dont on déterminera les deux autres faces en conséquence; et de prendre les quatre autres faces des deux tétraèdres pour former le second système. On a vu déjà précédemment un exemple de ces systèmes de trièdres conjugués. Veut-on faire entrer dans l'un les faces A, C, B′, D′, dans l'autre B, D, A′, C′, on aura les deux systèmes,

1° A, C, e'; B′, D′, f'

dont les faces passent respectivement par

1, 2, 3; 7, 8, 9; 5, 11, 10′; et 1, 9, 11; 3, 5, 7; 2, 8, 10′;

2° B, D, f'; A′, C′, e

dont les faces passent respectivement par

4, 5, 6; 10, 11, 12; 2, 8, 10′; et 4, 8, 12; 2, 6, 10; 3, 11, 10′.

Observons maintenant qu'en vertu d'une remarque précédente, les droites de deux faces qui n'ont pas une génératrice commune se coupent deux à deux; d'où l'on déduira aisément que chacune des douze génératices des deux tétraèdres conjugués en coupe cinq; c'est ainsi que :

1	coupe	2,	3,	4,	9,	11
2	»	1,	3,	6,	8,	10
3	»	1,	2,	5,	7,	12
4	»	1,	5,	6,	8,	12
5	»	3,	4,	6,	7,	11
6	»	2,	4,	5,	9,	10
7	»	3,	5,	8,	9,	10
8	»	2,	4,	7,	9,	12
9	»	1,	6,	7,	8,	11
10	»	2,	6,	7,	11,	12
11	»	1,	5,	9,	10,	12
12	»	3,	4,	8,	10,	11.

Nous désignerons le point d'intersection de deux génératrices par les chiffres qui désignent ces deux droites; ainsi 1,4 représentera le point d'intersection de la génératrice 1 avec la génératrice 4.

Il nous sera facile, connaissant ces points d'intersection, d'appliquer le corollaire III aux différents systèmes de trièdres conjugués dans lesquels nous pouvons décomposer le système de nos deux tétraèdres.

En considérant l'exemple de décomposition en deux systèmes de trièdres conjugués, qui précède l'énoncé IV, et remarquant que les intersections A, A′ et B, B′ passent par 1,4; que l'intersection de *e* avec *e* y passe aussi; enfin que celle de *f* avec *f* passe par 7,10, nous voyons que ces deux systèmes de trièdres conjugués sont tels que les intersections de quatre couples de faces s'appuient sur la droite qui unit 1,4 à 7,10; les deux autres intersections C, C′ et D, D′ s'appuient donc sur cette même droite.

Cette propriété, du reste, ressort évidemment de l'examen attentif des faces, et de la remarque que nous avons faite relativement aux points d'intersection de leurs trois droites deux à deux; on peut donc la démontrer sans le secours du théorème de Desargues, absolument comme la propriété analogue pour les surfaces du second degré résulte immédiatement de leur double mode de génération. Nous ajouterons néanmoins, pour satisfaire les esprits qui tiennent à connaître la marche qui a été suivie dans la recherche de propriétés nouvelles, que c'est par le moyen du théorème de Desargues que nous sommes arrivé à découvrir ces propriétés, et il semble que ce soit là la marche naturelle; car elle est identique à celle que nous avons suivie dans l'étude des courbes planes, et manifeste ainsi clairement l'analogie qui existe entre les propriétés de ces courbes et celles des surfaces; tandis que dans la démonstration directe fondée sur l'examen des faces des trièdres conjugués à une surface du second degré, ou des tétraèdres conjugués à celle du troisième ordre, l'analogie est à tel point masquée, que les géomètres se sont refusés jusqu'aujourd'hui à reconnaître le théorème de Pascal dans la propriété de l'hexagone gauche inscrit à un hyperboloïde à une nappe, propriété qui y conduit d'une manière si simple, comme Dandelin l'avait déjà fait observer en 1826.

Pour démontrer le théorème de Pascal sans invoquer celui de Desargues, nous pourrons, d'après ce que nous venons de dire, nous borner à constater que les intersections des faces A, A′; B, B′; C, C′; D, D′ s'appuient sur les droites qui unissent 1,4 à 7,10; 2,8 à 5,11; 3,12 à 6,9. Mais l'intersection A, A′ passe par les trois points 1,4; 2,8; 3,12; l'intersection B, B′ par 1,4;

6,9; 5,11; et comme ces cinq points sont dans un même plan, C, C′ et D, D′, qui passent par deux de ces points, sont aussi dans ce plan. Au reste, C, C′ passe par 2,8; 6,9; 7,10; et D, D′ par 3,12; 5,11; 7,10.

On voit donc que les quatre intersections des faces opposées des deux tétraèdres conjugués forment un quadrilatère plan complet dont les sommets opposés sont 1,4 et 7,10; 2,8 et 5,11; 3,12 et 6,9.

Il est manifeste qu'en coupant la surface et le système des deux tétraèdres conjugués par un plan quelconque, celui-ci déterminera une courbe plane du troisième ordre avec un système de deux quadrilatères conjugués inscrits, et que les côtés opposés de ces quadrilatères se couperont en quatre points situés en ligne droite, puisque ces points sont ceux où les quatre droites précédentes, situées dans un même plan, sont coupées par le plan sécant; notre théorème de Pascal sur les courbes planes du troisième ordre n'est donc qu'un cas particulier de celui que nous venons de donner pour les surfaces du même ordre.

Nous croyons superflu d'entrer dans le détail des différentes combinaisons de quatre droites situées dans un même plan, auxquelles peut donner lieu le théorème précédent.

On verra aisément, en appliquant le théorème de Pappus aux deux systèmes de trièdres dans lesquels nous avons décomposé nos tétraèdres conjugués, que ceux-ci jouissent de la même propriété que les trièdres conjugués, savoir :

Corollaire du théorème de Pappus. *Dans un système de deux tétraèdres conjugués inscrits à une surface du troisième ordre, les produits des distances d'un point quelconque de la surface aux quatre faces de ces deux tétraèdres sont analogiques.*

Nous ne nous étendrons pas davantage sur les corollaires qu'on peut déduire des théorèmes qui précèdent; et nous nous bornerons, pour terminer, à faire remarquer que le théorème de Desargues conduit à la construction d'un nombre quelconque de points d'une surface du troisième ordre déterminée par un point et par les neuf droites d'intersections des faces de deux trièdres conjugués.

L'équation générale des surfaces du troisième ordre est encore susceptible de se mettre sous d'autres formes, qui peuvent toutes servir à déterminer leurs vingt-sept droites, et conduire à des modes de détermination de ces surfaces plus généraux que celui qui a servi de base aux recherches du grand géomètre allemand.

Mais ces formes ne sont pas aussi propres à manifester l'existence des célèbres propriétés qui constituent l'essence de la géométrie supérieure; on pourrait certainement en déduire une discussion analytique des surfaces du troisième ordre, ainsi que certaines propriétés géométriques ou métriques; ces propriétés toutefois n'offriraient pas, tant s'en faut, le même intérêt que celles dont nous venons de parler; et ce serait manquer le but indiqué par le titre même de notre travail, que de nous étendre trop longuement sur la discussion de ces nouvelles formes.

Nous nous bornerons donc à les indiquer sommairement en montrant de quel usage elles peuvent être dans l'étude analytique des surfaces du troisième ordre.

L'équation générale de ces surfaces peut se mettre sous la forme :

$$P_0 p_0 p_1 = k Q_0 (Q_1 Q_2 + P_0 p_2),$$

où tous les paramètres, ceux de P_0 exceptés, sont à déterminer.

Cette forme montre que P_0 est un plan tritangent, qui coupe les surfaces suivant les trois génératrices P_0Q_0, P_0Q_1, P_0Q_2; et que Q_0 est également un plan tritangent qui a une génératrice commune avec le précédent et qui passe en outre par les deux génératrices Q_0p_0 et Q_0p_1.

De plus, il est clair que tout plan qui passe par l'une de ces génératrices coupera en général la surface suivant une conique. Ainsi le plan $P_0 = \alpha Q_0$ qui passe par la génératrice P_0Q_0 coupe S_3 suivant une conique située sur la surface du second degré :

$$\alpha p_0 p_1 = k (Q_1 Q_2 + P_0 p_2).$$

Il en serait de même des plans qui passent par les autres génératrices.

Cette conique pourra, dans des cas particuliers, se réduire à un système de deux droites, et l'on sera ramené alors aux vingt-sept droites de la surface.

Il est évident du reste que l'on pourrait mettre l'équation sous une forme analogue à la précédente, en prenant Q_1 ou Q_2 au lieu de Q_0 comme facteur commun dans le second membre; chacune de ces deux formes conduirait à deux génératrices nouvelles, et l'on aurait déjà, par là même, neuf de ces droites principales.

Enfin cette forme un peu généralisée permet d'arriver à une détermination des surfaces du troisième ordre plus générale que celle que nous avons vue précédemment.

Car si l'on écrit l'équation générale $S_3 = 0$, sous la forme suivante, dans laquelle les paramètres de P'_0 sont supposés connus, de même que ceux de P_0,

$$P_0 p_0 p_1 = k(Q_0 Q_1 Q_2 + P_0 P'_0 p_2),$$

on verra que les plans Q_0, Q_1 et Q_2 coupent chacun la surface suivant une conique située sur la surface du second degré

$$p_0 p_1 = k P'_0 p_2;$$

et il en résultera que :

Théorème. *Étant donnés un plan et une surface du second degré, coupés par trois plans quelconques, le premier suivant trois droites, la seconde suivant trois coniques, ces six lignes appartiennent à une surface du troisième ordre, qui sera entièrement déterminée si l'on donne en outre un de ses points.*

Ces dernières formes d'équation pourraient se traduire en relations métriques auxquelles nous ne nous arrêterons pas.

Une autre forme plus générale qui conduit immédiatement au même théorème, ainsi qu'aux vingt-sept droites, est la suivante, dans laquelle les paramètres de P_0 sont supposés connus, et où S_2 représente un polynome complet du second degré à trois variables :

$$P_0 S_2 = k Q_0 Q_1 Q_2; \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

on peut même dire que cette forme est la véritable expression du théorème précédent.

Pour en déduire les vingt-sept droites, on devrait la ramener à la forme précédente, ce qui est très-aisé, puisque, comme on l'a vu dans la théorie des surfaces du second degré, on peut écrire :

$$S_2 = p_0 p_1 - k' p'_0 p_2,$$

p'_0 étant un polynome linéaire donné.

Si l'on suppose p'_0 égal successivement à Q_0, Q_1, Q_2, l'équation prendra les formes suivantes :

$$P_0p_0p_1 = Q_0(kQ_1Q_2 + k'P_0p_2), \text{ etc.}$$

Mais ce second membre étant lui-même de la forme

$$Q_0 . S'_2,$$

en posant

$$S'_2 = q_0q_1 - k'_1q'_0q_2,$$

q'_0 étant donné, l'on aura :

$$P_0p_0p_1 = Q_0(q_0q_1 - k'_1q'_0q_2),$$

et en disposant de q'_0 de telle sorte qu'il soit égal à p_0 ou p_1, on aura deux nouvelles équations de même forme que la précédente.

On voit également qu'il en résulte le théorème suivant :

Théorème. *Si, par chacune des génératrices d'un plan tritangent à une surface du troisième ordre, on mène un nouveau plan tritangent, ces trois plans déterminent six génératrices nouvelles qui appartiennent à une même surface du second degré.*

Car on peut mener une droite qui s'appuie sur trois génératrices de S_2 et sur P_0, Q_0; cette droite et P_0, Q_0 déterminent un plan tangent à S_2 et par suite une seconde génératrice de S_2.

Ces diverses formes conduiront aux vingt-sept droites, comme il est facile de s'en assurer.

On peut encore donner à l'équation S_3 la forme suivante, dans laquelle P et P' sont deux fonctions linéaires données :

$$PS_2 = kP'S'_2; \quad \ldots \ldots \quad (3)$$

Cette forme exprime la propriété suivante :

Théorème. *Étant données deux surfaces du second degré qui se coupent, ainsi qu'une conique sur chacune de ces surfaces, la courbe d'intersection et les deux coniques, ainsi que l'intersection de leurs plans, appartiennent à une même surface du troisième ordre.*

Cette surface sera entièrement déterminée si l'on donne en outre un de ses points.

On voit que cette dernière forme ne conduit pas immédiatement, comme les précédentes, à des relations métriques, à part le cas où S_2 et S'_2 seraient des carrés parfaits (*). Pour ces surfaces particulières l'équation se ramènerait à la première forme que nous avons étudiée, et les modifications qu'il faudrait apporter aux énoncés de nos théorèmes généraux, pour les appliquer à ce cas, seraient tellement insignifiantes, que nous croyons inutile de reproduire ici ces énoncés.

Sous les formes (2) et (3), l'équation des surfaces du troisième ordre manifeste toutefois encore une propriété très-générale, en ce qu'elle appartient, comme nous le verrons, à toutes les surfaces algébriques : cette propriété est la généralisation du théorème de Desargues, que nous démontrerons plus bas pour une surface quelconque, et dont nous nous bornerons ici à donner l'énoncé :

Généralisation du théorème de Desargues. *Lorsqu'un système de deux lieux est conjugué à une surface du troisième ordre, une transversale quelconque rencontre ces deux lieux et la surface en neuf points qui sont en involution.*

Cette nouvelle forme du théorème de Desargues conduirait aisément à une expression du théorème de Pascal qui serait plus générale, mais moins intéressante que celle que nous en avons donnée plus haut.

(*) M. Cremona s'est occupé de ce genre particulier de surfaces dans le *Journal de Crelle*, t. LX.

SURFACES DE LA TROISIÈME CLASSE.

CHAPITRE IV.

COORDONNÉES RECTILIGNES TANGENTIELLES.

De même que les théorèmes de Pappus, de Desargues et de Pascal ont leurs corrélatifs pour les surfaces du second degré, de même ces théorèmes étendus aux surfaces du troisième ordre, doivent avoir également leurs corrélatifs. Ici toutefois les théorèmes corrélatifs ne s'appliqueront plus en général à ces mêmes surfaces, mais à celles de la troisième classe, parce qu'au delà du second degré l'ordre et la classe ne sont plus identiques.

Le principe de dualité (*) aurait dû conduire immédiatement les géomètres qui se sont occupés des surfaces du troisième ordre, aux propriétés corrélatives de celles qu'ils avaient démontrées. Aussi avons-nous été étonné de ne trouver aucune mention de ces propriétés, même dans le mémoire de Steiner, l'un des géomètres modernes qui ont cependant considéré de plus haut et appliqué le plus fréquemment ce principe. Ceci nous semble prouver que cette application n'est pas toujours bien simple, et qu'en général on a besoin, pour l'entreprendre avec assurance, d'un fil conducteur qui mette d'abord sur la voie.

Pour nous, ce fil est l'analyse. Elle nous montrera, dans la forme même de l'équation des surfaces de la troisième classe, le germe des théorèmes corrélatifs des précédents. Après avoir établi la propriété fondamentale de ces surfaces, nous montrerons que le principe de dualité permet en effet d'y arriver, et nous ferons même usage de ce principe pour la déduction de quelques corollaires, auxquels l'analyse conduirait du reste sans difficulté.

(*) Une démonstration analytique très-élégante et de nombreuses applications de ce principe ont été données par M. Chasles dans son *Aperçu historique*, pp. 575 et suivantes.

En désignant, comme nous l'avons fait dans l'application des coordonnées tangentielles aux surfaces du second degré, par $\delta_0 \ldots \delta_5$ les distances d'un plan mobile $LX+MY+NZ+P=0$ à six points fixes $0, \ldots. 5$; et en considérant les trois équations simultanées

$$\delta_0 = \lambda\delta_1; \quad \delta_2 = \lambda'\delta_3; \quad \delta_4 = \lambda''\delta_5,$$

nous voyons qu'elles représentent un plan passant par les points Q, Q′, Q″ qui partagent les droites 0, 1 ; 2, 3 ; 4, 5 dans les rapports

$$\frac{1}{\lambda}, \frac{1}{\lambda'}, \frac{1}{\lambda''}.$$

Si ces trois variables sont assujéties à la relation

$$\lambda\lambda'\lambda'' = k = c^{te},$$

l'équation de la surface enveloppe du plan mobile, en coordonnées tangentielles, sera

$$\delta_0\delta_2\delta_4 = k\delta_1\delta_3\delta_5, \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (1')$$

équation qui est du troisième degré en X, Y, Z, et représente par conséquent une surface de la troisième classe que nous appellerons S_3'.

Il est clair que toutes les surfaces de la troisième classe pourront se représenter par une équation de cette forme ; car leur équation générale en coordonnées tangentielles, étant du troisième degré en X, Y, Z, fournira dix-neuf relations nécessaires et suffisantes pour la détermination des dix-neuf paramètres de l'équation (1′).

En outre, on voit qu'il y a précisément autant de systèmes de solutions qui permettent de donner à l'équation de la surface la forme (1′), qu'il y en avait de possibles dans la mise de l'équation des surfaces du troisième ordre sous la forme (1). Et cette remarque seule prouve déjà que, quand nous aurons déterminé, au moyen de l'équation (1′), un élément (point, droite ou plan) corrélatif d'un élément (plan, droite ou point) déterminé par l'équation (1), il existera autant de ces premiers éléments qu'il en existe de ceux-ci.

Cherchons donc la signification géométrique de l'équation (1′).

On voit qu'elle est satisfaite par la combinaison de l'une quelconque des équations

$$\delta_0 = 0, \quad \delta_2 = 0, \quad \delta_4 = 0,$$

avec l'une quelconque des suivantes :

$$\delta_1 = 0, \quad \delta_3 = 0, \quad \delta_5 = 0;$$

or, l'une des combinaisons, telle que

$$\delta_0 = 0, \quad \delta_1 = 0,$$

représente, comme nous le savons, un plan quelconque passant par la droite 0, 1 ; puisque ses équations satisfont à l'équation ($1'$), ce plan est tangent à la surface S'_3; et il s'ensuit que la droite 0, 1 est une génératrice de la surface.

Il en est de même de toutes les droites qui unissent un point pair à un point impair.

Nous obtenons ainsi neuf droites de la surface passant trois à trois par un même point, et qui sont les arêtes de deux systèmes de trois trièdres, tels que chaque sommet d'un trièdre du premier système est le point de concours de trois arêtes appartenant respectivement aux trois trièdres de l'autre système.

Afin de bien faire ressortir la dualité qui existe entre les surfaces du troisième ordre et celles de la troisième classe, nous nous permettrons d'employer une dénomination nouvelle pour désigner un système de sommets tels que ceux que nous considérons, et nous conviendrons de l'appeler *un système de trigones conjugués.*

Dans les surfaces du troisième ordre, nous avons eu un système de trièdres conjugués tels que chaque face de l'un passe par trois génératrices appartenant respectivement aux trois faces de l'autre.

Ici, nous avons de même un système de trigones conjugués tels que chaque sommet de l'un est le point de concours de trois génératrices passant respectivement par les trois sommets de l'autre.

D'après une remarque précédente, autant nous avons de trièdres conjugués pour le troisième ordre, autant nous aurons de trigones conjugués pour la troisième classe.

Or les surfaces du troisième ordre nous donnaient vingt-sept droites formant quarante-cinq triangles tritangents, dont chacun représente une face de l'un des trièdres.

Celles de la troisième classe nous donneront de même vingt-sept droites formant, par leurs points de concours trois à trois, quarante-cinq sommets répondant aux quarante-cinq triangles tritangents.

Au reste, l'existence de ces vingt-sept droites est facile à établir analytiquement; il suffit, pour cela, de considérer l'équation

$$\delta_0\delta_2 = \alpha\delta_1\delta_3$$

qui représente en coordonnées tangentielles un hyperboloïde ayant un quadrilatère gauche commun avec S_3'; comme l'intersection de ces deux surfaces est de la sixième classe, et qu'elles ont déjà un quadrilatère commun, elles auront en outre une conique commune; mais on pourra déterminer α de telle manière que cette conique se réduise à un système de deux droites qui se coupent; de sorte que l'hyperboloïde coupe S_3' suivant deux nouvelles génératrices. Et comme on peut déterminer neuf de ces quadrilatères gauches, on aura dix-huit génératrices nouvelles.

Nous ne nous arrêterons pas davantage aux propriétés qu'offrent ces vingt-sept droites principales; elles nous entraîneraient beaucoup trop loin; comme nous l'avons fait pour les surfaces du troisième ordre, nous voulons nous borner, pour celles de la troisième classe, aux propriétés indispensables à l'établissement de nos théorèmes fondamentaux. Au reste, la dualité entre ces deux genres de figures étant maintenant établie par la coexistence des éléments corrélatifs que nous venons de découvrir, on n'aura plus aucune peine à étendre, au moyen du principe de dualité, aux surfaces de la troisième classe, les propriétés qui ont été démontrées, dans les travaux cités plus haut, pour les surfaces du troisième ordre. Ce principe aurait même pu conduire à la découverte des vingt-sept droites des surfaces de la troisième classe : car ces surfaces sont les corrélatives de celles du troisième ordre; or, à des droites situées dans un même plan répondent, dans la figure corrélative, des droites concourantes; donc aux quarante-cinq triangles de Steiner répondent quarante-cinq sommets de trois droites concourantes.

Faisons toutefois encore la remarque suivante, dont nous aurons besoin pour la construction de la figure de Brianchon, et qui se déduit très-aisément de ce qui précède : c'est que deux sommets 0 et 2 qui n'ont pas de génératrice commune suffisent à la formation de deux trigones conjugués, car les trois génératrices qui passent par chacun de ces sommets se coupent deux à deux en trois points 5, 7, 9; et les génératrices qui passent par ces points vont concourir trois à trois aux deux premiers sommets et à un sommet nouveau.

Nommons *système de tétragones conjugués* un double système de quatre sommets tels que chaque sommet du premier système soit le point de concours de trois génératrices passant respectivement par trois sommets de l'autre. Nous appellerons *sommets opposés* de ces deux tétragones ceux qui ne sont pas situés sur une même génératrice.

Soient, par exemple, les deux systèmes de tétragones conjugués 0, 2, 4, 6 et 1, 3, 5, 7, tels que 0 soit le point de concours de trois génératrices passant respectivement par 3, 5, 7, etc; de sorte que les sommets opposés sont 0 et 1, 2 et 3, 4 et 5, 6 et 7.

Au moyen des deux sommets 0 et 2, formons, comme précédemment, le système de trigones conjugués 028 et 579; puis, au moyen des deux sommets 4 et 6, le système de trigones conjugués 138 et 469. On voit que le système des deux tétragones conjugués peut se décomposer en deux systèmes de trigones conjugués ayant deux sommets communs 8 et 9; et cette décomposition pourra se faire en prenant deux sommets quelconques de l'un des tétragones pour former le premier système de trigones, et les deux sommets non opposés de l'autre pour former le second système.

Ces préliminaires étant posés, il nous sera facile de déduire de l'équation (1′) les théorèmes analogues aux corrélatifs de ceux de Pappus et de Desargues, et à celui de Brianchon.

L'équation (1′), traduite en langage ordinaire, s'énonce :

I′. Extension du théorème corrélatif de celui de Pappus. *Dans un système de deux trigones conjugués inscrits à une surface de la troisième classe, les produits des distances d'un plan tangent quelconque aux sommets de ces deux trigones sont analogiques.*

Il est facile d'en déduire le corollaire suivant, dont l'expression analytique sera, en l'appliquant aux tétragones conjugués donnés en exemple :

$$\delta_0\delta_2\delta_4\delta_6 \div \delta_1\delta_3\delta_5\delta_7,$$

c'est-à-dire :

Corollaire. *Dans un système de deux tétragones conjugués inscrits à une surface de la troisième classe, les produits des distances d'un plan tangent quelconque aux sommets de ces deux tétragones sont analogiques.*

On pourrait étendre le théorème à des systèmes conjugués plus compliqués.

Il est facile de passer du théorème corrélatif de celui de Pappus au corrélatif de celui de Desargues; nous omettrons la démonstration, qui est identique à celle que nous avons donnée dans la théorie des surfaces du second degré.

II'. Extension du théorème corrélatif de celui de Desargues. *Dans un système de deux trigones conjugués inscrits à une surface de la troisième classe, les trois couples de plans menés par une droite quelconque et par ses sommets opposés pris deux à deux, et les trois plans tangents menés par cette droite à la surface forment trois ternes de plans qui sont en involution.*

L'expression analytique la plus simple de cette involution sera, pour les trigones conjugués $0, 2, 4$ et $1, 3, 5$, en appelant $0, T_1$ etc. les angles que le plan mené par 0 et une droite quelconque D fait avec l'un des plans tangents T_1 menés par D à la surface :

$$\frac{\sin(0, T_1)\sin(2, T_1)\sin(4, T_1)}{\sin(1, T_1)\sin(3, T_1)\sin(5, T_1)} = \frac{\sin(0, T_2)\ldots}{\sin(1, T_2)\ldots} = \frac{\sin(0, T_3)\ldots}{\sin(1, T_3)\ldots}.$$

Ce théorème permet de construire autant de plans tangents qu'on voudra à une surface de la troisième classe déterminée par un système de deux trigones conjugués et par un plan tangent. Le corollaire le plus important de ce théorème est le suivant :

Corollaire. *Lorsque deux systèmes de trigones conjugués inscrits à une surface de la troisième classe sont situés de telle manière, que les droites qui unissent quatre couples de sommets des deux trigones s'appuient sur une* *même droite, ou concourent en un même point, les droites qui uniront les deux autres couples de sommets, s'appuieront sur cette même droite, ou concourront en ce même point.*

Soient, en effet, le système de trigones conjugués 0, 2, 4 et 1, 3, 5; et un deuxième système $0'$, $2'$, $4'$, et $1'$, $3'$, $5'$; supposons que les droites $00'$, $11'$, $22'$, $33'$, s'appuient sur une même droite **D**. En menant par cette droite les trois plans tangents T_1, T_2, T_3, ainsi que ceux qui passent par les sommets des deux trigones, et en appliquant le théorème qui précède, nous verrons que les trois ternes de plans

$$T_1, T_2, T_3;\ 0D, 2D, 4D;\ 1D, 3D, 5D,$$

de même que,

$$T_1, T_2, T_3;\ 0'D, 2'D, 4'D;\ 1'D, 3'D, 5'D,$$

sont en involution.

Or les plans **0D** et **0'D**, **1D** et **1'D**, **2D** et **2'D**, **3D** et **3'D** coïncident, par hypothèse; donc **4D** et **4'D**, **5D** et **5'D** coïncideront également en vertu du lemme algébrique que nous avons donné sur l'involution, page 15; les droites $44'$ et $55'$ s'appuient donc aussi sur **D**, ce qui démontre la première partie du corollaire.

La deuxième partie en résulte évidemment.

De ce corollaire nous déduisons le théorème suivant, qui est l'analogue de celui de Brianchon pour les coniques :

IV'. Extension du théorème de Brianchon. *Dans un système de deux tétragones conjugués inscrits à une surface de la troisième classe, les droites qui unissent deux à deux les sommets opposés concourent en un même point.*

Considérons en effet les tétragones conjugués 0246 et 1357, que nous décomposons en deux systèmes de trigones conjugués : le premier 028 et 579; le second 138 et 469.

Les droites qui unissent les sommets 0, 1 et 2, 3 se coupent, puisque les génératrices 0, 3 et 2, 1 se rencontrent au point 9. Nous pouvons donc dire que les quatre droites qui unissent les couples de sommets 0, 1 ; 2, 3; 8, 8 et 9, 9 des deux trigones conjugués se coupent en un même point; donc, en vertu du corollaire précédent, celles qui unissent 4, 5 et 6, 7 se coupent en ce même point.

On a vu, au reste, dans la démonstration générale de ce théorème pour les courbes planes, pourquoi ce sont les sommets opposés seuls qui jouissent de cette propriété.

Il est clair que la combinaison des points d'intersection des génératrices qui unissent en croix deux sommets opposés des tétragones conjugués, comme 0, 3 et 1, 2 ou 2, 3 et 1, 4, donnera lieu à différents autres systèmes de tétragones conjugués, auxquels on pourra appliquer le théorème de Brianchon.

Maintenant que le lecteur a vu la corrélation qui existe entre les propriétés des surfaces de la troisième classe, et celles des surfaces du troisième ordre que nous avons tirées de l'équation $S_3 = ABC - kA'B'C' = 0$, il lui sera facile de traduire également en coordonnées tangentielles les résultats auxquels nous avons été conduit par la considération des autres formes de l'équation $S_3 = 0$, et d'énoncer ces résultats pour les surfaces de la troisième classe.

Nous ne donnerons ici que l'interprétation métrique la plus générale de ces formes d'équation, en renvoyant à la fin du chapitre suivant pour l'intelligence de l'énoncé.

Généralisation du théorème corrélatif de celui de Desargues. *Lorsqu'un système de deux lieux est conjugué à une surface de la troisième classe, si par une droite quelconque on mène trois plans tangents à chacun de ces deux lieux et à la surface, ces neuf plans seront en involution.*

On déduira aisément de ce théorème un corollaire plus général que celui que nous venons de donner sous le nom de théorème de Brianchon.

CHAPITRE V.

SURFACES SUPÉRIEURES.

Avant de traiter de ces surfaces en général, nous commencerons par faire observer que tous les théorèmes auxquels nous sommes arrivé dans l'étude des courbes planes s'étendent tout naturellement aux cônes, et, par suite, aux cylindres, qui ont ces courbes pour bases. Il suffira, pour arriver à cette extension, de remplacer les côtés des polygones inscrits ou circonscrits par les faces des angles polyèdres formés en menant des plans par ces côtés et par le sommet du cône.

Soit en effet S le sommet d'un système de coordonnées coniques, sommet que nous supposerons sur l'axe des Z à une distance h de l'origine des coordonnées rectangulaires X, Y, Z; prenons pour coordonnées coniques du point X, Y, Z la distance s de ce point au sommet, et les coordonnées x et y du pied de cette droite, prolongée jusqu'au plan des XY.

Il est clair que toute équation en x et y seuls représentera un cône de sommet S, et dont la base sera le lieu plan représenté en coordonnées rectilignes par cette équation; et en outre que l'expression linéaire $\delta = ax + by + c$, qui, dans le système des coordonnées rectilignes, est proportionnelle à la distance du point x, y à la droite $\delta = 0$, sera, dans le système des coordonnées coniques, proportionnelle à la distance d'un point quelconque x, y, s au plan S, δ.

Car on a
$$\frac{h}{Z} = \frac{x}{x - X} = \frac{y}{y - Y}$$
d'où
$$x\left(1 - \frac{Z}{h}\right) = X; \quad y\left(1 - \frac{Z}{h}\right) = Y;$$
et
$$ax + by + c = \frac{aX + bY + c\left(1 - \frac{Z}{h}\right)}{1 - \frac{Z}{h}} = \frac{s_0}{s}\left\{aX + bY + c\left(1 - \frac{Z}{h}\right)\right\},$$

en appelant s_0 la distance du sommet S au pied de la projetante conique du point X, Y, Z. Et de ces formules on déduit aisément les propositions énoncées.

Les théorèmes de Pappus, de Desargues, de Pascal, ainsi que leurs généralisations, existeront donc pour les cônes et les cylindres des ordres supérieurs au même titre que pour les courbes planes; et leurs corrélatifs auront lieu de même pour les cônes et les cylindres des classes supérieures.

Pour les autres surfaces d'un ordre supérieur au troisième, il n'est, parmi ces théorèmes, que celui de Desargues qui leur soit généralement applicable.

Nous appelons *système de deux lieux conjugués à une surface du* n^me^ *ordre* un double système de surfaces telles que les intersections de chacune des surfaces du premier système avec celles du second se trouvent sur la surface donnée; de sorte que, si pour la surface $S_n = 0$ le premier système de lieux conjugués se compose des surfaces S_p et S_q, le second des surfaces $S'_{p'}$ et $S'_{q'}$ (en supposant $p+q=p'+q'=n$) l'équation $S_n=0$ pourra s'écrire

$$S_pS_q - kS'_{p'}S'_{p'} = S_n = 0. \qquad (1)$$

Nous ferons remarquer que les surfaces d'ordre supérieur peuvent toujours se mettre sous cette forme; ainsi, par exemple, si les paramètres de P_0 sont donnés, et tous les autres à déterminer, on poura écrire les équations des surfaces du quatrième, du cinquième et du sixième ordre sous les formes suivantes :

$$P_0S_3 - P_1P_2S_2 = S_4 = 0;$$
$$P_0S_4 - P_1S_2S'_2 = S_5 = 0;$$
$$P_0S_5 - kS_2S'_2S''_2 = S_6 = 0;$$

et ainsi de suite.

Cette définition posée, le théorème de Desargues s'énoncera pour toutes les surfaces algébriques :

Généralisation du théorème de Desargues. *Lorsqu'un système de deux lieux est conjugué à une surface algébrique du* n^me^ *ordre, une droite quelconque rencontre la figure formée par ces deux lieux et la surface en* 3n *points qui sont en involution* (*).

Nous démontrerons le théorème pour la forme d'équation (1); on procéderait de même pour les formes analogues.

Soit D une droite qui coupe

S_n en $O_1, O_2, \ldots O_n$; S_p en $M_1 \ldots M_p$; S_q en $M_{p+1} \ldots M_n$; $S'_{p'}$ en $M'_1 \ldots M'_{p'}$ et $S'_{q'}$ en $M'_{p'+1} \ldots M'_n$.

Si par le point $O_1\,(x, y, z)$ on mène à l'axe des z une parallèle qui coupe

(*) Comp. Poncelet, *Traité des propriétés projectives*, 2^me^ éd., t. II, p. 246.

S_p, S_q etc. aux points $N_1 \dots N_p$, $N_{p+1} \dots N_n$, etc. dont les z sont respectivement désignés par $z_1 \dots z_n$, etc. on pourra écrire :

$$S_p = (z - z_1) \dots (z - z_p). \quad S_q = (z - z_{p+1}) \dots (z - z_n);$$

ou

$$S_p = O_1N_1 \dots O_1N_p. \quad S_q = O_1N_{p+1} \dots O_1N_n;$$

d'où

$$S_p . S_q = O_1N_1 \dots O_1N_n;$$

On trouverait de même :

$$S'_{p'} S'_{q'} = O_1N'_1 \dots O_1N'_n.$$

De sorte qu'en vertu de l'équation (1) nous aurons :

$$O_1N_1 \dots O_1N_n = k . O_1N'_1 \dots O_1N'_n.$$

Mais par le théorème de Carnot appliqué aux surfaces, on a aussi :

$$O_1N_1 \dots O_1N_n = h . O_1M_1 \dots O_1M_n;$$
$$O_1N'_1 \dots O_1N'_n = h' . O_1M'_1 \dots O_1M'_n;$$

les rapports h et h' restant constants, quelque soit le point O_1, pour les mêmes directions des sécantes.

Les trois égalités précédentes auront encore lieu si l'on y substitue les points $O_2 \dots O_n$ au point O_1, et l'on en déduira :

$$\frac{O_1M_1 \dots O_1M_n}{O_1M'_1 \dots O_1M'_n} = \frac{O_2M_1 \dots O_2M_n}{O_2M'_1 \dots O_2M'_n} = \dots = \frac{O_nM_1 \dots O_nM_n}{O_nM'_1 \dots O_nM'_n};$$

ce qu'il fallait démontrer.

En traduisant en coordonnées tangentielles les résultats qui précèdent, on démontrera pour les surfaces algébriques le corrélatif du théorème de Desargues, et l'on déduira de ces théorèmes ceux de Pascal et de Brianchon; après les développements que nous avons donnés à ces modes de démonstration dans la théorie des courbes algébriques, et dans celle des surfaces du second et du troisième degré, le lecteur n'éprouvera aucune difficulté à tirer ces déductions; nous nous bornerons donc, pour bien faire voir la dualité qui existe entre les deux genres de théorèmes, à mettre en regard, dans le tableau suivant, les propriétés correspondantes des surfaces du n^{me} ordre et de celles de la n^{me} classe.

Dans la colonne de gauche, S_n représentera une surface du n^{me} ordre, S_1 un plan; dans celle de droite, S_n représentera une surface de la n^{me} classe, S_1 un point.

n^{me} ORDRE.

S_n est coupée par une droite en n points : si la droite varie le lieu de ces points constitue S_n.

S_1, S_m, S_n ont $m.n$ points communs.

Si S_1 varie, le lieu de ces points communs à S_m et S_n sera tel que tout plan S_1 le coupe en mn points; c'est une courbe d'ordre mn.

$S_n = S_m - kS_{m'} = 0$ est l'équation d'une surface qui renferme tous les points communs à S_m et $S_{m'}$.

Si ces lieux S_m et $S_{m'}$ sont du n^{me} ordre, ils sont conjugués à S_n.

THÉORÈME DE DESARGUES.

Lorsqu'un système de deux lieux est conjugué à une surface du n^{me} ordre, une droite quelconque rencontre la figure formée par ces deux lieux et la surface en $3n$ points qui sont en involution.

THÉORÈME DE PASCAL.

Si deux systèmes de lieux conjugués à une surface du n^{me} ordre sont tels que $n+1$ points d'intersection de ces systèmes soient en ligne droite, il y aura $n-1$ autres points d'intersection de ces systèmes sur cette même droite.

n^{me} CLASSE.

Par une droite on peut mener n plans tangents à S_n : si la droite varie, l'enveloppe de ces plans constitue S_n.

S_1, S_m, S_n ont $m.n$ plans tangents communs.

Si S_1 varie, l'enveloppe de ces plans tangents communs à S_m et S_n sera telle que par tout point S_1 on peut lui mener mn plans tangents; c'est une courbe de classe mn.

$S_n = S_m - kS_{m'} = 0$ est l'équation d'une surface à laquelle sont tangents tous les plans tangents à la fois à S_m et $S_{m'}$.

Si ces lieux S_m et $S_{m'}$ sont de la n^{me} classe, ils sont conjugués à S_n.

THÉORÈME CORRÉLATIF.

Lorsqu'un système de deux lieux est conjugué à une surface de la n^{me} classe, si par une droite quelconque on mène à ces deux lieux et à la surface $3n$ plans tangents, ces plans seront en involution.

THÉORÈME DE BRIANCHON.

Si deux systèmes de lieux conjugués à une surface de la n^{me} classe sont tels que $n+1$ plans tangents communs à ces systèmes se coupent suivant une droite, il y aura $n-1$ autres plans tangents à ces systèmes, qui se couperont suivant cette même droite.

Ces théorèmes présenteront pour l'étude des surfaces algébriques les mêmes avantages qu'offrent, pour l'étude des courbes planes, les théorèmes analogues. Il faudrait, pour les appliquer, aborder la théorie des surfaces particulières, ce que nous ne pourrions faire sans abandonner l'objet essentiel de notre travail, l'extension des théorèmes fondamentaux de la géométrie supérieure. Au reste, au delà du troisième ordre et de la troisième classe, il n'existe plus, en général, de systèmes de polyèdres conjugués réels, de sorte que les théorèmes les plus intéressants font défaut. On pourrait, à la vérité, en procédant comme nous l'avons fait dans l'*Addition* à la théorie des courbes planes, arriver de même à généraliser le théorème de Pascal pour les surfaces : le lecteur effectuera aisément lui-même cette généralisation, dont l'idée, au surplus, se rencontre dans Gergonne (*).

Nous arrêterons donc ici nos recherches générales sur les surfaces algébriques, dans les systèmes de coordonnées rectilignes ponctuelles et tangentielles.

Dans le chapitre suivant nous nous occuperons de l'extension du théorème de Newton aux surfaces.

CHAPITRE VI.

COORDONNÉES TRIÉDRIQUES ET DIÉDRIQUES.

Dans les chapitres précédents nous avons étendu aux surfaces algébriques les théorèmes de Pappus, de Desargues, de Pascal et de Brianchon, en suivant une voie toute semblable à celle que nous avons suivie dans la géométrie plane.

L'extension du théorème de Newton aux courbes planes supérieures a nécessité l'emploi de coordonnées appropriées à cette recherche; et nous avons fait usage, dans ce but, des coordonnées bipolaires.

Pour étendre ce théorème aux surfaces, l'analogie nous conduit naturellement à imaginer un système de coordonnées dans l'espace analogues aux coordonnées bipolaires planes.

Un point étant déterminé dans ce dernier système par l'intersection de deux droites passant par deux points fixes, il le sera d'une manière analogue dans l'espace par l'intersection de trois plans passant par trois droites fixes. Mais ces trois droites peuvent être situées, ou non, dans un même plan, et, suivant le cas, on aura deux systèmes différents de coordonnées, dont le second renferme le premier comme cas particulier.

C'est par le premier système, comme le plus simple, que nous commencerons.

(*) *Annales de Gergonne*, t. XVI.

Nous nous bornerons à montrer, par quelques exemples, l'utilité de ces coordonnées dans la recherche des théorèmes analogues à celui de Newton, ou à quelques autres modes de description angulaire des coniques; mais nous jugeons inutile d'appliquer ici les moyens de généralisation que nous avons indiqués au chapitre des coordonnées bipolaires.

Nous diviserons le présent chapitre en trois paragraphes :

Le premier traitera des coordonnées triédriques particulières;

Le deuxième des coordonnées diédriques;

Le troisième des coordonnées triédriques générales.

§ I. Coordonnées triédriques particulières.

Si par chacun des trois côtés d'un triangle, et par un point de l'espace, on fait passer un plan, ce point sera déterminé par l'intersection de ces trois plans, et, en conséquence, par les angles dièdres que chacun d'eux fait avec le plan de la base; ici, comme dans la géométrie plane, ce sont les cotangentes de ces angles qui nous serviront de coordonnées.

Soit OPQ le triangle pris pour base; φ, χ, ψ les angles dièdres que forment avec cette base les plans OPM, OQM, PQM; et α, β, γ les cotangentes de ces angles : Fig. XVI.

$$\alpha = \cot \varphi; \quad \beta = \cot \chi; \quad \gamma = \cot \psi.$$

Pour transformer, de la manière la plus simple, des coordonnées rectangulaires en coordonnées triédriques, prenons le plan de la base pour plan des xy, le sommet O pour origine, le côté $\mathrm{OP} = a$ pour axe des x; désignons enfin par e l'abscisse, et par f l'ordonnée du point Q; par b et c les côtés OQ et PQ.

Abaissons l'ordonnée z du point M; et de son pied N les perpendiculaires aux trois côtés de la base, $\mathrm{NQ}' = y$, NP′ et NO′. Ces trois droites détermineront, avec MQ′, MP′ et MO′ respectivement, les angles φ, χ et ψ.

Le triangle MNQ′ donne d'abord

$$z = y \operatorname{tg} \varphi. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Les équations de la droite OQ étant

$$y = \frac{f}{e} x, \quad z = 0,$$

celle du plan OQM sera de la forme :

$$ey - fx + kz = 0,$$

d'où nous déduirons

$$\cos\chi = \frac{k}{\sqrt{e^2 + f^2 + k^2}},$$

et par suite

$$\operatorname{tg}\chi = \frac{\sqrt{e^2 + f^2}}{k} = \frac{b}{k} = \frac{bz}{fx - ey} \quad \text{. . . . . (2)}$$

Les équations de la droite PQ étant

$$y = \frac{f}{e - a}(x - a), \quad z = 0,$$

celle du plan PQM sera de la forme

$$(e - a)\,y - f\,(x - a) + kz = 0;$$

d'où nous déduirons

$$\cos\psi = \frac{k}{\sqrt{(e - a)^2 + f^2 + k^2}},$$

et par suite

$$\operatorname{tg}\psi = \frac{\sqrt{(e - a)^2 + f^2}}{k} = \frac{c}{k} = \frac{cz}{f\,(x - a) - (e - a)\,y} \quad \text{. . . . . . (3)}$$

Les équations (1), (2) et (3) sont les relations cherchées ; elles donnent

$$\frac{y}{z} = \cot\varphi = \alpha,$$

$$\frac{f}{b}\frac{x}{z} - \frac{e}{b}\frac{y}{z} = \cot\chi = \beta,$$

$$\frac{f}{c}\frac{x - a}{z} - \frac{e - a}{c}\frac{y}{z} = \cot\psi = \gamma;$$

d'où l'on déduit :

$$\frac{y}{z} = \alpha. \quad \ldots\ldots \quad (1')$$

$$\frac{x}{z} = \frac{b}{f}\beta + \frac{c}{f}\alpha. \quad \ldots\ldots \quad (2')$$

$$\frac{a}{z} = \frac{a}{f}\alpha + \frac{b}{f}\beta - \frac{c}{f}\gamma. \quad \ldots\ldots \quad (3')$$

On voit par là que $\frac{x}{z}$, $\frac{y}{z}$ et $\frac{1}{z}$ sont des fonctions linéaires de α, β et γ, et par conséquent que l'équation d'une surface sera du même degré dans les deux systèmes de coordonnées.

Commençons par interpréter les équations les plus simples en coordonnées triédriques.

Désignons par ABC le triangle de la base, et par α, β, γ les cotangentes des drièdres qui ont pour arêtes les côtés opposés à ces trois sommets.

$\alpha = 0$ (ou $\beta = 0$, ou $\gamma = 0$) représente un plan perpendiculaire à la base et passant par BC (ou par AC, ou par AB);

$\alpha = \infty$ (ou $\beta = \infty$, ou $\gamma = \infty$) représente le plan de la base;

$\alpha = c^{te}$ représente un plan quelconque passant par BC, etc.;

$\alpha + k\beta = 0$, un plan perpendiculaire à la base et passant par C, etc.;

$\alpha + k\beta = c^{te}$, un plan quelconque passant par C, etc.;

$\alpha + k\beta + l\gamma = 0$, un plan perpendiculaire à la base;

$\alpha + k\beta + l\gamma = c^{te}$, un plan quelconque.

De là résulte que les équations simultanées $\alpha = 0$, $\beta = 0$ représentent la perpendiculaire élevée en C à la base, etc., et $\alpha = c^{te}$, $\beta = c^{te}$, une oblique passant par C, etc.

Toute équation homogène en α, β, γ, représente un cylindre perpendiculaire à la base; car transformée en coordonnées rectangulaires, elle donnera une équation en x et y seulement.

L'équation

$$\alpha\beta + m\beta\gamma + n\gamma\alpha = 0$$

représente un cylindre perpendiculaire à la base et passant par A, B, C.

L'équation

$$(\alpha - \alpha')(\beta - \beta') + m(\beta - \beta')(\gamma - \gamma') + n(\gamma - \gamma')(\alpha - \alpha') = 0$$

représente un cône passant par A, B, C, et de sommet α', β', γ'.

L'équation
$$\alpha\beta + m\beta\gamma + n\gamma\alpha = c^{te}$$
représente une surface du second degré passant par A, B, C, et ayant la base pour plan principal.

L'équation
$$\alpha\beta + m\beta\gamma + n\gamma\alpha + m'\alpha + n'\beta + p'\gamma = c^{te}$$
représente une surface du second degré passant par A, B, C; tandis qu'une équation qui renfermerait γ^2 représenterait une surface qui ne passerait point par C, etc.

Dans la suite nous conviendrons de désigner par (α) l'angle dont la cotangente est α; et nous appellerons quelquefois pôles, par abréviation, les sommets de la base du tétraèdre.

Ces quelques préliminaires exposés, nous commencerons par chercher le théorème qui correspond, dans l'espace, à celui que Newton a donné pour le plan.

Dans ce dernier théorème, deux angles constants tournent autour de leurs sommets, de manière que le point d'intersection de deux de leurs côtés décrive une droite : dans l'espace, nous devons donc avoir trois dièdres constants tournant autour de leur arêtes, de manière que le point d'intersection de trois de leurs faces décrive un plan; et il s'agira de chercher le lieu des points d'intersection des trois autres faces.

Soient donc trois dièdres constants (a), (b), (c) dont les faces supérieures forment avec la base des dièdres (α), (β), (γ) satisfaisant à la relation
$$m\alpha + n\beta + p\gamma + q = 0;$$
les faces inférieures formeront, avec la même base, des dièdres
$$(\alpha') = (\alpha) - (a), \text{ etc.}; \quad \text{d'où} \quad \alpha = \frac{a\alpha' - 1}{\alpha' + a}, \text{ etc.};$$
valeurs qui, substituées dans l'équation précédente, donneront
$$m(a\alpha' - 1)(\beta' + b)(\gamma' + c) + \cdots + q(\alpha' + a)(\beta' + b)(\gamma' + c) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Cette équation est satisfaite par
$$\alpha' = -a \text{ et } \beta' = -b; \text{ ou } \alpha' = -a \text{ et } \gamma' = -c; \text{ ou } \beta' = -b \text{ et } \gamma' = -c.$$

Elle représente donc un cône dont le sommet a pour coordonnées triédriques $-a, -b, -c$. Donc :

I. Théorème analogue a celui de Newton. *Si trois dièdres constants, ayant pour arêtes les trois côtés d'un triangle, tournent autour de ces arêtes de manière que le point d'intersection des faces supérieures décrive un plan, celui des faces inférieures décrira un cône du troisième ordre qui passera par les trois pôles, et dont le sommet sera le symétrique de celui du tétraèdre déterminé par la base et les trois dièdres constants.*

Il existe des cas particuliers où ce théorème se simplifie considérablement; nous n'examinerons que les plus importants.

Le terme en $\alpha\beta\gamma$ de l'équation (4) a pour coefficient

$$ma + nb + pc + q;$$

c'est-à-dire qu'il est nul si les trois dièdres constants satisfont à l'équation du plan donné. Donc :

II. Premier cas particulier. *Lorsque les trois dièdres constants à la base d'un tétraèdre tournent autour de leurs arêtes de manière que le point d'intersection des faces supérieures décrive un plan, le point d'intersection des faces inférieures décrira un cône du second degré passant par les pôles, et ayant pour sommet le symétrique de celui du tétraèdre.*

Supposons $q=0$: le plan donné sera perpendiculaire à la base; et en outre soient $a=b=c=0$: c'est-à-dire que les dièdres constants sont droits. L'équation (4) devient dans ce cas :

$$m\beta'\gamma' + n\alpha'\gamma' + p\alpha'\beta' = 0,$$

qui se déduit du reste immédiatement de l'équation du plan en y changeant α en $-\frac{1}{\alpha'}$, etc.

Cette dernière équation représente un cylindre du second degré perpendiculaire à la base, et passant par les sommets de celle-ci. Donc :

III. Deuxième cas particulier. *Si trois dièdres droits qui ont pour arêtes les trois côtés d'un triangle tournent autour de ces arêtes de manière que le point d'intersection de trois de leurs faces décrive un plan perpendiculaire à* *celui du triangle, le point d'intersection des trois autres faces décrira un cylindre du second degré passant par les sommets du triangle et perpendiculaire à son plan.*

Poursuivons ces analogies entre les propriétés du plan et celles de l'espace, et cherchons quel est le théorème qui correspond, dans l'espace, au théorème généralisé de Newton.

Considérons trois dièdres constants (a), (b), (c), dont les faces supérieures forment avec la base des dièdres (α), (β), (γ) satisfaisant à la relation

$$m\alpha\beta + n\alpha\gamma + p\beta\gamma + m'\gamma + n'\beta + p'\alpha + q = 0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Les faces inférieures formeront avec la base des dièdres

$$(\alpha') = (\alpha) - (a), \text{ etc.}; \quad \text{d'où} \quad \alpha = \frac{a\alpha' - 1}{\alpha' + a}, \text{ etc.},$$

valeurs qui, substituées dans l'équation (5), donneront :

$$m(a\alpha'-1)(b\beta'-1)(\gamma'+c) + \cdots + m'(c\gamma'-1)(\alpha'+a)(\beta'+b) + \cdots + q(\alpha'+a)(\beta'+b)(\gamma'+c) = 0. \ (6)$$

D'où résulte le théorème suivant :

IV. Théorème analogue au théorème généralisé de Newton. *Lorsque trois dièdres constants, qui ont pour arêtes les trois côtés d'un triangle, tournent autour de ces arêtes de manière que le point d'intersection des faces supérieures décrive une surface du second degré passant par les pôles, le point d'intersection des autres faces décrira une surface du troisième ordre passant également par les pôles.*

Ce théorème, de même que le premier, donne lieu à des cas particuliers très-remarquables.

Si l'on considère le terme en $\alpha'\beta'\gamma'$, on verra qu'il a pour facteur

$$mab + nac + pbc + m'c + n'b + p'a + q,$$

et qu'il disparaîtra si les trièdres constants satisfont à l'équation de la surface (5); donc :

V. Cas particulier. *Lorsque les trois dièdres constants à la base d'un tétraèdre tournent autour de leurs arêtes de manière que le sommet du* *tétraèdre décrive une surface du second degré passant par les pôles, le point d'intersection des trois autres faces des dièdres décrira également une surface du second degré passant par les pôles et par le symétrique du sommet du tétraèdre primitif.*

Ce théorème ramène, comme il est aisé de le voir, la construction d'une surface du second degré déterminée par neuf points à celle d'une autre surface également déterminée par neuf points; mais comme rien ne dit que cette dernière est plus aisée à construire que l'autre, la question n'est pas résolue par le théorème qui répond, dans l'espace, au théorème de Newton dans le plan.

Parmi les autres modes de description d'une surface du second degré par le mouvement du sommet d'un trièdre, il en est un assez remarquable pour que nous nous y arrêtions un moment; on reconnaîtra immédiatement l'analogie qui existe entre ce mode de description, et un mode bien connu de description des coniques.

Supposons qu'entre les trois dièdres à la base d'un tétraèdre il existe une relation de la forme :

$$\pm(\alpha) = (\beta) + (\gamma); \quad \text{d'où} \quad \pm\alpha = \frac{\beta\gamma - 1}{\beta + \gamma}, \quad \text{ou} \quad \alpha\beta + \alpha\gamma \mp \beta\gamma \pm 1 = 0;$$

ce qui conduit à l'énoncé suivant :

VI. Théorème. *Si l'on fait mouvoir les trois faces d'un tétraèdre de manière que la somme algébrique des dièdres à la base reste constamment nulle, le sommet du tétraèdre décrira une surface du second degré passant par les sommets de la base, et ayant celle-ci pour plan principal.*

Il est à remarquer que dès que l'on donne, outre les sommets de la base, un point de cette surface, on peut en déterminer six au-dessus de la base, et six symétriques en dessous, à cause de la forme de l'équation; car si le point donné est déterminé par

$$\alpha = a, \quad \beta = b, \quad \gamma = c,$$

un second point le sera par

$$\alpha = a, \quad \beta = c, \quad \gamma = b;$$

et l'on trouvera de même quatre autres points en attribuant à α les valeurs b ou c.

C'est ce qui explique comment cette surface est complétement déterminée par un tétraèdre inscrit (pourvu que l'on sache quel est le sommet mobile).

Le même théorème subsiste évidemment si la somme algébrique des dièdres, au lieu d'être nulle, est égale à deux droits.

Si cette somme était égale à une autre constante quelconque, le sommet décrirait une surface du troisième ordre.

§ II. Coordonnées diédriques.

Au moyen d'un système de coordonnées triédriques plus général que celui dont il vient d'être question, les théorèmes précédents prendront une extension plus considérable.

Mais avant d'aborder cette généralisation, nous commencerons par l'étude d'un système de coordonnées diédriques propres à manifester certains modes de génération des surfaces réglées. Ces coordonnées diédriques nous conduiront tout naturellement à un système triédrique, qui renfermera comme cas particulier celui dont nous venons de faire usage.

Considérons deux droites dans l'espace, D_0 et D_1, faisant entre elles un angle (δ), et un plan quelconque, parallèle à ces deux droites, et que nous nommerons base : si par un point M de l'espace, et par chacune de ces droites, nous menons des plans MD_0, MD_1 faisant avec la base des dièdres (α), (β), les cotangentes α et β de ces deux dièdres seront les coordonnées diédriques de l'intersection des deux plans.

Pour les exprimer en coordonnées rectangulaires, soit prise la projection de D_0 sur la base pour axe des Y, la plus courte distance de D_0 et D_1 pour axe des Z, et la perpendiculaire à ces deux droites pour axe des X.

Appelons z_0 et z_1 les distances des deux droites à la base.

Le plan MD_0 a une équation de la forme

$$z - z_0 + k_0 x = 0; \quad \text{d'où} \quad k_0 = -\frac{z - z_0}{x},$$

et

$$\cos(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{1 + k_0^2}};$$

par suite

$$\alpha = \frac{1}{k_0} = -\frac{x}{z - z_0}.$$

Le plan MD_1 a une équation de la forme

$$z - z_1 + k_1 (y - \delta x) = 0, \quad \text{d'où} \quad k_1 = -\frac{z - z_1}{y - \delta x};$$

et

$$\cos(\beta) = \frac{1}{\sqrt{1 + k_1^2 (1 + \delta^2)}} = \frac{\sin(\delta)}{\sqrt{\sin^2(\delta) + k_1^2}} = \frac{\sigma}{\sqrt{\sigma^2 + k_1^2}}, \text{ en faisant } \sin(\delta) = \sigma;$$

on en déduit

$$\beta = \frac{\sigma}{k_1} = -\sigma \frac{y - \delta x}{z - z_1}.$$

Si l'on a une relation entre α et β, elle représentera une surface réglée engendrée par l'intersection des plans MD_0 et MD_1; et si cette relation est de l'une des formes

$$\alpha + b\beta + c = 0,$$

ou

$$\alpha\beta + a\alpha + b\beta + c = 0,$$

elle représentera une surface du second degré, dont les droites D_0 et D_1 seront des génératrices.

On déduit de là les théorèmes suivants :

VII. Théorème. *Si deux dièdres constants tournent autour de leurs arêtes de manière que l'intersection de deux de leurs faces décrive une surface du second degré qui renferme ces arêtes, l'intersection des deux autres faces décrira de même une surface du second degré renfermant ces arêtes.*

Ce théorème a pour corollaire celui que M. Chasles a donné dans son *Aperçu historique* (*) comme analogue, dans l'espace, à celui de Newton.

VIII. Théorème. *Si deux plans tournent autour de deux droites respectivement situées dans l'un deux, de manière à former constamment entre eux un dièdre droit, leur intersection décrira une surface du second degré renfermant ces deux droites.*

Ce théorème a été donné par Binet. Poncelet et Steiner en ont donné également d'autres analogues, et qu'il serait aisé de déduire de celui-ci (**).

(*) *Aperçu historique*, p. 405.

(**) Steiner, *Systematische Entwickelung*, etc., pp. 218 et suiv.

L'analyse montre immédiatement que c'est le cas seul du dièdre droit qui conduit à la génération d'une surface du second degré, tandis que, dans le cas d'un autre dièdre constant, la surface s'élève au quatrième ordre. La solution de ce cas a été proposée par Steiner, à la page 302 de son ouvrage, comme problème à résoudre.

On démontrera très-simplement, au moyen des coordonnées diédriques, différents autres théorèmes proposés par le géomètre de Berlin, et en particulier les théorèmes XVII, XIX et XX (*).

§ III. Coordonnées triédriques générales.

Pour arriver à un système de coordonnées triédriques analogues à celles dont nous venons de faire usage, imaginons une troisième droite D_2 parallèle, comme D_0 et D_1, à la base; ses équations seront :

$$z = z_2,$$
$$y + ax + b = 0.$$

Celle du plan MD_2 sera donc :

$$z - z_2 + k_2 (y + ax + b) = 0;$$

d'où comme plus haut :

$$\cos(\gamma) = \frac{\sin(\delta_2)}{\sqrt{\sin^2(\delta_2) + k_2^2}} \text{ et } \gamma = \frac{\sigma_2}{k_2} = -\sigma_2 \frac{y + ax + b}{z - z_2}.$$

Si par le point M, et par chacune de nos droites D_0, D_1, D_2, nous menons un plan, les cotangentes α, β, γ des angles que ces trois plans font avec la base seront les nouvelles coordonnées triédriques du point M.

Une équation entre α, β, γ représentera donc une surface engendrée par le mouvement de ce point, ou des trois plans qu'il détermine.

Si cette équation est du premier degré, elle représentera en général une

(*) Steiner, *Systematische Entwickelung*, pp. 299 et suiv.

surface du troisième ordre passant par les trois droites fixes. Il en sera encore de même si l'équation est du second degré, mais privée des carrés des coordonnées; et enfin la surface sera également du troisième ordre, si l'équation renferme en outre le produit des trois coordonnées. Si, au contraire, l'équation renferme les carrés des coordonnées, la surface sera du sixième ordre; et ainsi de suite.

Ces considérations permettront de généraliser les théorèmes précédents; ainsi par exemple :

IX. Théorème. *Si trois dièdres constants, dont les arêtes sont parallèles à une même base, tournent autour de ces arêtes de manière que le point d'intersection de trois de leurs faces parcoure une surface du troisième ordre renfermant ces arêtes, le point d'intersection des autres faces en fera de même.*

X. Théorème. *Si trois plans tournent autour de trois droites parallèles à une même base, de manière que la somme algébrique des dièdres qu'ils font avec cette base soit constante, leur point d'intersection décrira une surface du troisième ordre renfermant ces trois droites.*

On pourrait enfin imaginer des coordonnées triédriques plus générales encore que les précédentes, en supposant que les trois droites D_0, D_1, D_2 ne sont plus parallèles à un même plan; mais dans ce cas une surface d'un degré simple dans ce système de coordonnées serait d'un ordre généralement plus élevé que dans le système précédent.

Les coordonnées triédriques conduisent aisément, comme on vient de le voir, à la détermination des surfaces engendrées par le sommet d'un trièdre dont les faces tournent autour d'une droite suivant une loi donnée, et par suite à tous les théorèmes analogues, dans l'espace, à celui de Newton. La combinaison de ces théorèmes entre eux conduirait de même à la description de courbes dans l'espace par le mouvement du sommet d'un trièdre. Nous laisserons au lecteur le soin de tirer ces déductions.

Après avoir, dans ce qui précède, étendu aux surfaces algébriques les théorèmes fondamentaux de la géométrie supérieure qui permettent de décrire une conique déterminée par cinq points, nous ferons remarquer qu'aucun de ces théorèmes ne paraît propre à résoudre directement la question de la description d'une surface du second degré déterminée par neuf points. Cette question, qui a été résolue pour la première fois par M. Hesse, exige une analyse moins simple que celle dont nous avons fait usage jusqu'à présent.

Dans un prochain mémoire, nous nous occuperons de l'extension des théorèmes fondamentaux de la géométrie supérieure aux courbes gauches algébriques.

TABLE DES MATIÈRES.

LIVRE I.

GÉOMÉTRIE SUPÉRIEURE PLANE.

CHAPITRE I.

COORDONNÉES RECTILIGNES PONCTUELLES.

CHAPITRE II.

COORDONNÉES RECTILIGNES TANGENTIELLES.

ADDITION.

CHAPITRE III.

COORDONNÉES BIPOLAIRES.

LIVRE II.

GÉOMÉTRIE SUPÉRIEURE DANS L'ESPACE.

SURFACES DU SECOND DEGRÉ.

CHAPITRE I.

COORDONNÉES RECTILIGNES PONCTUELLES.

SURFACES DU SECOND DEGRÉ.

CHAPITRE II.

COORDONNÉES RECTILIGNES TANGENTIELLES.

SURFACES DU TROISIÈME ORDRE.

CHAPITRE III.

COORDONNÉES RECTILIGNES PONCTUELLES.

SURFACES DE LA TROISIÈME CLASSE.

CHAPITRE IV.

COORDONNÉES RECTILIGNES TANGENTIELLES.

SURFACES SUPÉRIEURES.

CHAPITRE V.

COORDONNÉES CONIQUES ET COORDONNÉES RECTILIGNES.

CHAPITRE VI.

COORDONNÉES DIÉDRIQUES ET TRIÉDRIQUES.

ERRATA.

Page 11, ligne 16, *au lieu de :* l'équation *lisez :* l'équation (1).
— 12, — 3, — d'un point *lisez :* d'un point quelconque.
— 16, — 17, — $\alpha_{n-1}+\xi'$ *lisez :* $\alpha_{n-1}+\xi_1$.
— 25, — 1, — Théorème de Pappus *lisez :* Extension du théorème de Pappus.
— 34, — 20, — $Cn-2$ *lisez :* C_{n-2}.
— 38, — 7, en remontant, *au lieu de :* $\Delta_0^{(n-1)}\Delta_{n-1}^{(n-1)}=k\Delta_{0'}^{(n-1)}\Delta_{n'-2'}^{(n-1)}$ *lisez :* $\Delta_0^{(n-1)}\ldots\Delta_{n-1}^{(n-1)}=k\Delta_{0'}^{(n-1)}\ldots\Delta_{n'-1'}^{(n-1)}$.
— 58, — 2, — — $s^{n-1}, s^{n'-1'}$ *lisez :* $s_{n-1}, s_{n'-1'}$.
— 40, — 8, *au lieu de :* plus haut *lisez :* plus haut (p. 15).
— 41, — 14, — coordonnées rectilignes *lisez :* coordonnées rectilignes ponctuelles.
— 62, — 1, en remontant, *au lieu de :* p. 246; 1871. *lisez :* p. 246. — (1871).
— 66, — 7, *au lieu de :* $m=1$ *lisez :* $n=1$.
— 91, — 1, en remontant, *au lieu de :* 1871. *lisez :* (1871).
— 104, — 9, *au lieu de :* surface. *lisez :* surface

Fondements d'une Géométrie supérieure Cartésienne.