Infiniment petits en économie

Par Jacques BAIR et Valérie HENRY

Mots clés : infiniment petit ou infinitésimal ; marginalisme ; coût marginal ; utilité marginale ; taux marginal de substitution ; droite de budget.

Résumé. A partir de la création de l'analyse mathématique, principalement par Newton et Leibniz, les économistes découvrirent qu'ils pouvaient exploiter avec succès les infiniment petits dans leurs raisonnements. Voici un aperçu des premières apparitions de l'analyse infinitésimale en économie.

Les premiers théoriciens de l'économie moderne, avec à leur tête l'anglais David Ricardo (1772 – 1823), n'employaient pratiquement aucune technique scientifique : ils faisaient, selon les mots suggestifs de sir J.R. Hicks, qui reçut le prix Nobel d'Economie en 1972, « des mathématiques dans les coulisses », c'est-à-dire pratiquement sans le savoir. Ainsi, Ricardo a mis en évidence un *raisonnement différentiel* dans son analyse sur la rente versée aux propriétaires fonciers : pour lui, la rente que touchent les propriétaires terriens sur les parcelles productives augmente au fur et à mesure que des parcelles moins rentables sont mises en culture ; cette rente était donc fonction des qualités de la dernière terre mise en culture, et non pas de la seule valeur du travail. Il s'agissait déjà d'une ébauche du marginalisme dont il sera question ci-après.

Naissance de l'économie mathématique avec Cournot

C'est le philosophe et mathématicien français Antoine Augustin Cournot (1801 – 1877) qui apparaît aujourd'hui comme le véritable fondateur de l'économie mathématique. Dans son ouvrage *Recherches sur les principes mathématiques de la théorie des richesses* (1838), il montra pour la première fois l'importance de la notion générale de fonction et des résultats en analyse mathématique pour résoudre des problèmes économiques relatifs à la théorie des richesses (voir *Tangente* 135, pp. 34 – 36). Il fut encore un grand pédagogue, notamment l'auteur d'un intéressant cours d'analyse mathématique intitulé *Traité élémentaire de la théorie des fonctions et du calcul infinitésimal* (1841) : il y réalisa notamment une synthèse des résultats connus à l'époque, et en particulier fit appel au concept d'infiniment petit pour calculer la dérivée d'une fonction (voir encadré 1). Ses travaux montrèrent que la dérivée de certaines fonctions joue un rôle important en économie mathématique, intervenant désormais dans le discours par l'adjonction de l'adjectif « marginal » accompagnant le nom de la fonction. Par exemple, la dérivée du coût de production s'appelle le *coût marginal* ; celui-ci mesure approximativement le supplément de coût par unité supplémentaire. En effet, on peut raisonner comme suit. On considère un bien fabriqué en quantité Q ; son coût est donné par une égalité du type

$$C = f(Q)$$

Dans une première approche discrète, le coût marginal est défini comme étant le coût additionnel engendré par la production d'une unité supplémentaire du produit, soit

$$C_m(Q) = C(Q+1) - C(Q)$$

Ensuite, on remplace l'unité ajoutée par une petite variation ΔQ de quantité et l'on considère alors le taux de variation $\tau(Q)$du coût défini par

$$\tau(Q) = \frac{C(Q+\Delta Q) - C(Q)}{\Delta Q}$$

lorsque $\Delta Q = 1$, on a bien l'égalité entre $C_m(Q)$et $\tau(Q)$.

Pour Q fixé, $\tau(Q)$ dépend de l'accroissement ΔQ qui est pris de plus en plus petit, ce qui est généralement concevable dans la mesure où la production est d'habitude grande vis-à-vis de ΔQ. Si ΔQ désigne un infiniment petit, conformément au raisonnement de Cournot, alors la partie observable, c'est-à-dire techniquement la partie standard (voir, par exemple, le livre *Analyse infinitésimale – le calculus redécouvert*, par J. Bair et V. Henry, Academia Bruylant, 2008), du taux de variation est indépendante de ΔQ : il s'agit du nombre dérivé $C'(q)$. Dans la pratique, la valeur de $C'(q)$ est assez bien approchée par celle de $C_m(Q)$. Voilà pourquoi les économistes utilisent la dérivée du coût, qu'ils appellent également coût marginal.

A. A. COURNOT

ŒUVRES COMPLÈTES

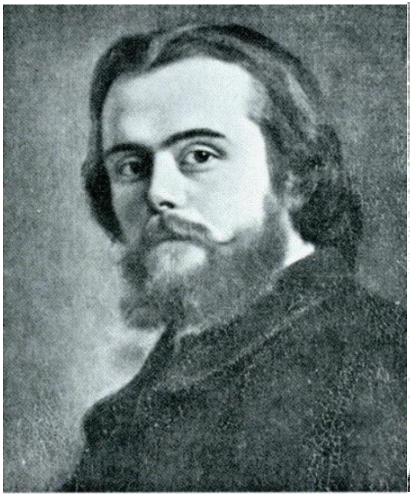
TRAITÉ ÉLÉMENTAIRE
DE LA THÉORIE DES FONCTIONS
ET DU CALCUL INFINITÉSIMAL

PARIS
LIBRAIRIE PHILOSOPHIQUE J. VRIN

L'apport, pourtant substantiel, de Cournot dans le domaine économique ne fut reconnu qu'à titre posthume. On peut néanmoins penser que le français eut une influence certaine sur l'éclosion de la théorie dite *du marginalisme*, grâce à laquelle les mathématiques entrèrent de façon définitive en économie.

Le marginalisme

A la fin du 19ème siècle, trois savants, le français (qui a vécu à Lausanne) Léon Walras (1834 – 1910), l'austro-anglais William Stanley Jevons (1835 – 1882) et l'autrichien Carl Menger (1840 - 1921), provoquèrent ce qu'on appelle désormais « *la révolution marginaliste* », en travaillant indépendamment les uns des autres. Pour eux, la valeur d'un bien n'est plus, comme pour leurs prédécesseurs, seulement objective en ce sens qu'elle peut se traduire par la quantité de travail nécessaire pour le produire, mais est aussi subjective : elle se base sur l'aptitude qu'a une quantité de ce bien à satisfaire les besoins des agents économiques, ce qui fait appel à la notion d'utilité marginale.



Léon Walras (1834 – 1918) William Stanley Jevons (1835 – 1882) Carl Menger (1840 – 1921)

Considérons le cas d'un consommateur qui achète deux biens, en quantités q_1, q_2. Il en retire une satisfaction mesurée par ce qu'on appelle en économie une *fonction d'utilité* définie par

$$U = f(q_1, q_2)$$

Bien entendu, il cherche à rendre sa satisfaction la plus grande possible compte tenu du budget disponible pour l'acquisition de ces biens. Mathématiquement, il souhaite maximiser sa fonction d'utilité sous une contrainte budgétaire. Ce problème d'optimisation admet (généralement) une solution faisant intervenir les utilités marginales, c'est-à-dire les accroissements d'utilité occasionnés par l'acquisition d'une unité supplémentaire de chaque bien (pris isolément). Par un raisonnement similaire à celui figurant ci-dessus à propos du coût marginal, ces utilités marginales peuvent être estimées par des taux de variation de la fonction d'utilité (en ne faisant varier qu'une seule quantité à la fois), ou encore par les dérivées (ici partielles) de la fonction f (voir encadré 2).

Depuis ces événements historiques, les économistes ont souvent recours, implicitement ou explicitement, aux infiniment petits dans leurs raisonnements. Comme l'analyse non standard, qui a été mise au point fin du 20ème siècle par Abraham Robinson (voir *Tangente* 149, 2012, pp. 26 – 28), rend désormais rigoureuse l'exploitation des infiniment petits en analyse mathématique, elle peut dès lors leur être très utile. En effet, la théorie des infiniment petits constitue un outil bien adapté à leur démarche puisqu'elle leur permet de passer, d'une manière simple et naturelle, d'un contexte discret (dans lequel se situent les observations empiriques) à un modèle continu (où le concept mathématique de dérivée se révèle fort efficace).

Encadré 1. Calcul d'une dérivée selon Cournot

Dans son cours d'analyse de 1841, Cournot se propose de calculer la dérivée de la fonction définie par

$$y = x^3 + a\,x^2 + b\,x + c$$

Il procède de deux manières différentes, dont celle-ci qui nous intéresse ici. Il cherche en premier lieu la différence Δy :

$$\begin{aligned} \Delta y &= (x+\Delta x)^3 + a\,(x+\Delta x)^2 + b\,(x+\Delta x) + c - (x^3 + a\,x^2 + b\,x + c) \\ &= (3\,x^2 + 2\,a\,x + b)\,\Delta x + (3\,x + a)\Delta x^2 + \Delta x^3 \end{aligned}$$

Il traite les différences $\Delta\,x$, $\Delta\,y$ comme des quantités infiniment petites, qu'il désigne par dx , dy. Il obtient donc

$$dy = (3\,x^2 + 2\,a\,x + b)\,dx + (3\,x + a)dx^2 + dx^3$$

Puis, il note que les termes $(3\,x + a)dx^2$ et dx^3 sont des infiniment petits du second et du troisième ordre, qui, écrit-il, doivent être négligés vis-à-vis des quantités infiniment petites du premier ordre dy et $(3\,x^2 + 2\,a\,x + b)\,dx$.

Donc, il a simplement

$$dy = (3\,x^2 + 2\,a\,x + b)\,dx$$

Il en conclut dès lors

$$y' = \frac{dy}{dx} = 3\,x^2 + 2\,a\,x + b$$

Encadré 2. Recherche du maximum de la fonction d'utilité sous une contrainte budgétaire

Il s'agit de rechercher le maximum de la fonction f définie par

$$U = f(q_1\,, q_2) \text{ sous la contrainte } p_1q_1 + p_2q_2 = b$$

où q_1, q_2 désignent les quantités des deux biens achetés, U mesure l'utilité (ou satisfaction) correspondante, p_1, p_2 sont les prix unitaires, tandis que b est le budget consacré à ces deux acquisitions.

Nous supposerons satisfaites toutes les hypothèses requises pour le développement mathématique qui va suivre.

Grâce à l'égalité de contrainte, on peut écrire

$$q_2 = \frac{1}{p_2}\text{b} - \frac{p_1}{p_2}q_1$$

En conséquence, il s'agit de maximiser la fonction g, en la seule variable q_1, définie par

$$g(q_1) = f\left(q_1\,, \frac{1}{p_2}b - \frac{p_1}{p_2}q_1\right)$$

Au maximum recherché, la dérivée de g doit s'annuler, ce qui peut s'écrire sous la forme

$$\frac{\partial f}{\partial q_1} + \frac{\partial f}{\partial q_2}\left(-\frac{p_1}{p_2}\right) = 0 \text{ c'est-à-dire } \frac{\frac{\partial f}{\partial q_1}}{\frac{\partial f}{\partial q_2}} = \frac{p_1}{p_2}$$

On peut encore (en suivant un raisonnement similaire à celui réalisé à propos du coût marginal, mais en ne modifiant à chaque fois qu'une seule des deux variables q_1 ou q_2), assimiler chacune des dérivées partielles à l'utilité marginale correspondante, c'est-à-dire à l'accroissement d'utilité occasionné par une augmentation unitaire de la variable concernée tandis que l'autre variable reste constante ; on en conclut donc

$$\frac{utilit\acute{e}\ marginale\ de\ q_1}{p_1} = \frac{utilit\acute{e}\ marinale\ de\ q_2}{p_2}$$

Ce résultat admet une interprétation graphique intéressante faisant appel aux courbes d'indifférence du consommateur, c'est-à-dire aux courbes composées de tous les points q_1, q_2 pour lesquels l'utilité est constante : on cherche alors un point qui est le plus haut dans le plan (car l'utilité est d'autant plus grande que le courbe s'éloigne de l'origine) et qui est situé sur la droite de budget (afin de respecter la contrainte). On montre géométriquement qu'en ce point, la droite de budget est tangente à une courbe d'indifférence.

Illustrons ceci par un exemple concret et simplifié : les deux biens consommés sont de la nourriture et des vêtements, achetés aux prix unitaires de 1 et 2 unités monétaires respectivement, avec un budget de 80. Le maximum cherché est visiblement atteint au point A (d'abscisse 40 et d'ordonnée 20) où la droite de budget (de coefficient directeur égal à l'opposé du rapport des prix, soit $-\frac{p_1}{p_2}$) vient toucher tangentiellement la courbe d'indifférence (dont le coefficient directeur de la tangente est égal à l'opposé du rapport des dérivées partielles de l'utilité, soit $-\frac{\frac{\partial f}{\partial q_1}}{\frac{\partial f}{\partial q_2}}$).

A noter enfin que l'égalité entre les coefficients directeurs de la droite de budget et de la tangente à la courbe d'indifférence admet une interprétation économique. En effet, le rapport des dérivées partielles représente le *taux marginal de substitution*, noté *TMS* en abrégé, qui indique (approximativement) quelle quantité d'un bien le consommateur est disposé à sacrifier en échange d'une unité supplémentaire de l'autre bien : le *TMS* est donc égal, au point d'équilibre du consommateur, au rapport des prix. Ainsi, pour notre exemple, la *TMS* est égal à $\frac{1}{2}$: en conséquence, une augmentation unitaire de nourriture (à partir de la solution optimale donnée par le point *A* sur la figure) entraîne une diminution (car le coefficient directeur de la tangente est négatif) d'(environ) une demi-unité de vêtement pour conserver la même satisfaction. (source : ***solvay****.ulb.ac.be/cours/chapelle/200405/Micro-c1-2004-conso.ppt*)