

ETUDE PAR LA METHODE DES ELEMENTS FINIS D'UN ECOULEMENT  
DE STOKES DANS UN CANAL A PAROI CRENELEE

par

J.F. DEBONGNIE

Chercheur à la Faculté  
des Sciences Appliquées

Extrait de la Collection des Publications  
de la Faculté des Sciences Appliquées de  
l'Université de Liège (n° 48 - 1974)

ETUDE PAR LA METHODE DES ELEMENTS FINIS D'UN ECOULEMENT  
DE STOKES DANS UN CANAL A PAROI CRENELEE

par

J.F. DEBONGNIE \*

Chercheur à la Faculté  
des Sciences Appliquées

RESUME

Après un bref rappel du principe de HELMHOLTZ et de l'analogie entre un écoulement de STOKES et une plaque de KIRCHHOFF, on étudie l'écoulement dans un canal dont une paroi présente des cavités périodiques.

Les résultats de cette étude montrent clairement que pour des profondeurs de creux suffisantes, il y a formation de tourbillons dans le fond des cavités, même pour les très faibles valeurs du nombre de REYNOLDS.

SUMMARY

Following a brief review of HELMHOLTZ's principle and of the analogy relating KIRCHHOFF's plate bending theory and a STOKES flow, such a flow is analyzed in a channel presenting periodically crenelated cavities.

The results show clearly that for sufficiently deep cavities vortices are generated even at very low REYNOLDS numbers.

ZUSAMMENFASSUNG

Nach einer kurzen Übersicht des Helmholtzschen Prinzip und der Ähnlichkeit zwischen Kirchhoffscher Plattenbiegung und Stokeschem Fluss, wird der letzte in einem Kanal mit periodischen Höhlungen in einer Wand behandelt.

Die Schlussfolgerung dieses Studiums ist dass im Falle von genügend tiefen Höhlen Wirbel erscheinen; dieses sogar für sehr kleine Reynoldschen Zahlen.

---

\* Ingénieur civil Electricien-mécanicien, tendance mécanique 1973.

1.2. Dans le cas des écoulements plans, on peut, pour imposer l'incompressibilité, recourir à une fonction de courant  $\psi$  telle que

$$u_1 = \partial_2 \psi \quad (8)$$

$$u_2 = -\partial_1 \psi \quad (9)$$

Dans ce cas, la fonctionnelle se transforme en

$$J = \int_A \frac{\mu}{2} [(\partial_{11} \psi)^2 + (\partial_{22} \psi)^2 - 2 \partial_{11} \psi \partial_{22} \psi + 4 (\partial_{12} \psi)^2] dA - \int_{\Gamma_2} (\rho g_t + \frac{\partial \bar{t}_n}{\partial s} \psi) ds - \int_{\Gamma_2} \bar{b}_t \frac{\partial \psi}{\partial n} ds, \quad (10)$$

où  $\rho g_t$  est la composante tangentielle de la pesanteur, tandis que  $n$  et  $s$  désignent respectivement les coordonnées normale et tangentielle au contour. La tangente est prise dans le sens de parcours laissant l'aire à gauche.

La théorie des plaques de KIRCHHOFF possède un principe analogue : la flèche naturelle d'une plaque est celle qui minimise la fonctionnelle

$$I = \int_A \frac{D}{2} [(\partial_{11} w)^2 + (\partial_{22} w)^2 + 2\nu \partial_{11} w \partial_{22} w + 2(1-\nu)(\partial_{12} w)^2] dA - \int_{\Gamma_2} (\bar{T}_n + \frac{\partial \bar{M}_{nt}}{\partial s}) w ds + \int_{\Gamma_2} \bar{M}_n \frac{\partial w}{\partial n} ds, \quad (11)$$

où  $w$  est la flèche,  $T_n$  l'effort tranchant,  $M_{nt}$  le moment de torsion,  $M_n$  le moment de flexion, ces trois dernières grandeurs étant évidemment rapportées à l'unité de longueur.

On peut donc établir la correspondance

PLAQUE	FLUIDE
flèche	fonction de courant
raideur en flexion	viscosité dynamique
moments	tensions de viscosité
énergie de déformation	fonction de dissipation
coefficient de POISSON	- 1

Cette analogie permet de traiter les problèmes d'écoulements de STOKES plans en utilisant des programmes d'étude des plaques, ce qui présente un réel intérêt, car il n'est nullement nécessaire de programmer de nouveaux éléments finis.

$$\partial_2 p = \mu (\partial_{11} + \partial_{22}) u_2 = 0 . \quad (15)$$

D'autre part, la relation (12) entraîne

$$\sigma_{22} = 0 . \quad (16)$$

Des raisonnements semblables peuvent être tenus en ce qui concerne la section (2). Dès lors, on peut écrire le système suivant de conditions aux limites (figure 2.2)

- sur les parois :  $u = v = 0$

- aux sections (1) et (2) :

$$v = 0 ; \quad \frac{\partial p}{\partial s} = 0 ; \quad \sigma_{22} = 0 . \quad (17)$$

Traduites en termes de la fonction de courant et de la traction normale de surface, elles deviennent :

- sur les parois :  $\psi = \text{cte} ; \quad \frac{\partial \psi}{\partial n} = 0$

- aux sections (1) et (2) :

$$\frac{\partial \bar{\tau}_n}{\partial s} = 0 ; \quad \frac{\partial \psi}{\partial n} = 0 .$$

Sur une des deux parois, on peut poser  $\psi = 0$  .

Sur l'autre, il faut choisir une valeur constante de  $\psi$  différente de 0 .

Rappelons que cette valeur détermine le débit passant entre les deux parois, puisque

$$\int_{\Gamma} u_n ds = \int_{\Gamma} \frac{\partial \psi}{\partial t} ds = \psi_1 - \psi_0 . \quad (19)$$

Remarquons encore que la similitude dynamique est conservée si le rapport

$$\zeta = \frac{\bar{\mu} \bar{\psi}}{\bar{p} \bar{\ell}^2}$$

reste constant,  $\bar{\mu}$ ,  $\bar{\psi}$ ,  $\bar{p}$ ,  $\bar{\ell}$  étant des grandeurs caractéristiques de l'écoulement. Dans le cas présent, nous poserons

$$\bar{\mu} = 1$$

$$\bar{\psi} = \psi_{\max} = 1 , \quad (21)$$

$\bar{\ell}$  étant fixée par la géométrie de l'écoulement.

La pression dépend alors des autres paramètres, mais elle n'apparaît pas directement dans les conditions aux limites.

Les conditions finalement adoptées sont schématisées sur la figure 2.3.

Ils sont répertoriés dans le tableau suivant :

CAS	$\lambda$	$\lambda/h$	L
1	2	0,667	4
2	3	1,667	4
3	4	2,667	4
4	4	2,000	4
5	4	1,620	4
6	4	1,000	4
7	4	0,500	4

L'élément fini utilisé est un élément quadrangulaire de plaque strictement conforme, obtenu par assemblage d'éléments triangulaires de degré trois (7). Les résultats sont consignés dans le tableau suivant :

NOEUD	CAS 1	CAS 2	CAS 3	CAS 4	CAS 5	CAS 6	CAS 7
1	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	0	0
3	0	0	0	0	0	0	0
4	0	0	0	0	0	0	0
5	0	0	0	0	0	0	0
6	0,321	0,322	0,323	0,323	0,323	0,323	0,323
7	0,312	0,312	0,305	0,307	0,307	0,306	0,304
8	0,293	0,288	0,284	0,283	0,283	0,280	0,277
9	0,290	0,277	0,259	0,257	0,257	0,254	0,248
10	0,293	0,278	0,252	0,250	0,250	0,246	0,239
11	0,824	0,824	0,842	0,842	0,842	0,842	0,842
12	0,830	0,830	0,839	0,839	0,839	0,839	0,837
13	0,803	0,800	0,794	0,792	0,792	0,789	0,783
14	0,787	0,762	0,720	0,717	0,717	0,711	0,704
15	0,777	0,737	0,679	0,675	0,675	0,670	0,664
16	1	1	1	1	1	1	1
17	1	1	1	1	1	1	1
18	1	1	1	1	1	1	1
19	0,987	0,959	0,928	0,925	0,925	0,928	0,939
20	0,975	0,937	0,889	0,885	0,886	0,887	0,894
21	1	1	1	1	1	1	1
22	<u>1,0079</u>	0,999	0,978	0,988	0,989	<u>1,0154</u>	<u>1,0156</u>
23	<u>1,0132</u>	0,991	0,953	0,967	0,969	<u>1,0152</u>	<u>1,0333</u>
24	1	1	1	1	1	1	1
25	<u>0,9997</u>	<u>1,0027</u>	0,997	<u>1,0002</u>	<u>1,0017</u>	<u>1,0077</u>	<u>0,9969</u>
26	<u>1,0011</u>	<u>1,0043</u>	0,988	0,996	<u>1,0013</u>	<u>1,0165</u>	<u>0,9947</u>
27	1	1	1	1	1	1	1
28	1	1	1	1	1	1	1
29	1	1	1	1	1	1	1

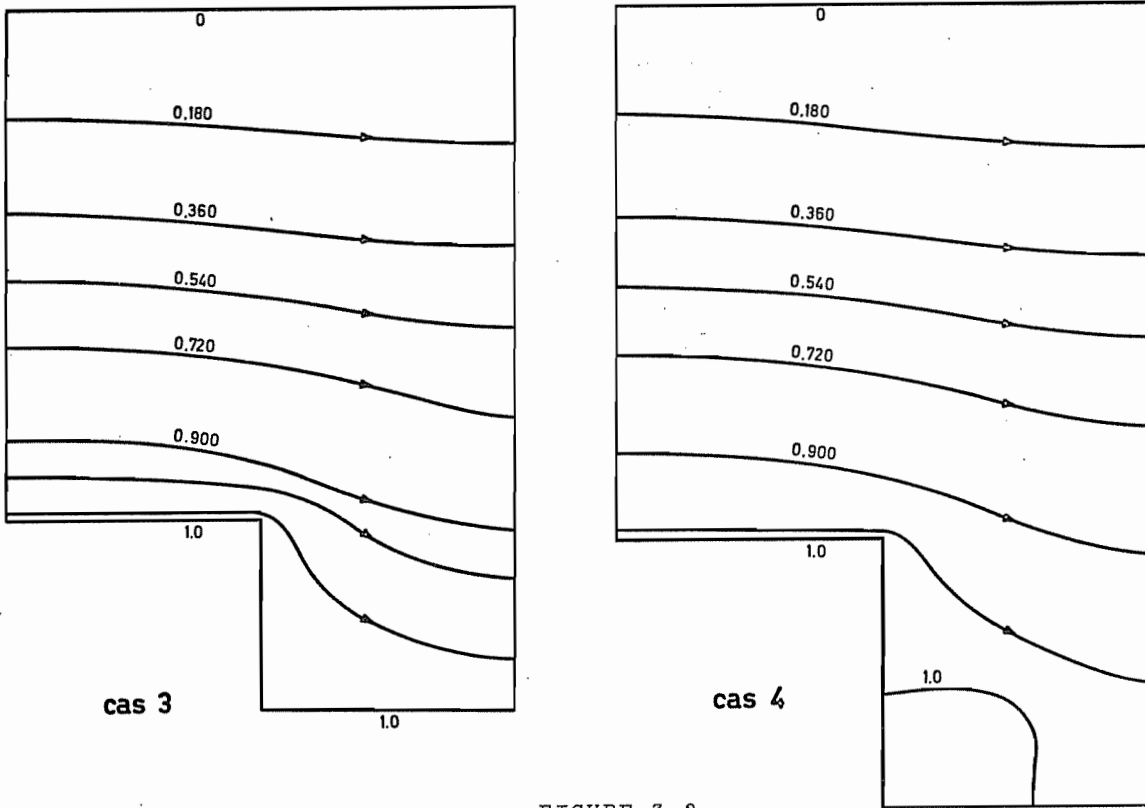


FIGURE 3.2

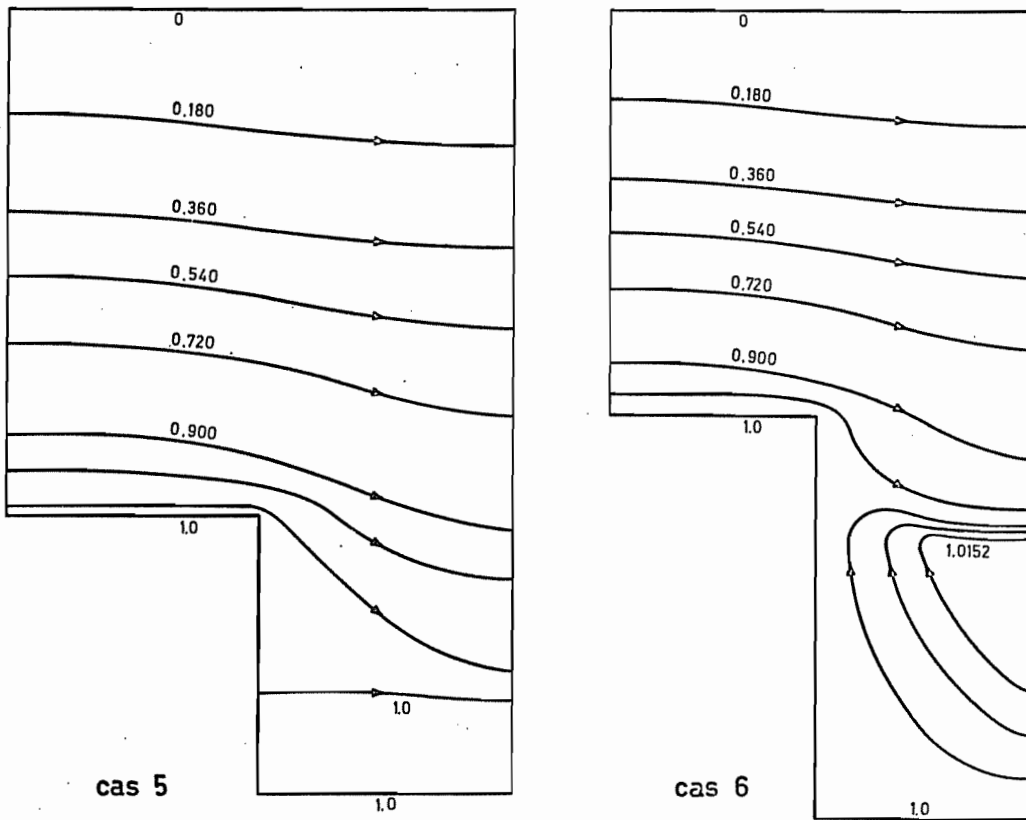


FIGURE 3.3

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] HELMHOLTZ, H., "Zur Theorie der Stationäre Strome in Reinbenden Flüssigkeiten". Verhandlungen der naturhistorisch-medizinischen Vereins zu Heidelberg, Band 5, Oct., 1868.
- [2] PIN TONG, "The Finite Element Method for Fluid Flow". Recent Advances in Matrices Methods of Structural Analysis and Design, edited by R.H. Gallagher, Y. Yamada, J.T. Oden.
- [3] ODEN, J.T. and SOMOGYI, D., "Finite Element Applications in Fluid Mechanics". Proceedings ASCE, Engineering Mechanics Division, 1969, I, 95, pp. 821 à 826.
- [4] GLANSDORFF, P. et PRIGOGINE, I., "Structure, Stabilité et Fluctuations". Masson, 1971.
- [5] PIN TONG, "Slow Particulate Viscous Flow in Channels and Tubes. Applications in Biomechanics". TASME, Journal of Applied Mechanics, December 1971.
- [6] ODEN, J.T., "Finite Element Applications in Mathematical Physics". The Mathematics of Finite Elements and Applications, edited by J.R. Witheman Academic Press, London & New York.
- [7] SANDER, G., "Applications de la Méthode des Eléments Finis à la Flexion des Plaques". Collection des Publications de la Faculté des Sciences Appliquées de l'Université de Liège, n° 15, 1969.

\* \*  
\*