

UNIVERSITE DE LIEGE  
FACULTE DES SCIENCES APPLIQUEES

**MODELISATION  
DE  
PROBLEMES HYDROELASTIQUES  
PAR  
ELEMENTS FINIS  
APPLICATION AUX LANCEURS AEROSPATIAUX**

par

**J.F. DEBONGNIE**

I.C.M.E. (Mécan.), Lg, 1973

UNIVERSITÉ DE LIÈGE  
*Laboratoire d'Aéronautique*  
Rue du Val Benoît 75 — 4000 LIÈGE  
BELGIQUE

ANNEE ACADEMIQUE  
1977 - 1978

THESE PRESENTEE POUR  
L'OBTENTION DU TITRE  
DE DOCTEUR EN  
SCIENCES APPLIQUEES

15

16

Qu'il me soit permis de dédier ce travail à la mémoire du Professeur Fraeijs de Veubeke qui en fut le promoteur. Par leur clarté et leur rigueur, ses enseignements m'ont donné le goût de la recherche. La confiance qu'il m'a accordée et les conseils qu'il m'a prodigués furent pour moi autant d'encouragements.

J'adresse également mes remerciements à tous les membres du Laboratoire d'Aéronautique de l'Université de Liège qui, par leurs compétences diverses et leurs remarques judicieuses, m'ont apporté une aide précieuse dans ce travail.



Résumé de la thèse

"MODELISATION DE PROBLEMES HYDROELASTIQUES PAR  
ELEMENTS FINIS. APPLICATION AUX LANCEURS AEROSPATIAUX"

présentée par J.F. DEBONGNIE pour l'obtention du titre de  
Docteur en Sciences Appliquées.

Le chapitre 1 est consacré à l'étude des diverses formu-  
lations existantes du problème coque-fluide vu sous l'angle du  
fluide. Après comparaison, l'une de celles-ci est choisie; ses  
bases théoriques sont considérées alors dans un cadre purement  
lagrangien, ce qui permet notamment d'obtenir une connexion plus  
naturelle entre le fluide et la structure.

Au deuxième chapitre, on envisage la possibilité de résoudre  
le problème des vibrations du système fluide-structure. Une mé-  
thode de résolution originale, adaptée aux systèmes de grande  
dimension, est présentée.

Le troisième chapitre est consacré à l'étude des structures  
de révolution, qui sont les plus fréquentes dans les lanceurs.  
Les coques sont envisagées en premier lieu. Pour celles-ci, on  
introduit la distinction entre expressions propres et impropres  
des déformations, selon que les modes rigides sont ou ne sont  
pas représentés. Les conditions de symétrie sur l'axe sont étu-  
diées en détail, par une voie nouvelle basée sur le fait que  
l'énergie de déformation doit rester fixée. D'autre part, une  
théorie des coques quasi-coniques, permettant de conserver les  
modes rigides même après discrétisation, est développée. Les  
raidisseurs sont étudiés en détail, les gauchissements étant  
pris en compte. Les diverses modélisations possibles des sand-  
wiches et multicouches sont exposées et comparées. Enfin, une  
étude de l'erreur due à la répartition des raidisseurs ou un mo-  
dèle continu équivalent est donnée.

UNIVERSITÉ DE LIÈGE  
Laboratoire d'Aéronautique  
Rue du Val Bénédict 75 - 4000 LIÈGE  
BELGIQUE

Le quatrième chapitre est consacré à la discrétisation de l'ensemble fluide-structure par éléments finis développés en séries de Fourier. L'utilisation de celles-ci est discutée dans ses implications pratiques, notamment les restrictions relatives à l'anisotropie et la prise en compte de fixations asymétriques. La génération des éléments eux-mêmes est ensuite envisagée. Un certain nombre de solutions proposées dans ce contexte sont nouvelles.

On étudie, au chapitre 5 la prise en compte de l'effet des sollicitations statiques initiales. Le point de vue adopté est celui d'une étude générale de l'élasticité "quasi-linéaire" caractérisée par la possibilité d'une analyse en deux étapes linéaires. Le domaine de validité de cette méthode est d'abord clairement précisé puis ses différents cas d'application sont présentés. Ce chapitre se termine par deux paragraphes traitant de problèmes spécifiques aux réservoirs pressurisés.

Enfin, le dernier chapitre illustre les considérations qui précèdent par un certain nombre d'applications numériques.

T A B L E   D E S   M A T I E R E S  
=====

INTRODUCTION

CHAPITRE I - LE FLUIDE ET SA CONNEXION AVEC LA STRUCTURE

1. <u>Généralités</u> .....	1.2
2. <u>Les diverses formulations existantes</u> .....	1.3
2.1 - Formulations basées sur la discrétisation des déplacements du fluide .....	1.3
2.1.1 - La méthode d'ARCHER et RUBIN .....	1.3
2.1.2 - Le modèle équilibre de HUNT .....	1.4
2.1.3 - Le modèle déplacement de PINSON et BROWN	1.5
2.2 - Formulations par équations intégrales .....	1.7
2.3 - Méthodes basées sur la discrétisation d'une variable scalaire du fluide .....	1.10
2.3.1 - Discrétisation de la pression .....	1.10
2.3.2 - Discrétisation du potentiel des vitesses	1.12
3. <u>Conclusions de l'examen des diverses formulations</u> ....	1.15
4. <u>Déduction de la formulation de TONG dans un cadre    purement lagrangien</u> .....	1.16
4.1 - Principe mixte pour les fluides parfaits .....	1.16
4.2 - Linéarisation géométrique dans le fluide .....	1.21
4.3 - Cas des fluides incompressibles .....	1.23
4.4 - Prise en compte quasi-statique des gaz compressibles .....	1.27
4.5 - Formulation du problème fluide-structure .....	1.29
4.6 - Formulations simplifiées .....	1.31
4.6.1 - L'hypothèse de TONG .....	1.31
4.6.2 - Omission des termes en $\dot{p}$ .....	1.32
4.6.3 - Omission des termes provenant du gaz ...	1.32
4.7 - Calcul de la pression .....	1.33

CHAPITRE II - RESOLUTION DU PROBLEME AUX VALEURS  
PROPRES SUPPOSE DISCRETISE

1. <u>Introduction</u> .....	2.2
2. <u>Principe variationnel discrétisé</u> .....	2.2
3. <u>Singularité de la matrice N et conditions de conservation du volume du fluide</u> .....	2.5
4. <u>Technique d'assemblage et de résolution du problème aux valeurs propres de l'ensemble fluide-structure avec réduction du système</u> .....	2.10

CHAPITRE III - DESCRIPTION DES STRUCTURES DE  
REVOLUTION

1. <u>Introduction</u> .....	3.2
2. <u>Théorie élémentaire des coordonnées curvilignes</u> .....	3.4
2.1 - Changement de repère .....	3.4
2.2 - Systèmes orthogonaux .....	3.7
2.3 - Convention de sommation .....	3.7
2.4 - Tenseur métrique .....	3.8
2.5 - Transformation des dérivées .....	3.8
2.6 - Transformation du gradient .....	3.9
2.7 - L'identité de JACOBI .....	3.9
2.8 - Transformation de la divergence .....	3.10
2.9 - Dérivées covariantes .....	3.11
2.10 - Exemple .....	3.12
2.11 - Surfaces et coques .....	3.15
2.12 - Courbure .....	3.16
3. <u>Théorie des coques à géométrie de révolution</u> .....	3.18
3.1 - Considérations géométriques .....	3.18
3.2 - Choix d'un champ de déplacements .....	3.22

3.3 - Simplification des déformations .....	3.24
3.4 - Equations d'équilibre .....	3.33
3.5 - Equations constitutives .....	3.38
3.6 - Coques de KIRCHHOFF-LOVE .....	3.45
3.7 - Autres théories des coques axisymétriques .....	3.48
3.7.1 - Expressions impropres de la torsion ....	3.48
3.7.2 - Expressions propres de la torsion .....	3.49
3.8 - Conditions au voisinage de l'axe .....	3.50
3.8.1 - Cas des coques de HENCKY-REISSNER .....	3.52
3.8.2 - Cas des coques de KIRCHHOFF-LOVE .....	3.57
3.8.3 - Expressions des conditions sur l'axe dans le cadre d'un développement des déplacements en séries de FOURIER .....	3.58
4. <u>Théorie des coques quasi-coniques</u> .....	3.62
4.1 - La théorie des coques plates de MARGUERRE .....	3.63
4.2 - Coques quasi-coniques .....	3.69
4.3 - Equations d'équilibre .....	3.73
5. <u>Coques épaisses et volumes</u> .....	3.77
5.1 - Coques épaisses .....	3.78
5.2 - Volumes de révolution .....	3.79
5.3 - Volumes incompressibles .....	3.81
6. <u>Raidisseurs de révolution</u> .....	3.82
6.1 - Equations générales .....	3.82
6.2 - Les gauchissements de flexion .....	3.88
6.3 - Le gauchissement de torsion .....	3.95
6.4 - Remarque générale sur les gauchissements .....	3.99
6.5 - Sollicitations quelconques .....	3.100
6.6 - L'approximation de WAGNER .....	3.101
6.7 - Omission du terme de gauchissement .....	3.101
6.8 - Déport du centre de gravité .....	3.103

7. <u>Modélisation des matériaux multicouches</u> .....	3.105
7.1 - Coque de KIRCHHOFF-LOVE équivalente .....	3.106
7.2 - Coque de HENCKY-REISSNER équivalent à un sandwich .....	3.108
7.3 - Empilement de coques d'épaisseur modérée .....	3.110
7.4 - Empilement de volumes et de coques minces .....	3.111
8. <u>Diverses modélisations des raidisseurs</u> .....	3.111

CHAPITRE IV - METHODE DE SEMI-DISCRETISATION PAR  
ELEMENTS FINIS DEVELOPPES EN SERIES  
DE FOURIER

1. <u>Introduction</u> .....	4.2
2. <u>Généralités concernant les développements en séries de FOURIER</u> .....	4.4
2.1 - Découplage de la raideur .....	4.4
2.2 - Développement du second membre .....	4.10
2.3 - Calcul numérique des coefficients de FOURIER ...	4.14
3. <u>Les fixations asymétriques en statique</u> .....	4.19
3.1 - Fixation à une fonction connue sur la circonférence .....	4.19
3.2 - Fixations en quelques points d'une circonférence .....	4.20
3.2.1 - Le nombre de fixations est supérieur ou égal au nombre de modes de FOURIER .....	4.21
3.2.2 - Le nombre de fixations est strictement inférieur au nombre d'analyses .....	4.25
4. <u>Elément de coque à géométrie de révolution</u> .....	4.27
4.1 - Déplacements et connexion .....	4.27
4.2 - Calcul de la matrice de raideur .....	4.29
4.3 - Passage aux axes structuraux. Compatibilité ....	4.32
4.4 - Matrice de masse .....	4.33
4.5 - Termes thermiques .....	4.35

5. <u>Eléments de tores isoparamétriques</u> .....	4.37
5.1 - Définition des éléments isoparamétriques. Connexion .....	4.38
5.2 - Représentation des modes rigides .....	4.39
5.3 - Expression des déformations et de l'énergie ...	4.40
5.4 - Intégration numérique .....	4.41
5.5 - Un nouvel algorithme de génération des éléments isoparamétriques .....	4.45
5.5.1 - Définition des coordonnées et des dépla- cements. Connexion .....	4.45
5.5.2 - Matrice jacobienne, déterminant jacobien, matrice des mineurs .....	4.46
5.5.3 - Déformations .....	4.47
5.5.4 - Energie de déformation .....	4.47
5.5.5 - Matrice de raideur .....	4.48
5.5.6 - Réduction du degré .....	4.49
5.5.7 - Résumé de l'organisation des calculs ...	4.50
6. <u>Les éléments de fluide</u> .....	4.51
6.1 - Eléments finis de volume fluide .....	4.51
6.2 - Eléments de connexion fluide-structure .....	4.52
6.3 - Elément de connexion fluide-surface libre .....	4.54
6.4 - Possibilité de "mater" la surface libre .....	4.56
7. <u>Problèmes particuliers</u> .....	4.56
7.1 - Eléments touchant l'axe .....	4.56
7.2 - Calcul des tensions .....	4.59
7.2.1 - Moyennes d'éléments .....	4.59
7.2.2 - Moyennes d'interfaces .....	4.62

CHAPITRE V - EFFETS DE LA SOLLICITATION STATIQUE  
INITIALE

1. <u>Introduction</u> .....	5.2
------------------------------	-----

2. <u>Etude des structures dans l'hypothèse des petites déformations</u> .....	5.4
2.1 - Rotations et déformations .....	5.4
2.2 - Petites déformations .....	5.6
2.2.1 - Première approximation .....	5.7
2.2.2 - Seconde approximation .....	5.8
3. <u>Elasticité quasi-linéaire</u> .....	5.10
3.1 - .....	5.10
3.2 - Problème initial et perturbation .....	5.12
3.3 - Linéarisation .....	5.14
3.4 - Exemples .....	5.16
3.4.1 - Câbles tendus .....	5.16
3.4.2 - Plaques de KIRCHHOFF .....	5.18
3.4.3 - Plaques de HENCKY .....	5.22
3.4.4 - Coques de révolution .....	5.28
4. <u>Etude dynamique des structures précontraintes</u> .....	5.29
5. <u>Etude de la stabilité</u> .....	5.31
6. <u>Etudes statiques quasi-linéaires</u> .....	5.35
6.1 - Le problème linéaire .....	5.36
6.2 - Le problème décomposé .....	5.38
6.3 - La technique de double analyse du problème complet	5.39
6.4 - Conditions pratiques d'applicabilité .....	5.41
6.5 - Exemples .....	5.42
7. <u>Influence du terme de compressibilité du gaz</u> .....	5.48
8. <u>Termes géométriques de pression : le paradoxe de MORAND et OHAYON</u> .....	5.51

## CHAPITRE VI - EXPERIMENTATION NUMERIQUE

1. <u>Introduction</u> .....	6.2
------------------------------	-----

2. <u>Analyse dynamique d'une antenne sphérique</u> .....	6.4
3. <u>Vibrations d'un cylindre raidi</u> .....	6.7
4. <u>Modes critiques d'un cylindre</u> .....	6.11
5. <u>Vibrations d'une coque cylindrique sous pression interne</u>	6.14
5.1 - .....	6.14
5.2 - Solutions analytiques .....	6.14
5.3 - Résultats numériques et expérimentaux .....	6.16
6. <u>Réservoir cylindrique rigide rempli de liquide</u> .....	6.18
7. <u>Hémisphère élastique rempli de liquide</u> .....	6.20
8. <u>Etage L17 du lanceur DIAMANT B</u> .....	6.22
9. <u>Modes en trèfle d'un réservoir de lanceur partiellement rempli de liquide</u> .....	6.24

## BIBLIOGRAPHIE

## FIGURES

)

)

## INTRODUCTION

Parmi les diverses structures que l'ingénieur est amené à étudier, nombreuses sont celles qui entrent en interaction avec un fluide, que ce soit dans le domaine du génie civil, du génie nucléaire, du génie maritime ou de la conception des véhicules contenant un liquide, comme les grands camions-citernes.

Dans le domaine aérospatial, en particulier, ce type d'interactions est particulièrement fréquent, et la présence de masses plus ou moins importantes d'ergols liquides dans les réservoirs d'un avion ou d'une fusée en vol peut entraîner des modifications considérables de leurs caractéristiques de résonance.

Nous nous intéresserons plus spécialement au cas des lanceurs à ergols liquides, où ces phénomènes sont particulièrement marqués, du fait de la faible masse relative de la structure - optimisée en ce qui concerne le poids - par rapport à celle du liquide qu'elle contient. L'influence du mouvement des ergols y revêt un double aspect. D'une part, leur ballonnement dans les réservoirs a un effet de pendule qui influence fortement le guidage de l'engin. D'autre part, la plupart des lanceurs à ergols liquides sont sujets à des instabilités longitudinales à basses fréquences, connues sous le nom d'"effet POGO". Le principe de ce phénomène est le suivant. Des oscillations longitudinales du réservoir provoquent un mouvement du liquide et, par là-même, une fluctuation de la pression au sein de celui-ci. Cette fluctuation se propage dans le circuit hydraulique et provoque des variations de la poussée des moteurs qui, dans certains cas défavorables, peuvent réexciter les réservoirs, provoquant ainsi une amplification du mouvement qui peut même devenir instable et entraîner la ruine de la structure.

L'étude complète de l'effet POGO nécessite donc d'une part une connaissance détaillée du spectre propre de l'ensemble fluide-structure et ce, pour différents niveaux de remplissage, puisque les réservoirs se vident au cours du vol, et, d'autre part, une étude détaillée du système hydraulique et de son comportement au voisinage des fréquences propres du lanceur.

L'étude des circuits hydrauliques, ainsi que les dispositifs stabilisateurs que l'on peut y inclure, est détaillée dans [ R4, D19, H6 ] . C'est la première étape du problème, c'est-à-dire la prédiction des fréquences propres des systèmes hydroélastiques, qui fait l'objet du présent mémoire.

Le premier chapitre est consacré à l'étude des diverses formulations utilisables pour le fluide. Après un examen critique des diverses méthodes proposées jusqu'à ce jour, notre choix s'est porté sur celle de TONG. Cependant, sa dérivation ne nous a pas semblé entièrement satisfaisante sur le plan théorique. C'est pourquoi, ses fondements ont été reconsidérés, et il est apparu qu'elle pouvait être considérée comme une simplification d'une formulation générale purement lagrangienne, ce qui évite les difficultés liées à la réconciliation des points de vue lagrangien et eulérien à l'interface fluide-structure.

Avant même d'étudier la manière de décrire la structure, il était utile de vérifier si la résolution du système d'équations provenant de la formulation ci-dessus est praticable. En effet, les matrices du problème aux valeurs propres correspondant sont fortement dégénérées. Nous présentons au chapitre 2 une méthode originale de résolution du problème adaptée aux systèmes de grande dimension. Telle que nous la présentons, elle permet une réduction séparée des matrices de raideur et de masse, ce qui constitue une simplification appréciable dont la possibilité n'apparaissait pas au premier abord.

Les structures apparaissant dans les lanceurs sont essentiellement des coques de révolution, éventuellement multicouches, souvent raidies par des lisses et longerons. Elles font l'objet du troisième chapitre. Dans le cadre d'une analyse dynamique des coques, la plus grande attention doit être portée sur la préservation des modes rigides. Or, dans beaucoup de théories de coques, ces modes ne sont pas représentés exactement. Une méthode est présentée, qui permet de déduire systématiquement des expressions des déformations respectant cette condition, tout en conservant le moins de termes possible . L'étude porte d'abord sur une théorie prenant en compte les déformations dues aux efforts tranchants,

dont on déduit le cas des coques de KIRCHHOFF-LOVE de manière directe.

Un second problème propre aux coques de révolution est celui des conditions à imposer sur l'axe de symétrie, lorsque la coque le rencontre. Presque évidentes dans le cas des déformations axisymétriques, ces conditions sont relativement compliquées dans le cas général. Nous montrons qu'il est possible de les obtenir en exprimant que la densité d'énergie de déformation doit rester intégrable. L'interprétation physique des conditions obtenues est examinée avec soin, ainsi que leur particularisation aux modes de Fourier circonférentiels.

La modélisation par éléments finis des coques profondes en coordonnées curvilignes conduit, comme on sait, à la perte des modes rigides dans le cas des coques à double courbure. Pour apporter une solution à ce problème, une théorie des coques quasi-coniques a été développée. Il s'agit d'une généralisation de la théorie des coques plates de MARGUERRE, par un procédé original basé sur le développement des déformations de GREEN.

Les raidisseurs de révolution sont étudiés, en incluant l'effet des gauchissements. On montre que si l'extension radiale du raidisseur est faible, ses gauchissements coïncident avec ceux du raidisseur rectiligne de même section. Diverses approximations concernant la description des raidisseurs sont discutées.

Les diverses modélisations des structures multicouches et en sandwich sont étudiées et comparées sur le double aspect de la simplicité de mise en oeuvre et de la précision à attendre des résultats.

Enfin, le troisième chapitre se termine par une description du procédé de répartition des raidisseurs en un modèle continu équivalent. Une estimation de l'erreur est présentée, qui fait ressortir clairement les influences du pas et de la longueur d'onde du mode étudié.

Le quatrième chapitre est consacré à la discrétisation de l'ensemble fluide-structure par la méthode des éléments finis. Pour les structures de révolution, le développement préalable des déplacements en séries de FOURIER entraîne une grande simplification et une forte économie de calcul. On est ainsi conduit à concevoir une méthode d'éléments finis développés en série de Fourier. La discrétisation ne porte plus que sur le méridien, d'où le nom de "semi-discrétisation" par lequel nous désignons la méthode. Cependant, les différents modes de Fourier ne sont découplés que moyennant certaines conditions restrictives sur l'anisotropie du matériau. Ces conditions sont étudiées en détail. Par ailleurs, nous montrons que les charges doivent être développées, non pas dans la base courante des sinus et cosinus, mais dans la base conjuguée. Ce type de dualité est d'ailleurs tout à fait analogue à celui des coordonnées covariantes et contravariantes du calcul tensoriel.

Pour les problèmes statiques, une importante limitation des séries de Fourier réside dans la difficulté de tenir compte des conditions aux limites dissymétriques. Nous proposons une approche complète du problème, où les divers cas possibles sont clairement cernés. Selon les cas, la solution peut être exacte ou approchée en ce qui concerne les fixations. Par ailleurs, la solution des différents cas est d'une complexité très inégale, le plus mauvais des cas nécessitant une analyse couplée des différents modes de Fourier, qui peut cependant être allégée par l'utilisation de la technique du superélément.

La génération des éléments eux-mêmes est ensuite examinée. Tout d'abord, nous détaillons la manière de construire un élément de coque développé en séries de Fourier. Une certaine attention est portée sur la compatibilité. On montre en effet que, contrairement à une opinion communément répandue, les coques de HENCKY-REISSNER ne sont pas parfaitement conformes lorsqu'elles se joignent en faisant un angle. Nous pensons d'ailleurs que dans ce cas, la notion de conformité n'a plus vraiment de sens, car la géométrie elle-même est discontinue. Cependant, la physique fait pressentir, et l'expérience numérique le confirme, que la continuité des déplacements du feuillet moyen et des rotations tangentielles à l'interface doit suffire pour assurer une transmission

cohérente des efforts.

Pour les éléments de volume, la technique isoparamétrique s'impose de plus en plus. Ce succès s'explique par l'extrême souplesse d'utilisation de ces éléments qui permettent de modéliser les formes les plus compliquées par un maillage nettement moins fin, du fait de leur capacité d'épouser au mieux les formes complexes. Cependant, la présentation classique de ZIENKIEWICZ et IRONS, basée sur l'utilisation des fonctions de forme, présente un certain nombre de désavantages, notamment en ce qui concerne la simplicité de mise en oeuvre et la fiabilité des programmes, la lourdeur des procédures de réduction de degré ou même simplement de degré variable. Ces diverses raisons ont motivé le développement d'une nouvelle méthode de génération des éléments isoparamétriques, basée sur l'utilisation des monômes. Dans ce cadre, les diverses opérations peuvent être automatisées à l'extrême, le degré des éléments peut varier d'un élément à l'autre, et la systématisation des calculs mène à une fiabilité bien plus grande du logiciel.

Les éléments de fluide sont ensuite présentés. Le principe d'éléments de connexion fluide-structure et fluide-surface libre incluant la condition d'incompressibilité globale, qui est original, permet une simplification considérable de l'algorithme de recherche des valeurs propres. La compatibilité des discrétisations du fluide, de la coque et de la surface libre impose un degré minimum pour le fluide. Mais il est possible de réduire la surface libre à sa plus simple expression, ce qui minimise le nombre de modes de surface libre. Cette remarque originale permet une économie substantielle lors du calcul des fréquences, dans le cas où l'on s'intéresse aux seuls modes d'interaction du fluide avec la structure.

Le chapitre se termine par l'étude de deux problèmes particuliers de la discrétisation des problèmes de révolution. Le premier concerne les problèmes d'intégration. On démontre que la méthode consistant à utiliser une méthode d'intégration "ouverte", masquant de manière évidente les singularités, mène au résultat correct. Le second concerne le calcul des tensions. Le choix de moyennes d'interprétation aisée y est discuté. D'autre part, une

méthode nouvelle est proposée, qui consiste à calculer certaines moyennes d'interface. L'information qui en résulte, particulièrement sûre puisque les moyennes sont choisies de façon à vérifier l'équilibre, mène à une description beaucoup plus précise du champ de tensions.

Les réservoirs de lanceurs sont souvent pressurisés. Bien plus, dans certains lanceurs légers, comme DIAMANT B, le circuit hydraulique ne comporte pas de pompes, si bien que l'écoulement est engendré par la seule pression régnant dans les réservoirs. Outre ses effets hydrauliques évidents, la pression a pour effet de raidir les réservoirs, spécialement en flexion. A strictement parler, ce type de problèmes relève de l'analyse non linéaire de structures. Cependant, moyennant certaines restrictions raisonnablement vérifiées en pratique, il est possible d'étudier le problème en se limitant à deux analyses linéaires. Le domaine de validité de ce genre d'étude n'était en général pas connu de manière très précise et, partant, l'élaboration d'une formulation "minimale", c'est-à-dire représentant les phénomènes essentiels de la manière la plus simple possible, était rendue très malaisée. Le début du cinquième chapitre est consacré à ces questions et tente d'y donner une réponse aussi claire que possible. Rompant avec la tradition, les développements sont effectués à partir des déformations de JAUMANN qui semblent, en définitive, se prêter mieux aux simplifications envisagées que celles de GREEN. La théorie de l'analyse en deux étapes, que nous appellerons "quasi-linéaire" est développée en des termes très généraux, mais elle est étayée de plusieurs exemples où les conséquences des hypothèses adoptées sont clairement mises en évidence : câbles, coques planes, sandwiches et coques de révolution. Ensuite, différents cas d'application de l'analyse "quasi-linéaire" sont envisagés. En particulier, une méthode duale nouvelle est présentée pour les problèmes de stabilité dite linéaire. Dans le cas des poutres, elle conduit aux équations de TIMOSHENKO. En ce qui concerne les analyses statiques, le problème est un peu plus délicat. En effet, la séparation des charges d'extension et des charges de flexion cesse d'être évidente dès que l'on abandonne les problèmes académiques. Nous proposons une telle décomposition dans le cas général. Sur base de celle-ci, on peut développer une technique de triple analyse dont le domaine de validité semble plus étendu que celui de la double

analyse classiquement utilisée.

Ce dernier chapitre théorique se termine par des considérations plus particulières. Tout d'abord, une évaluation de l'ordre de grandeur du terme de compressibilité du gaz montre que celui-ci n'a une influence marquée que lorsque le réservoir est presque plein. Enfin, l'importance du terme de non-linéarité de pression est discuté. Nous montrons que le paradoxe de MORAND et OHAYON, c'est-à-dire la perte des modes rigides de rotation dans le cas d'une précontrainte due à une force de pression, n'est pas parfaitement levé par l'introduction des termes non linéaires de pression, en raison des approximations consenties dans le calcul de la précontrainte. Comme d'autre part, les termes de non-linéarité de pression décroissent rapidement avec le nombre d'onde, on arrive à la conclusion que le fait de les négliger mène en définitive à une approximation très raisonnable.

Le dernier chapitre illustre les considérations qui précèdent par un certain nombre d'applications numériques. Toutes sont inspirées de problèmes concrets du domaine aérospatial. Elles illustrent un certain nombre de faits physiques propres à ce genre de structures. En outre, de nombreux recoupements permettent de vérifier la validité des solutions théoriques proposées. Enfin, elles font ressortir les nombreux avantages des analyses par éléments finis développés en séries de Fourier, tant sur le plan de la facilité de mise en oeuvre et du faible coût de l'étude, qu'en ce qui concerne la qualité des résultats obtenus.

( )

( )

CHAPITRE ILE FLUIDE ET SA CONNEXION AVEC LA STRUCTURE

## 1. GENERALITES

Dans ce chapitre, nous étudierons diverses formulations possibles pour le fluide. Nous envisagerons simultanément sa connexion avec la structure, mais sans faire d'hypothèses spéciales sur celle-ci, sinon celle d'élasticité. Les questions de théorie des structures proprement dite seront étudiées au chapitre 3.

L'hypothèse généralement utilisée pour l'étude du fluide dans le cadre des vibrations de systèmes hydroélastiques consiste à négliger tout effet de viscosité. Très souvent, on y ajoute encore l'hypothèse d'incompressibilité, mais ce n'est pas le cas de toutes les formulations.

Les diverses méthodes proposées jusqu'à ce jour peuvent être classées d'après la variable utilisée pour décrire le fluide. C'est le mode de classification adopté ici. Un autre point de vue consisterait à classer les méthodes en méthodes lagrangiennes et méthodes eulériennes. Nous verrons que ces deux points de vue sont liés, en ce sens que les formulations basées sur les déplacements sont généralement lagrangiennes, et les autres, généralement eulériennes. Dans ce dernier cas, un problème surgit lors de la connexion du fluide à la structure qui est le plus généralement décrite dans un cadre lagrangien. La réduction de ces problèmes est souvent obtenue au détriment de la rigueur.

Parmi les critères nous guidant dans le choix d'une formulation particulière, nous avons voulu aligner, outre diverses considérations pratiques, l'exigence d'une théorie correctement assise sur le plan théorique. Force nous a été de constater que les méthodes les plus alléchantes violaient ce critère. C'est pourquoi, nous avons repris le problème à ses fondements. Adoptant un point de vue purement lagrangien, nous sommes parti du principe de HAMILTON, et nous y avons introduit explicitement les diverses hypothèses de linéarisation. On peut de la sorte dériver la formulation de TONG [T1] sur une base plus solide. Ces développements font l'objet du paragraphe 4.

## 2. LES DIVERSES FORMULATIONS EXISTANTES

Nous commencerons par passer en revue diverses formulations qui ont été proposées jusqu'à ce jour, en examinant leurs caractéristiques essentielles et en faisant ressortir leurs avantages et leurs inconvénients.

### 2.1. Formulations basées sur une discrétisation des déplacements du fluide

#### 2.1.1. La méthode d'ARCHER et RUBIN [A1]

Il s'agit d'une des premières méthodes proposées pour résoudre le problème de l'interaction fluide-structure (1966). Elle ne convient que pour un mouvement axisymétrique. L'idée de base est d'imposer qu'une section horizontale quelconque reste plane et horizontale. Ainsi, sur la figure 1.1, la tranche de fluide ABCD devient après déformation la tranche A'B'C'D' qui lui correspond par des déplacements de la forme

$$u_z = u_z(z) \tag{1.2.1}$$

$$u_r = r \alpha(z)$$

Le déplacement radial  $u_r$  peut alors être évalué en termes des déplacements de la coque, tandis que le déplacement  $u_z$  s'obtient par la condition de constance de volume d'une tranche. On obtient ainsi une expression de l'énergie cinétique du fluide en termes des dérivées temporelles des déplacements de la coque.

Cette formulation, purement lagrangienne, est donc une forme très simple de la méthode de RAYLEIGH-RITZ. L'hypothèse de conservation des surfaces horizontales est généralement suffisante pour prédire les modes axisymétriques où intervient la structure, dont le mode POGO, à condition que le réservoir soit long et étroit. Mais dans le cas de réservoirs très larges comme ceux des lanceurs lourds, le ballonnement ne peut être négligé. En outre, la méthode d'ARCHER et RUBIN ne s'applique pas telle quelle au calcul des modes non axisymétriques. D'autre part, on ne peut espérer en tirer une information précise sur la pression: les efforts conjugués aux déplacements  $u_z$  sont en effet de la forme

$$\int_{\text{section}} p \, dS \tag{1.2.2}$$

ce qui ne constitue qu'une information par trop globale.

### 2.1.2. Le modèle équilibre de HUNT [H1]

En 1970 D.A. HUNT a proposé de découper le fluide en éléments finis et d'imposer que, dans chaque élément la pression soit constante. Dans un fluide incompressible, l'énergie de pression est nulle, si bien qu'il ne reste que le travail virtuel d'interfaces

$$p \sum_{\text{faces}} \int_S n_i u_i dS, \quad (1.2.3)$$

ce qui introduit naturellement les déplacements normaux moyens des faces.

L'énergie cinétique est alors exprimée en termes de ceux-ci, par le procédé dit de "lumping" des masses : ainsi, si l'on considère le parallélépipède représenté à la figure 1.2, la masse de translation selon x devant être

$$\rho \cdot abc \cdot u_x, \quad (1.2.4)$$

on attribue la demi-masse, soit  $\frac{1}{2} \rho abc$  à  $u_1$  et  $u_2$ .

Pour exprimer l'énergie cinétique du fluide, on partira de l'expression du lagrangien :

$$\frac{1}{2} \dot{q}^T M \dot{q} - p^T H q \quad (1.2.5)$$

où  $q$  est le vecteur des déplacements, et  $p$ , le vecteur des pressions. Quitte à réordonner les déplacements, on peut écrire les équations dynamiques sous la forme

$$\begin{bmatrix} M_{RR} & M_{RC} & 0 \\ M_{CR} & M_{CC} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}_R \\ \ddot{q}_C \\ \ddot{p} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & H_R \\ 0 & 0 & H_C \\ H_R^T & H_C^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_R \\ q_C \\ p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_r \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1.2.6)$$

où  $H_C$  est supposée carrée et inversible, et les  $q_C$  non connectés à la coque.

On élimine ces derniers par la relation

$$q_c = - H_c^{-T} H_R^T q_R \quad (1.2.7)$$

ce qui permet d'écrire

$$(M_{RR} - M_{RC} H_C^{-T} H_R^T) \ddot{q}_R + H_R p = g_R \quad (1.2.8)$$

$$(M_{CR} - M_{CC} H_C^{-T} H_R^T) \ddot{q}_R + H_C p = 0$$

Eliminant  $p$ , on obtient finalement l'expression suivante de la masse du fluide:

$$M_{RR}^* = (M_{RR} - M_{RC} H_C^{-T} H_R^T + H_R H_C^{-1} M_{CR} - H_R H_C^{-1} M_{CC} H_C^{-T} H_R^T) \quad (1.2.9)$$

Pour obtenir une connexion correcte avec la coque, il faut que celle-ci possède comme degré de liberté le déplacement normal moyen :

Cette formulation est, comme on peut le constater, purement lagrangienne. Mais comme elle ne contient pas de terme spécial de surface libre, elle ne permet pas d'étudier le ballottement. De plus, l'expression des masses n'y est pas consistante. D'autre part, elle peut être généralisée au cas compressible par addition d'une énergie potentielle de compression. Enfin, la formulation équilibre permet de ne connecter que la vitesse normale, ce qui cadre bien avec l'hypothèse d'absence de viscosité.

### 2.1.3. Le modèle déplacement de PINSON et BROWN [P1]

Enfin, en 1973, PINSON et BROWN ont proposé un modèle déplacement pour le fluide. Effectuant une décomposition préalable en séries de Fourier par rapport à l'azimut, ces auteurs proposent de traiter les modes non axisymétriques de la manière suivante:

le déplacement azimutal  $u_\theta$  est éliminé par la relation d'incompressibilité linéarisée

$$\operatorname{div} \vec{u} = \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial}{\partial r} (r u_r) + \frac{\partial}{\partial \theta} (u_\theta) + \frac{\partial}{\partial z} (r u_z) \right] = 0 . \quad (1.2.10)$$

Par conséquent, seuls  $u_r$  et  $u_z$  sont connectés d'un élément à l'autre. On exprime l'énergie cinétique d'une manière tout-à-fait classique, et on y adjoint une énergie potentielle de surface libre donnée par

$$\frac{1}{2} \int_{\Gamma} \rho g \eta^2 d\Gamma, \quad (1.2.11)$$

où  $\eta$  est le déplacement vertical de la surface libre. La connexion avec la coque se fait par identification des déplacements radiaux et verticaux. On obtient ainsi une matrice de raideur de la forme

$$\begin{bmatrix} K_{SS} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (1.2.12)$$

et une matrice de masse de la forme

$$\begin{bmatrix} M_{SS} & M_{SI} \\ M_{IS} & M_{II} \end{bmatrix} \quad (1.2.13)$$

où l'indice S désigne les degrés de liberté de la coque et de la surface libre, tandis que l'indice I représente les degrés de liberté internes du fluide. On élimine ces derniers par la relation

$$q_I = - M_{II}^{-1} M_{II} q_T . \quad (1.2.14)$$

Cette formulation appelle les remarques suivantes. Tout d'abord le fluide n'étant pas visqueux, il est licite de ne pas connecter les déplacements tangentiels. Mais pourquoi connecter les déplacements radiaux et verticaux? Le plus logique serait de ne connecter que les déplacements normaux. D'autre part, elle ne s'applique pas dans le cas axisymétrique, où le déplacement azimuthal est identiquement nul. Dans ce cas, il faut recourir à d'autres méthodes pour tenir compte de l'incompressibilité. Enfin, le terme d'énergie potentielle (1.2.11) dont ces auteurs ne donnent pas la justification, semble avoir été obtenu à partir du point de vue eulérien.

## 2.2. Formulations par équations intégrales

Si l'on utilise une description eulérienne du fluide à l'aide d'un potentiel des vitesses, la condition d'incompressibilité s'écrit

$$\nabla^2 \phi = 0 \quad (1.2.15)$$

Sur la surface libre  $\Gamma$ , on exprime alors l'équation de BERNOULLI

$$p + \rho g \eta + \rho \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \rho \frac{\text{grad} \phi \cdot \text{grad} \phi}{2} = 0 \quad (1.2.16)$$

où  $\eta$  est le déplacement vertical de la surface libre. Pour de petites oscillations, on peut négliger le terme non linéaire; de plus, la pression à la surface libre peut être posée nulle, ce qui conduit à l'équation

$$\eta = - \frac{1}{g} \frac{\partial \phi}{\partial t} \quad (1.2.17)$$

ou encore, en assimilant la vitesse  $\dot{\eta}$  à  $\frac{\partial \eta}{\partial t}$ ,

$$\dot{\eta} = \frac{\partial \phi}{\partial z} \approx - \frac{1}{g} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \quad (1.2.18)$$

Pour un mouvement harmonique, on pose

$$\phi(x, t) = \Phi(x) \cos \omega t, \quad (1.2.19)$$

ce qui permet de réécrire (1.2.18) sous la forme

$$\frac{1}{\omega^2} \frac{\partial \Phi}{\partial z} = + \frac{1}{g} \Phi. \quad (1.2.20)$$

Il en résulte un terme d'énergie potentielle donné par

$$\frac{1}{2} \int_{\Gamma} \rho \frac{\partial \Phi}{\partial z} \Phi \, d\Gamma = \frac{1}{2\omega^2} \int_{\Gamma} g \left( \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)^2 \, d\Gamma \quad (1.2.21)$$

qui, dans un mouvement vibratoire, équilibre l'énergie cinétique

$$\frac{1}{2} \int_V \rho \text{grad} \phi \cdot \text{grad} \phi \, dV \quad (1.2.22)$$

Dans le cas d'un réservoir élastique, il apparaît un terme supplémentaire d'énergie potentielle pour la surface mouillée du réservoir de la même forme que le précédent. Ce terme s'obtient par un raisonnement analogue, mais nécessitant l'hypothèse supplémentaire que le mouvement de la coque est essentiellement normal au feuillet moyen, si l'on veut éviter l'apparition de termes non symétriques dus au mélange des points de vue lagrangien et eulérien. Enfin, on se ramène au schéma classique à deux matrices en posant

$$\psi = \frac{\Phi}{\omega} . \quad (1.2.23)$$

La connexion à la coque se fait en écrivant

$$u_n = \frac{\partial \psi}{\partial n} , \quad (1.2.24)$$

où  $u_n$  est le déplacement de la coque.

Cela étant, la méthode des équations intégrales consiste à exprimer le potentiel des vitesses sous la forme d'une somme de champs potentiels provenant de sources superficielles de densité  $\sigma$ :

$$\phi(P) = \int_S \frac{\sigma(Q)}{r_{PQ}} dS \quad (1.2.25)$$

Cette méthode, introduite par C. NEUMANN et H. POINCARÉ, a été discutée par I. FREDHOLM [F1] et généralisée à des surfaces moins régulières par RADON [R1]. Elle permet d'ailleurs de démontrer l'existence et l'unicité de la solution [R2].

L'utilisation des équations intégrales dans les problèmes d'interaction fluide-structure a été introduite en 1968 par GUYAN, UJIHARA et WELCH [G1] dans le cas axisymétrique et étendue au cas général par KHABBAZ [K1] en 1971.

La manière de procéder se résume ainsi : on écrit d'abord l'énergie cinétique sous la forme

$$\frac{1}{2} \int_S \phi \frac{\partial \phi}{\partial n} dS \quad (1.2.26)$$

qui est équivalente à la précédente, vu l'harmonicité du potentiel. On exprime alors  $\phi$  en termes des sources  $\sigma$ . Dans le cas axisymétrique, on obtient des intégrales elliptiques, que l'on peut, comme GUYAN, UJIHARA et WELCH, calculer par intégration numérique, ce qui discrétise le problème. Dans le cas général, on peut, comme KHABBAZ, subdiviser la surface en petites régions où l'on suppose les sources constantes. Enfin, on exprime les sources en termes des vitesses  $\frac{\partial \phi}{\partial n}$  à l'aide des relations

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial n}\right)_P = 2\pi \sigma(P) + \int_{Q \neq P} \sigma(Q) \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r_{PQ}}\right) dS, \quad (1.2.27)$$

ce qui se ramène à un système matriciel. On peut ainsi exprimer les matrices de raideur et de masse du fluide en termes des seuls degrés de liberté de surface.

Mais les calculs ne sont pas simples, car l'évaluation d'un terme des matrices utilisées nécessite un balayage de tous les points de la surface. Dans le cas de la discrétisation de KHABBAZ, le calcul de la contribution de la région contenant le point P à l'intégrale (1.2.25) mène à une petite difficulté, du fait du terme  $\frac{1}{r_{PQ}}$ . Cet auteur a d'ailleurs donné la solution de ce problème, en remarquant que si le point P n'est pas un sommet de cuspide,  $\frac{dS}{r_{PQ}}$  est fini. On notera d'autre part que cette formulation mêle les points de vue lagrangien et eulérien. Par ailleurs, il est nécessaire de définir un assez grand nombre de points sur la surface libre pour obtenir une description convenable du fluide. D'où la présence d'un grand nombre de modes de surface libre de très basse fréquence. Comme dans les algorithmes classiques de recherche des valeurs propres, les modes sont obtenus dans l'ordre croissant des fréquences, il n'est pas rare de devoir calculer une vingtaine de modes de surface libre avant d'obtenir le premier mode d'interaction fluide-structure [G1]. Nous verrons que d'autres méthodes permettent d'éviter cet inconvénient.

### 2.3. Méthodes basées sur la discrétisation d'une variable scalaire du fluide

#### 2.3.1. Discrétisation de la pression

La formulation utilisée dans le programme NASTRAN [M1] est basée sur la discrétisation de la pression dans le fluide. Dans sa dérivation, les points de vue lagrangien et eulérien sont mélangés.

On part de l'équation

$$\rho_d \ddot{\vec{u}} + \frac{1}{2} \rho_d \text{grad} (\dot{\vec{u}}^2) = - \text{grad} p + \rho \vec{g} \quad , \quad (1.2.28)$$

où  $\vec{u}$  représente un vecteur déplacement,  $\dot{\vec{u}}$  sa dérivée temporelle. ( )

On reconnaît l'équation d'EULER

$$\rho_d \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \frac{1}{2} \rho_d \text{grad} (v^2) = - \text{grad} p + \rho \vec{g} \quad , \quad (1.2.29)$$

où l'on a fait l'approximation

$$\vec{v} = \frac{D\vec{u}}{Dt} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \text{grad} (\vec{u}) \approx \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} \quad , \quad (1.2.30)$$

valable lorsque les gradients de déplacements sont petits.

La pression est liée aux déplacements par l'équation

$$p = - B \text{div} \vec{u} \quad , \quad (1.2.31) \quad ( )$$

tandis que la densité de masse actuelle  $\rho_d$  est liée à la densité de masse de référence  $\rho$  par la relation

$$\rho_d = \rho - \text{div} (\rho \vec{u}) \quad , \quad (1.2.32)$$

qui n'est autre que l'équation eulérienne de conservation de la masse,

$$\text{div} (\rho \vec{v}) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad , \quad (1.2.33)$$

intégrée avec le secours de l'hypothèse (1.2.30).

Pour de petits mouvements, l'équation (1.2.28) se réduit à

$$\rho \ddot{\mathbf{u}} = - \text{grad} p + \rho \vec{\mathbf{g}} \quad (1.2.34)$$

Si l'on prend la divergence de cette équation et si, d'autre part, on dérive l'équation (1.2.31) deux fois par rapport au temps, on obtient l'équation

$$\frac{1}{B} \ddot{p} - \text{div} \left( \frac{1}{\rho} \text{grad} p \right) = - \text{div} \vec{\mathbf{g}} = 0 \quad (1.2.35)$$

qui équivaut au principe variationnel

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \left\{ \delta \int_V \frac{1}{B} \dot{p}^2 dV - \delta \int_V \frac{1}{2\rho} \text{grad} p \cdot \text{grad} p dV + \int_S \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial n} \delta p dS \right\} = 0 \quad (1.2.36)$$

A la surface libre, on écrit l'équation (1.2.34) sous la forme

$$\frac{1}{\rho} \text{grad} p = - \ddot{\mathbf{u}} + \vec{\mathbf{g}}. \quad (1.2.37)$$

On pose alors, si  $\Gamma_0$  est la surface libre de référence,

$$p \Big|_{\Gamma_0} = p \Big|_{\Gamma} - \vec{\mathbf{u}} \cdot \text{grad} p = \rho \ddot{\mathbf{u}} \cdot \vec{\mathbf{u}} + \rho \vec{\mathbf{g}} \cdot \vec{\mathbf{u}}, \quad (1.2.38)$$

soit, en négligeant le terme du second ordre et en dérivant deux fois par rapport au temps,

$$\ddot{p} \Big|_{\Gamma_0} = \rho \ddot{\mathbf{u}} \cdot \vec{\mathbf{g}} = \rho \ddot{\mathbf{u}} \cdot \vec{\mathbf{g}}, \quad (1.2.39)$$

la dernière égalité résultant de l'hypothèse qu'à l'équilibre, la surface libre est orthogonale au vecteur  $\vec{\mathbf{g}}$ . Enfin, on déduit de (1.2.34) la relation :

$$\frac{1}{\rho} \vec{\mathbf{n}} \cdot \text{grad} p = - \frac{\ddot{p}}{\rho g} - g \quad (1.2.40)$$

qui permet d'écrire la contribution de la surface libre au dernier terme de (1.2.36) sous la forme

$$-\int_{\Gamma_0} \frac{\ddot{p}}{\rho g} \delta p \, dS - \int_{\Gamma_0} g \delta p \, dS \quad (1.2.41)$$

La connexion à la coque se fait de la manière suivante: le terme  $\frac{\partial p}{\partial n}$  est donné par la relation (1.2.34) tandis que l'effort normal  $F_n$  sur la coque vaut (fig. 1.3)

$$F_n = p - \rho \vec{g} \cdot \vec{u} ,$$

ce qui conduit au terme de couplage non symétrique

$$\int_{S_c} (\ddot{u}_n + g_n) \delta p \, dS + \int_{S_c} (\rho - \rho \vec{g} \cdot \vec{u}) \delta u_n \, dS , \quad (1.2.42)$$

où  $S_c$  est la surface de la coque, l'indice  $n$  indiquant qu'il s'agit de la composante normale.

L'apparition de ce terme non symétrique est troublante, car la coque comme le fluide sont des systèmes conservatifs. Il semble bien qu'on doive en chercher l'origine dans le "recollement" des points de vue lagrangien et eulérien. D'autre part, cette formulation permet de traiter les fluides compressibles. Enfin, le système à résoudre n'étant pas symétrique, sa résolution nécessite des algorithmes spéciaux.

### 2.3.2. Discrétisation du potentiel des vitesses

Voici enfin une formulation où la variable représentative du fluide est le potentiel des vitesses. Proposée par TONG dès 1966 [T1], elle n'a été appliquée que plusieurs années plus tard par VALID, BERGER, BOUJOT, OHAYON, ANQUEZ et leur équipe [M2,V1,V2,T2,B1,L2].

Les équations de base sont

$$\vec{v} = \text{grad } \phi \quad (1.2.43)$$

$$\nabla^2 \phi = 0 \quad (1.2.44)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = \vec{n} \cdot \vec{u} \quad \text{sur } S_c \quad (1.2.45)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = \frac{\partial \eta}{\partial t} \quad \text{et} \quad \frac{\partial \phi}{\partial t} + g\eta = 0 \quad \text{sur } \Gamma. \quad (1.2.46)$$

On vérifie aisément que ce système équivaut au principe variationnel

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \left\{ \frac{1}{2} \delta \int_{V_f} \rho_f \text{grad} \phi \cdot \text{grad} \phi \, dV - \int_{S_c} \rho_f \vec{n} \cdot \vec{u} \, \delta \phi \, dS - \delta \int_{\Gamma} \rho_f \frac{\partial \eta}{\partial t} \phi \, d\Gamma + \delta \int_{\Gamma} \rho_f g \frac{\eta^2}{2} \, d\Gamma \right\} = 0, \quad (1.2.47)$$

les variations devant être prises par rapport à  $\phi$  et  $\eta$ .

Quant à la structure, elle obéit au principe de HAMILTON

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \left\{ \delta \int_V (T_c - W_c) \, dV + \int_{S_c} t_i \, \delta u_i \, dS \right\} = 0, \quad (1.2.48)$$

où  $T_c$  et  $W_c$  représentent respectivement l'énergie cinétique et l'énergie de déformation, tandis que  $t_i$  est le vecteur des forces de surface. La variation se fait sur les déplacements.

La force de surface est la pression du fluide

$$p = \rho_f \left( \frac{\partial \phi}{\partial t} - \vec{g} \cdot \vec{u} \right), \quad (1.2.49)$$

dirigée suivant la normale intérieure, ce qui donne (fig. 1.4)

$$\begin{aligned} \int_{S_c} t_i \, \delta u_i \, dS &= - \int_{S_c} p \, n'_i \, \delta u_i \, dS = \int_{S_c} p \, n_i \, \delta u_i \, dS \\ &= \int_{S_c} \rho_f \left( \frac{\partial \phi}{\partial t} - \vec{g} \cdot \vec{u} \right) n_i \, \delta u_i \, dS \end{aligned}$$

Intégrant par parties sur le temps et, à condition de confondre les dérivées temporelles lagrangienne et eulérienne, on obtient le terme

$$- \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{S_c} (\rho_f \phi n_i \delta \dot{u}_i - \rho_f \vec{g} \cdot \vec{u} n_i \delta u_i) dS \quad (1.2.50)$$

Le premier terme est le complémentaire de

$$- \int_{S_c} \rho_f \vec{n} \cdot \vec{u} \delta \phi dS ,$$

tandis que le second est non symétrique. Pour le symétriser, TONG utilise l'hypothèse que le déplacement de la coque est essentiellement normal, ce qui entraîne  $\vec{u} \approx u_n \vec{n}$ , soit

$$\rho_f \vec{g} \cdot \vec{u} \vec{n} \cdot \delta \vec{u} \approx \rho_f g_n u_n \delta u_n = \frac{1}{2} \rho_f g_n u_n^2 . \quad (1.2.51)$$

On obtient alors, en regroupant (1.47) et (1.48) et en tenant compte de (1.51), un principe variationnel pour l'ensemble fluide-structure. Cependant, on ne retombe pas sur le schéma classique à deux matrices, car il apparaît des dérivées premières. Pour s'y ramener, il faut définir un nouveau potentiel

$$\gamma = \int_0^t \phi(\tau) d\tau , \quad (1.2.52)$$

qui, à défaut d'interprétation physique, semble bien artificiel.

A nouveau, il s'agit d'une formulation où les points de vue eulérien et lagrangien sont mélangés. Par ailleurs, elle a l'avantage que le fluide est représenté par une variable scalaire, ce qui rend les calculs économiques.

### 3. CONCLUSIONS DE L'EXAMEN DES DIVERSES FORMULATIONS

Les divers modèles présentés peuvent être classés en trois catégories :

- (i) les méthodes basées sur une discrétisation des déplacements;
- (ii) celles qui utilisent des équations intégrales;
- (iii) celles où le fluide est représenté par une variable scalaire.

Les premières sont soit simplistes, soit coûteuses à mettre en oeuvre; quant aux autres, elles impliquent nécessairement la confusion des points de vue eulérien et lagrangien, ce qui n'est pas satisfaisant sur le plan théorique. Les équations intégrales sont malaisées à résoudre et mènent à des matrices pleines. Enfin, toutes les formulations des classes (i) et (ii), sauf celle de HUNT, nécessitent un certain nombre de calculs ultérieurs pour obtenir la pression au sein du fluide. Or, la connaissance de la pression est essentielle pour prévoir l'effet "POGO".

Il apparaît donc qu'une formulation convenable du problème hydroélastique devrait idéalement répondre aux conditions suivantes :

(1) Reposer sur une base théorique solide, où les diverses hypothèses apparaissent explicitement. Le point de vue lagrangien semble le plus approprié, car il permet d'effectuer les calculs sur la configuration de référence.

(2) Permettre une connexion aussi simple que possible avec la structure.

(3) Représenter le fluide au moyen d'éléments finis en discrétisant une variable qui permette d'évaluer la pression de manière simple, sans pour autant conduire à la définition d'un nombre excessif de degrés de liberté.

(4) Limiter le nombre de modes de surface libre seule lorsque ceux-ci présentent peu d'intérêt.

Les conditions (2) et (3) sont remplies par la formulation NASTRAN

et par celle de TONG, où la pression est donnée par

$$p = -\rho \frac{\partial \phi}{\partial t} - \rho g_i u_i \approx -\rho \frac{\partial \phi}{\partial t}; \quad (1.3.1)$$

mais seule cette dernière permet de limiter le nombre de modes de surface libre, grâce à la discrétisation séparée des déplacements de celle-ci. C'est donc la formulation de TONG qui nous a semblé la plus appropriée. Mais elle violait la première condition que nous nous sommes fixée, à savoir, reposer sur une base théorique saine. C'est pourquoi, nous avons repris le problème dans un cadre purement lagrangien, ce qui présente, nous l'avons déjà dit, l'avantage que les domaines d'intégration sont toujours les domaines de référence. L'hypothèse des petites oscillations est alors introduite explicitement dans les équations. Dans ce cadre, on voit apparaître très naturellement la notion de potentiel des déplacements, qui joue le rôle du  $\phi$  de la formulation de TONG. Enfin, on ne retrouve plus les termes non symétriques qui apparaissaient lors de la connexion avec la coque.

#### 4. DEDUCTION DE LA FORMULATION DE TONG DANS UN CADRE PUREMENT LAGRANGIEN

##### 4.1. Principe mixte pour les fluides parfaits

Les mouvements isentropiques d'un fluide parfait sont régis par le principe de HAMILTON. On considère une collection de particules. Elle occupe au temps  $t=0$ , un volume  $V(0)$  bordé par une surface  $S(0)$ . Les mêmes particules occupent au temps  $t$  un volume  $V(t)$ , de surface  $S(t)$ . Une particule située en  $t=0$  au point de coordonnées  $a_i$  se trouve au temps  $t$  au point  $x_i$ . Le déplacement  $u_i$  est alors par définition

$$u_i = x_i - a_i \quad (1.4.1)$$

Dans une description lagrangienne, le déplacement sera considéré comme une fonction des coordonnées initiales  $a_i$ ; au contraire, dans une description eulérienne, il sera considéré comme une fonction des coordonnées finales  $x_i$ . Nous écrirons

$$D_i \kappa = \left( \frac{\partial \kappa}{\partial a_i} \right)_t \quad D_t \kappa = \left( \frac{\partial \kappa}{\partial t} \right)_{a_i} \quad (1.4.2)$$

$$\partial_i \kappa = \left( \frac{\partial \kappa}{\partial x_i} \right)_t \quad \partial_t \kappa = \left( \frac{\partial \kappa}{\partial t} \right)_{x_i} \quad (1.4.3)$$

Pour alléger les écritures, nous utiliserons aussi le point pour désigner la dérivée lagrangienne par rapport au temps. Ainsi, la vitesse est donnée par

$$v_i = D_t u_i = \dot{u}_i \quad (1.4.4)$$

Cela étant, supposons les déplacements imposés sur une portion  $S_1(t)$  de  $S(t)$ , tandis que sur l'autre partie  $S_2(t)$  de la surface, on impose la pression  $\bar{p}$ . Le principe de HAMILTON prend la forme

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \left\{ \delta \int_{V(t)} \left( \rho \frac{\dot{u}_i \dot{u}_i}{2} + \rho g_i x_i - \rho U(\varphi) \right) dV(t) - \int_{S_2(t)} \bar{p} v_i \delta u_i dS(t) \right\} = 0, \quad (1.4.5)$$

où  $g_i$  représente l'accélération de la pesanteur,  $\rho$  la densité de masse,  $U(\varphi)$  l'énergie interne par unité de masse et  $v_i$  la normale à  $S_2(t)$

Lors de l'application de ce principe, il convient de vérifier a priori la condition de conservation de la masse. Si l'on note  $J$  la matrice jacobienne

$$J = \frac{D(x)}{D(a)}, \quad (1.4.6)$$

$\mathcal{J}$  son déterminant et  $\rho_0$  la densité de masse en  $t=0$ , cette condition s'écrit

$$\mathcal{J} = \frac{\rho_0}{\rho}. \quad (1.4.7)$$

Nous adopterons, dans ce qui suit, une description purement lagrangienne. Il faut donc transformer les intégrales sur  $V(t)$  et  $S(t)$  en intégrales sur la configuration initiale. Pour l'intégrale de volume, la transformation est simple : en effet, on a, en vertu de (1.4.7)

$$\int_{V(t)} \rho f dV(t) = \int_{V(o)} \rho f \mathcal{J} dV = \int_{V(o)} \rho_o f dV \quad (1.4.8)$$

Quant à la pression, elle perd son caractère isostrope. En effet,

$$\begin{aligned} \int_{S(t)} p v_i \delta u_i dS(t) &= \int_{V(t)} \partial_i (p \delta u_i) dV(t) \\ &= \int_{V(o)} \mathcal{J} \partial_i (p \delta u_i) dV \end{aligned}$$

et, puisque

$$\partial_i = \partial_i a_j D_j,$$

on obtient

$$\int_{S(t)} p v_i \delta u_i dS(t) = \int_{V(o)} \mathcal{J} \partial_i a_j D_j (p \delta u_i) dV \quad (1.4.9)$$

En vertu de l'identité de JACOBI [G2]

$$D_j (\mathcal{J} \partial_i a_j) = 0, \quad (1.4.10)$$

on peut transformer cette intégrale en

$$\int_{S_2(o)} n_j [p \mathcal{J} \partial_i a_j] \delta u_i dS,$$

où  $n_i$  est la normale à  $S_2(o)$ . Ceci définit la "pression lagrangienne"

$$p_{ji} = p \mathcal{J} \partial_i a_j. \quad (1.4.11)$$

Chargeons encore le principe d'assurer la conservation de la masse: on ajoutera simplement un "potentiel de production de masse" construit à l'aide d'un multiplicateur  $\lambda$  :

$$\mathcal{P} = \int_{V(o)} \lambda \left( \mathcal{J} - \frac{\rho_o}{\rho} \right) dV . \quad (1.4.12)$$

Le principe lagrangien s'écrit donc

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \left\{ \delta \int_{V(o)} \left[ \rho_o \frac{\dot{u}_i \dot{u}_i}{2} + \rho_o g_i x_i - \rho_o U(\rho) + \lambda \left( \mathcal{J} - \frac{\rho_o}{\rho} \right) \right] dV \right. \\ \left. - \int_{S_2(o)} n_j \bar{p}_{ji} \delta u_i dS \right\} = 0 \quad (1.4.13)$$

Cherchons les équations d'EULER de ce principe, dont les variables sont les déplacements  $u_i$ , la densité de masse  $\rho$  et le multiplicateur  $\lambda$ . Tout d'abord, il est clair que la variation de  $\lambda$  restitue la condition (1.4.7). Variions les déplacements: notant que [D1]

$$\delta \mathcal{J} = \mathcal{J}_{\partial_i} \delta u_i , \quad (1.4.14)$$

on obtient

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \left\{ \int_{V(o)} \left( \rho_o \dot{u}_i \delta \dot{u}_i + \rho_o g_i \delta u_i + \lambda \mathcal{J}_{\partial_i} \delta u_i \right) dV \right. \\ \left. - \int_{S_2(o)} n_j \bar{p}_{ji} \delta u_i dS \right\} = 0$$

Le troisième terme demande une attention particulière: on a

$$\int_{V(o)} \lambda \mathcal{J}_{\partial_i} \delta u_i dV = \int_{V(t)} \lambda_{\partial_i} \delta u_i dV (t) \\ = \int_{S(t)} \lambda v_i \delta u_i dS (t) - \int_{V(t)} \partial_i \lambda \delta u_i dV (t) \\ = \int_{S(t)} \lambda v_i \delta u_i dS(t) - \int_{V(o)} \mathcal{J}_{\partial_i} \lambda \delta u_i dV$$

Divisant alors par  $\mathcal{J}$  le coefficient de  $u_i$  de l'intégrale de volume, on obtient donc, en tenant compte de (1.4.7):

$$-\rho \ddot{u}_i + \rho g_i - \partial_i \lambda = 0 \quad (1.4.15)$$

Il s'agit de l'équation d'équilibre d'EULER [L1]. Cette équation montre que le multiplicateur  $\lambda$  n'est autre que la pression eulérienne qui apparaît donc comme la réaction correspondant à la condition de conservation de la masse.

En surface, on obtient la condition d'égalité des pressions puisque, par définition,

$$\int_{S_2(o)} n_j \bar{p}_{ji} \delta u_i dS = \int_{S_2(t)} \bar{p} v_i \delta u_i dS(t)$$

Enfin, la variation de  $\rho$  conduit à l'équation

$$\frac{\partial U}{\partial \rho} = -\frac{\lambda}{\rho^2} \quad (1.4.16)$$

qui signifie que  $\lambda$  est aussi la pression au sens thermodynamique.

On remarquera que dans le principe (1.4.13), il apparaît le groupement

$$U(\rho) + \frac{\lambda}{\rho} \quad (1.4.17)$$

qui, si l'on restitue à  $\lambda$  sa signification (1.4.16) n'est autre que l'expression de l'enthalpie  $I(p)$ . Désormais, nous supposons que cette restitution est faite, et nous écrirons donc  $p$  à la place de  $\lambda$ .

Le principe (1.4.13) se transforme alors en

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \left\{ \delta \int_{V(o)} \left[ \rho_o \frac{\dot{u}_i \dot{u}_i}{2} + \rho_o g_i x_i + p \mathcal{J} - \rho_o I(p) \right] dV - \int_{S_2(o)} n_j \bar{p}_{ji} \delta u_i dS \right\} = 0 \quad (1.4.18)$$

Les relations de compressibilité sont déterminées par la structure de l'enthalpie. Dans le cas d'un fluide incompressible, on a

$$\frac{dI}{dp} = \frac{1}{\rho_0} \quad (1.4.19)$$

ce qui entraîne

$$I(p) = \frac{p}{\rho_0} \quad (1.4.20)$$

Pour un fluide compressible, nous décomposerons l'enthalpie en un terme incompressible et un terme correctif:

$$I(\rho) = \frac{p}{\rho_0} + I^*(p) \quad (1.4.21)$$

#### 4.2. Linéarisation géométrique dans le fluide

Les équations d'EULER-LAGRANGE du principe (1.4.18) ne sont pas linéaires, du fait de la présence du jacobien. Pour la recherche des petites oscillations du fluide, on peut procéder à une linéarisation autour de la position d'équilibre statique. Cette position s'obtient aisément en supprimant l'énergie cinétique dans le principe (1.4.18) et en variant les déplacements: on obtient

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \left\{ \int_{V(o)} (\rho_0 g_i \delta u_i + \bar{p} \bar{J} \bar{J}_{ji}^{-1} D_j \delta u_i) dV - \int_{S_2(o)} n_j \bar{p}_{ji} \delta u_i dS \right\} = 0, \quad (1.4.22)$$

ce qui conduit aux relations

$$\begin{aligned} \rho_0 g_i - D_j (\bar{p} \bar{J} \bar{J}_{ji}^{-1}) &= 0 && \text{dans } V \\ \bar{p} \bar{J} \bar{J}_{ji}^{-1} n_j - n_j \bar{p}_{ji} &= 0 && \text{sur } S_2, \end{aligned} \quad (1.4.23)$$

où les indices supérieurs  $o$  indiquent qu'il s'agit de la référence statique. A ce stade, nous ferons l'hypothèse que la position d'équilibre statique est suffisamment voisine de la position limite pour  $\vec{g} \rightarrow 0$  qui nous sert de référence, pour que l'on puisse écrire sans grande erreur

$$\overset{o}{J}_{ij} = \delta_{ij}, \quad \overset{o}{J} = 1. \quad (1.4.24)$$

Les équations d'équilibre deviennent alors

$$\begin{aligned} \rho_o g_i - D_j \overset{o}{p} &= 0 && \text{dans } V \\ n_j \overset{o}{p}_{ji} &= n_i \overset{o}{p} && \text{sur } S. \end{aligned} \quad (1.4.25)$$

On linéarise alors la perturbation en se limitant aux termes du second ordre dans le calcul de l'énergie. Si  $\overset{1}{p}$  est la pression dynamique, on aura donc

$$\overset{p}{J} = \left( \overset{o}{p} + \overset{1}{p} \right) \left( 1 + \overset{1}{J} + \overset{2}{J} + \overset{3}{J} \right) = \overset{o}{p} + \left( \overset{o}{p} \overset{1}{J} + \overset{1}{p} \right) + \left( \overset{1}{p} \overset{1}{J} + \overset{o}{p} \overset{2}{J} \right) \quad (1.4.26)$$

où  $\overset{1}{J}, \overset{2}{J}, \overset{3}{J}$  sont les termes des premier, second et troisième ordres en les déplacements dynamiques  $u_i$ . Un calcul élémentaire donne, moyennant les hypothèses (1.4.24),

$$\overset{1}{J} = D_i u_i \quad ; \quad \overset{2}{J} = \frac{1}{2} (D_i u_i D_j u_j - D_i u_j D_j u_i) \quad (1.4.27)$$

On développe d'autre part l'enthalpie en une série de TAYLOR limitée au second ordre:

$$I(\overset{o}{p} + \overset{1}{p}) = I + \frac{1}{\rho_o} - \frac{B}{2\rho_o} (\overset{1}{p})^2 \quad (1.4.28)$$

Muni de ces résultats, et tenant compte du fait qu'en vertu de la condition d'équilibre statique (1.4.22) simplifiée par les hypothèses (1.4.24),

$$\int_{V(o)} (\rho_o g_i u_i - \overset{o}{p} D_i u_i) dV - \int_{S_2(o)} n_j \overset{o}{p}_{ji} dS = 0,$$

on obtient, en omettant les termes invariants

$$\int_{V(o)} \rho_o g_i a_i dV \quad \text{et} \quad \int_{V(o)} \frac{o}{p} dV ,$$

le principe linéarisé

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \left\{ \delta \int_{V(o)} \left[ \rho_o \frac{\dot{u}_i \dot{u}_i}{2} + \frac{o}{2} (D_i u_i D_j u_j - D_i u_j D_j u_i) + \frac{1}{p} D_i u_i + \frac{B}{2} \left(\frac{1}{p}\right)^2 \right] dV \right. \\ \left. - \int_{S_2(o)} n_j \bar{p}_{ji} \delta u_i dS \right\} = 0 \quad (1.4.29)$$

#### 4.3. Cas des fluides incompressibles

Dans le cas des fluides incompressibles, on peut éliminer la pression d'une manière assez simple. En effet, comme  $B=0$ , la variation de la pression dynamique conduit simplement à la relation

$$D_i u_i = 0 \quad (1.4.30)$$

exprimant l'invariance du volume, au premier ordre. Variant alors les déplacements, on obtient l'équation

$$-\rho_o \ddot{u}_i - D_i \left( \frac{o}{p} D_j u_j \right) + D_j \left( \frac{o}{p} D_i u_j \right) - D_i \frac{1}{p} = 0 \quad (1.4.31)$$

qui, compte tenu de (1.4.30) et (1.4.25), s'écrit encore

$$\rho_o \ddot{u}_i = \rho_o g_j D_i u_j - D_i \frac{1}{p} = D_i (\rho_o g_j u_j - \frac{1}{p}) \quad (1.4.32)$$

Introduisant alors la fonction  $\phi$  définie par

$$\phi = g_j u_j - \frac{1}{\rho_o p} , \quad (1.4.33)$$

on ramène l'équation d'équilibre à la relation

$$u_i = D_i \phi \quad (1.4.34)$$

qui exprime l'existence d'un potentiel des déplacements. Ce potentiel jouera le même rôle que la variable  $\phi$  définie en (1.2.52). Mais il apparaît ici d'une manière naturelle, et acquiert du même coup une signification simple qui rend son utilisation plus aisée. La pression s'exprime alors en termes des déplacements et de la nouvelle fonction par

$$\overset{1}{p} = \rho_0 \varepsilon_j u_j - \rho_0 \phi = u_j D_j \overset{0}{p} - \rho_0 \phi, \quad (1.4.35)$$

ce qui permet d'écrire

$$\begin{aligned} \int_{V(o)} \overset{1}{p} D_i u_i dV &= \int_{V(o)} u_j D_j \overset{0}{p} D_i u_i dV - \int_{V(o)} \rho_0 \phi D_i u_i dV \\ &= \int_{V(o)} u_j D_j \overset{0}{p} D_i u_i dV - \int_{S(o)} \rho_0 \phi n_i u_i dS \\ &\quad + \int_{V(o)} \rho_0 u_i D_i \phi dV. \end{aligned} \quad (1.4.36)$$

D'autre part, les termes en  $\overset{0}{p}$  du principe (1.4.29) peuvent être transformés de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \text{a) } - \int_{V(o)} \frac{\overset{0}{p}}{2} D_i u_j D_j u_i dV &= - \int_{S(o)} \frac{\overset{0}{p}}{2} n_j u_i D_i u_j dS \\ &\quad + \int_{V(o)} u_i \frac{D_i \overset{0}{p}}{2} D_i u_j dV + \int_{V(o)} \frac{D_j \overset{0}{p}}{2} u_i D_{ij} u_j dV \end{aligned} \quad (1.4.37)$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \int_{V(o)} \frac{\overset{0}{p}}{2} D_i u_i D_j u_j dV &= \int_{S(o)} \frac{\overset{0}{p}}{2} n_j u_j D_i u_i dS - \int_{V(o)} \frac{D_i \overset{0}{p}}{2} u_j D_i u_j dV \\ &\quad - \int_{V(o)} \frac{\overset{0}{p}}{2} u_j D_{ij} u_i dV \end{aligned} \quad (1.4.38)$$

Faisant la somme des expressions (1.4.36) à (1.4.38), on obtient, en vertu de (1.4.25)

$$\int_{V(o)} \rho_o u_i D_i \phi \, dV + \frac{1}{2} \int_{V(o)} \rho_o g_j D_i (u_i u_j) \, dV - \int_{S(o)} \rho_o \phi n_i u_i \, dS \\ + \int_{S(o)} \frac{\rho_o}{2} (n_j u_j D_i u_i - n_j u_i D_i u_j) \, dS \quad (1.4.39)$$

La deuxième intégrale s'écrit encore

$$\frac{1}{2} \int_{S(o)} \rho_o g_j u_j n_i u_i \, dS \quad (1.4.40)$$

Quant à la dernière, il est utile de l'écrire en termes des coordonnées de la surface. Soient  $\xi_1, \xi_2, n$  ces coordonnées. Comme elles sont généralement curvilignes, il faut faire appel à la notion de dérivation covariante (\*). Notant par des indices grecs les composantes tangentielles, on obtient

$$n_j u_i D_i u_j = u_n |_{\alpha} u_{\alpha} + u_n |_n u_n$$

$$n_j u_j D_i u_i = u_n u_{\alpha} |_{\alpha} + u_n u_n |_n,$$

soit

$$\int_{S(o)} \frac{\rho_o}{2} (n_j u_j D_i u_i - n_j u_i D_i u_j) \, dS = - \int_{S(o)} \frac{\rho_o}{2} (u_n |_{\alpha} u_{\alpha} - u_{\alpha} |_{\alpha} u_n) \, dS. \quad (1.4.41)$$

Finalement, le principe (1.4.29) se transforme en

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \left\{ \delta \left[ \int_{V(o)} \left( \rho_o \frac{\dot{u}_i \dot{u}_i}{2} - \rho_o \dot{u}_i D_i \phi \right) dV + \right. \right. \\ \left. \left. - \int_{S(o)} \rho_o \phi u_n \, dS + \frac{1}{2} \int_{S(o)} \rho_o g_{\alpha} u_{\alpha} u_n \, dS \right] \right.$$

---

(\*) Les lecteurs qui se seraient pas au courant du calcul tensoriel trouveront une introduction aux coordonnées curvilignes au chapitre 3 du présent mémoire.

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2} \int_{S(o)} \rho_o g_n u_n^2 dS - \int_{S(o)} \frac{\bar{p}}{2} (u_{n|\alpha} u_\alpha - u_{\alpha|\alpha} u_n) dS \\
& - \int_{S_2(o)} n_j \bar{p}_{ji} \delta u_i dS \} = 0 \quad (1.4.42)
\end{aligned}$$

Ce principe contient à la fois les équations d'équilibre et de continuité. En effet, ses équations d'EULER-LAGRANGE et conditions naturelles s'écrivent

$$\delta u_i \rightarrow -\rho_o \ddot{u}_i + \rho_o D_i \dot{\phi} = 0 \quad \text{dans } V \quad (\text{Equilibre interne})$$

$$\begin{aligned}
\delta u_n \rightarrow \frac{1}{2} \rho_o g_\alpha u_\alpha + \rho_o g_n u_n - \frac{\bar{p}}{2} u_{\alpha|\alpha} - \frac{1}{2} u_\alpha D_\alpha \bar{p} - \frac{\bar{p}}{2} u_{\alpha|\alpha} \\
- \bar{p}_{nn} - \rho_o \dot{\phi} = 0,
\end{aligned} \quad ( )$$

soit

$$\bar{p}_{nn} - \rho_o g_n u_n - \rho_o g_\alpha u_\alpha + \bar{p} u_{\alpha|\alpha} + \rho_o \dot{\phi} = 0 \quad (\text{Equilibre selon la normale})$$

$$\delta u_\alpha \rightarrow \bar{p}_{n\alpha} - \rho_o g_\alpha u_n + \bar{p} u_{n|\alpha} = 0 \quad (\text{Equilibre tangentiel})$$

$$\delta \phi \rightarrow D_i (\rho_o \ddot{u}_i) = 0 \quad \text{dans } V \quad (\text{incompressibilité})$$

$$\rho_o n_i D_i \dot{\phi} - \rho_o \ddot{u}_n = 0 \quad \text{sur } S \quad (\text{transmission du déplacement normal})$$

On se ramène à un principe plus simple en restituant la condition d'équilibre intérieur  $u_i = D_i \phi$ , ce qui donne

$$\begin{aligned}
\int_{t_1}^{t_2} dt \{ \delta [ - \int_{V(o)} \rho_o \frac{D_i \dot{\phi} D_i \dot{\phi}}{2} dV - \int_{S(o)} \rho_o \dot{\phi} u_n dS \\
+ \frac{1}{2} \int_{S(o)} \rho_o g_\alpha u_\alpha u_n dS
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2} \int_{S(o)} \rho_o \varepsilon_n u_n^2 dS - \int_{S(o)} \frac{p_o}{2} (u_n|_{\alpha} u_{\alpha} - u_{\alpha}|_{\alpha} u_n) dS] \\
& - \int_{S_2(o)} n_j \bar{p}_{ji} \delta u_i dS = 0 \quad (1.4.43)
\end{aligned}$$

#### 4.4. Prise en compte quasi statique des gaz compressibles

Pour la partie du spectre située à des fréquences suffisamment basses, on peut considérer qu'un gaz répond de manière quasi statique. La condition d'applicabilité de cette approximation est donnée par l'inégalité

$$\omega^2 \ll \frac{c^2}{L^2} \quad (1.4.44)$$

où  $c$  est la célérité du son et  $L$  une longueur caractéristique. Moyennant cette hypothèse, on peut négliger l'énergie cinétique dans le principe (1.4.29). Il est aussi licite de négliger la pesanteur, du fait du faible poids du gaz. Il reste à déterminer la constante  $B$ . Partant de la condition d'isotropie

$$\frac{p}{\rho^\gamma} = \frac{p_o}{\rho_o^\gamma} \quad (1.4.45)$$

on obtient successivement

$$\frac{dI}{dp} = \frac{1}{p} = \frac{(p_o)^\gamma}{\rho_o} p^{-\frac{1}{\gamma}},$$

et

$$\frac{d^2 I}{dp^2} = - \frac{(p_o)^\gamma}{\rho_o} \frac{1}{\gamma} p^{-1 - \frac{1}{\gamma}},$$

ce qui entraîne

$$B = - \rho_o \left. \frac{d^2 I}{dp^2} \right|_{p=p_o} = \frac{1}{\gamma} \frac{p_o}{\rho_o} \quad (1.4.46)$$

Dès lors, le principe (1.4.29) devient

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \left\{ \delta \int_{V(o)} \left[ \frac{\overset{o}{p}}{2} (D_i u_i D_j u_j - D_i u_j D_j u_i) + \frac{1}{\overset{o}{p}} D_i u_i + \frac{1}{2\gamma \overset{o}{p}} (\overset{1}{p})^2 \right] dV \right. \\ \left. - \int_{S_2(o)} n_j \bar{p}_{ji} \delta u_i dS \right\} = 0, \quad (1.4.47)$$

étant entendu que  $\overset{o}{p}$  est une constante dans tout le volume du gaz.

La variation du déplacement  $u_i$  conduit alors à l'équation

$$- D_i \frac{1}{\overset{o}{p}} - D_i \left( \overset{o}{p} D_j u_j \right) + D_j \left( \overset{o}{p} D_i u_i \right) = 0,$$

soit, en tenant compte de la constance de  $\overset{o}{p}$ ,

$$D_i \frac{1}{\overset{o}{p}} = - \overset{o}{p} D_{ij} u_j + \overset{o}{p} D_{ij} u_j = 0, \quad (1.4.48)$$

ce qui signifie que la pression dynamique  $\frac{1}{\overset{o}{p}}$  est également constante dans tout le volume du gaz. Tenant compte de ce résultat et effectuant sur le terme en  $\overset{o}{p}$  les mêmes transformations que dans le cas des fluides incompressibles, on obtient le principe

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \left\{ \delta \left[ \frac{1}{\overset{o}{p}} \int_{S(o)} n_i u_i dS + \frac{\overset{o}{V}}{2\gamma \overset{o}{p}} (\overset{1}{p})^2 - \frac{\overset{o}{p}}{2} \int_{S(o)} (u_{n|\alpha} u_\alpha - u_{\alpha|\alpha} u_n) dS \right] \right. \\ \left. - \int_{S_2(o)} n_j \bar{p}_{ji} \delta u_i dS \right\} = 0 \quad (1.4.49)$$

où  $\overset{o}{V}$  est le volume initial.

A ce stade, on pourrait éliminer la pression  $\frac{1}{\overset{o}{p}}$  au profit du flux de déplacement, par la relation

$$\frac{1}{\overset{o}{p}} = - \frac{\gamma \overset{o}{p}}{\overset{o}{V}} \int_{S(o)} n_i u_i dS \quad (1.4.50)$$

Mais on serait alors conduit au calcul du terme

$$\frac{\gamma \overset{o}{p}}{\overset{o}{V}} \left( \int_{S(o)} n_i u_i dS \right)^2, \quad (1.4.51)$$

qui ne peut s'effectuer simplement par la méthode des éléments finis. On notera que MORAND et OHAYON [M2], partant de considérations sur l'accroissement de volume, ont obtenu le terme (1.4.51). Pour pouvoir le calculer, ils ont réintroduit un multiplicateur de LAGRANGE  $\lambda$ , qui est lié à  $\frac{1}{\bar{p}}$  par la relation

$$\frac{1}{\bar{p}} = \frac{\gamma \bar{p}^0}{\bar{v}} \lambda, \quad (1.4.52)$$

apparemment sans saisir son sens physique.

#### 4.5. Formulation du problème fluide-structure

Le liquide est contenu dans une structure élastique et possède, en général, une surface libre surmontée par un gaz éventuellement mis sous pression (fig. 1.4). Le liquide occupe un volume  $V_f$ , la structure un volume  $V_c$ , le gaz un volume  $V_g$ . L'interface liquide-structure sera appelée  $S_f$ , l'interface gaz-structure,  $S_g$ , et la surface libre,  $\Gamma$ ; la structure possède en outre une surface  $S_c$  qui n'est baignée ni par le liquide, ni par le gaz. Enfin, il convient de distinguer soigneusement la densité de masse  $\rho_c$  de la structure de celle du liquide, que nous noterons  $\rho_f$ . Conformément au point de vue lagrangien adopté, il s'agit des densités de masse de référence.

Pour la structure, on utilise simplement le principe de HAMILTON:

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \left\{ \delta \int_{V_c} \left( \rho_c \frac{\dot{u}_i \dot{u}_i}{2} - W(Du) + \rho_c g_i u_i \right) dV - \int_{S_f} n'_j \bar{p}_{ji} \delta u_i dS - \int_{S_g} n'_j \bar{p}_{ji} \delta u_i dS + \int_{S_c} \bar{t}_i \delta u_i dS \right\} = 0 \quad (1.4.53)$$

Dans ce principe,  $W(Du)$  représente la densité d'énergie de déformation, exprimée en termes des déplacements.  $n'_i$  est la normale à  $S_f$  ou  $S_g$ , vue de la structure. De la même façon que pour le liquide et le gaz, on prend la position d'équilibre statique comme référence. La condition d'équilibre s'écrit sous la forme de la nullité de la variation première de l'énergie totale :

$$\int_{V_c} \rho_c g_i \delta u_i dV - \int_{V_c} \delta W(Du) dV - \int_{S_f} n'_j \bar{p}_{ji} \delta u_i dS - \int_{S_g} n'_j \bar{p}_{ji} \delta u_i dS + \int_{S_c} \bar{t}_i \delta u_i dS = 0 \quad (1.4.54)$$

Quant à l'énergie de déformation, on la limite au second ordre, ce qui mène à écrire

$$W(Du) = W_\ell (Du) + W_g (\sigma_o, Du) , \quad (1.4.55)$$

où  $W_\ell$  est le terme linéaire classique, et  $W_g$ , un terme additionnel tenant compte des tensions d'équilibre, qui sera décrit en détail au chapitre 5. Ce terme est généralement appelé "terme de raideur géométrique" ou "terme de précontrainte". Le principe variationnel de la structure s'écrit donc, en tenant compte de (1.4.54),

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \left\{ \delta \int_{V_c} \left[ \rho_c \frac{\dot{u}_i \dot{u}_i}{2} - W_\ell(Du) - W_g(\sigma_o, Du) \right] dV - \int_{S_f} n'_j \bar{p}_{ji} \delta u_i dS - \int_{S_g} n'_j \bar{p}_{ji} \delta u_i dS \right\} = 0. \quad (1.4.56)$$

Appelant  $n_i$  la normale extérieure vue du liquide et  $n''_i$  la normale extérieure vue du gaz, on a

$$n_i = -n'_i \quad \text{sur } S_f \quad , \quad n''_i = -n'_i \quad \text{sur } \Gamma \quad (1.4.57)$$

Dès lors, si l'on additionne les trois principes (1.4.43), (1.4.49) et (1.4.56), en tenant compte du fait que les efforts de pression se transmettent d'un milieu à l'autre, on obtient le principe couplé:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} dt \left[ \int_{V_c} \rho_c \frac{\dot{u}_i \dot{u}_i}{2} dV - \int_{V_f} \rho_f \frac{D_i \phi D_i \phi}{2} dV - \int_{S_f} \rho_f \phi n_i u_i dS - \int_{\Gamma} \rho_f \phi n dS \right]$$

$$\begin{aligned}
& - \left[ \int_{V_c} (W_o(Du) + W_g(\sigma_o, Du)) dV - \int_{S_f} \rho_f g_n \frac{u_n^2}{2} dS - \frac{1}{2} \int_{S_f} \rho_f g_\alpha u_\alpha n_i u_i dS \right. \\
& + \int_{\Gamma} \rho_f g \frac{\eta^2}{2} dS - \frac{V_g}{2\gamma p_g^0} p_g^2 - p_g \int_{S_g} n_i'' u_i dS + p_g \int_{\Gamma} \eta dS \\
& \left. + \int_{S_f} \frac{p_f^0}{2} (u_n|_\alpha u_\alpha - u_\alpha|_\alpha u_n) dS + \frac{p_g^0}{2} \int_{S_g} (u_n|_\alpha u_\alpha - u_\alpha|_\alpha u_n) dS \right] = 0,
\end{aligned}$$

(1.4.58)

où  $\eta$  représente le déplacement normal de la surface libre. C'est le principe recherché. Une étude parfaitement rigoureuse devrait être basée sur son utilisation. Cependant, on en utilise souvent des versions simplifiées. Nous allons passer ces simplifications en revue.

#### 4.6. Formulations simplifiées

##### 4.6.1. L'hypothèse de TONG

Une simplification courante consiste à supposer que le déplacement des parois est essentiellement normal:

$$u_i|_{S_f} \approx u_n n_i, \quad u_i|_{S_g} \approx u_n n_i \quad (1.4.59)$$

ce qui permet de négliger le terme

$$\frac{1}{2} \int_{S_f} \rho_f g_\alpha u_\alpha u_n dS$$

devant son homologue

$$\frac{1}{2} \int_{S_f} \rho_f g_n u_n^2 dS.$$

Cette hypothèse est généralement attribuée à TONG [T1] . Souvent admise dans certaines théories de coques [I1] , elle peut cependant être prise en défaut dans certains cas. En particulier, elle a pour effet néfaste de donner de l'énergie au mode rigide de translation verticale. Il s'ensuit qu'en dehors de certains cas particuliers, comme celui du réservoir cylindrique à fond plat, ce mode rigide ne correspond plus à une fréquence rigoureusement nulle. Cependant, les applications pratiques montrent que la fréquence de ce mode est toujours très basse et que sa forme est très peu détériorée.

#### 4.6.2. Omission des termes en $\overset{0}{p}$

Les termes en  $\overset{0}{p}$  de la fonctionnelle (1.4.53) tiennent compte du fait que la pression est une mise en charge non linéaire, puisque la pression reste normale à la surface au cours de la déformation. Le terme  $u_{\alpha|\alpha} u_n$  représente la non-linéarité correspondant à l'augmentation de la surface de la coque. Il est donc presque toujours négligeable. Quant au terme  $u_n|_{\alpha} u_{\alpha}$  , il représente la variation angulaire de la coque. Son importance est assez discutable, surtout si l'on fait l'hypothèse de TONG. Nous reparlerons de ce terme au chapitre 5.

#### 4.6.3. Omission des termes provenant du gaz

Enfin, le terme de compressibilité du gaz a souvent une contribution négligeable. Nous discuterons également ce point au chapitre 5. Du fait l'hypothèse d'uniformité de la pression du gaz, cette contribution est d'ailleurs nulle pour les modes asymétriques.

4.6.4. Si toutes les simplifications décrites ci-dessus sont appliquées, le principe (1.4.58) se ramène à

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} dt \left\{ \left[ \int_{V_c} \rho_c \frac{\dot{u}_i \dot{u}_i}{2} dV - \int_{V_f} \rho_f \frac{D_i \phi D_i \phi}{2} dV \right. \right. \\ \left. \left. - \int_{S_f} \rho_f \bar{\varphi} n_i u_i dS - \int_{\Gamma} \rho_f \bar{\varphi} \eta dS \right] \right. \\ \left. - \left[ \int_{V_c} (W_o(Du) + W_g(\sigma_o, Du)) dV - \int_{S_f} \rho_f g_n \frac{u_n^2}{2} dS + \int_{\Gamma} \rho_f g_n \frac{\eta^2}{2} dS \right] \right\} = 0 \quad (1.4.60)$$

Cette forme simplifiée est la plus couramment utilisée. Aussi, c'est elle que nous discuterons en détail quant à son application. L'addition des termes restants ne pose d'ailleurs pas de problème spécial.

#### 4.7. Calcul de la pression

La perturbation de pression dans le liquide est donnée par la relation

$$p = -\rho_f \ddot{\phi} + \rho_f g_i D_i \phi .$$

Généralement, le deuxième terme est très petit devant le premier, au moins pour les modes fluide-structure. En effet, pour un mode de fond, on a par exemple  $\phi = 1$  au fond,  $\frac{\partial \phi}{\partial z} \approx \frac{\phi}{l}$ ,  $l$  étant la hauteur du liquide, soit pour fixer les idées, 5m. On a alors, pour un mouvement harmonique

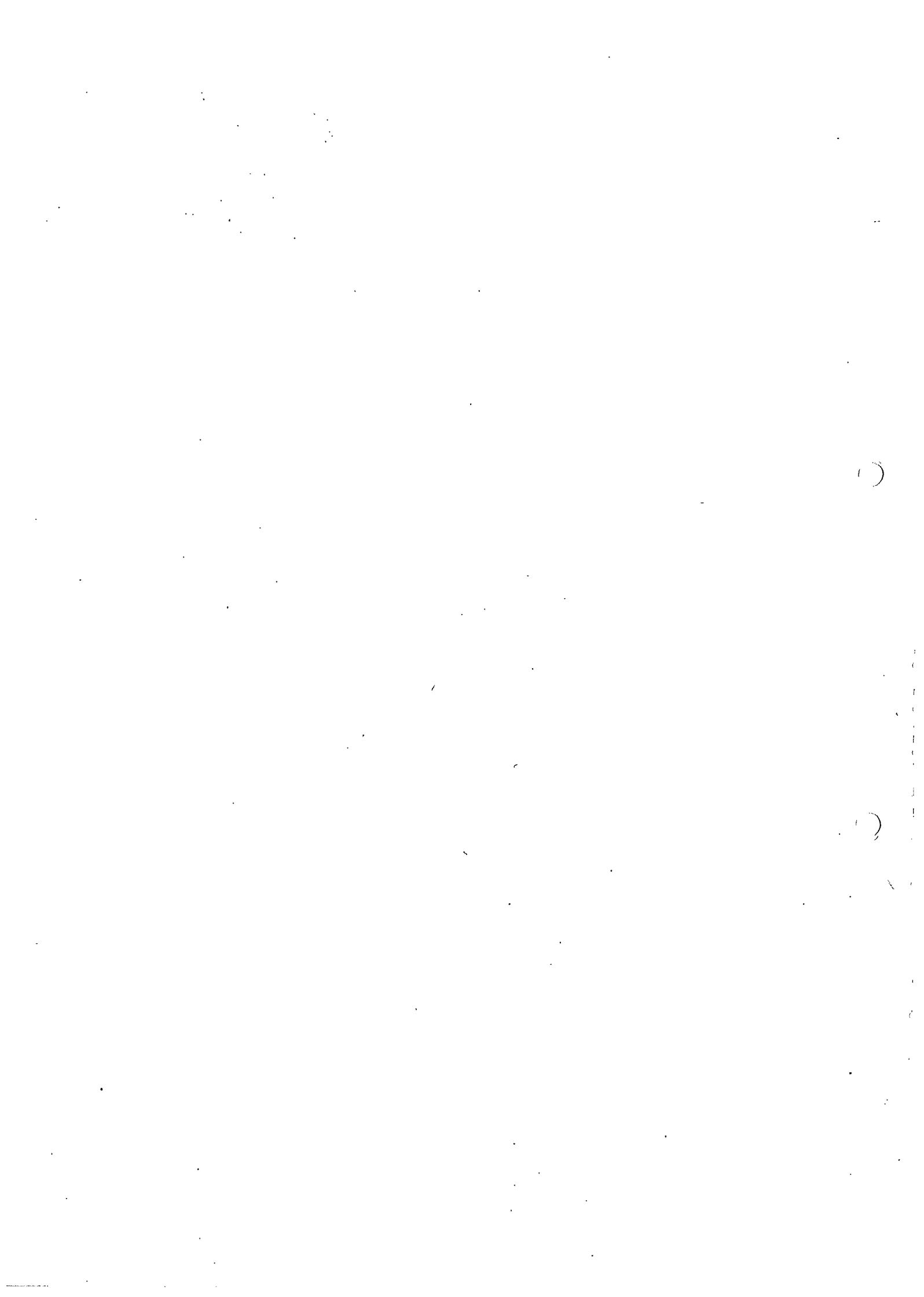
$$\ddot{\phi} = -\omega^2 \phi, \quad \frac{\partial \phi}{\partial z} \approx \frac{\phi}{l},$$

d'où

$$g \frac{\partial \phi}{\partial z} \approx 2 \phi .$$

On constate que pour  $\omega$  supérieur à 1,5 Hz, le premier terme est plus grand que le second, et qu'il croît comme le carré de la fréquence. On peut donc écrire avec une bonne approximation

$$p \approx -\rho_f \ddot{\phi} . \tag{1.4.61}$$



CHAPITRE IIRESOLUTION DU PROBLEME AUX VALEURS PROPRES SUPPOSE DISCRETISE

## 1. INTRODUCTION

Le principe (1.4.60) servira de base pour le présent exposé. On peut dire que sa donnée pose le problème fluide-structure. Il reste à le résoudre. Cette résolution comprend plusieurs étapes:

(i) La description de la structure. Cette étape dépend essentiellement du problème physique à traiter. Comme nous nous intéressons plus spécialement aux lanceurs, ce seront plus spécialement des corps axisymétriques. Les particularités de ce type de structures seront exposées au chapitre 3.

(ii) La discrétisation des différents champs apparaissant dans le principe variationnel. La méthode utilisée sera celle des éléments finis. On peut la considérer comme une méthode de RAYLEIGH-RITZ particulière [G3]. Mathématiquement, elle consiste à choisir des sous-espaces de dimension finie des espaces admissibles (généralement, des espaces de SOBOLEV). Nous ne nous étendrons pas sur cet aspect des choses. Signalons seulement que l'existence des solutions du problème spectral du fluide avec surface libre a été étudiée par J. BOUJOT [B1].

La description des modèles d'éléments finis fera l'objet du chapitre 4.

(iii) La résolution du problème aux valeurs propres obtenu par les deux étapes précédentes. Bien que ce problème matriciel ne puisse être connu explicitement qu'après celles-ci, ses caractéristiques ne dépendent pas des options particulières qui y ont été prises. C'est pourquoi nous l'étudierons en premier lieu, de manière à faire ressortir la généralité des conclusions qui résultent de cette analyse.

## 2. PRINCIPE VARIATIONNEL DISCRETISE

La discrétisation par la méthode des éléments finis consiste à se donner des bases finies de fonctions, ce que l'on peut schématiser par les équations matricielles:

$$u(x) = A(x) q, \quad \phi(x) = b^T(x) f, \quad \eta(x) = C^T(x) y \quad (2.2.1)$$

où  $A(x)$ ,  $b^T(x)$ ,  $C^T(x)$  sont des fonctions des coordonnées et  $q$ ,  $f$  et  $y$  des vecteurs d'inconnues.

Les différents termes du principe (1.4.60) s'écrivent alors respectivement :

$$(a) \quad \int_{V_c} [\bar{W}_l (Du) + W_g (\sigma_o, Du)] dV = \frac{1}{2} q^T K q ,$$

avec

$$K = \int_{V_c} A^T D (K_l + K_g) DA dV ,$$

D étant un opérateur de dérivation

$$(b) \quad \int_{\Gamma} \rho_f \frac{n^2}{2} dS = \frac{1}{2} y^T C y ,$$

avec

$$C = \int_{\Gamma} \rho_f s c c^T dS$$

$$(c) \quad \int_{S_f} \rho_f \vec{g} \cdot \vec{n} \frac{u^2}{2} dS = \frac{1}{2} q^T S q ,$$

avec

$$S = \int_{S_f} \rho_f \vec{g} \cdot \vec{n} b b^T dS$$

$$(d) \quad \int_{V_c} \rho_c \frac{\dot{u}_i \dot{u}_i}{2} dV = \frac{1}{2} \dot{q}^T M \dot{q} ,$$

avec

$$M = \int_{V_c} \rho_c A^T A dV$$

(2.2.2)

$$(e) \quad \int_{V_f} \rho_f \frac{D_i \phi D_i \phi}{2} dV = \frac{1}{2} \dot{f}^T N \dot{f} ,$$

avec

$$N = \int_{V_f} \rho_f \frac{D_i b D_i b^T}{2} dV$$

$$(f) \quad \int_{\Gamma} \rho_f \ddot{\phi} \eta \, dS = \bar{f}^T B y ,$$

avec

$$B = \int_{\Gamma} \rho_f b \, c^T \, dS$$

$$(g) \quad \int_{S_f} \rho_f \ddot{\phi} n_i u_i \, dS = \bar{f}^T D q ,$$

avec

$$D = \int_{S_f} \rho_f b \, n^T A \, dS .$$

Les matrices C, S, et M sont symétriques et définies positives, les matrices K et N symétriques et définies non négatives. K est définie positive en l'absence de modes rigides et de mécanismes pour la structure. Enfin, les tableaux B et D sont rectangulaires.

A l'aide de ces nouvelles définitions, on peut donner au principe (1.4.60) la forme matricielle

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \left( \frac{1}{2} \dot{f}^T N \dot{f} + \dot{f}^T B y + \frac{1}{2} y^T C y + \dot{f}^T D q - \frac{1}{2} \dot{q}^T M \dot{q} + \frac{1}{2} q^T K q - \frac{1}{2} q^T S q \right) dt = 0 , \quad (2.2.3)$$

et la variation indépendante des champs f, y et q conduit aux équations d'EULER-LAGRANGE discrétisées :

$$B \ddot{y} + D \ddot{q} - N \dot{f} = 0 \quad (2.2.4)$$

$$C y + B^T \dot{f} = 0 \quad (2.2.5)$$

$$M \ddot{q} + (K-S) q + D^T \dot{f} = 0 \quad (2.2.6)$$

qui peuvent être regroupées sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{bmatrix} K-S & 0 & 0 \\ 0 & C & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q \\ y \\ f \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} M & 0 & D^T \\ 0 & 0 & B^T \\ D & B & -N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q} \\ \ddot{y} \\ \ddot{f} \end{bmatrix} = 0 \quad (2.2.7)$$

Ce système se présente donc comme un problème aux valeurs propres classique à deux matrices. Il convient de noter que ce résultat n'a pu être obtenu que grâce à l'introduction des variables indépendantes  $\eta$ ,  $y$  de surface libre. En effet, leur élimination par la relation

$$y = -C^{-1} B^T \ddot{f} \quad (2.2.8)$$

conduirait au système

$$\begin{bmatrix} K-S & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q \\ f \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} M & D^T \\ D & -N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q} \\ \ddot{f} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -BC^{-1} B^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1V \\ 1V \\ f \end{bmatrix} = 0 \quad (2.2.9)$$

qui est à trois matrices, donc beaucoup plus compliqué à résoudre.

Mais même sous sa forme (2.2.7), ce problème aux valeurs propres est peu aisé à traiter, du fait du caractère fortement dégénéré des matrices assemblées. Nous allons voir comment cette difficulté peut être surmontée.

### 3. SINGULARITE DE LA MATRICE N ET CONDITION DE CONSERVATION DU VOLUME DU FLUIDE

Considérons une variation du potentiel ne dépendant que du temps:

$$\delta\phi(x,t) = \psi(t) \quad .$$

On a évidemment

$$D_i \delta\phi = D_i \psi = 0 \quad ,$$

$$D_i \delta\phi = D_i \psi = 0 ,$$

ce qui, introduit dans le principe (1.4.53), mène à la condition

$$\int_{t_1}^{t_2} \psi \left\{ \int_{\Gamma} \rho_f \eta \, dS + \int_{S_f} \rho_f n_i u_i \, dS \right\} dt = 0$$

qui, vu le caractère arbitraire de  $\psi$ , entraîne

$$\int_{\Gamma} \rho_f \eta \, dS + \int_{S_f} \rho_f n_i u_i \, dS \quad (2.3.1).$$

Cette condition exprime la nullité du flux massique traversant la frontière du domaine occupé par le fluide soit, comme  $\rho_f$  est une constante, la conservation du volume du fluide. C'est la seule relation liant les déplacements de structure et de surface libre.

Mathématiquement, il s'agit de la condition d'intégrabilité du problème  $\nabla^2 \phi = 0$  avec des conditions de NEUMANN sur toute la frontière. On notera que dans les formulations par les équations intégrales, on déduit la même condition de l'alternative de FREDHOLM [R2].

Dans le principe discrétisé, ceci se traduit par une singularité de la matrice N et l'existence d'un mode singulier de fluide

$$f = e \psi(t) \quad (2.3.2)$$

correspondant à  $\phi(x,t) = \psi(t)$  et tel que

$$Ne = 0, \quad (2.3.3)$$

$e$  étant le vecteur dont toutes les composantes sont égales à l'unité. On démontre en algèbre linéaire que dans ce cas, l'équation (2.2.4) n'admet une solution que si

$$e^T [By + Dq] = 0, \quad (2.3.4)$$

où l'on retrouve la forme discrétisée de (2.3.1).

La signification physique de la singularité de la matrice N est donc d'assurer la condition de conservation du volume (2.3.4) liant les déplacements de la structure à ceux de la surface libre. D'un autre point de

vue, cette singularité constitue un obstacle sérieux à l'élimination de  $f$  à l'aide de la relation (2.2.4) qui, comme nous le verrons par la suite, permet, tout en réduisant sensiblement l'ordre du système, de supprimer le caractère dégénéré des matrices assemblées.

Si l'on fixe arbitrairement à zéro le potentiel en un point quelconque du fluide, la matrice  $N$ , amputée de la ligne et la colonne correspondante, se réduit à une matrice inversible  $N_0$ .

Une telle fixation revient seulement à se donner une origine des potentiels et est donc sans effet sur les déplacements du fluide. Mais en l'absence de la condition (2.3.4), le problème cesse d'être bien posé, et il faut donc exiger qu'elle soit vérifiée a priori, ce qui mène au couple d'équations :

$$\begin{aligned} e^T (Dq + By) &= 0 \\ \ddot{f} &= N_0^{-1} (D\ddot{q} + B\ddot{y}) \end{aligned} \tag{2.3.5}$$

Ce raisonnement n'est, en substance, rien d'autre que la méthode des liaisons temporaires introduite par FRAELJS de VEUBEKE [F2] pour le traitement des structures hypostatiques.

Une manière simple d'assurer la condition de constance du volume (2.3.4) consiste à l'introduire directement dans le principe (2.2.3) à l'aide d'un multiplicateur lagrangien  $v$ . On obtient de la sorte le principe augmenté

$$\begin{aligned} \delta \int_{t_1}^{t_2} \left[ \frac{1}{2} \dot{f}^T N \dot{f} + \dot{f}^T B \dot{y} + \dot{f}^T D \dot{q} + v e^T (By + Dq) \right. \\ \left. + \frac{1}{2} y^T C y + \frac{1}{2} q^T (K-S) q - \frac{1}{2} \dot{q}^T M \dot{q} \right] dt = 0 \end{aligned} \tag{2.3.6}$$

dont les équations d'EULER-LAGRANGE, obtenues en variant successivement  $f, v, y$  et  $q$ , s'écrivent :

$$B\ddot{y} + D\ddot{q} - Nf = 0$$

$$e^T B y + e^T D q = 0$$

(2.3.7)

$$C y + B^T f + B^T e v = 0$$

$$(K-S)q + M\ddot{q} + D^T f + D^T e v = 0$$

ou encore, sous forme matricielle,

$$\begin{bmatrix} K-S & 0 & D^T e & 0 \\ 0 & C & B^T e & 0 \\ e^T D & e^T B & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q \\ y \\ v \\ f \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} M & 0 & 0 & D^T \\ 0 & 0 & 0 & B^T \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ D & B & 0 & -N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q} \\ \ddot{y} \\ \ddot{v} \\ \ddot{f} \end{bmatrix} = 0$$

(2.3.8)

Comme la condition de constance du volume est à présent assurée indépendamment de la singularité de la matrice  $N$ , on peut fixer un potentiel, ce qui permet d'éliminer le vecteur  $f$  à l'aide de la relation (2.3.5). Reportant cette équation dans le système (2.3.8), on obtient le système réduit

$$\begin{bmatrix} K-S & 0 & D^T e \\ 0 & C & B^T e \\ e^T D & e^T B & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q \\ y \\ v \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} M+DN^{-1} & D^T & 0 \\ BN^{-1} & D^T & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q} \\ \ddot{y} \\ \ddot{v} \end{bmatrix} = 0$$

(2.3.9)

C'est un problème aux valeurs propres classique avec un terme de contrainte linéaire. Les matrices ne sont plus dégénérées. De plus, l'élimination complète des degrés de liberté du fluide permet de résoudre un système considérablement réduit, d'où une économie substantielle de calculs. Après résolution, les degrés de liberté  $f$  peuvent être aisément restitués par la relation (2.3.5).

Si l'on compare cette technique de réduction du système à celle de GUYAN-IRONS, qui est couramment utilisée en analyse dynamique des structures [G3, G4, I2], on remarquera que les opérations sont très similaires. Il y a cependant deux différences fondamentales entre ces deux techniques. Tout d'abord, l'élimination est effectuée à partir de la matrice de masse et non celle de raideur, c'est-à-dire que l'on exprime l'équilibre des forces d'inertie et non celui des forces élastiques. La deuxième différence se trouve dans le fait que, face à ces termes d'inertie, il n'y a aucun terme de raideur, ce qui signifie que, contrairement à la technique de GUYAN-IRONS, le procédé d'élimination ci-dessus n'entraîne aucune erreur et ne nécessite donc aucune précaution spéciale ni aucun choix de degrés de libertés retenus pour maintenir une précision suffisante.

Enfin, on observera que cette élimination n'affecte que la matrice de masse du système assemblé et non celle de raideur, qui ne subit qu'un simple compactage. Cette constatation revêt une grande importance pratique, car elle est à la base de la méthode de condensation séparée des matrices de raideur et de masse décrite ci-dessous. C'est précisément pour obtenir ce résultat que nous avons utilisé un multiplicateur de LAGRANGE pour introduire l'invariance du volume, plutôt qu'une technique de projection comme celle qu'a utilisé FRAEIJIS de VEUBEKE dans sa méthode des liaisons temporaires [F2]. En effet, cette dernière technique présenterait ici le grave inconvénient de modifier la matrice de raideur et donc de coupler l'assemblage des deux matrices.

Dans ce qui précède, nous avons supposé qu'il n'existait qu'un seul réservoir de fluide. Dans le cas des réservoirs multiples, on peut reprendre le raisonnement ci-dessus, à cette différence près qu'il existe un mode singulier de fluide par réservoir. La matrice N aura donc autant de singularités qu'il y aura de réservoirs, et on devra attribuer un multiplicateur de LAGRANGE à chacun de ceux-ci. Ceci correspond au fait que le volume de fluide est constant dans chaque réservoir pris séparément. (A moins qu'il ne s'agisse de vases communicants, qui doivent être considérés comme un réservoir unique).

4. TECHNIQUE D'ASSEMBLAGE ET DE RESOLUTION DU PROBLEME AUX VALEURS PROPRES DE L'ENSEMBLE FLUIDE-STRUCTURE AVEC REDUCTION DU SYSTEME

Dans les problèmes dynamiques classiques, on réduit souvent le nombre de degrés de liberté par une technique que l'on peut schématiser comme suit. Partant d'un système :

$$\begin{bmatrix} K_{RR} & K_{RC} \\ K_{CR} & K_{CC} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_R \\ q_C \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} M_{RR} & M_{RC} \\ M_{CR} & M_{CC} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}_R \\ \ddot{q}_C \end{bmatrix} = 0 \quad (2.4.1)$$

où les indices R et C désignent respectivement les degrés de liberté que l'on désire retenir et ceux que l'on désire éliminer, on se donne une relation de la forme

$$q_C = Rq_R \quad (2.4.2)$$

permettant de calculer les degrés de liberté condensés en termes des degrés de liberté retenus. On exprime alors cette relation dans le principe de HAMILTON : l'énergie de déformation sera donnée par

$$2V = q_R^T K_{RR} q_R + q_C^T K_{CR} q_R + q_R^T K_{RC} q_C + q_C^T K_{CC} q_C = q_R^T K_{RR}^* q_R,$$

avec

$$K_{RR}^* = K_{RR} + R^T K_{CR} + K_{RC} R + R^T K_{CC} R \quad (2.4.3)$$

et l'énergie cinétique, par

$$2T = \dot{q}_R^T M_{RR} \dot{q}_R + \dot{q}_C^T M_{CR} \dot{q}_R + \dot{q}_R^T M_{RC} \dot{q}_C + \dot{q}_C^T M_{CC} \dot{q}_C = \dot{q}_R^T M_{RR}^* \dot{q}_R,$$

avec

$$M_{RR}^* = M_{RR} + R^T M_{CR} + M_{RC} R + R^T M_{CC} R \quad (2.4.4)$$

Le choix de la matrice R conditionne évidemment la validité du procédé. Une exigence primordiale sera que les modes rigides soient préservés. Rappelons qu'un mode rigide est solution du système homogène

$$K_{RR} q_R + K_{RC} q_C = 0$$

$$K_{CR} q_R + K_{CC} q_C = 0$$

Si l'on suppose que la structure est fixée de manière au moins isostatique lorsque les  $q_R$  sont posés nuls, la deuxième de ces relations entraîne

$$q_C = - K_{CC}^{-1} K_{CR} q_R, \quad (2.4.5)$$

soit

$$R = - K_{CC}^{-1} K_{CR} \quad (2.4.6)$$

Ce choix caractérise la condensation de GUYAN-IRONS [G2,G3,I2].

C'est la seule relation de la forme (2.4.2) qui préserve les modes rigides.

Si l'on se reporte au système (2.4.1), on constate qu'elle consiste à négliger l'effet des charges d'inertie relatives aux  $q_C$  sur la forme du mode. Cette constatation sert généralement de guide dans le choix des degrés de liberté à condenser. On peut aussi dire que l'on remplace, au droit des  $q_C$ , le mode réel par la solution statique correspondant aux  $q_R$  donnés. Cette interprétation se base sur l'équation (2.4.5).

La méthode des sous-structures en série est décrite en détail dans les travaux de SANDER [S1] et GERADIN [G3, G5, G6]. Dans cette méthode, la première sous-structure résulte de l'assemblage d'un certain nombre d'éléments ; on définit alors de nouvelles structures par récurrence, par addition d'éléments à la sous-structure précédemment définie. Dans chaque sous-structure on distingue

- les degrés de liberté retenus  $q_R$ , qui sont soit des degrés de liberté que l'on a décidé de retenir pour la résolution finale, soit des degrés de liberté appartenant également à des éléments non encore connectés.
- les degrés de liberté à condenser  $q_C$ .

On peut donc écrire les matrices de raideur et de masse sous la forme

$$\begin{bmatrix} K_{RR} & K_{RC} \\ K_{CR} & K_{CC} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{bmatrix} M_{RR} & M_{RC} \\ M_{CR} & M_{CC} \end{bmatrix} \quad (2.4.7)$$

La première étape consiste à calculer la matrice de réduction

$$R = -K_{CC}^{-1} K_{CR}, \text{ et la matrice de raideur condensée}$$

$$K_{RR}^* = K_{RR} - K_{RC} K_{CC}^{-1} K_{CR}; \quad (2.4.8)$$

la deuxième étape est la condensation de la masse: il faut calculer

$$M_{RR}^* = M_{RR} - K_{RC} K_{CC}^{-1} M_{CR} - M_{RC} K_{CC}^{-1} K_{CR} + K_{RC} K_{CC}^{-1} M_{CC} K_{CC}^{-1} K_{CR} \quad (2.4.9)$$

On se rend aisément compte que ces deux opérations peuvent être effectuées séparément. En effet, pour assembler et condenser la matrice de raideur, on n'a besoin d'aucun renseignement sur la masse. L'assemblage et la condensation de la masse peuvent être réalisés ultérieurement, à condition d'avoir mémorisé les matrices R de chaque sous-structure sur une unité périphérique. L'intérêt de cette séparation des deux assemblages réside dans l'économie substantielle de mémoire qu'elle permet de réaliser.

Pour le problème aux valeurs propres (2.3.8), la situation est toute différente. Tout d'abord, la condensation des degrés de liberté de fluide se fait sur la matrice de masse. Lorsque l'on procède directement à cette condensation, sans levée préalable de la singularité de la matrice N  $[A_2, B_2, B_3]$ , cette condensation se termine par la mise en évidence de la singularité et l'apparition dans la matrice de masse de la contrainte d'invariance du volume. Il faut alors reporter cette contrainte dans la matrice de raideur avant de pouvoir commencer la condensation des degrés de liberté de structure. Cette technique présente donc le grave inconvénient de perturber l'ordre d'assemblage des deux matrices et d'exiger une procédure en deux étapes, l'une pour éliminer les degrés de liberté de fluide et traiter la contrainte de constance du volume qui en résulte et l'autre pour condenser le problème modifié. Ce procédé est peu pratique et, en outre, à la fin de la première étape, les matrices de raideur et de masse doivent obligatoirement contenir tous les degrés de liberté de structure adjacents au fluide et tous les degrés de liberté de la surface libre, ce qui conduit rapidement à des dimensions prohibitives.

C'est ici qu'intervient la remarque que nous avons faite ci-dessus, à savoir que si l'on lève préalablement la singularité de la matrice N par l'introduction a priori de la condition de constance de volume (ce qui n'augmente le nombre total de degrés de liberté que d'une unité par réservoir), l'élimination des degrés de liberté de fluide n'a aucun effet

sur la matrice de raideur. Il redevient donc possible d'assembler et de condenser cette matrice indépendamment de celle de masse. On procède ensuite à l'assemblage et la condensation de cette dernière, ce qui s'effectue en deux temps: on élimine d'abord les degrés de liberté de fluide, puis on condense les degrés de liberté de structure qui ont déjà été éliminés de la raideur;

Dans le cadre de la méthode des sous-structure en série, on distinguera donc, pour chaque sous-structure,

- les degrés de liberté de structure retenus  $q_R$
- les degrés de liberté de structure condensés  $q_C$
- les degrés de liberté de fluide  $q_L$ .

Les déplacements de surface libre seront classés parmi les  $q_R$  et les  $q_C$ , de même que le multiplicateur lagrangien. Les matrices de raideur et de masse ont donc les formes respectives

$$\begin{bmatrix} K_{RR} & K_{RC} & 0 \\ K_{CR} & K_{CC} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{bmatrix} M_{RR} & M_{RC} & M_{RL} \\ M_{CR} & M_{CC} & M_{CL} \\ M_{LR} & M_{LC} & M_{LL} \end{bmatrix} \quad (2.4.10)$$

La première étape consiste à écrire la relation classique

$$q_C = - K_{CC}^{-1} K_{CR} q_R, \quad (2.4.11)$$

et à condenser la matrice de raideur de la manière classique:

$$K_{RR}^* = K_{RR} - K_{RC} K_{CC}^{-1} K_{CR} \quad (2.4.12)$$

La matrice  $K_{CC}^{-1} K_{CR}$  est alors mémorisée sur périphérique, puis on passe à la sous-structure suivante.

Lors de l'assemblage de la matrice de masse, on élimine d'abord les degrés de liberté de fluide par la relation

$$q_L = - M_{LL}^{-1} (M_{LR} q_R + M_{LC} q_C), \quad (2.4.13)$$

ce qui conduit à la nouvelle matrice de masse

$$\begin{bmatrix} \bar{M}_{RR} & \bar{M}_{RC} \\ \bar{M}_{CR} & \bar{M}_{CC} \end{bmatrix}, \quad (2.4.14)$$

avec

$$\begin{aligned} \bar{M}_{RR} &= M_{RR} - M_{RL} M_{LL}^{-1} M_{LR} \\ \bar{M}_{CR} &= M_{CR} - M_{CL} M_{LL}^{-1} M_{LR} \\ \bar{M}_{CC} &= M_{CC} - M_{CL} M_{LL}^{-1} M_{LC} \end{aligned} \quad (2.4.15)$$

On recherche alors la matrice  $K_{CC}^{-1} K_{CR}$  sur la mémoire périphérique pour effectuer une condensation classique de la matrice de masse modifiée (2.4.14), ce qui mène à

$$M_{RR}^* = \bar{M}_{RR} - K_{RC} K_{CC}^{-1} \bar{M}_{RC} - \bar{M}_{CR} K_{CC}^{-1} K_{CR} + K_{RC} K_{CC}^{-1} \bar{M}_{CC} K_{CC}^{-1} K_{CR}, \quad (2.4.16)$$

puis on passe à la sous-structure suivante.

Après résolution du problème aux valeurs propres dans le système retenu, on peut restituer les degrés de liberté  $q_C$  et  $q_L$  en reprenant les sous-structure dans l'ordre inverse. Pour chacune d'elles, on calcule successivement les  $q_C$  par la relation

$$q_C = - K_{CC}^{-1} K_{CR} q_R \quad (2.4.17)$$

et les  $q_L$  par la relation

$$\bar{q}_L = - M_{LL}^{-1} (M_{LR} q_R + M_{LC} q_C) \quad (2.4.18)$$

Cette dernière opération suppose que l'on ait mémorisé les matrices  $M_{LL}^{-1} M_{LR}$  et  $M_{LL}^{-1} M_{LC}$  de chaque sous-structures sur périphérique.

La possibilité de calculer un premier itéré des modes propres ainsi que des bornes à l'erreur commise sur les valeurs propres du fait de la condensation [G3,G7] reste acquise au même titre que pour un problème dynamique classique. En effet, la condensation des degrés de liberté de fluide est parfaitement rigoureuse et n'entraîne aucune détérioration du spectre propre du système.

CHAPITRE III

DESCRIPTION DES STRUCTURES DE REVOLUTION

## 1. INTRODUCTION

Les problèmes d'interaction fluide-structure ont été envisagés jusqu'ici d'un point de vue assez général. La formulation exposée au chapitre 1 ne faisait en effet pas d'hypothèse spéciale sur la géométrie et dans le chapitre 2, nous avons supposé que la discrétisation était réalisée, ce qui nous a permis d'étudier la manière de résoudre le problème aux valeurs propres correspondant. A ce stade, nous pourrions donc étudier une classe assez large de problèmes, comme le ballottement du carburant dans une aile d'avion, les vibrations de type POGO des lanceurs et bien d'autres encore.

Il convient à présent de préciser le type de structures envisagées. Comme notre étude est orientée vers les problèmes des lanceurs, nous accorderons un intérêt particulier aux structures à géométrie de révolution. La précision "à géométrie de révolution" signifie que la mise en charge et les modes dynamiques étudiés sont quelconques. Les structures du domaine aéro-spatial sont conçues avec le souci constant de limiter le poids. C'est pourquoi, elles sont généralement constituées de coques minces raidies par des longerons et des lisses. On y trouve aussi des matériaux multicouches et sandwiches, notamment dans le cas où le constructeur utilise des revêtements viscoélastiques amortissants.

Nous étudierons d'abord les coques de révolution. L'exposé commence par l'étude des coques d'épaisseur modérée, c'est-à-dire que l'on tient compte de la déformation due à l'effort tranchant. Les raisons de ce choix se trouvent dans l'application de la théorie aux méthodes d'éléments finis : seule une théorie de ce type permet une connexion de la coque à un volume sans provoquer de bâillements (fig. 3.1); d'autre part, nous verrons que la formulation des coques d'épaisseur modérée permet d'étudier les sandwiches par des coques équivalentes. Le cas des coques de KIRCHHOFF-LOVE est alors déduit très simplement du cas précédent.

L'examen des diverses formulations proposées fait ressortir des différences dans l'expression des déformations, notamment pour la torsion. Certes, les différences sont de l'ordre de  $\frac{t}{R}$ , ce qui pousse à croire qu'elles sont négligeables. Nous montrons qu'il n'en est rien, car la présence ou l'absence de ces termes "négligeables" conditionne la représentation correcte des modes rigides de rotation et, par là même, de l'équilibre. Nous introduisons en conséquence une méthode de simplification des déformations basée sur un développement en série et un critère de simplification garantissant le respect des modes rigides.

Le problème des conditions de symétrie sur l'axe de symétrie est rarement abordé dans les exposés classiques. Nous proposons une étude systématique de cette question, tant pour les coques de HENCKY-REISSNER que pour celles de KIRCHHOFF-LOVE, se basant sur le fait que l'énergie de déformation doit être finie.

L'étude des coques à double courbure par la méthode des éléments finis se heurte à des problèmes de représentation des modes rigides dans le modèle adopté. C'est pourquoi nous proposons une approche nouvelle, basée sur une extension de la théorie des coques plates de MARGUERRE au cas des coques quasi-coniques. L'avantage de cette formulation réside dans le fait que la solution obtenue converge vers la solution que donnerait la théorie des coques profondes, lorsque le maillage se raffine, car les hypothèses des coques quasi-coniques tendent à être vérifiées.

Les raidisseurs de révolution sont étudiés en détail. L'étude inclut les gauchissements, et nous montrons que si l'extension radiale du raidisseur est faible, les gauchissements sont identiques à ceux des poutres rectilignes. La prise en compte de la raideur due au gauchissement de torsion est discutée en détail. Enfin, on montre comment tenir compte du déport du centre de gravité de la section par rapport au feuillet moyen de la coque.

Les sandwichs et multicouches font l'objet d'un paragraphe spécial, où les différentes manières de les représenter sont présentées et discutées.

Enfin, une section est consacrée à la méthode de répartition des raidisseurs. Les relations constitutives orthotropes sont déduites par la voie énergétique, et nous présentons une évaluation de l'erreur introduite par cette répartition.

L'étude des coques se fait de plus en plus à l'aide du calcul tensoriel. Celui-ci permet d'établir une théorie tout-à-fait générale, et c'est là son principal avantage. En contrepartie, la lecture d'un exposé utilisant le calcul tensoriel nécessite un certain entraînement et, de ce fait, rebute bon nombre d'ingénieurs. C'est pourquoi nous nous sommes efforcé de rendre notre exposé indépendant de cette discipline. Les quelques notions absolument nécessaires sur les coordonnées curvilignes sont exposées au début du chapitre, dans un formalisme matriciel que nous avons essayé de rendre aussi simple que possible. Cette méthode s'applique telle quelle à tous les systèmes orthogonaux et, moyennant quelques compléments, elle pourrait d'ailleurs être étendue aux systèmes quelconques. L'utilisation du formalisme matriciel permet de systématiser les calculs et, par là même, de minimiser les risques d'erreurs.

## 2. THEORIE ELEMENTAIRE DES COORDONNEES CURVILIGNES

### 2.1. Changement de repère

Considérons un référentiel cartésien  $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$  de l'espace physique  $R^3$ , et soit  $\vec{u}$  un vecteur quelconque. Ses trois composantes cartésiennes  $\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3$  sont telles que

$$\vec{u} = \bar{u}_1 \vec{e}_1 + \bar{u}_2 \vec{e}_2 + \bar{u}_3 \vec{e}_3 \quad (3.2.1)$$

et forment la matrice unicolonne  $\bar{u}$  :

$$\bar{u} = \begin{bmatrix} \bar{u}_1 \\ \bar{u}_2 \\ \bar{u}_3 \end{bmatrix} \quad (3.2.2)$$

En particulier, un point P peut être représenté par son vecteur-position

$$\vec{r} = x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2 + x_3 \vec{e}_3 \quad (3.2.3)$$

soit encore

$$\bar{r}^T = \{x_1, x_2, x_3\} \quad (3.2.4)$$

Supposons à présent que les trois coordonnées du point P dépendent de trois autres variables  $\xi_1$ ,  $\xi_2$  et  $\xi_3$ . Lorsque celles-ci prennent un accroissement infinitésimal, le point P se déplace de

$$d\vec{r} = \vec{h}_1 d\xi_1 + \vec{h}_2 d\xi_2 + \vec{h}_3 d\xi_3 \quad (3.2.5)$$

avec

$$\vec{h}_i = \partial_i \vec{r} \quad (3.2.6)$$

Nous utiliserons en effet les notations

$$D_i(\cdot) = \frac{\partial(\cdot)}{\partial x_i}, \quad \partial_i(\cdot) = \frac{\partial(\cdot)}{\partial \xi_i} \quad (3.2.7)$$

Les trois vecteurs  $\vec{h}_i$  ont pour représentation cartésienne les trois matrices unicolonnes  $\bar{h}_i$ . La matrice carrée

$$J = \{\bar{h}_1, \bar{h}_2, \bar{h}_3\} \quad (3.2.8)$$

a pour composantes

$$J_{ij} = \partial_j x_i \quad (3.2.9)$$

C'est donc la matrice jacobienne de la transformation. Si son déterminant, que nous noterons  $\mathcal{J}$ , n'est pas nul, les trois vecteurs  $\vec{h}_i$  sont indépendants. On peut alors utiliser ces vecteurs comme base pour tous les vecteurs définis au point P. Les composantes définies dans cette base sont dites contravariantes. Il est plus commode d'utiliser les vecteurs normés

$$\vec{a}_i = \frac{\vec{h}_i}{\|\vec{h}_i\|} = \frac{\vec{h}_i}{\kappa_i} \quad (3.2.10)$$

où l'on note

$$\kappa_i = \|\vec{h}_i\| \quad (3.2.11)$$

Les composantes définies dans la base (3.2.10) sont dites composantes physiques. Un vecteur quelconque  $\vec{u}$  aura donc dans ce système les composantes  $u_1, u_2, u_3$ , définies par

$$\vec{u} = u_1 \vec{a}_1 + u_2 \vec{a}_2 + u_3 \vec{a}_3 \quad (3.2.12)$$

et formant la matrice unicolonne

$$u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \quad (3.2.13)$$

Le passage d'un système à l'autre est extrêmement aisé. En effet, la relation (3.2.12) entraîne

$$\bar{u} = u_1 \bar{a}_1 + u_2 \bar{a}_2 + u_3 \bar{a}_3 \quad (3.2.14)$$

soit

$$\bar{u} = Su \quad (3.2.15)$$

où  $S$  est la matrice définie par

$$S = \{\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3\} = \left\{ \frac{h_1}{\kappa_1}, \frac{h_2}{\kappa_2}, \frac{h_3}{\kappa_3} \right\} \quad (3.2.16)$$

Il découle immédiatement de cette définition que

$$S_{ij} = \frac{J_{ij}}{\kappa_j} \quad (3.2.17)$$

et

$$S_{ij}^{-1} = \kappa_i J_{ij}^{-1} \quad (3.2.18)$$

### 2.2. Systèmes orthogonaux

Nous dirons que le système curviligne est orthogonal si les trois vecteurs  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$  forment un référentiel orthonormé. Il est clair que dans ce cas, la matrice  $S$  est orthonormale c'est-à-dire que

$$S^{-1} = S^T \quad (3.2.19)$$

Les systèmes orthogonaux sont les plus courants. Nous citerons en particulier les coordonnées cylindriques et les coordonnées sphériques.

Introduisons encore la matrice

$$M = S^T S \quad (3.2.20)$$

qui joue un rôle privilégié. Il est équivalent de dire que le système est orthogonal ou que la matrice  $M$  se réduit à la matrice unité  $I$ .

### 2.3. Convention de sommation

Afin d'alléger les écritures dans ce qui suit, nous ferons la convention de sommation suivante : chaque fois qu'un indice est répété, il y a lieu de faire la somme sur les valeurs 1, 2 et 3 de cet indice, excepté s'il affecte un des

nombre  $\kappa_i$ . Ainsi, par exemple,

$$u_i v_i = \sum_{i=1}^3 u_i v_i$$

$$\frac{u_i}{\kappa_i}, \kappa_i u_i : \text{ pas de somme} \quad (3.2.21)$$

$$A_{ij} \kappa_j v_j = \sum_{j=1}^3 A_{ij} \kappa_j v_j$$

#### 2.4. Tenseur métrique

Le tenseur métrique apparaît lorsque l'on veut calculer l'élément de longueur. En effet,

$$ds^2 = \vec{dr} \cdot \vec{dr} = (\partial_k x_i d\xi_k) (\partial_\ell x_i d\xi_\ell) = J_{ik} J_{i\ell} d\xi_k d\xi_\ell$$

$$= G_{k\ell} d\xi_k d\xi_\ell$$

où l'on voit apparaître la matrice

$$G = J^T J \quad (3.2.22)$$

qui porte le nom de tenseur métrique. On a visiblement

$$G_{ij} = \vec{h}_i \cdot \vec{h}_j \quad (3.2.23)$$

ce qui permet encore d'écrire

$$G_{ij} = \vec{h}_i \cdot \vec{h}_j = \kappa_i \kappa_j \vec{a}_i \cdot \vec{a}_j = \kappa_i \kappa_j M_{ij} \quad (3.2.24)$$

En particulier, dans un système orthogonal.

$$G = \text{diag} (\kappa_i^2) \quad (3.2.25)$$

#### 2.5. Transformation des dérivées

Soit  $\phi$  un scalaire. On a

$$D_i \phi = D_i \xi_j \partial_j \phi = J_{ji}^{-1} \partial_j \phi \quad (3.2.26)$$

$$\partial_i \phi = \partial_i x_j D_j \phi = J_{ji} D_j \phi \quad (3.2.27)$$

Ce sont les formules fondamentales de transformation des dérivées.

### 2.6. Transformation du gradient

Le gradient est un opérateur associant à un scalaire  $\phi$  un vecteur  $\vec{\nabla}\phi$  défini en coordonnées cartésiennes par

$$(\overline{\nabla\phi})_i = D_i \phi \quad (3.2.28)$$

Les composantes de ce vecteur en coordonnées curvilignes seront donc

$$(\nabla\phi)_i = S_{ij}^{-1} (\overline{\nabla\phi})_j = S_{ij}^{-1} D_j \phi = S_{ij}^{-1} J_{kj}^{-1} \partial_k \phi$$

où l'on a utilisé les formules (3.2.15) et (3.2.25). Tenant compte de (3.2.18), on a encore

$$(\nabla\phi)_i = S_{ij}^{-1} S_{kj}^{-1} \frac{1}{\kappa_k} \partial_k \phi = M_{ik}^{-1} \left( \frac{1}{\kappa_k} \partial_k \phi \right) \quad (3.2.29)$$

Si le système est orthogonal, cette expression se réduit à

$$(\nabla\phi)_i = \frac{1}{\kappa_i} \partial_i \phi \quad (3.2.30)$$

### 2.7. L'identité de JACOBI [G2]

Voici une identité très utile, dont nous avons d'ailleurs fait usage au chapitre 1. Elle s'écrit

$$\partial_j (\mathcal{J} J_{ji}^{-1}) = 0 \quad (3.2.31)$$

Pour la démontrer, on part de l'égalité évidente

$$\partial_j (\mathcal{F} J_{ji}^{-1}) = J_{ji}^{-1} \partial_j \mathcal{F} + \mathcal{F} \partial_j J_{ji}^{-1} \quad (3.2.32)$$

Développons le premier terme du second membre. Tout d'abord, on a

$$\partial_j \mathcal{F} = (\text{mineur}_{k\ell} J) \partial_j J_{k\ell} = \mathcal{F} J_{\ell k}^{-1} \partial_j J_{k\ell}$$

or

$$\partial_j J_{k\ell} = \partial_{j\ell} x_k = \partial_\ell J_{kj}$$

d'où

$$J_{ji}^{-1} \partial_j \mathcal{F} = \mathcal{F} J_{ji}^{-1} J_{\ell k}^{-1} \partial_\ell J_{kj} = \mathcal{F} J_{\ell k}^{-1} (\partial_\ell J_{kj}) J_{ji}^{-1}$$

Notant enfin que  $J_{kj} J_{ji}^{-1} = \delta_{ki}$ , on obtient

$$(\partial_\ell J_{kj}) J_{ji}^{-1} = - J_{kj} \partial_\ell J_{ji}^{-1}$$

ce qui conduit à

$$J_{ji}^{-1} \partial_j \mathcal{F} = - \mathcal{F} J_{\ell k}^{-1} J_{kj} \partial_\ell J_{ji}^{-1} = - \delta_{\ell j} \partial_\ell J_{ji}^{-1} = - \mathcal{F} \partial_i J_{ji}^{-1}$$

ce qui, par comparaison avec (3.2.32) mène au résultat annoncé.

L'identité de JACOBI est souvent très utile. Pour l'illustrer, montrons comment se transforme la divergence :

### 2.8. Transformation de la divergence

La divergence est un opérateur faisant correspondre un scalaire à un vecteur, défini en coordonnées cartésiennes par

$$\text{div } \vec{u} = D_i \bar{u}_i \quad (3.2.33)$$

La transformation est élémentaire :

$$D_i \bar{u}_i = J_{ji}^{-1} \partial_j (S_{i\ell} u_\ell) = \frac{1}{J} \mathcal{F} J_{ji}^{-1} \partial_j (S_{i\ell} u_\ell)$$

ce qui, en vertu de l'identité de JACOBI, équivaut à

$$\frac{1}{J} \partial_j (\mathcal{F} J_{ji}^{-1} S_{i\ell} u_\ell) = \frac{1}{J} \partial_j (\mathcal{F} J_{ji}^{-1} J_{i\ell} \frac{u_\ell}{\kappa_\ell})$$

soit finalement

$$\operatorname{div} \vec{u} = \frac{1}{J} \partial_j \left( \frac{\mathcal{F}}{\kappa_j} u_j \right) \quad (3.2.34)$$

On obtient donc une formule tout à fait générale par une voie très simple.

### 2.9. Dérivées covariantes

On rencontre souvent dans la théorie de l'élasticité des expressions où interviennent les dérivées  $D_j \bar{u}_i$  d'un vecteur. Considérons le produit scalaire

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \bar{u}^T \bar{v}$$

On a évidemment

$$d(\vec{u} \cdot \vec{v}) = d(\bar{u}^T \bar{v}) = \bar{u}^T d\bar{v} + \bar{v}^T d\bar{u}$$

Étudions le premier terme : on a

$$\bar{u}^T d\bar{v} = \bar{u}^T (D_i \bar{v}) d\bar{x}_i$$

Peut-on trouver un opérateur de dérivation  $v|_i$  tel que

$$\bar{u}^T d\bar{v} = \bar{u}^T v|_i dx_i \quad (3.2.35)$$

La réponse est affirmative. Si l'on note que

$$dx_i = \kappa_i d\xi_i \quad (3.2.36)$$

on a évidemment

$$\bar{u}^T d\bar{v} = u^T v|_i \kappa_i d\xi_i ; \quad (3.2.37)$$

or il est clair que

$$\begin{aligned} \bar{u}^T d\bar{v} &= \bar{u}^T S^T \frac{1}{\kappa_i} \partial_i (\bar{v}) \kappa_i d\xi_i \\ &= u^T S^T \frac{1}{\kappa_i} \partial_i (Sv) \kappa_i d\xi_i \\ &= u^T \left\{ S^T S \left( \frac{1}{\kappa_i} \partial_i v \right) + S^T \left( \frac{1}{\kappa_i} \partial_i S \right) v \right\} \kappa_i d\xi_i \end{aligned} \quad (3.3.38)$$

d'où, par identification de (3.2.37) et (3.2.38)

$$v|_i = M \frac{1}{\kappa_i} \partial_i v + B_i v \quad (3.2.39)$$

où apparaissent les matrices

$$B_i = S^T \left( \frac{1}{\kappa_i} \partial_i S \right)$$

Dans un système orthogonal, les matrices  $B_i$  sont antisymétriques. En effet, on a

$$0 = \partial_i I = \partial_i (S^T S) = S^T \partial_i S + (\partial_i S^T) S = \kappa_i (B_i + B_i^T)$$

Dans ce cas, la relation (3.2.39) se réduit à

$$v|_i = \frac{1}{\kappa_i} \partial_i v = B_i v, \quad B_i \text{ antisym.} \quad (3.2.40)$$

Remarquons finalement que l'on a

$$\vec{a}_i \frac{1}{\kappa_k} \partial_k \vec{a}_j = (a_i)^T (a_j)|_k = \delta_{il} B_{k,lm} \delta_{mj} = B_{k,ij} \quad (3.2.41)$$

Enfin, la composante n°i de  $a|_j$  se note  $a_{i|j}$

### 2.10. Exemple

Pour illustrer les considérations qui précèdent, nous traiterons le cas des coordonnées cylindriques. Elles se caractérisent par les relations

$$x = r \cos \theta \quad y = r \sin \theta \quad z = z \quad (3.2.42)$$

La matrice jacobienne est donc

$$J = \begin{bmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta & 0 \\ \sin \theta & r \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

et on a

$$\kappa_r = 1, \quad \kappa_\theta = r, \quad \kappa_z = 1, \quad J = r \quad (3.2.43)$$

La matrice de transformation est donnée par

$$S = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.2.44)$$

Elle est visiblement orthonormale. L'élément de longueur est donc

$$ds^2 = \kappa_r^2 dr^2 + \kappa_\theta^2 d\theta^2 + \kappa_z^2 dz^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + dz^2 \quad (3.2.45)$$

Calculons la divergence d'un vecteur  $\vec{u}$  : ce sera

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{u} &= \frac{1}{r} \left\{ \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{r}{1} u_r \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{r}{r} u_\theta \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{r}{1} u_z \right) \right\} \\ &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r u_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} u_\theta + \frac{\partial}{\partial z} u_z \end{aligned} \quad (3.2. \quad )$$

Le gradient d'un scalaire sera

$$(\nabla\phi)_r = \frac{\partial}{\partial r} \phi, \quad (\nabla\phi)_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \phi, \quad (\nabla\phi)_z = \frac{\partial}{\partial z} \phi$$

Passons enfin au calcul des matrices  $B_r$ ,  $B_\theta$ ,  $B_z$ .

On a visiblement

$$\frac{\partial}{\partial r} S = 0 \quad , \quad \frac{\partial}{\partial z} S = 0$$

et

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} S = \frac{1}{r} \begin{bmatrix} -\sin \theta & -\cos \theta & 0 \\ \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

par conséquent

$$B_r = 0 \quad , \quad B_z = 0$$

$$B_\theta = \frac{1}{r} \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\sin \theta & -\cos \theta & 0 \\ \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1/r & 0 \\ 1/r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

On en déduit

$$u|_r = \frac{\partial}{\partial r} \begin{bmatrix} u_r \\ u_\theta \\ u_z \end{bmatrix} \quad u|_z = \frac{\partial}{\partial z} \begin{bmatrix} u_r \\ u_\theta \\ u_z \end{bmatrix}$$

$$u|_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \begin{bmatrix} u_r \\ u_\theta \\ u_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -1/r & 0 \\ 1/r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_r \\ u_\theta \\ u_z \end{bmatrix}$$

ce qui permet de calculer des déformations

UNIVERSITÉ DE LIÈGE  
 Laboratoire d'Aéronautique  
 Rue du Val Benoît 75 — 4000 LIÈGE  
 BELGIQUE

$$\epsilon_{rr} = u_r|_r = \frac{\partial u_r}{\partial r}$$

$$\epsilon_{\theta\theta} = u_\theta|_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r}$$

$$\epsilon_{zz} = u_z|_z = \frac{\partial u_z}{\partial z}$$

(3.2.49)

$$\gamma_{rz} = u_r|_z + u_z|_r = \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r}$$

$$\gamma_{r\theta} = u_r|_\theta + u_\theta|_r = \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_\theta}{r} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r}$$

$$\gamma_{\theta z} = u_\theta|_z + u_z|_\theta = \frac{\partial u_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta}$$

On remarquera que la notation matricielle permet de mener les calculs d'une manière très systématique.

### 2.11. Surfaces et coques

Une surface est un ensemble de points de  $R^3$  définis par deux paramètres  $\xi_1$  et  $\xi_2$  : le vecteur position d'un point de la surface est donc donné en coordonnées cartésiennes par

$$\begin{matrix} 0 \\ r \end{matrix} \mathbf{T} = \left\{ \begin{matrix} 0 \\ x_1 \end{matrix} (\xi_1, \xi_2), \begin{matrix} 0 \\ x_2 \end{matrix} (\xi_1, \xi_2), \begin{matrix} 0 \\ x_3 \end{matrix} (\xi_1, \xi_2) \right\} \quad (3.2.53)$$

Nous utiliserons désormais des lettres grecques pour désigner des indices pouvant prendre les valeurs 1 et 2. Les vecteurs de base de la surface sont

$$\begin{matrix} 0 \\ \vec{h}_1 \end{matrix} = \frac{\partial \begin{matrix} 0 \\ r \end{matrix}}{\partial \xi_1}, \quad \begin{matrix} 0 \\ \vec{h}_2 \end{matrix} = \frac{\partial \begin{matrix} 0 \\ r \end{matrix}}{\partial \xi_2} \quad (3.2.54)$$

et leurs normes sont notées  $\begin{matrix} 0 \\ k_1 \end{matrix}$  et  $\begin{matrix} 0 \\ k_2 \end{matrix}$ . On définit alors le vecteur normal à la surface par

$$\begin{matrix} 0 \\ \vec{a}_3 \end{matrix} (\xi_1, \xi_2) = \frac{\begin{matrix} 0 \\ h_1 \end{matrix} \wedge \begin{matrix} 0 \\ h_2 \end{matrix}}{\begin{matrix} 0 \\ k_1 \end{matrix} \begin{matrix} 0 \\ k_2 \end{matrix}} \quad \text{ou} \quad (3.2.55)$$

Considérons à présent le volume engendré par la relation

$$\vec{r} = \vec{r}^0(\xi_1, \xi_2) + \zeta \vec{a}_3(\xi_1, \xi_2), \quad \zeta \in \left[-\frac{t}{2}(\xi_1, \xi_2), \frac{t}{2}(\xi_1, \xi_2)\right] \quad (3.2.56)$$

Un tel volume s'appelle coque. Toutes les surfaces ne permettent cependant pas de définir une coque : en effet, pour que la définition (3.2.56) ait du sens, il faut que le jacobien

$$J = \text{dtm} \frac{D(x, y, z)}{D(\xi_1, \xi_2, \zeta)} \quad (3.2.57)$$

soit de signe constant. En particulier, les angles sont théoriquement exclus. Nous dirons donc qu'une surface est régulière s'il existe un nombre  $\beta > 0$  tel que la coque d'épaisseur  $\beta$  soit correctement définie. Il convient de noter que la théorie des coques suppose toujours que la surface de référence, appelée feuillet moyen, est régulière. En pratique, on étudie le plus souvent des coques irrégulières. Ces irrégularités sont à la source d'un certain nombre de problèmes, dont l'impossibilité d'assurer la compatibilité parfaite dans un modèle cinématiquement admissible.

## 2.12. Courbure

Il est possible de caractériser la courbure d'une surface régulière à partir de ses équations paramétriques (3.2.53). En effet, la courbure peut être définie par la rotation du vecteur normal lorsque l'on se déplace sur la surface : considérons, pour fixer les idées, un arc infinitésimal de longueur  $\kappa_1 d\xi_1$ . La figure (3.3.) montre que l'on a

$$\frac{\kappa_1 d\xi_1}{R_1} = \frac{\partial \vec{a}_3}{\partial \xi_1} d\xi_1 \quad \text{ou} \quad \left| \frac{\partial \vec{a}_3}{\partial \xi_1} \right| = \kappa_1$$

d'où

$$\frac{1}{R_1} = \frac{1}{\kappa_1} \frac{\partial \vec{a}_3}{\partial \xi_1}$$

Il est donc naturel de considérer le tenseur

$$\kappa_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \{ (a_3)_{\beta|\alpha} + (a_3)_{\alpha|\beta} \}$$

qui, en vertu de la relation (3.2.29)<sup>39</sup> se réduit à

$$\kappa_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \{ B_{\alpha,\beta 3} + B_{\beta,\alpha 3} \} \quad \lambda, \mu = 1, 2 \quad (3.2.58)$$

En coordonnées curvilignes orthogonales, c'est-à-dire si  $\vec{h}_1$  et  $\vec{h}_2$  sont orthogonaux, cette matrice contient les courbures :

$$K = \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} & \frac{1}{R_{12}} \\ \frac{1}{R_{12}} & \frac{1}{R_2} \end{bmatrix} \quad (3.2.59)$$

Le terme  $\frac{1}{R_{12}}$  est appelé torsion. Si la torsion est nulle, le système<sup>12</sup> de coordonnées  $(\xi_1, \xi_2)$  définissant la surface est dit principal.

Il existe un autre moyen de déterminer la matrice K. En effet, si l'on considère le tenseur métrique d'une coque associée à la surface, on a

$$\frac{1}{\kappa_3} \partial_3 (G_{\alpha\beta}) = \partial_3 (G_{\alpha\beta}) = \partial_3 (\vec{h}_\alpha \cdot \vec{h}_\beta) \quad (3.2.60)$$

Or on a

$$\partial_3 \vec{h}_\alpha = \partial_{3\alpha} \vec{r} = \partial_\alpha \vec{a}_3$$

d'où

$$\partial_3 (G_{\alpha\beta}) = h_{\alpha}^{\rightarrow} \cdot \partial_{\beta} \vec{a}_3 + h_{\beta}^{\rightarrow} \cdot \partial_{\alpha} \vec{a}_3 = \kappa_{\alpha} \kappa_{\beta} \left\{ \underset{k_{\beta}}{a_{\alpha}^{\rightarrow}} \partial_{\beta} \vec{a}_3 + \underset{k_{\alpha}}{a_{\beta}^{\rightarrow}} \partial_{\alpha} \vec{a}_3 \right\}$$

et, en vertu de la relation (3.2.41),

$$\partial_3 (G_{\alpha\beta}) = \kappa_{\alpha} \kappa_{\beta} \{B_{\alpha,\beta 3} + B_{\beta,\alpha 3}\} \quad (3.2.61)$$

c'est-à-dire que

$$\kappa_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \frac{1}{\underset{\alpha}{\kappa} \underset{\beta}{\kappa}} \left| \partial_3 (G_{\alpha\beta}) \right|_{\zeta = 0} \quad (3.2.62)$$

Cette relation permet de déduire qu'un système principal est un système de coordonnées orthogonales sur la surface qui reste orthogonal dans la coque.

### 3. THEORIE DES COQUES A GEOMETRIE DE REVOLUTION

Nous développons ici une théorie de coques du type HENCKY-REISSNER, c'est-à-dire prenant en compte l'effet de l'effet tranchant. Le cas des coques de KIRCHHOFF-LOVE s'en déduit ensuite aisément.

#### 3.1. Considérations géométriques

Considérons d'abord l'intersection de la coque avec le plan méridien (fig. 3.4). Un point P du feuillet moyen y est défini par ses deux coordonnées r et z, que nous ferons dépendre d'une coordonnée curviligne s. La figure montre clairement que

$$\frac{dr}{ds} = \sin \phi \quad , \quad \frac{dz}{ds} = - \cos \phi \quad (3.3.1)$$

Un point situé sur la normale au feuillet au point P aura donc pour coordonnées

$$(r + \zeta \cos \phi) \quad \text{et} \quad (z + \zeta \sin \phi) \quad (3.3.2)$$

Enfin, les coordonnées d'un point quelconque de la coque s'obtiennent par rotation :

$$x = (r + \zeta \cos \phi) \cos \theta$$

$$y = (r + \zeta \cos \phi) \sin \theta \quad \text{ou} \quad (3.3.3)$$

$$z = z(s) + \zeta \sin \phi$$

La matrice jacobienne vaut, en vertu de (3.3.1)

$$J = \frac{D(x, y, z)}{D(s, \theta, \zeta)} =$$

$$\begin{bmatrix} (1 - \zeta \frac{d\phi}{ds}) \sin \phi \cos \theta & -(r + \zeta \cos \phi) \sin \theta & \cos \phi \cos \theta \\ (1 - \zeta \frac{d\phi}{ds}) \sin \phi \sin \theta & (r + \zeta \cos \phi) \cos \theta & \cos \phi \sin \theta \\ -(1 - \zeta \frac{d\phi}{ds}) \cos \phi & 0 & \sin \phi \end{bmatrix} \quad \text{ou} \quad (3.3.4)$$

ce qui conduit aux relations

$$\kappa_s = (1 - \zeta \frac{d\phi}{ds}), \quad \kappa_\theta = (r + \zeta \cos \phi), \quad \kappa_\zeta = 1 \quad (3.3.5)$$

La matrice de transformation est donc

$$S = \{\bar{a}_s, \bar{a}_\theta, \bar{a}_\zeta\} = \begin{bmatrix} \sin \phi \cos \theta & -\sin \theta & \cos \phi \cos \theta \\ \sin \phi \sin \theta & \cos \theta & \cos \phi \sin \theta \\ -\cos \phi & 0 & \sin \phi \end{bmatrix} \quad (3.3.6)$$

Elle est visiblement orthonormale, ce qui signifie que le système est orthogonal. Le tenseur métrique est donc donné par

$$G = \begin{bmatrix} (1 - \zeta \frac{d\phi}{ds})^2 & 0 & 0 \\ 0 & (r + \zeta \cos \phi)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.3.7)$$

et on a visiblement

$$\left. \frac{1}{2} \frac{\partial G}{\partial \zeta} \right|_{\zeta=0} = \begin{bmatrix} -\frac{d\phi}{ds} & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Le système est donc principal et, comme  $\kappa_s^0 = 1$  et  $\kappa_\theta^0 = r$

$$\frac{1}{R_s} = -\frac{d\phi}{ds}, \quad \frac{1}{R_\theta} = \frac{\cos \phi}{r}$$

*dm feuille moyen*  
 *$\zeta = \rho$*   
(3.3.8)

ce qui nous permet encore d'écrire

$$\kappa_s = (1 + \frac{\zeta}{R_s}) \quad \kappa_\theta = r (1 + \frac{\zeta}{R_\theta}) \quad (3.3.9)$$

Il nous reste à calculer les dérivées covariantes. On a

$$\frac{\partial S}{\partial s} = -\frac{1}{R_s} \begin{bmatrix} \cos \phi \cos \theta & 0 & -\sin \phi \cos \theta \\ \cos \phi \sin \theta & 0 & -\sin \phi \sin \theta \\ \sin \phi & 0 & \cos \phi \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial S}{\partial \theta} = \begin{bmatrix} -\sin \phi \sin \theta & -\cos \theta & -\cos \phi \sin \theta \\ \sin \phi \cos \theta & -\sin \theta & \cos \phi \cos \theta \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

et  $\frac{\partial S}{\partial \zeta} = 0$

ce qui entraîne

$$B_s = \left(1 + \frac{\zeta}{R_s}\right)^{-1} s^T \frac{\partial S}{\partial s} = \left(1 + \frac{\zeta}{R_s}\right)^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{R_s} \\ 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{R_s} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B_\theta = \left(1 + \frac{\zeta}{R_\theta}\right)^{-1} \frac{1}{r} s^T \frac{\partial S}{\partial \theta} = \left(1 + \frac{\zeta}{R_\theta}\right)^{-1} \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{r} \frac{dr}{ds} & 0 \\ \frac{1}{r} \frac{dr}{ds} & 0 & \frac{1}{R_\theta} \\ 0 & -\frac{1}{R_\theta} & 0 \end{bmatrix}$$

$$B_\zeta = 0$$

d'où les expressions

$$u|_s = \left(1 + \frac{\zeta}{R_s}\right)^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial u_s}{\partial s} + \frac{u_\zeta}{R_s} \\ \frac{\partial u_\theta}{\partial s} \\ \frac{\partial u_\zeta}{\partial s} - \frac{u_s}{R_s} \end{bmatrix}$$

$$u|_\theta = \left(1 + \frac{\zeta}{R_\theta}\right)^{-1} \begin{bmatrix} \frac{1}{r} \left( \frac{\partial u_s}{\partial \theta} - u_\theta \frac{dr}{ds} \right) \\ \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r} u_s \frac{dr}{ds} + \frac{u_\zeta}{R_\theta} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial u_\zeta}{\partial \theta} - \frac{u_\theta}{R_\theta} \end{bmatrix} \quad (3.3.10)$$

$$u|_\zeta = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_s}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial u_\theta}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial u_\zeta}{\partial \zeta} \end{bmatrix}$$

Les déformations sont donc données par

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ss} &= u_s|_s = \left(1 + \frac{\zeta}{R_s}\right)^{-1} \left(\frac{\partial u_s}{\partial s} + \frac{u_\zeta}{R_s}\right) \\ \varepsilon_{\theta\theta} &= u_\theta|\theta = \left(1 + \frac{\zeta}{R_\theta}\right)^{-1} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_s}{r} \frac{dr}{ds} + \frac{u_\zeta}{R_\theta}\right) \\ \varepsilon_{\zeta\zeta} &= u_\zeta|\zeta \\ \gamma_{s\theta} &= u_s|\theta + u_\theta|_s = \left(1 + \frac{\zeta}{R_\theta}\right)^{-1} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_s}{\partial \theta} - \frac{u_\theta}{r} \frac{dr}{ds}\right) + \left(1 + \frac{\zeta}{R_s}\right)^{-1} \frac{\partial u_\theta}{\partial s} \\ \gamma_{s\zeta} &= u_s|\zeta + u_\zeta|_s = \frac{\partial u_s}{\partial \zeta} + \left(1 + \frac{\zeta}{R_s}\right)^{-1} \left(\frac{\partial u_\zeta}{\partial s} - \frac{u_s}{R_s}\right) \\ \gamma_{\theta\zeta} &= u_\theta|\zeta + u_\zeta|\theta = \frac{\partial u_\theta}{\partial \zeta} + \left(1 + \frac{\zeta}{R_\theta}\right)^{-1} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_\zeta}{\partial \theta} - \frac{u_\theta}{R_\theta}\right) \end{aligned} \quad (3.3.11)$$

Ces équations sont purement locales et conviendraient, par exemple, pour décrire une coque épaisse. Nous nous limiterons à présent au cas des coques d'épaisseur modérée. Pour ce faire, il faut choisir une structure en  $z$  des déplacements.

### 3.2. Choix d'un champ de déplacements

Comme il est de coutume, nous ferons l'hypothèse que le déplacement selon  $\zeta$  est constant sur l'épaisseur; pour les déplacements  $u_s$  et  $u_\theta$ , nous choisirons des fonctions affines :

$$\begin{aligned} u_s(s, \theta, \zeta) &= u(s, \theta) + \zeta \alpha(s, \theta) \\ u_\theta(s, \theta, \zeta) &= v(s, \theta) + \zeta \beta(s, \theta) \\ u_\zeta(s, \theta, \zeta) &= w(s, \theta) \end{aligned} \quad (3.3.12)$$

Ce choix étant posé, les dérivées covariantes peuvent se mettre sous la forme

$$u_s|_s = \left(1 + \frac{\zeta}{R_s}\right)^{-1} (\hat{\epsilon}_{ss} + \zeta \hat{\chi}_{ss})$$

$$u_s|\theta = \left(1 + \frac{\zeta}{R_\theta}\right)^{-1} (\hat{\gamma}_\theta + \zeta \hat{\delta}_\theta)$$

$$u_s|\zeta = \alpha$$

$$u_\theta|_s = \left(1 + \frac{\zeta}{R_s}\right)^{-1} (\hat{\gamma}_s + \zeta \hat{\delta}_s)$$

$$u_\theta|\theta = \left(1 + \frac{\zeta}{R_\theta}\right)^{-1} (\hat{\epsilon}_{\theta\theta} + \zeta \hat{\chi}_{\theta\theta})$$

$$u_\theta|\zeta = \beta$$

(3.3.13)

$$u_\zeta|_s = \left(1 + \frac{\zeta}{R_s}\right)^{-1} \hat{\gamma}_{s\zeta} - \alpha$$

$$u_\zeta|\theta = \left(1 + \frac{\zeta}{R_\theta}\right)^{-1} \hat{\gamma}_{\theta\zeta} - \beta$$

On démontrera plus loin

$$u_\zeta|\zeta = 0$$

où apparaissent les mesures de déformation

$$\hat{\epsilon}_{ss} = \frac{\partial u}{\partial s} + \frac{w}{R_s} \quad \text{pour } \theta \text{ moyen}$$

$$\hat{\gamma}_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{v}{r} \frac{dr}{ds}$$

$$\hat{\gamma}_s = \frac{\partial v}{\partial s}$$

$$\hat{\epsilon}_{\theta\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{u}{r} \frac{dr}{ds} + \frac{w}{R_\theta}$$

(3.3.14)

$$\hat{\gamma}_{s\zeta} = \alpha + \frac{\partial w}{\partial s} - \frac{u}{R_s}$$

$$\hat{\gamma}_{\theta\zeta} = \beta + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} - \frac{v}{R_\theta}$$

$$\hat{\chi}_{ss} = \frac{\partial \alpha}{\partial s}$$

$$\hat{\delta}_{\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial \alpha}{\partial \theta} - \frac{\beta}{r} \frac{dr}{ds}$$

$$\hat{\delta}_s = \frac{\partial \beta}{\partial s}$$

$$\hat{\chi}_{\theta\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial \beta}{\partial \theta} + \frac{\alpha}{r} \frac{dr}{ds}$$

Ces deux groupes de formules s'obtiennent par simple substitution des expressions (2.3.12) dans (2.3.10), sauf les expressions de  $u_{\zeta|s}$  et  $u_{\zeta|\theta}$ .

Pour  $u_{\zeta|s}$ , on a successivement

$$\begin{aligned} u_{\zeta|s} &= \left(1 + \frac{\zeta}{R_s}\right)^{-1} \cdot \left\{ \left(\frac{\partial w}{\partial s} - \frac{u}{R_s}\right) - \zeta \frac{\alpha}{R_s} \right\} \\ &= \left(1 + \frac{\zeta}{R_s}\right)^{-1} \cdot \left\{ \frac{\partial w}{\partial s} - \frac{u}{R_s} - \alpha \left(1 + \frac{\zeta}{R_s}\right) + \alpha \right\} \\ &= \left(1 + \frac{\zeta}{R_s}\right)^{-1} \cdot \left\{ \alpha + \frac{\partial w}{\partial s} - \frac{u}{R_s} \right\} - \alpha \end{aligned}$$

d'où le résultat annoncé. On procède de même pour  $u_{\zeta|\theta}$ .

### 3.3. Simplification des déformations

A ce stade, on est tenté d'utiliser le principe des travaux virtuels pour définir les relations tensions-déformations, ce qui définirait des efforts normaux, des efforts tranchants et des moments conjugués aux variables  $\hat{\epsilon}_{ss}$ ,  $\hat{\epsilon}_{\theta\theta}$ , etc...

Cette technique, résultant d'une application stricte des principes variationnels, a notamment été utilisée par KALNINS [K2] et par HUCK, MOL, IDELSOHN et nous-même [H2]. En fait, elle s'est révélée extrêmement maladroite pour la raison suivante : les mesures de déformation définies ci-dessus sont impropres, en ce sens qu'elles ne s'annulent pas nécessairement pour un déplacement rigide. Plus préci-

sément,  $\hat{\varepsilon}_{ss}$ ,  $\hat{\varepsilon}_{\theta\theta}$ ,  $\hat{\gamma}_{s\zeta}$ ,  $\hat{\gamma}_{\theta\zeta}$ ,  $(\hat{\gamma}_s + \hat{\gamma}_\theta)$ , qui sont les déformations du feuillet moyen, s'annulent pour un mode rigide, mais l'annulation des déformations en un point de la coque signifie par exemple

$$\gamma_{s\theta} = \left(1 + \frac{\zeta}{R_s}\right)^{-1} (\hat{\gamma}_s + \zeta \hat{\delta}_s) + \left(1 + \frac{\zeta}{R_\theta}\right)^{-1} (\hat{\gamma}_\theta + \zeta \hat{\delta}_\theta)$$

ce qui n'entraîne pas nécessairement  $\hat{\delta}_s + \hat{\delta}_\theta = 0$ . Il en découle que la singularité devra apparaître dans la matrice des coefficients élastiques, ce qui comporte les inconvénients suivants :

(i) La matrice des coefficients élastiques devra être calculée sans aucune approximation. Or il est de coutume d'approcher les intégrales en négligeant les termes en  $\frac{t}{R_s}$ ,  $\frac{t}{R_\theta}$ ,  $t$  étant l'épaisseur de la coque.

(ii) L'extension et la flexion sont inévitablement couplées dans la matrice de Hooke, et d'une manière bien déterminée [K2]. Cette condition rend l'introduction d'une anisotropie et la définition de coques multicouches extrêmement malaisées.

Nous proposons ici une approche nouvelle [D4], basée sur un développement en série de puissances, et permettant de tenir compte de la faible épaisseur de la coque, tout en portant une attention particulière à la préservation des modes rigides, indépendamment de la matrice de Hooke.

Si l'on fait l'hypothèse que l'épaisseur  $t$  de la coque vérifie les inégalités

$$\left|\frac{t}{R_s}\right|^2 \leq \eta \quad \left|\frac{t}{R_\theta}\right|^2 \leq \eta \quad \eta \ll 1 \quad (3.3.15)$$

on peut écrire

$$\left(1 + \frac{\zeta}{R_s}\right)^{-1} = 1 - \frac{\zeta}{R_s} + o(\eta) \quad \left(1 + \frac{\zeta}{R_\theta}\right)^{-1} = 1 - \frac{\zeta}{R_\theta} + o(\eta)$$

(3.3.16)

Cette approximation mène aux expressions suivantes des dérivées covariantes

$$u_s|_s = (\hat{\varepsilon}_{ss} + \zeta \hat{\chi}_{ss}) \left(1 - \frac{\zeta}{R_s} + o(\eta)\right) = \hat{\varepsilon}_{ss} + \zeta \left(\hat{\chi}_{ss} - \frac{\hat{\varepsilon}_{ss}}{R_s}\right) + o(\eta)$$

$$u_s|\theta = (\hat{\gamma}_\theta + \zeta \hat{\delta}_\theta) \left(1 - \frac{\zeta}{R_\theta} + o(\eta)\right) = \hat{\gamma}_\theta + \zeta \left(\hat{\delta}_\theta - \frac{\hat{\gamma}_\theta}{R_\theta}\right) + o(\eta)$$

$$u_s|\zeta = \alpha$$

$$u_\theta|_s = (\hat{\gamma}_s + \zeta \hat{\delta}_s) \left(1 - \frac{\zeta}{R_s} + o(\eta)\right) = \hat{\gamma}_s + \zeta \left(\hat{\delta}_s - \frac{\hat{\gamma}_s}{R_s}\right) + o(\eta)$$

$$u_\theta|\theta = (\hat{\varepsilon}_{\theta\theta} + \zeta \hat{\chi}_{\theta\theta}) \left(1 - \frac{\zeta}{R_\theta} + o(\eta)\right) = \hat{\varepsilon}_{\theta\theta} + \zeta \left(\hat{\chi}_{\theta\theta} - \frac{\hat{\varepsilon}_{\theta\theta}}{R_\theta}\right) + o(\eta)$$

$$u_\theta|\zeta = \beta \tag{3.3.17}$$

$$u_\zeta|_s = \hat{\gamma}_{s\zeta} \left(1 - \frac{\zeta}{R_s} + o(\eta)\right) - \alpha = \hat{\gamma}_{s\zeta} \left(1 - \frac{\zeta}{R_s}\right) - \alpha + o(\eta)$$

$$u_\zeta|\theta = \hat{\gamma}_{\theta\zeta} \left(1 - \frac{\zeta}{R_\theta} + o(\eta)\right) - \beta = \hat{\gamma}_{\theta\zeta} \left(1 - \frac{\zeta}{R_\theta}\right) - \beta + o(\eta)$$

$$u_\zeta|\zeta = 0$$

Les déformations s'écrivent alors, avec la même approximation

$$\varepsilon_{ss} = \hat{\varepsilon}_{ss} + \zeta \left(\hat{\chi}_{ss} - \frac{\hat{\varepsilon}_{ss}}{R_s}\right) + o(\eta)$$

$$\gamma_{s\theta} = \hat{\gamma}_s + \hat{\gamma}_\theta + \zeta \left(\hat{\delta}_s + \hat{\delta}_\theta - \frac{\hat{\gamma}_s}{R_s} - \frac{\hat{\gamma}_\theta}{R_\theta}\right) + o(\eta)$$

$$\gamma_{s\zeta} = \hat{\gamma}_{s\zeta} \left(1 - \frac{\zeta}{R_s}\right) + o(\eta) \tag{3.3.18}$$

$$\varepsilon_{\theta\theta} = \hat{\varepsilon}_{\theta\theta} + \zeta \left( \hat{\chi}_{\theta\theta} - \frac{\hat{\varepsilon}_{\theta\theta}}{R_\theta} \right) + 0 (\eta)$$

$$\gamma_{\theta\zeta} = \hat{\gamma}_{\theta\zeta} \left( 1 - \frac{\zeta}{R_\theta} \right) + 0 (\eta)$$

$$\varepsilon_{\zeta\zeta} = 0$$

Du fait de l'indépendance linéaire des différentes puissances de  $\zeta$ , les coefficients de chacune des puissances de  $\zeta$  des déformations doivent s'annuler séparément lors d'un mode rigide. Par conséquent, toutes les expressions (3.3.18) des déformations respectent les modes rigides.

Dans le cas où les conditions

$$\left| \frac{t}{R_s} \right| \ll 1 \quad \left| \frac{t}{R_\theta} \right| \ll 1 \quad (3.3.19)$$

plus restrictives que les conditions (3.3.15), sont vérifiées, on est tenté de négliger en outre tous les termes en  $\frac{\zeta}{R}$  et  $\frac{\zeta}{R_\theta}$  des expressions ci-dessus. Mais ce faisant, on néglige des termes à ce point importants que les modes rigides cessent d'être dépourvus d'énergie. Examinons ce problème de plus près.

Nous savons déjà que lors d'un déplacement rigide, les coefficients de la fonction constante et de  $\zeta$  s'annulent séparément et ce, pour chaque déformation. On remarquera d'autre part que pour toutes les déformations, sauf  $\gamma_{s\theta}$ , le coefficient de  $\frac{\zeta}{R_s}$  ou  $\frac{\zeta}{R_\theta}$  n'est autre que la déformation du feuillet moyen. Ce terme est donc nul pour un mode rigide, et pour un mode élastique, il ne fait qu'apporter une petite correction d'ordre  $\left| \frac{t}{R_s} \right|$  ou  $\left| \frac{t}{R_\theta} \right|$  au terme relatif au feuillet moyen. On peut donc le négliger. Par contre, dans l'expression de  $\gamma_{s\theta}$ , on voit apparaître le terme

$$- \zeta \left( \frac{\hat{\gamma}_s}{R_s} + \frac{\hat{\gamma}_\theta}{R_\theta} \right) \quad (3.3.20)$$

qui ne correspond pas exactement au terme  $(\gamma_s + \gamma_\theta)$  relatif au feuillet moyen. Il n'y a donc aucune raison que ce terme s'annule pour un mode rigide, et nous verrons qu'en général, il ne s'annule pas pour les modes rigides de rotation. Négliger ce terme équivaut donc à renoncer à une représentation exacte des modes rigides. Or, l'annulation de l'énergie de déformation en chaque point lors d'un mode rigide est essentielle, car les équations d'équilibre en sont une conséquence. D'ailleurs, rien ne garantit que le terme en question soit petit, car dans l'expression  $(\gamma_s + \gamma_\theta)$ ,  $\gamma_s$  et  $\gamma_\theta$  peuvent se compenser, sans qu'il en soit de même dans le terme (3.3.20), comme on s'en rend aisément compte en considérant le cas d'une courbure gaussienne négative, par exemple  $R_s = -R$ ,  $R_\theta = R$ .

Tenant compte de ces remarques, on peut finalement donner aux déformations les expressions simplifiées suivantes, valables sous l'hypothèse (3.3.18).

$$\begin{aligned} \epsilon_{ss} &= \bar{\epsilon}_{ss} + \zeta \bar{\chi}_{ss} \\ \epsilon_{\theta\theta} &= \bar{\epsilon}_{\theta\theta} + \zeta \bar{\chi}_{\theta\theta} \\ \gamma_{s\theta} &= \bar{\gamma}_{s\theta} + \zeta \bar{\chi}_{s\theta} \\ \gamma_{s\zeta} &= \bar{\gamma}_{s\zeta} \\ \gamma_{\theta\zeta} &= \bar{\gamma}_{\theta\zeta} \end{aligned} \tag{3.3.21}$$

où

$$\begin{aligned} \bar{\epsilon}_{ss} &= \hat{\epsilon}_{ss}, \quad \bar{\chi}_{ss} = \hat{\chi}_{ss} \\ \bar{\epsilon}_{\theta\theta} &= \hat{\epsilon}_{\theta\theta}, \quad \bar{\chi}_{\theta\theta} = \hat{\chi}_{\theta\theta} \\ \bar{\gamma}_{s\theta} &= \bar{\gamma}_s + \bar{\gamma}_\theta, \quad \text{avec } \bar{\gamma}_s = \hat{\gamma}_s \quad \text{et } \bar{\gamma}_\theta = \hat{\gamma}_\theta \\ \bar{\chi}_{s\theta} &= \bar{\delta}_s + \bar{\delta}_\theta, \quad \text{avec } \bar{\delta}_s = \hat{\delta}_s - \frac{\hat{\gamma}_s}{R_s} \quad \text{et } \bar{\delta}_\theta = \hat{\delta}_\theta - \frac{\hat{\gamma}_\theta}{R_\theta} \end{aligned} \tag{3.3.22}$$

$$\bar{\gamma}_{s\zeta} = \hat{\gamma}_{s\zeta}$$

$$\bar{\gamma}_{\theta\zeta} = \hat{\gamma}_{\theta\zeta}$$

On notera que le découpage de  $\bar{\gamma}_{s\theta}$  en  $\bar{\gamma}_s + \bar{\gamma}_\theta$  et  $\bar{\chi}_{s\theta}$  en  $\bar{\delta}_s + \bar{\delta}_\theta$  correspond aux deux dérivées covariantes. Or, du fait que les matrices  $B_s$ ,  $B_\theta$  et  $B_\zeta$  sont antisymétriques, le même champ n'apparaît jamais deux fois dans une dérivée covariante. Cette particularité présente un grand intérêt pour l'organisation pratique des calculs.

Pour illustrer l'importance des termes  $\frac{\hat{\gamma}_s}{R_s}$  et  $\frac{\hat{\gamma}_\theta}{R_\theta}$  dans  $\bar{\chi}_{s\theta}$ , nous calculerons cette déformation pour chacun des six modes rigides. Pour cela, nous avons besoin de l'expression des vecteurs  $\vec{e}_x$ ,  $\vec{e}_y$  et  $\vec{e}_z$  dans les coordonnées de la coque. C'est chose facile car

$$\{\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z\} = S^{-1} \{\bar{e}_x, \bar{e}_y, \bar{e}_z\} = S^T \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = S^T \quad (3.3.23)$$

d'où

$$\vec{e}_x = \begin{bmatrix} \sin \phi \cos \theta \\ -\sin \theta \\ \cos \phi \cos \theta \end{bmatrix} \quad \vec{e}_y = \begin{bmatrix} \sin \phi \sin \theta \\ \cos \theta \\ \cos \phi \sin \theta \end{bmatrix} \quad \vec{e}_z = \begin{bmatrix} -\cos \phi \\ 0 \\ \sin \phi \end{bmatrix} \quad (3.3.24)$$

a) Mode rigide de translation selon  $\vec{e}_x$

Ce mode correspond à  $\vec{u} = \vec{e}_x$ , soit

$$u = \sin \phi \cos \theta$$

$$v = -\sin \theta$$

$$w = \cos \phi \cos \theta$$

$$\alpha = \beta = 0$$

Il vient donc

$$\bar{\delta}_s = \frac{\partial \beta}{\partial s} - \frac{1}{R_s} \frac{\partial v}{\partial s} = 0 \quad \text{car } \beta = 0 \quad v = -r \sin \theta f(s)$$

$$\begin{aligned} \bar{\delta}_\theta &= \frac{1}{r} \frac{\partial \alpha}{\partial \theta} - \frac{\beta}{r} \frac{dr}{ds} - \frac{1}{R_\theta} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{v}{r} \frac{dr}{ds} \right) = \\ &= - \frac{1}{r R_\theta} (-\sin \theta \sin \phi + \sin \theta \sin \phi) = 0 \end{aligned}$$

b) Mode rigide de translation selon  $\vec{e}_y$

Le développement est très similaire, et nous ne le ferons pas.

c) Mode rigide de translation selon  $\vec{e}_z$

On a  $\vec{u} = e_z$ , soit

$$u = -\cos \phi$$

$$w = \sin \phi$$

$$v = \alpha = \beta = 0$$

Il est clair que  $\bar{\chi}_{s\theta}$  est nul

d) Rotation autour de  $\vec{e}_z$

Les déplacements sont donnés par

$$\vec{u} = (r + \zeta \cos \phi) \vec{e}_\theta$$

soit

$$u = w = \alpha = 0$$

$$v = r$$

$$\beta = \cos \phi$$

Il vient donc

$$\hat{\delta}_s = \frac{\partial \beta}{\partial s} = -\sin \phi \frac{d\phi}{ds} = \frac{1}{R_s} \sin \phi$$

$$\frac{\hat{\gamma}_s}{R_s} = \frac{1}{R_s} \frac{\partial v}{\partial s} = \frac{1}{R_s} \frac{dr}{ds} = \frac{1}{R_s} \sin \phi$$

$$\bar{\delta}_s = \hat{\delta}_s - \frac{\hat{\gamma}_s}{R_s} = 0$$

$$\hat{\delta}_\theta = -\frac{\beta}{r} \frac{dr}{ds} = -\frac{\cos \phi}{r} \sin \phi$$

$$\frac{\hat{\gamma}_\theta}{R_\theta} = \frac{1}{R_\theta} \left(-\frac{1}{r} \frac{dr}{ds}\right) = -\frac{\cos \phi}{r} \sin \phi$$

$$\bar{\delta}_\theta = \hat{\delta}_\theta - \frac{\hat{\gamma}_\theta}{R_\theta} = 0$$

On constate donc que si l'on avait négligé les termes  $\frac{\hat{\gamma}_s}{R_s}$  et  $\frac{\hat{\gamma}_\theta}{R_\theta}$ , on aurait obtenu

$$\hat{\delta}_s + \hat{\delta}_\theta = \left(\frac{1}{R_s} - \frac{1}{R_\theta}\right) \sin \phi \neq 0$$

chaque fois que  $R_s \neq R_\theta$ , c'est-à-dire que le mode rigide n'avait été préservé que dans le cas de la sphère et celui de la plaque.

e) Rotation autour de  $\vec{e}_x$

On a

$$\begin{aligned}
\vec{u} &= e_x^{\rightarrow} \wedge (x e_x^{\rightarrow} + y e_y^{\rightarrow} + z e_z^{\rightarrow}) = y e_z^{\rightarrow} - z e_y^{\rightarrow} \\
&= (r + \zeta \cos \phi) \sin \theta e_z^{\rightarrow} - (z(s) + \zeta \sin \phi) e_y^{\rightarrow} \\
&= (r \sin \theta e_z^{\rightarrow} - z(s) e_y^{\rightarrow}) + \zeta (\sin \theta \cos \phi e_z^{\rightarrow} - \sin \phi e_y^{\rightarrow})
\end{aligned}$$

ce qui, tenant compte de (3.3.24), donne

$$u = -r \sin \theta \cos \phi - z \sin \theta \sin \phi$$

$$v = -z \cos \theta$$

$$w = r \sin \theta \sin \phi - z \sin \theta \cos \phi$$

$$\alpha = -\sin \theta$$

$$\beta = -\sin \phi \cos \theta$$

Dès lors,

$$\hat{\varepsilon}_s = \frac{\partial \beta}{\partial s} = \frac{1}{R_s} \cos \theta \cos \phi$$

$$\frac{\hat{\gamma}_s}{R_s} = \frac{1}{R_s} \frac{\partial v}{\partial s} = \frac{1}{R_s} \left( -\frac{dz}{ds} \cos \theta \right) = \frac{1}{R_s} \cos \theta \cos \phi$$

$$\begin{aligned}
\hat{\delta}_\theta &= \frac{1}{r} \frac{\partial \alpha}{\partial \theta} - \frac{\beta}{r} \frac{dr}{ds} = -\frac{1}{r} \cos \theta + \frac{1}{r} \sin^2 \phi \cos \theta \\
&= -\frac{1}{r} \cos^2 \phi \cos \theta
\end{aligned}$$

$$\frac{\hat{\gamma}_\theta}{R_\theta} = \frac{1}{R_\theta} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{v}{r} \frac{dr}{ds} \right) = \frac{\cos \phi}{r}$$

$$\left( -\cos \theta \cos \phi - \frac{z}{r} \cos \theta \sin \phi + \frac{z}{r} \cos \theta \sin \phi \right)$$

$$= -\frac{1}{r} \cos^2 \phi \cos \theta$$

A nouveau, il n'y a compensation que grâce aux termes  $\frac{\hat{\gamma}_s}{R_s}$  et  $\frac{\hat{\gamma}_\theta}{R_\theta}$ . En leur absence, on aurait obtenu

$$\hat{\delta}_s + \hat{\delta}_\theta = \left( \frac{1}{R_s} - \frac{1}{R_\theta} \right) \cos \theta \cos \phi$$

qui ne s'annule que si  $R_s = R_\theta$ .

f) Rotation selon  $e_y$

Les développements sont analogues, et les conclusions identiques.

### 3.4. Equations d'équilibre

Pour une portion de coque définie par l'intervalle  $[s_1, s_2]$   $[\theta_1, \theta_2]$  la variation première de l'énergie de déformation s'écrit

$$\delta U = \int_{s_1}^{s_2} ds \int_{\theta_1}^{\theta_2} r d\theta \int_{-t/2}^{t/2} \{ \sigma_{ss} \delta \epsilon_{ss} + \sigma_{\theta\theta} \delta \epsilon_{\theta\theta} + \tau_{s\theta} \delta \gamma_{s\theta} + \tau_{s\zeta} \delta \gamma_{s\zeta} + \tau_{\theta\zeta} \delta \gamma_{\theta\zeta} \} \left( 1 + \frac{\zeta}{R_s} \right) \left( 1 + \frac{\zeta}{R_\theta} \right) d\zeta$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\zeta} \left( 1 + \frac{\zeta}{R_s} \right) &= \frac{1}{R_s} \\ \frac{d}{d\zeta} \left( 1 + \frac{\zeta}{R_\theta} \right) &= \frac{1}{R_\theta} \end{aligned}$$

Introduisant dans cette intégrale les expressions (3.3.21) des déformations, on obtient

$$\delta U = \int_{s_1}^{s_2} ds \int_{\theta_1}^{\theta_2} r d\theta \int_{-t/2}^{t/2} \{ \sigma_{ss} (\delta \bar{\epsilon}_{ss} + \zeta \delta \bar{\chi}_{ss}) + \sigma_{\theta\theta} (\delta \bar{\epsilon}_{\theta\theta} + \zeta \delta \bar{\chi}_{\theta\theta}) + \tau_{s\theta} (\delta \bar{\gamma}_{s\theta} + \zeta \delta \bar{\chi}_{s\theta}) + \tau_{s\zeta} \delta \bar{\gamma}_{s\zeta} + \tau_{\theta\zeta} \delta \bar{\gamma}_{\theta\zeta} \} \mu d\zeta$$

avec

$$\mu = \left(1 + \frac{\zeta}{R_s}\right) \left(1 + \frac{\zeta}{R_\theta}\right) \quad (3.3.25)$$

Cette expression introduit naturellement les éléments de réduction suivants :

$$N_{ss} = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_{ss} \mu d\zeta$$

$$N_{\theta\theta} = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_{\theta\theta} \mu d\zeta$$

$$N_{s\theta} = \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{s\theta} \mu d\zeta$$

$$M_{ss} = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_{ss} \zeta \mu d\zeta$$

$$M_{\theta\theta} = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_{\theta\theta} \zeta \mu d\zeta$$

$$M_{s\theta} = \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{s\theta} \zeta \mu d\zeta$$

$$Q_s = \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{s\zeta} \mu d\zeta$$

$$Q_\theta = \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{\theta\zeta} \mu d\zeta$$

(3.3.26)

On remarquera qu'il ne s'agit pas exactement des définitions classiques. En particulier,  $N_{s\theta} = N_{\theta s}$  et  $M_{s\theta} = M_{\theta s}$ . C'est le résultat de l'approximation faite sur les déformations. En revanche, les éléments de réduction définis ci-dessus sont symétriques ( $N_{\theta s} = N_{s\theta}$ ,  $M_{\theta s} = M_{s\theta}$ ), ce qui n'est pas le cas

des théories classiques. Ces petites différences dans la définition des éléments de réduction conduiront à des différences dans les équations d'équilibre. Mais nous montrons qu'elles sont bien équivalentes à celles que l'on rencontre le plus souvent dans la littérature.

Moyennant ces définitions, on a donc

$$\begin{aligned} \delta U = \int_{s_1}^{s_2} ds \int_{\theta_1}^{\theta_2} \{ & N_{ss} \delta \bar{\varepsilon}_{ss} + N_{\theta\theta} \delta \bar{\varepsilon}_{\theta\theta} + N_{s\theta} \delta \bar{\gamma}_{s\theta} + M_{ss} \delta \bar{\chi}_{ss} \\ & + M_{\theta\theta} \delta \bar{\chi}_{\theta\theta} + M_{s\theta} \delta \bar{\chi}_{s\theta} \\ & + Q_s \delta \bar{\gamma}_{s\zeta} + Q_\theta \delta \bar{\gamma}_{\theta\zeta} \} r d\theta \end{aligned} \quad (3.3.29)$$

Ecrivons cette équation en termes des déplacements, à l'aide des relations (3.3.22) et (3.3.14) : il vient

$$\begin{aligned} \delta U = \int_{s_1}^{s_2} ds \int_{\theta_1}^{\theta_2} \{ & N_{ss} \delta \left( \frac{\partial u}{\partial s} + \frac{w}{R_s} \right) + N_{\theta\theta} \delta \left( \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{u}{r} \frac{dr}{ds} + \frac{w}{R_\theta} \right) \\ & + N_{s\theta} \delta \left( \frac{\partial v}{\partial s} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{v}{r} \frac{dr}{ds} \right) + Q_s \delta \left( \alpha + \frac{\partial w}{\partial s} - \frac{u}{R_s} \right) \\ & + Q_\theta \delta \left( \beta + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} - \frac{v}{R_\theta} \right) + M_{ss} \delta \left( \frac{\partial \alpha}{\partial s} \right) \\ & + M_{\theta\theta} \delta \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \beta}{\partial \theta} + \frac{\alpha}{r} \frac{dr}{ds} \right) \\ & + M_{s\theta} \delta \left( \frac{\partial \beta}{\partial s} + \frac{1}{r} \frac{\partial \alpha}{\partial \theta} - \frac{\beta}{r} \frac{dr}{ds} - \frac{1}{R_s} \frac{\partial v}{\partial s} \right. \\ & \left. - \frac{1}{R_\theta} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{v}{r} \frac{dr}{ds} \right) \right) \} r d\theta \end{aligned} \quad (3.3.30)$$

Comme mise en charge, nous considérerons une pression interne, dont on admet, en première approximation, qu'elle est appliquée sur le feuillet moyen. Son énergie potentielle s'écrit donc

$$\delta P = - \int_{s_1}^{s_2} ds \int_{\theta_1}^{\theta_2} p \delta w r d\theta \quad (3.3.31)$$

Les équations d'équilibre sont alors obtenues à partir du principe de stationnarité de l'énergie totale

$$\delta (U + P) = 0$$

lorsque l'on varie  $u$ ,  $v$ ,  $w$ ,  $\alpha$  et  $\beta$ . Elles s'écrivent :

$$\delta u \rightarrow \frac{\partial N_{ss}}{\partial s} + \frac{1}{r} \frac{\partial N_{\theta s}}{\partial \theta} - (N_{\theta\theta} - N_{ss}) \frac{1}{r} \frac{dr}{ds} + \frac{Q_s}{R_s} - \frac{1}{R_\theta} \frac{1}{r} \frac{\partial M_{s\theta}}{\partial \theta} = 0 \quad (3.3.32)$$

$$\begin{aligned} \delta v \rightarrow & \frac{1}{r} \frac{\partial N_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial N_{s\theta}}{\partial s} + 2 N_{s\theta} \frac{1}{r} \frac{dr}{ds} + \frac{Q_\theta}{R_\theta} \\ & - \left( \frac{1}{R_s} + \frac{1}{R_\theta} \right) M_{s\theta} \frac{dr}{ds} - \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{M_{s\theta}}{R_s} \right) = 0 \end{aligned} \quad (3.3.33)$$

$$\delta w \rightarrow \frac{\partial Q_s}{\partial s} + Q_s \frac{1}{r} \frac{dr}{ds} + \frac{1}{r} \frac{\partial Q_\theta}{\partial \theta} - \left( \frac{N_{ss}}{R_s} + \frac{N_{\theta\theta}}{R_\theta} \right) + p = 0 \quad (3.3.34)$$

$$\delta \alpha \rightarrow \frac{\partial M_{ss}}{\partial s} + \frac{1}{r} \frac{\partial M_{s\theta}}{\partial \theta} + (M_{ss} - M_{\theta\theta}) \frac{1}{r} \frac{dr}{ds} - Q_s = 0 \quad (3.3.35)$$

$$\delta \beta \rightarrow \frac{1}{r} \frac{\partial M_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial M_{s\theta}}{\partial s} + \frac{2}{r} \frac{dr}{ds} M_{s\theta} - Q_\theta = 0 \quad (3.3.36)$$

Nous supposons les conditions aux limites homogènes, ce qui donne :

$$\begin{aligned}
\delta u &\rightarrow \{rN_{ss} \delta u\}_{s_1}^{s_2} = 0 & \{(N_{s\theta} - \frac{1}{R_\theta} M_{s\theta}) \delta u\}_{\theta_1}^{\theta_2} = 0 \\
\delta v &\rightarrow \{(N_{s\theta} - \frac{1}{R_s} M_{s\theta}) \delta v\}_{s_1}^{s_2} = 0 & \{N_{\theta\theta} \delta v\}_{\theta_1}^{\theta_2} = 0 \\
\delta w &\rightarrow \{rQ_s \delta w\}_{s_1}^{s_2} = 0 & \{Q_\theta \delta w\}_{\theta_1}^{\theta_2} = 0 \\
\delta \alpha &\rightarrow \{rM_{ss} \delta \alpha\}_{s_1}^{s_2} = 0 & \{M_{s\theta} \delta \alpha\}_{\theta_1}^{\theta_2} = 0 \\
\delta \beta &\rightarrow \{rM_{s\theta} \delta \beta\}_{s_1}^{s_2} = 0 & \{M_{\theta\theta} \delta \beta\}_{\theta_1}^{\theta_2} = 0
\end{aligned} \tag{3.3.37}$$

Dans le cas d'une coque de révolution fermée en  $\theta$ , les conditions de fermeture résultent des relations

$$\begin{aligned}
\delta u(0) &= \delta u(2\pi) ; \delta v(0) = \delta v(2\pi) ; \delta w(0) = \delta w(2\pi) \\
\delta \alpha(0) &= \delta \alpha(2\pi) ; \delta \beta(0) = \delta \beta(2\pi) ;
\end{aligned} \tag{3.3.38}$$

qui entraînent, à partir de (3.3.37) et vu l'arbitraire de ces variations,

$$\begin{aligned}
(N_{s\theta} - \frac{1}{R_\theta} M_{s\theta})|_0 &= (N_{s\theta} - \frac{1}{R_\theta} M_{s\theta})|_{2\pi} \\
N_{\theta\theta}|_0 &= N_{\theta\theta}|_{2\pi} \\
Q_\theta|_0 &= Q_\theta|_{2\pi} \\
M_{s\theta}|_0 &= M_{s\theta}|_{2\pi} \\
M_{\theta\theta}|_0 &= M_{\theta\theta}|_{2\pi}
\end{aligned} \tag{3.3.39}$$

On remarquera la présence des termes en  $M_{s\theta}$  dans les équations (3.3.32), (3.3.33) et dans les conditions aux limites. Ces termes, qui proviennent de l'utilisation d'élé-

ments de réduction symétriques, trouveront leur interprétation lors de l'établissement des équations constitutives.

### 3.5. Equations constitutives

Nous supposons le matériau de la coque orthotrope, avec  $\vec{a}_s$  et  $\vec{a}_\theta$  pour directions principales d'orthotropie ("orthotropie curviligne") Les relations tensions-déformations s'écrivent donc

$$\begin{aligned}\sigma_{ss} &= E_{ss} \epsilon_{ss} + E_{s\theta} \epsilon_{\theta\theta} \\ \sigma_{\theta\theta} &= E_{\theta s} \epsilon_{ss} + E_{\theta\theta} \epsilon_{\theta\theta} \\ \tau_{s\theta} &= G_{s\theta} \gamma_{s\theta} \\ \tau_{s\zeta} &= G_{s\zeta} \gamma_{s\zeta} \\ \tau_{\theta\zeta} &= G_{\theta\zeta} \gamma_{\theta\zeta}\end{aligned}\tag{3.3.40}$$

avec la condition habituelle de symétrie  $E_{s\theta} = E_{\theta s}$ .

Considérons d'abord le cas des efforts tranchants  $Q_s$  et  $Q_\theta$ , qui est le plus simple.  $\alpha$  représentant  $s$  ou  $\theta$ , on a

$$\begin{aligned}Q_\alpha &= \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{\alpha\zeta} \left(1 + \frac{\zeta}{R_s}\right) \left(1 + \frac{\zeta}{R_\theta}\right) d\zeta \\ &= \tau_{\alpha\zeta} \int_{-t/2}^{t/2} \left(1 + \zeta \left(\frac{1}{R_s} + \frac{1}{R_\theta}\right) + \frac{\zeta^2}{R_s R_\theta}\right) d\zeta \\ &= \tau_{\alpha\zeta} \left(t + \frac{t^3}{12R_s R_\theta}\right) \approx \tau_{\alpha\zeta} t\end{aligned}$$

où l'on néglige  $\frac{t^2}{12R_s R_\theta}$  devant l'unité, en accord avec les hypothèses ayant présidé au développement en série des déformations. Finalement,

$$Q_\alpha = G_{\alpha\zeta} t \gamma_{\alpha\zeta} \quad (3.3.41)$$

et on repasse aux tensions en divisant simplement  $Q_\alpha$  par l'épaisseur.

Les trois premières relations (3.3.40) permettent d'écrire les tensions  $\sigma_{ss}$ ,  $\sigma_{\theta\theta}$  et  $\tau_{s\theta}$  sous la forme

$$\sigma_{\alpha\beta} = \sigma_{\alpha\beta}^0 + \zeta \sigma_{\alpha\beta}^1 \quad (3.3.42)$$

Leur intégration conduit aux efforts

$$\begin{aligned} N_{\alpha\beta} &= \int_{-t/2}^{t/2} (\sigma_{\alpha\beta}^0 + \zeta \sigma_{\alpha\beta}^1) \left(1 + \frac{\zeta}{R_s}\right) \left(1 + \frac{\zeta}{R_\theta}\right) d\zeta \\ &= \sigma_{\alpha\beta}^0 \left(t + \frac{t^3}{12R_s R_\theta}\right) + \sigma_{\alpha\beta}^1 \frac{t^3}{12} \left(\frac{1}{R_s} + \frac{1}{R_\theta}\right) \end{aligned} \quad (3.3.43)$$

et aux moments

$$\begin{aligned} M_{\alpha\beta} &= \int_{-t/2}^{t/2} (\sigma_{\alpha\beta}^0 + \zeta \sigma_{\alpha\beta}^1) \zeta \left(1 + \frac{\zeta}{R_s}\right) \left(1 + \frac{\zeta}{R_\theta}\right) d\zeta \\ &= \sigma_{\alpha\beta}^0 \frac{t^3}{12} \left(\frac{1}{R_s} + \frac{1}{R_\theta}\right) + \sigma_{\alpha\beta}^1 \left(\frac{t^3}{12} + \frac{t^5}{80R_s R_\theta}\right) \end{aligned} \quad (3.3.44)$$

A nouveau, il est naturel de négliger  $\frac{t^2}{R_s R_\theta}$  devant l'unité, ce qui conduit aux deux équations

$$\begin{aligned} N_{\alpha\beta} &= \sigma_{\alpha\beta}^0 t + \sigma_{\alpha\beta}^1 \frac{t^3}{12} \left(\frac{1}{R_s} + \frac{1}{R_\theta}\right) \\ M_{\alpha\beta} &= \sigma_{\alpha\beta}^0 \frac{t^3}{12} \left(\frac{1}{R_s} + \frac{1}{R_\theta}\right) + \sigma_{\alpha\beta}^1 \frac{t^3}{12} \end{aligned} \quad (3.3.45)$$

Ces équations permettent d'expliquer le sens des groupements

$$N_{s\theta} - \frac{1}{R_\theta} M_{s\theta} \qquad N_{s\theta} - \frac{1}{R_s} M_{s\theta}$$

que l'on voit apparaître dans les équations d'équilibre et les conditions aux limites. En effet, la résultante des tensions  $\tau_{s\theta}$  sur une section en  $\theta = \text{cte}$  est

$$N_{s\theta}^{(s)} = \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{s\theta} \left(1 + \frac{\zeta}{R_s}\right) d\zeta \qquad (3.3.46)$$

cette intégrale vaut

$$N_{s\theta}^{(s)} = \int_{-t/2}^{t/2} (\tau_{s\theta}^0 + \zeta \tau_{s\theta}^1) \left(1 + \frac{\zeta}{R_s}\right) d\zeta = \tau_{s\theta}^0 t + \frac{t^3}{12R_s} \tau_{s\theta}^1 \qquad (3.3.47)$$

Or

$$N_{s\theta} - \frac{1}{R_\theta} M_{s\theta} = \tau_{s\theta}^0 t + \tau_{s\theta}^1 \frac{t^3}{12} \left(\frac{1}{R_s} + \frac{1}{R_\theta}\right) \\ - \tau_{s\theta}^0 \frac{t^3}{12R_\theta} \left(\frac{1}{R_s} + \frac{1}{R_\theta}\right) - \tau_{s\theta}^1 \frac{t^3}{12R_\theta}$$

et, en négligeant les termes d'ordre  $\frac{t^2}{R_s R_\theta}$  et  $\frac{t^2}{R_\theta^2}$  devant l'unité,

$$N_{s\theta} - \frac{1}{R_\theta} M_{s\theta} \approx \tau_{s\theta}^0 t + \tau_{s\theta}^1 \frac{t^3}{12R_s} = N_{s\theta}^{(s)} \qquad (3.3.48)$$

On obtiendrait de la même façon

$$N_{s\theta} - \frac{1}{R_s} M_{s\theta} \approx N_{s\theta}^{(\theta)} = \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{s\theta} \left(1 + \frac{\zeta}{R_\theta}\right) d\zeta \qquad (3.3.49)$$

c'est-à-dire la résultante des tensions  $\tau_{s\theta}$  sur une section en  $s = \text{cte}$

Tenant compte du fait que pour obtenir l'expression des déformations, on a en définitive fait l'hypothèse que  $\frac{t}{R_s}$  et  $\frac{t}{R_\theta}$  sont petits devant l'unité, il est naturel de pousser la simplification plus loin en écrivant simplement, à la place de (3.3.45)

$$N_{\alpha\beta} = \sigma_{\alpha\beta}^0 t \quad (3.3.50)$$

$$M_{\alpha\beta} = \sigma_{\alpha\beta}^1 \frac{t^3}{12}$$

Explicitement, cela revient à dire

$$N_{ss} = E_{ss} t \bar{\varepsilon}_{ss} + E_{s\theta} t \bar{\varepsilon}_{\theta\theta}$$

$$N_{\theta\theta} = E_{s\theta} t \bar{\varepsilon}_{ss} + E_{\theta\theta} t \bar{\varepsilon}_{\theta\theta}$$

$$N_{s\theta} = G_{s\theta} t \bar{\gamma}_{s\theta}$$

(3.3.50.1)

$$M_{ss} = E_{ss} \frac{t^3}{12} \bar{\chi}_{ss} + E_{s\theta} \frac{t^3}{12} \bar{\chi}_{\theta\theta}$$

$$M_{\theta\theta} = E_{s\theta} \frac{t^3}{12} \bar{\chi}_{ss} + E_{\theta\theta} \frac{t^3}{12} \bar{\chi}_{\theta\theta}$$

$$M_{s\theta} = G_{s\theta} \frac{t^3}{12} \bar{\chi}_{s\theta}$$

Les relations (3.3.50) ont l'avantage de permettre un calcul aisé des tensions :

$$\sigma_{\alpha\beta}^0 = \frac{N_{\alpha\beta}}{t} \quad \sigma_{\alpha\beta}^1 = \frac{12}{t^3} M_{\alpha\beta} \quad (3.3.51)$$

soit, sur les deux peaux :

$$\sigma_{\alpha\beta} = \frac{N_{\alpha\beta}}{t} + \frac{6}{t^2} M_{\alpha\beta} \quad (3.3.52)$$

Mais les conséquences de cette simplification, qui découple l'extension de la flexion au niveau des relations constitutives, ne sont pas évidentes a priori. Pour évaluer l'erreur introduite, nous mettrons d'abord les relations (2.3.45) à échelle de la manière suivante

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{t}} N_{\alpha\beta} \\ \sqrt{\frac{12}{t^3}} M_{\alpha\beta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{t}{\sqrt{12}} \left( \frac{1}{R_s} + \frac{1}{R_\theta} \right) \\ \frac{t}{\sqrt{12}} \left( \frac{1}{R_s} + \frac{1}{R_\theta} \right) & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma^0 \sqrt{t} \\ \sigma^1 \sqrt{\frac{t^3}{12}} \end{bmatrix} \quad (3.3.53)$$

ce qui peut s'écrire schématiquement

$$y = (I - A) x \quad (3.3.54)$$

avec

$$y^T = \left( \frac{1}{\sqrt{t}} N_{\alpha\beta}, \sqrt{\frac{12}{t^3}} M_{\alpha\beta} \right)$$

$$x^T = \left( \sigma^0 \sqrt{t}, \sigma^1 \sqrt{\frac{t^3}{12}} \right)$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{t}{\sqrt{12}} \left( \frac{1}{R_s} + \frac{1}{R_\theta} \right) \\ -\frac{t}{\sqrt{12}} \left( \frac{1}{R_s} + \frac{1}{R_\theta} \right) & 0 \end{bmatrix} \quad (3.3.55)$$

L'équation (3.3.54) peut se résoudre par approximations successives selon le schéma [R2]

$$x_0 = y$$

$$x_1 = y + A x_0 = y + A y$$

$$x_2 = y + A x_1 = y + A y + A^2 y$$

$$x_n = y + \dots + A^n y.$$

Le schéma converge si la norme  $\|A\|$  de la matrice  $A$  (c'est-à-dire la plus grande valeur absolue de valeur propre de  $A$ ) est inférieure à 1, car dans ce cas

$$\begin{aligned} \|x_p - x_q\| &= \|A^{p+1} y + \dots + A^q y\| \\ &< (\|A\|^{p+1} + \dots + \|A\|^q) \|y\| \\ &< \frac{\|A\|^{p+1}}{1 - \|A\|} \rightarrow 0 \quad \text{si } p, q \rightarrow \infty \end{aligned}$$

c'est-à-dire que la suite est de CAUCHY. La limite  $x$  est solution du problème, car on a visiblement

$$\|x_n + A x_n - y\| < \|A\|^{n+1} \|y\| \rightarrow 0$$

Cela étant,

$$\begin{aligned} \|x_0 - x_n\| &= \|A y + \dots + A^n y\| \\ &< \|y\| \{ \|A\| + \dots + \|A\|^n \} \\ &< \|y\| \sum_{k=1}^{\infty} \|A\|^k = \|y\| \frac{\|A\|}{1 - \|A\|} \end{aligned}$$

quel que soit  $n$ , donc

$$\|x_0 - x\| \leq \|y\| \frac{\|A\|}{1 - \|A\|}$$

c'est-à-dire

$$\frac{\|x_0 - x\|}{\|x_0\|} \leq \frac{\|A\|}{1 - \|A\|} \quad (3.3.56)$$

C'est la borne d'erreur cherchée. Dans notre cas, l'équation caractéristique de la matrice A admet les deux racines

$$\lambda = \pm \frac{t}{\sqrt{12}} \left( \frac{1}{R_s} + \frac{1}{R_\theta} \right)$$

donc l'erreur relative est

$$\frac{|\lambda|}{1 - |\lambda|} \approx |\lambda|$$

si  $\lambda$  est petit. Ainsi, l'erreur introduite est de l'ordre de

$$\frac{t}{\sqrt{12}} \left( \frac{1}{R_s} + \frac{1}{R_\theta} \right) \quad (3.3.57)$$

Considérons par exemple une coque sphérique de rayon  $r = 1$  m. Pour avoir moins d'un pour-cent d'erreur, l'épaisseur devra être inférieure à

$$\frac{\sqrt{12}}{2} \cdot 10^{-2} \text{ m} = 1,75 \text{ cm}$$

Insistons encore sur le fait que ces diverses simplifications n'ont été rendues possibles que par un choix de déformations propres, c'est-à-dire s'annulant pour un mode rigide. Si l'on s'était contenté des expressions  $\hat{\epsilon}_{ss}$ ,  $\hat{\epsilon}_{\theta\theta}$ , ... , toute approximation des relations constitutives eût été prohibée, sous peine de donner de l'énergie aux modes rigides. A ce stade, il est donc possible de définir des épaisseurs fictives équivalentes pour traiter un matériau multicouche, ce que n'aurait pas permis une approche basée sur des déformations impropres.

### 3.6. Coques de KIRCHHOFF-LOVE

On peut aisément déduire les équations des coques de KIRCHHOFF-LOVE des précédentes en imposant que les déformations dues aux efforts tranchants soient nulles. Ces conditions s'écrivent

$$\begin{aligned}\bar{\gamma}_{s\zeta} &= \alpha + \frac{\partial w}{\partial s} - \frac{u}{R_s} = 0 \rightarrow \alpha = -\frac{\partial w}{\partial s} + \frac{u}{R_s} \\ \bar{\gamma}_{\theta\zeta} &= \beta + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} - \frac{v}{R_\theta} = 0 \rightarrow \beta = -\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} + \frac{v}{R_\theta}\end{aligned}\tag{3.3.58}$$

Les deux termes  $\frac{u}{R_s}$  et  $\frac{v}{R_\theta}$  s'interprètent aisément à l'aide d'un dessin (fig. 3.5 et 3.6). Les déformations  $\bar{\epsilon}_{ss}$ ,  $\bar{\epsilon}_{\theta\theta}$  et  $\bar{\gamma}_{s\theta}$ , qui ne dépendent ni de  $\alpha$ , ni de  $\beta$ , ne sont pas modifiées par cette hypothèse. Pour les autres, on obtient, tous calculs faits,

$$\begin{aligned}\bar{\chi}_{ss} &= -\frac{\partial^2 w}{\partial s^2} + \frac{1}{R_s} \frac{\partial u}{\partial s} + \dot{u} \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{1}{R_s} \right) \\ \bar{\chi}_{\theta\theta} &= -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} - \frac{v}{R_\theta} \right) - \frac{1}{r} \frac{dr}{ds} \left( \frac{\partial w}{\partial s} - \frac{u}{R_s} \right) \\ \hat{\chi}_{s\theta} &= -\frac{2}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial s \partial \theta} + \frac{2}{r} \frac{dr}{ds} \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} + \frac{1}{R_\theta} \left( \frac{\partial v}{\partial s} - 2 \frac{v}{r} \frac{dr}{ds} \right) \\ &\quad + \frac{1}{R_s} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{v}{r} \frac{dr}{ds} \right) \\ \bar{\chi}_{s\theta} &= \hat{\chi}_{s\theta} - \frac{1}{R_s} \hat{\gamma}_s - \frac{1}{R_\theta} \hat{\gamma}_\theta \\ &= -\frac{2}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial s \partial \theta} + \frac{2}{r} \frac{dr}{ds} \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} + \frac{1}{R_s} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{v}{r} \frac{dr}{ds} - \frac{\partial v}{\partial s} \right) \\ &\quad + \frac{1}{R_\theta} \left( \frac{\partial v}{\partial s} - \frac{v}{r} \frac{dr}{ds} - \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} \right)\end{aligned}\tag{3.3.59}$$

Les équations d'équilibre (3.3.32) à (3.3.36) restent valables, à cette différence près que les efforts tranchants  $Q_s$  et  $Q_\theta$  ne sont plus liés aux déformations par les relations constitutives et n'ont plus qu'une valeur purement statique, définie par les équations (3.3.35) et (3.3.36).

De même que dans les plaques de KIRCHHOFF, le nombre de conditions aux limites est inférieur à celui que l'on avait obtenu en tenant compte de la déformation due à l'effort tranchant. La manière la plus simple de les déterminer consiste à écrire les termes aux limites provenant du principe (3.3.30) et d'y introduire les relations

$$\begin{aligned}\delta\alpha &= -\delta \frac{\partial w}{\partial s} + \frac{\delta u}{R_s} \\ \delta\beta &= -\frac{1}{r} \delta \frac{\partial w}{\partial \theta} + \frac{\delta v}{R_\theta}\end{aligned}\tag{3.3.60}$$

Sur une coupe  $s = \text{cte}$ , on obtient

$$\begin{aligned}& \int_{\theta_1}^{\theta_2} \{N_{ss} \delta u + (N_{s\theta} - \frac{M_{s\theta}}{R_s}) \delta v + Q_s \delta w + M_{ss} \delta\alpha + M_{s\theta} \delta\beta\} r d\theta \\ &= \int_{\theta_1}^{\theta_2} \{ (N_{ss} + \frac{M_{ss}}{R_s}) \delta u + (N_{s\theta} - \frac{M_{s\theta}}{R_s} + \frac{M_{s\theta}}{R_\theta}) \delta v \\ &+ Q_s \delta w - M_{ss} \delta \frac{\partial w}{\partial s} - M_{s\theta} \frac{1}{r} \delta \frac{\partial w}{\partial \theta} \} r d\theta \\ &= - \{M_{s\theta} \delta w\}_{\theta_1}^{\theta_2} + \int_{\theta_1}^{\theta_2} \{ (N_{ss} + \frac{M_{ss}}{R_s}) \delta u + (N_{s\theta} - \frac{M_{s\theta}}{R_s} + \frac{M_{s\theta}}{R_\theta}) \delta v \\ &+ (Q_s + \frac{1}{r} \frac{\partial M_{s\theta}}{\partial \theta}) \delta w - M_{ss} \delta \frac{\partial w}{\partial s} \} r d\theta = 0\end{aligned}$$

d'où les conditions

$$\left\{ \left( N_{ss} + \frac{M_{ss}}{R_s} \right) \delta u \right\}_{s_1}^{s_2} = 0$$

$$\left\{ \left( N_{s\theta} + M_{s\theta} \left( \frac{1}{R_\theta} - \frac{1}{R_s} \right) \right) \delta v \right\}_{s_1}^{s_2} = 0$$

(3.3.61)

$$\left\{ \left( Q_s + \frac{1}{r} \frac{\partial M_{s\theta}}{\partial \theta} \right) \delta w \right\}_{s_1}^{s_2} = 0$$

$$\left\{ M_{ss} \delta \frac{\partial w}{\partial s} \right\}_{s_1}^{s_2} = 0$$

Par un calcul analogue, sur une coupe  $\theta = \text{cte}$ , on obtient les conditions

$$\left\{ \left( N_{s\theta} + M_{s\theta} \left( \frac{1}{R_s} - \frac{1}{R_\theta} \right) \right) \delta u \right\}_{\theta_1}^{\theta_2} = 0$$

$$\left\{ \left( N_{\theta\theta} + \frac{M_{\theta\theta}}{R_\theta} \right) \delta v \right\}_{\theta_1}^{\theta_2} = 0$$

(3.3.62)

$$\left\{ \left( Q_\theta + \frac{\partial M_{s\theta}}{\partial s} \right) \delta w \right\}_{\theta_1}^{\theta_2} = 0$$

$$\left\{ M_{\theta\theta} \delta \left( \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) \right\}_{\theta_1}^{\theta_2} = 0$$

On constate donc que, outre les efforts tranchants équivalents de KIRCHHOFF qui ont une forme très analogue à ceux des plaques, il apparaît des efforts de membrane équivalents provenant de la courbure. Quant aux termes  $M_{s\theta} \delta w$ , ils conduisent à la définition de forces de coin

$$Z = \Delta (M_{s\theta}) \quad (3.3.63)$$

équilibrant la discontinuité du moment de torsion, de la même façon que dans les plaques.

### 3.7. Autres théories des coques axisymétriques

La littérature concernant les coques axisymétriques est assez abondante, du moins en ce qui concerne les coques de KIRCHHOFF-LOVE. Pour ce qui est des déformations  $\bar{\epsilon}_{ss}$ ,  $\bar{\epsilon}_{\theta\theta}$ ,  $\bar{\gamma}_{s\theta}$ ,  $\bar{\gamma}_{s\zeta}$ ,  $\bar{\gamma}_{\theta\zeta}$ ,  $\bar{\chi}_{ss}$  et  $\bar{\chi}_{\theta\theta}$ , les différents auteurs sont unanimes et utilisent tous les mêmes expressions que ci-dessus. Par contre, on peut dire qu'il y a presque autant d'expressions de la torsion que d'auteurs. Nous les classerons en théories où cette déformation est propre et théories où elle est impropre.

#### 3.7.1. Expressions impropres de la torsion

Nous parlerons d'abord de la théorie de KALNINS [K2]. Il s'agit d'une théorie prenant en compte les déformations dues à l'effort tranchant. L'expression de la torsion y est simplement

$$\chi_{s\theta} = \hat{\delta}_s + \hat{\delta}_\theta = \hat{\chi}_{s\theta} \quad (3.3.64)$$

GOULD et SEN [G8] utilisent exactement la même expression. Il s'agit également d'une théorie tenant compte de l'effort tranchant.

Pour les coques de KIRCHHOFF-LOVE, l'expression équivalente de la torsion a été utilisée par SAUNDERS et PASLAY [S2] et IDELSOHN [I1]. Toujours pour le même type de coque, BUDIANSKY et RADKOWSKY [B4], faisant référence à la théorie de SANDERS [S3,B5], utilisent l'expression

$$\begin{aligned} \chi_{s\theta} &= \frac{1}{r} \frac{\partial \alpha}{\partial \theta} + \frac{\partial \beta}{\partial s} - \frac{\beta}{r} \frac{dr}{ds} + \left( \frac{1}{R_s} - \frac{1}{R_\theta} \right) \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{\partial v}{\partial s} - \frac{v}{r} \frac{dr}{ds} \right) \\ &= \bar{\chi}_{s\theta} + \frac{1}{R_s} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{v}{r} \frac{dr}{ds} \right) + \frac{1}{R_\theta} \frac{\partial v}{\partial s} \end{aligned} \quad (3.3.65)$$

Cette expression n'est propre que si  $R_s = R_\theta = R$ , c'est-à-dire pour les sphères et les plaques, auquel cas elle devient

$$\chi_{s\theta} = \bar{\chi}_{s\theta} + \frac{1}{R} \bar{\gamma}_{s\theta} \quad (3.3.66)$$

et ne diffère donc plus de la nôtre que par un multiple de  $\bar{\gamma}_{s\theta}$ .

### 3.7.2. Expressions propres de la torsion

Un certain nombre d'auteurs utilisent pour les coques de KIRCHHOFF-LOVE l'expression

$$\chi_{s\theta} = \hat{\delta}_s + \hat{\delta}_\theta + \frac{\hat{\gamma}_s}{R_\theta} + \frac{\hat{\gamma}_\theta}{R_s} \quad (3.3.67)$$

qui est liée à la nôtre par la relation

$$\chi_{s\theta} = \bar{\chi}_{s\theta} + \bar{\gamma}_{s\theta} \left( \frac{1}{R_s} + \frac{1}{R_\theta} \right) \quad (3.3.68)$$

et n'en diffère donc que par un petit multiple de la déformation du feuillet moyen. Tel est le cas d'ARNOLD et WARBURTON [A3] et BROGAN, FORSBERG et SMITH [B6] qui ont étudié les vibrations des cylindres, de GRAFTON et STROME [G9] pour les cônes, et enfin de la théorie générale d'ADELMAN, CATHERINES et WALTON [A4], utilisée par PINSON et BROWN [P1] pour les problèmes d'interaction fluide-solide. Ces expressions sont d'ailleurs utilisées assez généralement par l'école russe, notamment par NOVOZHILOV [N1].

TSUI [T 4] utilise pour les coques cylindriques la même expression que nous. Enfin, la formulation NASTRAN des coques cylindriques d'épaisseur modérée [M1] fait usage de l'expression

$$\chi_{s\theta} = \hat{\delta}_s + \hat{\delta}_\theta - \frac{1}{2R_\theta} (\hat{\gamma}_s - \hat{\gamma}_\theta) = \bar{\chi}_{s\theta} + \frac{1}{2R_\theta} \bar{\gamma}_{s\theta}.$$

qui est donc intermédiaire entre celle de NOVOZHILOV et la nôtre.

### 3.8. Conditions au voisinage de l'axe

Les sphères, et, plus généralement, la plupart des réservoirs possèdent des pôles, où l'axe perce la coque. Remarquons tout d'abord qu'en dehors du cas où la coque coupe l'axe en lui étant perpendiculaire, sa définition au voisinage de l'axe comporte une part inévitable de convention puisque, d'une part, la géométrie est discontinue (bâillement et recouvrement) (fig. 3.7), et, d'autre part, l'épaisseur de la coque est souvent du même ordre de grandeur que le rayon, ce qui invalide théoriquement la théorie des coques.

On pourrait, bien sûr, laisser un trou, mais cela ne fait que déplacer le problème, car il faudrait alors déterminer un rayon optimum où la théorie des coques reste d'application et où la solution n'est pas trop perturbée, ce qui est très délicat. Il semble donc plus réaliste de fermer la coque, de manière à assurer une transmission correcte des efforts, à condition de dépouiller les résultats en gardant à l'esprit les limitations dont nous venons de parler.

Mais à cet endroit, il surgit un problème nouveau : les expressions données ci-dessus pour les déformations contiennent des puissances négatives du rayon et ne sont donc pas définies sur l'axe. Pour lever cette singularité, il convient d'exprimer un certain nombre de conditions de symétrie. Mais en dehors du cas où la sollicitation est elle-même axisymétrique, ces conditions n'ont rien d'évident. Dans un rapport antérieur [D4], nous avons montré qu'on peut les obtenir en exprimant que les déformations doivent rester finies. Cette approche conduit aux expressions correctes des conditions de symétrie, mais n'est pas strictement rigoureuse dans ses prémisses. Ainsi, par exemple, il est bien connu qu'une plaque circulaire, en théorie de KIRCHHOFF, admet une solution d'énergie finie lorsqu'elle ~~lorsqu'elle~~ est soumise à une charge concentrée  $P$  en son centre. Or, dans ce cas, les moments ont les expression [L1]

$$M_{rr} = \frac{P}{4\pi} (1 + \nu) \ln \frac{R}{r} \quad (3.3.69)$$

$$M_{\theta\theta} = M_{rr} + (1 - \nu) \frac{P}{4\pi}$$

qui, visiblement, ne sont pas finies. Il est clair que ce problème n'est pas très réaliste sur le plan physique, mais d'un point de vue mathématique formel, il faut en tenir compte. En réalité, la véritable condition est que la densité d'énergie soit intégrable au voisinage de l'origine, ou, ce qui revient au même, que les déformations soient de carrés intégrables. Soit donc une déformation de la forme

$$\varepsilon = r^{-k} \psi(r) \quad (3.3.70)$$

avec  $k$  entier. La condition sera donc que toute intégrale de la forme

$$\int_0^S r^{-2k} \psi^2(r) r ds \quad (3.3.71)$$

soit définie. Nous ferons l'hypothèse que dans le voisinage de l'axe, il existe un nombre  $A > 0$  tel que

$$\frac{dr}{ds} \geq A > 0 \quad (3.3.72)$$

ce qui exclut le cas de la coque se raccordant tangentiellement à l'axe. Alors

$$\int_0^S r^{-2k} \psi^2(r) r ds \leq \frac{1}{A} \int_0^{\hat{r}(S)} r^{-2k} \psi^2(r) r dr \quad (3.3.73)$$

Il suffit donc que la fonction

$$r \mapsto r^{1-2k} \psi^2(r)$$

soit intégrable, ce qui a lieu si, dans un voisinage convenable de l'axe,

$$r^{1-2k} \psi^2(r) \leq B^2 r^{-2t}$$

avec  $0 \leq t < \frac{1}{2}$ , où  $B$  est une constante positive. Cette dernière relation implique que

$$\psi^2(r) \leq B^2 r^{2k-2t-1}$$

soit finalement

$$\psi(r) \leq B r^{k-t-\frac{1}{2}} \leq Br^{k-\ell} \quad (3.3.74)$$

avec  $\ell < 1$ .

La règle est donc simple : le coefficient de  $\frac{1}{r^k}$  d'une déformation doit, au voisinage de l'axe, décroître vers zéro comme  $r^{k-\ell}$ , avec  $\ell < 1$ .

### 3.8.1. Cas des coques de HENCKY-REISSNER

Etudions le cas des déformations définies en (3.3.22). Tenant compte des relations (3.3.14), (3.3.1) et (3.3.8), on obtient les conditions suivantes :

$$\text{- pour } \bar{\varepsilon}_{\theta\theta} : \frac{\partial v}{\partial \theta} + u \sin \phi + w \cos \phi = 0 \quad (r^{1-\ell}) \quad (3.3.75)$$

$$\text{- pour } \bar{\gamma}_{s\theta} : \frac{\partial u}{\partial \theta} - v \sin \phi = 0 \quad (r^{1-\ell}) \quad (3.3.76)$$

$$\text{- pour } \bar{\gamma}_{\theta z} : \frac{\partial w}{\partial \theta} - v \cos \phi = 0 \quad (r^{1-\ell}) \quad (3.3.77)$$

$$\text{- pour } \bar{\chi}_{\theta\theta} : \frac{\partial \beta}{\partial \theta} + \alpha \sin \phi = 0 \quad (r^{1-\ell}) \quad (3.3.78)$$

Au voisinage de l'axe, chacun des premiers membres doit donc être nul. Le cas de  $\bar{\chi}_{s\theta}$  nécessite un traitement particulier. Le terme  $\bar{\delta}_{\theta}$  peut être mis sous la forme

$$\bar{\delta}_{\theta} = \frac{1}{r^2} \{ r \left( \frac{\partial \alpha}{\partial \theta} - \beta \sin \phi \right) - \cos \phi \left( \frac{\partial u}{\partial \theta} - v \sin \phi \right) \}.$$

On ne peut pas annuler séparément les deux termes qui le composent, comme on s'en rend aisément compte en examinant les modes rigides de rotation, pour lesquels il y a compensation exacte de ces deux termes. La condition sera donc

$$r \left( \frac{\partial \alpha}{\partial \theta} - \beta \sin \phi \right) - \cos \phi \left( \frac{\partial u}{\partial \theta} - v \sin \phi \right) = 0 \quad (r^{2-\ell}) \quad (3.3.79)$$

Mais mise sous cette forme, elle est difficile à manier. Cependant, comme le deuxième terme du premier membre s'annule déjà en  $r = 0$  en vertu de (3.3.76), il suffit d'exprimer que la dérivée du premier membre s'annule, soit :

$$\frac{\partial}{\partial s} \left\{ r \left( \frac{\partial \alpha}{\partial \theta} - \beta \sin \phi \right) - \cos \phi \left( \frac{\partial u}{\partial \theta} - v \sin \phi \right) \right\} = 0 \quad (r^{1-\ell})$$

ou encore,

$$\begin{aligned} & \left( \frac{\partial \alpha}{\partial \theta} - \beta \sin \phi \right) \sin \phi + r \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{\partial \alpha}{\partial \theta} - \beta \sin \phi \right) \\ & \quad - \cos \phi \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{\partial u}{\partial \theta} - v \sin \phi \right) \\ & \quad - \left( \frac{\partial u}{\partial \theta} - v \sin \phi \right) \frac{\sin \phi}{R_s} = 0 \quad (r^{1-\ell}) \end{aligned}$$

Or on a visiblement

$$\frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{\partial \alpha}{\partial \theta} - \beta \sin \phi \right) = \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{\partial \alpha}{\partial s} - \frac{\partial \beta}{\partial s} \sin \phi + \frac{\beta \cos \phi}{R_s} = 0 \quad (r^{-\ell})$$

puisque  $\frac{\partial \alpha}{\partial s}$ ,  $\frac{\partial \beta}{\partial s}$  et  $\beta$  apparaissent dans l'expression de déformation; de plus, en vertu de (3.3.76)

$$\frac{\sin \phi}{R_s} \left( \frac{\partial u}{\partial \theta} - v \sin \phi \right) = 0 \quad (r^{-\ell})$$

La condition (3.3.79) peut donc être mise sous la forme la plus simple.

$$\left( \frac{\partial \alpha}{\partial \theta} - \beta \sin \phi \right) \sin \phi - \cos \phi \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{\partial u}{\partial \theta} - v \sin \phi \right) = 0 \quad (r^{1-\ell})$$

(3.3.80)

L'interprétation des relations (3.3.75) à (3.3.78) est assez simple. Considérons (fig.3.7) une coque se terminant en pointe sur l'axe. Par points situés sur l'axe, il faut entendre les lèvres de la coque, en tenant compte des bâillements et recouvrements. Cela étant, ces conditions expriment que les points situés sur l'axe forment un corps rigide. Considérons par exemple le déplacement selon l'axe  $e_x^{\rightarrow}$ . Il est donné (fig.3.8) par la relation

$$u_x = u_r \cos \theta - u_\theta \sin \theta \quad (3.3.81)$$

avec (fig.3.9)

$$u_r = u_s \sin \phi + u_\zeta \cos \phi \quad (3.3.82)$$

Il vient donc

$$u_x = \{(u + \zeta\alpha) \sin \phi + w \cos \phi\} \cos \theta - (v + \zeta\beta) \sin \theta$$

d'où

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_x}{\partial \theta} &= \left( \frac{\partial u}{\partial \theta} \sin \phi + \frac{\partial w}{\partial \theta} \cos \phi - v \right) \cos \theta \\ &- (u \sin \phi + w \cos \phi + \frac{\partial v}{\partial \theta}) \sin \theta \\ &+ \zeta \left( \frac{\partial \alpha}{\partial \theta} \sin \phi - \beta \right) \cos \theta - \zeta \left( \alpha \sin \phi + \frac{\partial \beta}{\partial \theta} \right) \sin \theta \end{aligned} \quad (3.3.83)$$

Comparons à un mouvement rigide : ce mouvement sera de la forme

$$u_x = A + \zeta B + u_x \text{ (rotation autour de } e_z^{\rightarrow} \text{)}$$

ce dernier terme étant, en vertu de (3.3.81), donné par

$$- \zeta \cos \phi_x \sin \theta$$

Il vient donc

$$\frac{\partial u_x}{\partial \theta} = - \zeta \cos \phi \Phi_x \cos \theta \quad (3.3.84)$$

L'égalité des expressions (3.3.83) et (3.3.84) exige

$$\frac{\partial u}{\partial \theta} \sin \phi + \frac{\partial w}{\partial \theta} \cos \phi - v = 0 \quad (3.3.85)$$

$$u \sin \phi + w \cos \phi + \frac{\partial v}{\partial \theta} = 0 \quad (3.3.86)$$

$$\frac{\partial \alpha}{\partial \theta} \sin \phi - \beta = - \Phi_x \cos \phi \quad (3.3.87)$$

$$\alpha \sin \phi + \frac{\partial \beta}{\partial \theta} = 0 \quad (3.3.88)$$

On obtiendrait les mêmes relations en considérant un mouvement selon  $e_y^{\rightarrow}$ . Or, la première est une combinaison de (3.3.76) et (3.3.77), la seconde n'est autre que (3.3.75) et la dernière est la relation (3.3.78). A première vue, il manque une relation. Mais on remarquera que les équations (3.3.85) et (3.3.86) entraînent

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} + v = 0 \quad (3.3.89)$$

d'où

$$v = A \cos \theta + B \sin \theta$$

et on vérifie aisément que dans ce cas, les relations (3.3.75) à (3.3.77) se réduisent à deux équations indépendantes.

La signification de la relation (3.3.80) semble plus mystérieuse. En fait, elle exprime une condition de compatibilité des rotations sur le feuillet moyen. Soient  $\Phi_\zeta$  et  $\Phi_s$  les rotations autour des axes  $e_\zeta^{\rightarrow}$  et  $e_s^{\rightarrow}$ , sur le feuillet moyen : elles s'expriment par

$$2 \Phi_\zeta = \{u_s | \theta - u_\theta | s\}_{\zeta=0} = \frac{1}{r} \left( \frac{\partial u}{\partial \theta} - v \sin \phi \right) - \frac{\partial v}{\partial s}$$

$$2 \Phi_s = \{u_\theta | \zeta - u_\zeta | \theta\}_{s=0} = \beta - \frac{1}{r} \left( \frac{\partial w}{\partial \theta} - v \cos \phi \right)$$

On a donc (fig.3.10)

$$\begin{aligned} 2 r \Phi_r &= 2 r \Phi_\zeta \cos \phi + 2 r \Phi_s \sin \phi \\ &= \frac{\partial u}{\partial \theta} \cos \phi - r \frac{\partial v}{\partial s} \cos \phi + r \beta \sin \phi + \frac{\partial w}{\partial \theta} \sin \phi \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} 2 \frac{\partial}{\partial s} (r \Phi_r) &= \cos \phi \left( \frac{\partial^2 u}{\partial s \partial \theta} - \frac{\partial v}{\partial s} \sin \phi \right) \\ &\quad + \frac{\partial u}{\partial \theta} \frac{\sin \phi}{R_s} + \beta \sin^2 \phi - \frac{\partial^2 w}{\partial s \partial \theta} \sin \phi \\ &\quad + \frac{\partial w}{\partial \theta} \frac{\cos \phi}{R_s} + r \frac{\partial}{\partial s} (\beta \sin \phi - \frac{\partial v}{\partial s} \cos \phi) \end{aligned}$$

Tenant compte du fait que

$$\frac{\partial v}{\partial s} \sin \phi = \frac{\partial}{\partial s} (v \sin \phi) + v \frac{\cos \phi}{R_s}$$

et de la relation (3.3.77), on obtient, en  $r = 0$ ,

$$\begin{aligned} 2 \frac{\partial}{\partial s} (r \Phi_r) &= 2 \Phi_r \sin \phi = \cos \phi \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{\partial u}{\partial \theta} - v \sin \phi \right) \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial \theta} \left( - \frac{\partial w}{\partial s} + \frac{u}{R_s} \right) \sin \phi + \beta \sin^2 \phi \end{aligned} \quad (3.3.90)$$

D'autre part, on a

$$2 \Phi_\theta = \{u_\zeta|_s = u_s|\zeta\}_{\zeta=0} = \frac{\partial w}{\partial s} - \frac{u}{R_s} - \alpha$$

d'où

$$2 \frac{\partial \Phi_\theta}{\partial \theta} = \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{\partial w}{\partial s} - \frac{u}{R_s} \right) - \frac{\partial \alpha}{\partial \theta}$$

ce qui permet d'écrire la condition (3.3.80) sous la forme

$$\begin{aligned} 0 &= -\frac{\partial \alpha}{\partial \theta} \sin \phi + \beta \sin^2 \phi + \cos \phi \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{\partial u}{\partial \theta} - v \sin \phi \right) \\ &= 2 \sin \phi \left( \frac{\partial \Phi_\theta}{\partial \theta} + \Phi_r \right) \end{aligned} \quad (3.3.91)$$

Or la rotation  $\Phi_y$  autour de l'axe  $e_y^{\rightarrow}$  s'exprime par

$$\Phi_y = \Phi_r \sin \theta + \Phi_\theta \cos \theta \quad (3.3.92)$$

et le fait qu'elle soit indépendante de  $\theta$  s'exprime par

$$\frac{\partial \Phi_y}{\partial \theta} = \left( \frac{\partial \Phi_r}{\partial \theta} - \Phi_\theta \right) \sin \theta + \left( \frac{\partial \Phi_\theta}{\partial \theta} + \Phi_r \right) \cos \theta = 0 \quad (3.3.93)$$

ce qui mène au système

$$\frac{\partial \Phi_r}{\partial \theta} - \Phi_\theta = 0 \quad (3.3.94)$$

$$\frac{\partial \Phi_\theta}{\partial \theta} + \Phi_r = 0 \quad (3.3.95)$$

La relation (3.3.95) est équivalente à (3.3.91), tandis que l'équation (3.3.94) s'y combine pour donner les conditions supplémentaires de symétrie

$$\frac{\partial^2 \Phi_r}{\partial \theta^2} + \Phi_r = 0, \quad \frac{\partial^2 \Phi_\theta}{\partial \theta^2} + \Phi_\theta = 0$$

soit

$$\Phi_r = A \cos \theta + B \sin \theta, \quad \Phi_\theta = C \cos \theta + D \sin \theta \quad (3.3.96)$$

### 3.8.2. Cas des coques de KIRCHHOFF-LOVE

Dans la théorie des coques minces, les expressions de  $\bar{\varepsilon}_{\theta\theta}$  et  $\bar{\gamma}_{s\theta}$  sont inchangées, ce qui signifie que les conditions (3.3.75) et (3.3.76) restent valables. D'autre part, la rotation  $\beta$ , qui apparaît dans l'expression de l'énergie cinétique, doit être de carré intégrable, ce qui restitue la condition (3.3.77). En vertu de cette dernière, les relations (3.3.78) et (3.3.80) restent valables. La condition (3.3.79) peut cependant être mise sous une forme plus simple : tenant compte des valeurs (3.3.58) des rotations  $\alpha$  et  $\beta$ , elle s'écrit en effet

$$r \frac{\partial}{\partial \theta} \left( -\frac{\partial w}{\partial s} + \frac{u}{R_s} \right) - \left( -\frac{\partial w}{\partial \theta} + v \cos \phi \right) \sin \phi \\ - \cos \phi \left( \frac{\partial u}{\partial \theta} - v \sin \phi \right) = 0 \quad (r^{2-\ell})$$

soit

$$\frac{\partial w}{\partial \theta} \sin \phi - \cos \phi \frac{\partial u}{\partial \theta} + r \left( -\frac{\partial^2 w}{\partial s \partial \theta} + \frac{1}{R_s} \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) = 0 \quad (r^{2-\ell}) \quad (3.3.97)$$

Les deux premiers termes se compensent en  $r = 0$ , en vertu des relations (3.3.76) et (3.3.77). Il ne faut donc plus assurer que la nullité de la dérivée de cette expression. Or celle-ci vaut

$$\frac{\partial^2 w}{\partial s \partial \theta} \sin \phi - \cos \phi \frac{\partial^2 u}{\partial \theta \partial s} - \frac{\partial w}{\partial \theta} \frac{\cos \phi}{R_s} - \frac{\partial u}{\partial \theta} \frac{\sin \phi}{R_s} \\ - \sin \phi \frac{\partial^2 w}{\partial s \partial \theta} + \frac{\sin \phi}{R_s} \frac{\partial u}{\partial \theta} + 0 \quad (r^{1-\ell}) \\ = -\cos \phi \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{\partial u}{\partial s} + \frac{w}{R_s} \right) + 0 \quad (r^{1-\ell})$$

ce qui, compte tenu de (3.3.14) et (3.3.22) s'écrit encore

$$\cos \phi \frac{\partial \bar{\epsilon}_{ss}}{\partial \theta} = 0 \quad (r^{1-\ell}) \quad (3.3.98)$$

L'interprétation (3.3.92) de cette relation reste évidemment valable.

### 3.8.3. Expression des conditions sur l'axe dans le cadre d'un développement des déplacements en séries de FOURIER

Considérons un champ de déplacements de la forme

$$u(s, \theta) = u_{nm}(s) \cos(n\theta + m \frac{\pi}{2}) \\ v(s, \theta) = v_{nm}(s) \sin(n\theta + m \frac{\pi}{2}) \\ w(s, \theta) = w_{nm}(s) \cos(n\theta + m \frac{\pi}{2}) \\ \alpha(s, \theta) = \alpha_{nm}(s) \cos(n\theta + m \frac{\pi}{2}) \quad (3.3.99)$$

$$\beta(s, \theta) = \beta_{nm}(s) \sin(n\theta + m \frac{\pi}{2})$$

où  $n$  est un entier non négatif,  $m$  pouvant valoir 0 ou 1.  
Ce type de déplacement se rencontre dans l'analyse des coques par décomposition en séries de FOURIER. Le choix des fonctions trigonométriques relatives à chaque composante sera discuté au chapitre 4. Les équations (3.3.75) à (3.3.78) et (3.3.80) deviennent, en  $r = 0$

$$n v_{nm} + u_{nm} \sin \phi + w_{nm} \cos \phi = 0 \quad (3.3.75.a)$$

$$-n u_{nm} - v_{nm} \sin \phi = 0 \quad (3.3.76.a)$$

$$-n w_{nm} - v_{nm} \cos \phi = 0 \quad (3.3.77.a)$$

$$n \beta_{nm} + \alpha_{nm} \sin \phi = 0 \quad (3.3.78.a)$$

$$(n \alpha_{nm} + \beta_{nm} \sin \phi) \sin \phi - \cos \phi \frac{d}{ds} (n u_{nm} + v_{nm} \sin \phi) = 0 \quad (3.3.80.a)$$

Il convient de distinguer trois cas, selon les valeurs de  $n$  :

(i)  $n = 0$  : dans ce cas, on a simplement

$$u_{0m} \sin \phi + w_{0m} \cos \phi = 0, \text{ soit } (u_r)_{0m} = 0$$

$$\left. \begin{array}{l} v_{0m} \sin \phi = 0 \\ v_{0m} \cos \phi = 0 \end{array} \right\} , \text{ soit } v_{0m} = 0 \quad (3.3.100)$$

$$\alpha_{0m} = 0$$

$$\beta_{0m} \sin^2 \phi = \cos \phi \frac{d}{ds} (v_{0m} \sin \phi) = \sin \phi \cos \phi \frac{dv_{0m}}{ds}$$

Dans le cas où l'axe est orthogonal à la coque en son point de percée, la première condition s'écrit  $u_{om} = 0$ , et la dernière,  $\beta_{om} = 0$ . On remarquera que les mouvements de translation selon  $\vec{e}_z$  et de rotation autour de ce même axe sont possibles, ce qui n'aurait pas été le cas si l'on avait utilisé l'expression impropre  $\hat{\chi}_{s\theta}$  pour la torsion, car on aurait eu la condition  $\beta_{om} = 0$ , quel que soit l'angle.

(ii)  $n = 1$  : les équations deviennent

$$\begin{aligned} v_{1m} + u_{1m} \sin \phi + w_{1m} \cos \phi &= 0 \\ u_{1m} + v_{1m} \sin \phi &= 0 \\ w_{1m} + v_{1m} \cos \phi &= 0 \\ \beta_{1m} + \alpha_{1m} \sin \phi &= 0 \\ (\alpha_{1m} + \beta_{1m} \sin \phi) = \cos \phi \frac{d}{ds} (u_{1m} + v_{1m} \sin \phi) &= 0 \end{aligned} \quad (3.3.101)$$

Les trois premières forment un système de rang deux se ramenant aisément aux deux conditions

$$\begin{aligned} (u_r)_{1m} + (u_\theta)_{1m} &= 0 \\ (u_z)_{1m} &= 0 \end{aligned} \quad (3.3.102)$$

Si l'interprétation de la seconde est évidente, il n'en est pas de même de la première. Pour comprendre sa signification, il faut passer aux axes cartésiens. On a en effet (fig.3.11)

$$\begin{aligned} (u_x)_{1m} &= (u_r)_{1m} \cos \theta - (u_\theta)_{1m} \sin \theta \\ (u_y)_{1m} &= (u_r)_{1m} \sin \theta + (u_\theta)_{1m} \cos \theta \end{aligned}$$

et une manipulation algébrique élémentaire montre que si  $(u_r)_{1m} + (u_\theta)_{1m} = 0$ , on a

$$(u_x)_{1m} = (u_r)_{1m} \cos \frac{m\pi}{2}$$

$$(u_y)_{1m} = (u_r)_{1m} \sin \frac{m\pi}{2}$$

c'est-à-dire qu'une translation est libre, selon  $\vec{e}_x$  pour  $m = 0$ , selon  $\vec{e}_y$  pour  $m = 1$ .

La première condition sur les rotations s'interprète d'une manière analogue : en effet (fig.3.12)

$$\beta = \phi_z \cos \phi - \phi_r \sin \phi, \quad \alpha = \phi_\theta$$

d'où

$$\alpha_{1m} \sin \phi + \beta_{1m} = ((\phi_\theta)_{1m} - (\phi_r)_{1m}) \sin \phi - (\phi_z)_{1m} \cos \phi$$

et comme  $(\phi_z)_{1m} = 0$  pour d'évidentes raisons de symétrie, on obtient

$$(\phi_\theta)_{1m} = (\phi_r)_{1m},$$

ce qui s'interprète en axes cartésiens comme ci-dessus; moyennant cette condition, on a en effet

$$(\phi_x)_{1m} = (\phi_r)_{1m} \sin m \frac{\pi}{2}$$

$$(\phi_y)_{1m} = (\phi_r)_{1m} \cos m \frac{\pi}{2}$$

c'est-à-dire qu'une rotation est libre, selon  $\vec{e}_y$  pour  $m = 0$ , selon  $\vec{e}_x$  pour  $m = 1$ .

La dernière équation possède un second membre, et c'est grâce à celui-ci que la rotation est possible. Encore une fois, si l'on s'était contenté de l'expression impropre  $\hat{\chi}_{s\theta}$  de la torsion, ce n'aurait pas été le cas, car on aurait obtenu le système

$$\beta_{1m} + \alpha_{1m} \sin \phi = 0$$

$$\alpha_{1m} + \beta_{1m} \sin \phi = 0,$$

qui n'est singulier que pour  $\phi = \frac{\pi}{2}$ .

(iii)  $n > 1$  : dans ce cas, les conditions (3.3.75.a) à (3.3.77.a) forment un système de rang trois, ce qui signifie qu'il faut annuler  $u_{nm}$ ,  $v_{nm}$  et  $w_{nm}$ . D'autre part, la symétrie, exprimée par les équations (3.3.87) et (3.3.88), entraîne

$$\frac{\partial^2 \alpha}{\partial \theta^2} + \alpha = 0,$$

ce qui signifie que pour  $n > 1$ ,  $\alpha_{nm} = 0$ , d'où  $\beta_{nm} = 0$  et

$$\frac{d}{ds} (n u_{nm} + v_{nm} \sin \phi) = 0 \quad (3.3.103)$$

#### 4. THEORIE DES COQUES QUASI - CONIQUES

La théorie exposée ci-dessus est ce que l'on appelle une théorie des coques profondes. Sa caractéristique essentielle est l'utilisation des coordonnées curvilignes pour définir la section méridienne. Mais l'application d'une telle théorie dans le cadre de la méthode des éléments finis pose de graves problèmes si  $\frac{1}{R} \neq 0$ , car les modes rigides ne sont généralement pas décrits par des polynômes de  $s$ , ce qui signifie qu'ils ne seront pas représentés. Les conséquences de cette absence sont très graves. Pour l'illustrer, considérons un cylindre possédant deux fonds, l'un sphérique, l'autre plan (fig.3.13). La structure est encastree au point A, tandis que le point B est libre d'avoir un mouvement le long de l'axe. Soumise à pression externe, la structure prend une déformée telle que (a), où le fond sphérique a pratiquement un mouvement de corps rigide, tandis que le fond plat réagit grosso modo comme une plaque encastree à la coque sur la circonférence C. Une telle déformée

est effectivement obtenue à l'aide d'éléments de troncs de cônes. Mais dans une discrétisation par éléments courbes, on obtient une déformée du type (b), qui est très éloignée de la réalité. Ce défaut est, nous l'avons dit, lié à l'utilisation de coordonnées curvilignes pour définir la surface méridienne.

En 1938, MARGUERRE [M3,B7] a proposé des équations en coordonnées cartésiennes pour les coques plates (shallow shell). Il est possible de généraliser les idées de MARGUERRE au cas des coques s'approchant d'un tronc de cône, c'est-à-dire à faible courbure  $\frac{1}{R}$ . Dans une telle approche, les modes rigides sont représentés<sup>s</sup> exactement par des polynômes, à condition que la distance entre la coque réelle et le tronc de cône soit elle-même un polynôme.

#### 4.1. La théorie des coques plates de MARGUERRE

Dans la théorie de MARGUERRE, la coque est définie à partir d'un plan de référence (fig.3.14). Un point P du feuillet moyen y est défini par les coordonnées  $(x_1, x_2, h)$ . Cela étant, MARGUERRE donne les expressions suivantes des déformations :

$$\begin{aligned}\bar{\varepsilon}_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} \\ \bar{\varepsilon}_{yy} &= \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial y} \\ \bar{\gamma}_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial x} \\ \bar{\gamma}_{xz} &= \alpha + \frac{\partial w}{\partial x} \\ \bar{\gamma}_{yz} &= \beta + \frac{\partial w}{\partial y} \\ \bar{\chi}_{xx} &= \frac{\partial \alpha}{\partial x} \\ \bar{\chi}_{yy} &= \frac{\partial \beta}{\partial x}\end{aligned}\tag{3.4.1}$$

Ces expressions peuvent être déduites des équations générales des coques, moyennant une transformation des coordonnées et certaines approximations géométriques [I1]. C'est l'interprétation qui semble en être retenue actuellement [B7]. La présentation de MARGUERRE était un peu différente : intéressé aux problèmes de stabilité, il considérait en quelque sorte la coque comme une plaque imparfaite et déduisait les déformations de la manière suivante [M3] :

$$(1 + \bar{\epsilon}_{xx})^2 = \left( \frac{\text{nouvelle longueur}}{\text{ancienne longueur}} \right)^2 = \frac{(1 + \frac{\partial u}{\partial x})^2 + (\frac{\partial v}{\partial x})^2 + (\frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x})^2}{1 + (\frac{\partial h}{\partial x})^2}$$

et, négligeant  $\bar{\epsilon}_{xx}$ ,  $\frac{\partial u}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial v}{\partial x}$ ,  $(\frac{\partial w}{\partial x})^2$  et  $(\frac{\partial h}{\partial x})^2$  devant l'unité, obtenait

$$\begin{aligned} 1 + 2 \bar{\epsilon}_{xx} &\approx \frac{1 + 2 \frac{\partial u}{\partial x} + (\frac{\partial h}{\partial x})^2 + 2 \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} + (\frac{\partial w}{\partial x})^2}{1 + (\frac{\partial h}{\partial x})^2} \\ &\approx \{1 + 2 \frac{\partial u}{\partial x} + (\frac{\partial h}{\partial x})^2 + 2 \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} + (\frac{\partial w}{\partial x})^2\} \{1 - (\frac{\partial h}{\partial x})^2\} \end{aligned}$$

d'où

$$\bar{\epsilon}_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{1}{2} (\frac{\partial w}{\partial x})^2$$

Dans le cas de la théorie linéaire, le dernier terme est évidemment négligé. L'originalité essentielle de cette approche réside dans le fait que la cote  $h$  de la coque soit traitée comme une espèce de déplacement initial.

On peut généraliser ce point de vue de la manière suivante : soient A un corps de référence et B un corps qui n'en diffère pas trop. On peut imaginer que le corps A soit déformé pour donner le corps B, le déplacement correspondant étant noté  $\hat{u}_i$ . Si le corps B se déforme encore selon des déplacements  $u_i$ , le déplacement total sera donc

$$\overset{t}{u}_i = \overset{t}{u}_i + u_i \quad (3.4.2)$$

La mesure de GREEN de la déformation faisant passer du corps A au corps actuel C est

$$\overset{t}{g}_{ij} = \frac{1}{2} \{ D_i (\overset{t}{u}_j + u_j) + D_j (\overset{t}{u}_i + u_i) \\ + D_i (\overset{t}{u}_m + u_m) D_j (\overset{t}{u}_m + u_m) \}$$

Quant au passage du corps A au corps B, il correspond à une déformation

$$\overset{g}{g}_{ij} = \frac{1}{2} \{ D_i \overset{g}{u}_j + D_j \overset{g}{u}_i + D_i \overset{g}{u}_m D_j \overset{g}{u}_m \}$$

Puisque le corps B est le véritable corps physique, seule la déformation menant du corps B au corps actuel doit être prise en compte pour le calcul de l'énergie. On posera donc

$$\overset{g}{g}_{ij} = \overset{t}{g}_{ij} - \overset{g}{g}_{ij} = \frac{1}{2} \{ D_i u_j + D_j u_i + D_i \overset{g}{u}_m D_j u_m \\ + D_j \overset{g}{u}_m D_i u_m + D_i u_m D_j \overset{g}{u}_m \} \quad (3.4.3)$$

soit, après linéarisation,

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \{ D_i u_j + D_j u_i + D_i \overset{g}{u}_m D_j u_m + D_j \overset{g}{u}_m D_i u_m \} \quad (3.4.4)$$

Considérons à présent le cas d'une coque obtenue à partir d'une plaque de référence par un déplacement purement vertical  $h$ , sans rotation des sections. Ainsi, (fig.3.15) la section droite AB devient une section oblique A'B' de la coque. Le déplacement initial est alors donné par

$$\overset{g}{u}_1 = 0 \quad , \quad \overset{g}{u}_2 = 0 \quad , \quad \overset{g}{u}_3 = h(x,y) \quad (3.4.5)$$

et, moyennant les hypothèses classiques des plaques

$$u_1 = u + \alpha x \quad u_2 = v + \beta y \quad u_3 = w$$

on obtient aisément les expressions (3.4.1)

Nous porterons une attention particulière sur la définition des efforts conjugués aux déformations, car ce point semble avoir été souvent mal compris. Les déformations (3.4.3) étant des accroissements des déformations de GREEN, les tensions correspondantes seront des tensions de KIRCHHOFF-TREFFTZ [F 3]. Leur interprétation est la suivante : au cours de la déformation fictive initiale, les axes  $\vec{e}_1$  et  $\vec{e}_3$  se transforment en  $\vec{g}_1$  et  $\vec{g}_3$ . On a évidemment  $\vec{g}_3 = \vec{e}_3$ , mais, par contre,  $\vec{e}_1$  s'allonge et change de direction. Visiblement, si  $\phi_1$  est l'angle entre  $\vec{e}_1$  et  $\vec{g}_1$ , on a (fig. 3.16)

$$\|\vec{g}_1\| = \frac{1}{\cos \phi_1} \quad (3.4.6)$$

Cela étant, un effort  $F$  dydz appliqué sur une section est décomposé dans la base de la coque, c'est-à-dire

$$\text{dydz } \vec{F} = \text{dydz } F_1 \vec{g}_1 + \text{dydz } F_2 \vec{g}_2 \quad (3.4.7)$$

puis on pose

$$N_{11} = F_1 \quad Q_1 = F_2 \quad (3.4.8)$$

L'effort selon  $\vec{g}_1$ , en vraie grandeur, est donc

$$\vec{N}_{11} = F_1 \|\vec{g}_1\| = \frac{F_1}{\cos \phi_1} = \frac{N_{11}}{\cos \phi_1} \quad (3.4.9)$$

Cette remarque est essentielle pour la compréhension des équations d'équilibre. Considérons en effet une coque soumise à une charge verticale de densité  $p$ . La condition de nullité du travail virtuel s'écrit

$$\begin{aligned}
\int_S \{ & N_{xx} \delta \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} \right) + N_{xy} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\
& + N_{yy} \left( \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial y} \right) + M_{xx} \delta \frac{\partial \alpha}{\partial x} + M_{yy} \delta \frac{\partial \beta}{\partial x} \\
& + M_{xy} \delta \left( \frac{\partial \alpha}{\partial y} + \frac{\partial \beta}{\partial x} \right) + Q_x \delta \left( \alpha + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\
& + Q_y \delta \left( \beta + \frac{\partial w}{\partial y} \right) - p \delta w \} dS = 0
\end{aligned} \tag{3.4.10}$$

et permet de déduire les équations d'équilibre

$$\delta u \rightarrow \frac{\partial N_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} = 0 \tag{3.4.11}$$

$$\delta v \rightarrow \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_{yy}}{\partial y} = 0 \tag{3.4.12}$$

$$\begin{aligned}
\delta w \rightarrow \frac{\partial}{\partial x} \left( Q_x + N_{xx} \frac{\partial h}{\partial x} + N_{xy} \frac{\partial h}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( Q_y + N_{xy} \frac{\partial h}{\partial x} + N_{yy} \frac{\partial h}{\partial y} \right) \\
+ p = 0
\end{aligned} \tag{3.4.13}$$

$$\delta \alpha \rightarrow \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} = T_x \tag{3.4.14}$$

$$\delta \beta \rightarrow \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_{yy}}{\partial y} = T_y \tag{3.4.15}$$

Les deux équations aux moments ne posent pas de problème d'interprétation. Pour les équations (3.4.11) et (3.4.12), on remarquera que la projection horizontale de  $\frac{N_{xx}}{\cos \phi_1}$  est  $N_{xx}$  (fig.3.17), ce qui justifie le fait que l'on retrouve les équations des coques planes. Enfin, l'équation (3.4.13) s'interprète sans problème si l'on note que la résultante verticale de  $Q_x$ ,  $\frac{N_{xx}}{\cos \phi_1}$  et  $\frac{N_{xy}}{\cos \phi_2}$  est donnée par (fig.3.18)

$$Q_x + N_{xx} \operatorname{tg} \phi_1 + N_{xy} \operatorname{tg} \phi_2 = Q_x + N_{xx} \frac{\partial h}{\partial x} + N_{xy} \frac{\partial h}{\partial y}$$

Ainsi, les équations d'équilibre de la théorie de MARGUERRE sont exactes, contrairement à ce que dit BISPLINGHOFF [B7]. L'hypothèse que la coque est plate intervient cependant à deux niveaux :

(i) La coque définie est plus mince que la plaque : son épaisseur est  $t \cos \phi$ , où  $\phi$  est le plus grand angle entre la plaque et la coque au point considéré (fig.3.19). L'erreur introduite par cette approximation est de l'ordre de  $(1 - \cos \phi) \approx \frac{\phi^2}{2}$ .

(ii) Les relations constitutives utilisées sont celles de la plaque. En particulier, on admet que  $\sigma_{zz} = 0$ , au lieu de  $\sigma_{nn} = 0$ . Pour évaluer l'erreur introduite, on remarquera que les résultantes classiques sont alors, pour une coque à simple courbure (fig.3.20)

$$\begin{bmatrix} \tilde{N}_{xx} \\ \tilde{Q}_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\cos \phi} & \sin \phi \\ 0 & \cos \phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_{xx} \\ Q_x \end{bmatrix} \quad (3.4.16)$$

La norme de la différence entre cette matrice et la matrice unité est majorée par la racine carrée de la somme de ses termes, soit

$$\begin{aligned} & \left\{ \left( \frac{1}{\cos \phi} - 1 \right)^2 + (\cos \phi - 1)^2 + \sin^2 \phi \right\}^{\frac{1}{2}} \\ & \approx \left\{ \left( \frac{\phi^2}{2} \right)^2 + \left( \frac{\phi^2}{2} \right)^2 + \phi^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \approx \phi \end{aligned}$$

C'est donc la plus grande erreur. Mais il est important de constater qu'elle ne dépend que de l'angle  $\phi$  et non de la courbure. Dès lors, comme l'a fait remarquer IDELSOHN [11], si l'on considère une suite de maillages par éléments finis de plus en plus fins, on converge vers la solution exacte, car  $\phi \rightarrow 0$ .

Il reste à établir les conditions pour que les modes rigides soient représentés dans une idéalisation par éléments finis. Pour les modes rigides de translation, il n'y a aucune restriction, du fait de l'utilisation des coordonnées cartésiennes. Quant aux modes rigides de rotation, ils sont de la forme

$$u_i = e_{ijk} \omega_j (x_k + \hat{u}_k) \quad (3.4.17)$$

où  $e_{ijk}$  est le symbole alternateur. On constate qu'il suffit que le déplacement initial soit un déplacement contenu dans le modèle. Ainsi, si la cote  $h$  est un polynôme de degré 3 des variables  $x$  et  $y$ , on aura

$$\begin{aligned} u_1 &= \omega_2 (h + \zeta) - \omega_3 x_2 \\ u_2 &= \omega_3 x_1 - \omega_2 (h + \zeta) \\ u_3 &= \omega_1 x_2 - \omega_2 x_1 \end{aligned} \quad (3.4.18)$$

et le mode rigide sera représenté si  $u$  et  $v$  sont du troisième degré au moins,  $w$  du premier degré au moins et  $\alpha$  et  $\beta$ , au moins constants. Ces conditions correspondent d'ailleurs à celles de DUPUIS et GOEL [D5], qui ont développé un modèle général de coques de KIRCHHOFF-LOVE en coordonnées cartésiennes.

#### 4.2. Coques quasi-coniques

L'expression (3.4.4) des déformations permet de généraliser le point de vue de MARGUERRE aux coques à faible courbure  $\frac{1}{R^s}$ . C'est ce que nous appellerons des "coques quasi-coniques". Ces coques seront définies par un tronc de cône de référence, et une "hauteur"  $h$ , distance entre la coque réelle et le tronc de cône, comptée orthogonalement à celui-ci (fig.3.21). Cette hauteur  $h$ , qui ne dépend que de la coordonnée du cône  $s$ , sera considérée comme un déplacement initial de la forme

$$\hat{u}_s = 0 \quad , \quad \hat{u}_\theta = 0 \quad , \quad \hat{u}_\zeta = h(s) \quad (3.4.17)$$

Les déformations seront alors données par l'expression

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \{ u_{i|j} + u_{j|i} + \hat{u}_{m|i} u_{m|j} + \hat{u}_{m|j} u_{m|i} \} \quad (3.4.18)$$

qui généralise (3.4.4) d'une manière évidente. Notant que, par (3.3.10)

$$\begin{aligned}
 \hat{u}_s|_s &= 0 & \hat{u}_s|_\theta &= 0 & \hat{u}_s|\zeta &= 0 \\
 \hat{u}_\theta|_s &= 0 & \hat{u}_\theta|_\theta &= \left(1 + \frac{\zeta}{R_\theta}\right)^{-1} \frac{h}{R_\theta} & \hat{u}_\theta|\zeta &= 0 \\
 \hat{u}_\zeta|_s &= \frac{dh}{ds} & \hat{u}_\zeta|_\theta &= 0 & \hat{u}_\zeta|\zeta &= 0
 \end{aligned} \tag{3.4.19}$$

on obtient aisément, en tenant compte des définitions (3.3.14),

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{ss} &= \hat{\varepsilon}_{ss} + \zeta \hat{\chi}_{ss} + \frac{dh}{ds} \frac{\partial w}{\partial s} \\
 \varepsilon_{\theta\theta} &= \left(1 + \frac{\zeta}{R_\theta}\right)^{-1} (\hat{\varepsilon}_{\theta\theta} + \zeta \hat{\chi}_{\theta\theta}) + \left(1 + \frac{\zeta}{R_\theta}\right)^{-2} \frac{h}{R_\theta} (\hat{\varepsilon}_{\theta\theta} + \zeta \hat{\chi}_{\theta\theta}) \\
 \gamma_{s\zeta} &= \hat{\gamma}_{s\zeta} \\
 \gamma_{\theta\zeta} &= \left(1 + \frac{\zeta}{R_\theta}\right)^{-1} (\hat{\gamma}_{\theta\zeta} + \beta \frac{h}{R_\theta}) \\
 \gamma_{s\theta} &= \left(1 + \frac{\zeta}{R_\theta}\right)^{-1} \left\{ \hat{\gamma}_\theta + \zeta \hat{\delta}_\theta + \frac{dh}{ds} \hat{\gamma}_{\theta\zeta} + \frac{h}{R_\theta} (\hat{\gamma}_s + \zeta \hat{\delta}_s) \right\} \\
 &\quad + \hat{\gamma}_s + \zeta \hat{\delta}_s - \beta \frac{dh}{ds} \\
 \varepsilon_{\zeta\zeta} &= 0
 \end{aligned} \tag{3.4.20}$$

On simplifie ces expressions suivant le même schéma que les coques profondes. On remplace d'abord  $\left(1 + \frac{\zeta}{R_\theta}\right)^{-k}$  par  $\left(1 - k \frac{\zeta}{R_\theta}\right)$ , ce qui conduit aux expressions approchées

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{\theta\theta} &= \hat{\varepsilon}_{\theta\theta} \left(1 + \frac{h}{R_\theta}\right) + \zeta \left\{ \hat{\chi}_{\theta\theta} \left(1 + \frac{h}{R_\theta}\right) - \frac{\hat{\varepsilon}_{\theta\theta}}{R_\theta} \left(1 + 2 \frac{h}{R_\theta}\right) \right\} + 0 \quad (\eta) \\
 \gamma_{\theta\zeta} &= \left(\hat{\gamma}_{\theta\zeta} + \beta \frac{h}{R_\theta}\right) - \frac{\zeta}{R_\theta} \left(\hat{\gamma}_{\theta\zeta} + \beta \frac{h}{R_\theta}\right) + 0 \quad (\eta)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \gamma_{s\theta} = & \{ \hat{\gamma}_{\theta} + \hat{\gamma}_{\theta\zeta} \frac{dh}{ds} - \beta \frac{dh}{ds} + \hat{\gamma}_s (1 + \frac{h}{R_{\theta}}) \} \\ & + \zeta \{ \hat{\delta}_{\theta} + \hat{\delta}_s (1 + \frac{h}{R_{\theta}}) - \frac{\hat{\gamma}_{\theta}}{R_{\theta}} - \frac{1}{R_{\theta}} \frac{dh}{ds} \hat{\gamma}_{\theta\zeta} - \frac{h}{R_{\theta}^2} \hat{\gamma}_s \} + 0 \quad (\eta) \end{aligned} \quad (3.4.21)$$

avec  $\eta = (\frac{t}{R_{\theta}})^2$ . Faisant alors les deux hypothèses.

$$\left| \frac{t}{R_{\theta}} \right| \ll 1 \quad , \quad \left| \frac{h}{R_{\theta}} \right| \ll 1 \quad (3.4.22)$$

on peut encore simplifier les expressions de  $\varepsilon_{\theta\theta}$  et de  $\gamma_{\theta\zeta}$ , mais non celle de  $\gamma_{s\theta}$ , pour les mêmes raisons que dans les coques profondes, ce qui donne

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\theta\theta} & \approx \hat{\varepsilon}_{\theta\theta} + \zeta \hat{\chi}_{\theta\theta} \\ \gamma_{\theta\zeta} & \approx \hat{\gamma}_{\theta\zeta} + \beta \frac{h}{R_{\theta}} \end{aligned} \quad (3.4.23)$$

$$\gamma_{s\theta} = \text{inchangé.}$$

Tenant compte du fait que

$$\frac{1}{R_{\theta}} = \frac{\cos \phi}{r} \quad , \quad \frac{dr}{ds} = \sin \phi$$

avec  $\phi = \text{constante}$ , puisque le corps de référence est un cône, on obtient finalement les expressions explicites

$$\begin{aligned} \bar{\varepsilon}_{ss} & = \frac{\partial u}{\partial s} + \frac{dh}{ds} \frac{\partial w}{\partial s} \\ \bar{\varepsilon}_{\theta\theta} & = \frac{1}{r} \left( \frac{\partial v}{\partial \theta} + u \sin \phi + w \cos \phi \right) \\ \bar{\gamma}_{s\theta} & = \frac{1}{r} \left\{ \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{dh}{ds} \frac{\partial w}{\partial \theta} - v \left( \sin \phi + \cos \phi \frac{dh}{ds} \right) + \frac{\partial v}{\partial s} (r + h \cos \phi) \right\} \\ \bar{\gamma}_{s\zeta} & = \alpha + \frac{\partial w}{\partial s} \\ \bar{\gamma}_{\theta\zeta} & = \frac{1}{r} \left\{ \beta (r + h \cos \phi) + \frac{\partial w}{\partial \theta} - v \cos \phi \right\} \end{aligned} \quad (3.4.24)$$

$$\bar{\chi}_{ss} = \frac{\partial \alpha}{\partial s}$$

$$\bar{\chi}_{\theta\theta} = \frac{1}{r} \left( \frac{\partial \beta}{\partial \theta} + \alpha \sin \phi \right)$$

$$\begin{aligned} \bar{\chi}_{s\theta} &= \frac{1}{r} \left\{ \frac{\partial \alpha}{\partial \theta} - \beta \left( \sin \phi + \cos \phi \frac{dh}{ds} \right) + \frac{\partial \beta}{\partial s} (r + h \cos \phi) \right\} \\ &\quad - \frac{1}{r R_\theta} \left\{ \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{dh}{ds} \frac{\partial w}{\partial \theta} - v \left( \sin \phi + \cos \phi \frac{dh}{ds} \right) + h \cos \phi \frac{\partial v}{\partial s} \right\} \end{aligned}$$

On peut vérifier que ces déformations sont propres.  
Nous ne le ferons ici que pour le mode rigide de rotation  
autour de  $\vec{e}_z$ . Ce mode est caractérisé par

$$u = 0, \quad v = r + h \cos \phi, \quad w = 0, \quad \alpha = 0, \quad \beta = \cos \phi. \quad (3.4.25)$$

Il vient d'abord

$$\hat{\gamma}_\theta = \frac{1}{r} \left( \frac{\partial u}{\partial \theta} - v \sin \phi \right) = - \left( 1 + \frac{h \cos \phi}{r} \right) \sin \phi$$

$$\hat{\gamma}_{\theta\zeta} \frac{dh}{ds} = \frac{1}{r} \frac{dh}{ds} \left\{ \cos \phi (r + h \cos \phi) - \cos \phi (r + h \cos \phi) \right\} = 0$$

$$- \beta \frac{dh}{ds} = - \cos \phi \frac{dh}{ds}$$

$$\hat{\gamma}_s \left( 1 + \frac{h \cos \phi}{r} \right) = \left( 1 + h \frac{\cos \phi}{r} \right) \left( \sin \phi + \frac{dh}{ds} \cos \phi \right)$$

si bien que  $\bar{\gamma}_{s\theta} = 0$ . Pour  $\bar{\chi}_{s\theta}$ , on a

$$\hat{\delta}_\theta = - \frac{\cos \phi}{r} \sin \phi$$

$$\hat{\delta}_s \left( 1 + \frac{h \cos \phi}{r} \right) = 0$$

$$-\frac{\hat{\gamma}_{\theta} \cos \phi}{r} = \frac{\cos \phi}{r} \left(1 + \frac{h \cos \phi}{r}\right) \sin \phi$$

$$-\frac{h \cos^2 \phi}{r^2} \hat{\gamma}_s = -\frac{h \cos^2 \phi}{r} \sin \phi - \frac{h \cos^3 \phi}{r^2} \frac{dh}{ds}$$

$$-\frac{\cos \phi}{r} \frac{dh}{ds} \hat{\gamma}_{\theta\zeta} = -\frac{\cos^2 \phi}{r} \frac{dh}{ds} + \frac{\cos^2 \phi}{r} \frac{dh}{ds} + \frac{h \cos^3 \phi}{r^2} \frac{dh}{ds}$$

et  $\bar{\chi}_{s\theta}$ , somme de ces différents termes, est nul.

#### 4.3. Equations d'équilibre

Pour une portion de coque définie pour l'intervalle  $]s_1, s_2 [x] \theta_1, \theta_2 [$ , la variation première de l'énergie de déformation s'écrit

$$\delta U = \int_{s_1}^{s_2} ds \int_{\theta_1}^{\theta_2} r d\theta \int_{-t/2}^{t/2} \{ \sigma_{ss} \delta \varepsilon_{ss} + \sigma_{\theta\theta} \delta \varepsilon_{\theta\theta} + \tau_{s\theta} \delta \gamma_{s\theta} + \tau_{s\zeta} \delta \gamma_{s\zeta} + \tau_{\theta\zeta} \delta \gamma_{\theta\zeta} \} \left(1 + \frac{\zeta}{R_\theta}\right) d\zeta \quad (3.4.26)$$

On remarquera que le jacobien  $\left(1 + \frac{\zeta}{R_\theta}\right)$  est celui du tronc de cône, de la même façon que MARGUERRE écrivait ses équations dans la plaque de référence. Les éléments de réduction seront donc

$$N_{ss} = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_{ss} \left(1 + \frac{\zeta}{R_\theta}\right) d\zeta$$

$$N_{\theta\theta} = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_{\theta\theta} \left(1 + \frac{\zeta}{R_\theta}\right) d\zeta$$

$$N_{s\theta} = \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{s\theta} \left(1 + \frac{\zeta}{R_\theta}\right) d\zeta$$

$$M_{ss} = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_{ss} \zeta \left(1 + \frac{\zeta}{R_\theta}\right) d\zeta$$

$$M_{\theta\theta} = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_{\theta\theta} \zeta \left(1 + \frac{\zeta}{R_\theta}\right) d\zeta$$

$$M_{s\theta} = \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{s\theta} \zeta \left(1 + \frac{\zeta}{R_\theta}\right) d\zeta$$

$$Q_s = \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{s\zeta} \left(1 + \frac{\zeta}{R_\theta}\right) d\zeta$$

$$Q_\theta = \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{\theta\zeta} \left(1 + \frac{\zeta}{R_\theta}\right) d\zeta$$

(3.4.27)

Tenant compte de ces définitions et des expressions explicites (3.4.24) des déformations, on obtient

$$\begin{aligned} \delta U = & \int_{s_1}^{s_2} ds \int_{\theta_1}^{\theta_2} |r| N_{ss} \delta \left\{ \frac{\partial u}{\partial s} + \frac{dh}{ds} \frac{\partial w}{\partial s} \right\} \\ & + N_{\theta\theta} \delta \left\{ \frac{\partial v}{\partial \theta} + u \sin \phi + w \cos \phi \right\} \\ & + N_{s\theta} \delta \left\{ \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{dh}{ds} \frac{\partial w}{\partial \theta} - v (\sin \phi + \cos \phi) \frac{dh}{ds} \right\} \\ & + \frac{\partial v}{\partial s} (r + h \cos \phi) \} + r M_{ss} \delta \left\{ \frac{\partial \alpha}{\partial s} \right\} \\ & + M_{\theta\theta} \delta \left\{ \frac{\partial \beta}{\partial \theta} + \alpha \sin \phi \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + M_{s\theta} \delta \left\{ \frac{\partial \alpha}{\partial \theta} - \beta (\sin \phi + \cos \phi \frac{dh}{ds}) \right. \\
& + \frac{\partial \beta}{\partial s} (r + h \cos \phi) \\
& - \frac{1}{R_\theta} \left( \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{dh}{ds} \frac{\partial w}{\partial \theta} - v (\sin \phi + \cos \phi \frac{dh}{ds}) \right. \\
& \left. \left. + h \cos \phi \frac{\partial v}{\partial s} \right) \right\} + r Q_s \delta \left\{ \alpha + \frac{\partial w}{\partial s} \right\} \\
& + Q_\theta \delta \left\{ \beta (r + h \cos \phi) + \frac{\partial w}{\partial \theta} - v \cos \phi \right\} | d\theta
\end{aligned} \tag{3.4.28}$$

Nous considérerons par exemple le cas d'une charge de pression : le travail correspondant est

$$\delta \mathcal{C} = \int_{s_1}^{s_2} ds \int_{\theta_1}^{\theta_2} p r \delta w d\theta \tag{3.4.29}$$

Les équations d'équilibre sont donc :

$$\delta u \rightarrow - \frac{\partial}{\partial s} (r N_{ss}) + N_{\theta\theta} \sin \phi - \frac{\partial N_{s\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{R_\theta} \frac{\partial M_{s\theta}}{\partial \theta} = 0 \tag{3.4.30}$$

$$\begin{aligned}
\delta v \rightarrow & - \frac{\partial N_{\theta\theta}}{\partial \theta} - N_{s\theta} (\sin \phi + \cos \phi \frac{dh}{ds}) - \frac{\partial}{\partial s} \left\{ (r + h \cos \phi) N_{s\theta} \right\} \\
& + \frac{M_{s\theta}}{R_\theta} (\sin \phi + \cos \phi \frac{dh}{ds}) + \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{h \cos \phi}{R_\theta} M_{s\theta} \right) - Q_\theta \cos \phi = 0
\end{aligned} \tag{3.4.31}$$

$$\begin{aligned}
\delta w \rightarrow & - \frac{\partial}{\partial s} \left( r N_{ss} \frac{dh}{ds} \right) + N_{\theta\theta} \cos \phi - \frac{\partial}{\partial \theta} \left( N_{s\theta} \frac{dh}{ds} \right) \\
& + \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{M_{s\theta}}{R_\theta} \frac{dh}{ds} \right) - \frac{\partial}{\partial s} (r Q_s) - \frac{\partial Q_\theta}{\partial \theta} - p r = 0
\end{aligned} \tag{3.4.32}$$

$$\delta \alpha \rightarrow - \frac{\partial}{\partial s} (r M_{ss}) + M_{\theta\theta} \sin \phi - \frac{\partial M_{s\theta}}{\partial \theta} + r Q_s = 0 \tag{3.4.33}$$

$$\delta\beta \rightarrow -\frac{\partial M_{\theta\theta}}{\partial\theta} - M_{s\theta} (\sin\phi + \cos\phi \frac{dh}{ds}) - \frac{\partial}{\partial s} \{(r + h \cos\phi) M_{s\theta}\} + (r + h \cos\phi) Q_\theta = 0 \quad (3.4.34)$$

Si l'on se limite au cas des conditions homogènes, on obtient

$$\delta u \rightarrow \{r N_{ss} \delta u\}_{s_1}^{s_2} = 0 \quad \{(N_{s\theta} - \frac{M_{s\theta}}{R_\theta}) \delta u\}_{\theta_1}^{\theta_2} = 0 \quad (3.4.35)$$

$$\delta v \rightarrow \{(r + h \cos\phi) N_{s\theta} - \frac{h \cos\phi}{R_\theta} M_{s\theta}\} \delta v\}_{s_1}^{s_2} = 0 \quad \{N_{\theta\theta} \delta v\}_{\theta_1}^{\theta_2} = 0 \quad (3.4.36)$$

$$\delta w \rightarrow \{r (Q_s + N_{ss} \frac{dh}{ds}) \delta w\}_{s_1}^{s_2} = 0 \quad \{(Q_\theta + (N_{s\theta} - \frac{M_{s\theta}}{R_\theta}) \frac{dh}{ds}) \delta w\}_{\theta_1}^{\theta_2} = 0 \quad (3.4.37)$$

$$\delta\alpha \rightarrow \{r M_{ss} \delta\alpha\}_{s_1}^{s_2} = 0 \quad \{M_{s\theta} \delta\alpha\}_{\theta_1}^{\theta_2} = 0 \quad (3.4.38)$$

$$\delta\beta \rightarrow \{r M_{s\theta} \delta\beta\}_{s_1}^{s_2} = 0 \quad \{M_{\theta\theta} \delta\beta\}_{\theta_1}^{\theta_2} = 0 \quad (3.4.39)$$

Les conditions (3.4.35) nous sont déjà familières; quant aux conditions (3.4.37), elles s'interprètent par une généralisation immédiate des considérations sur les efforts dans les coques de MARGUERRE. Le seul terme insolite est  $\frac{h \cos\phi}{R_\theta} M_{s\theta}$ , dans (3.4.36). Montrons que ce terme rétablit la différence correcte entre les deux efforts  $N_{s\theta}^{(s)}$  et  $N_{s\theta}^{(\theta)}$ . En effet, la figure (3.22) montre que l'équation d'équilibre de rotation d'un petit élément autour de la normale à la coque s'écrit

$$N_{s\theta}^{(s)} (R_\theta + h) ds d\theta - N_{s\theta}^{(\theta)} (R_\theta + h) ds d\theta - M_{s\theta} ds d\theta = 0$$

d'où la relation

$$N_{s\theta}^{(s)} - N_{s\theta}^{(\theta)} = \frac{M_{s\theta}}{R_\theta + h}$$

Or les relations (3.4.45) et (3.4.46) montrent que

$$N_{s\theta}^{(\theta)} = N_{s\theta} - \frac{M_{s\theta}}{R_\theta}$$

$$N_{s\theta}^{(s)} = N_{s\theta} - \frac{h \cos \phi}{R_\theta (r+h \cos \phi)} M_{s\theta} = N_{s\theta} - \frac{h}{R_\theta (R_\theta + h)} M_{s\theta}$$

La différence est donc

$$\frac{M_{s\theta}}{R_\theta} \left(1 - \frac{h}{R_\theta + h}\right) = \frac{M_{s\theta}}{R_\theta} \frac{R_\theta}{R_\theta + h} = \frac{M_{s\theta}}{R_\theta + h}$$

ce qui est bien la bonne valeur.

Enfin, l'étude des équations constitutives est analogue à celle des coques profondes, et nous n'y reviendrons pas.

## 5. COQUES EPAISSES ET VOLUMES

Dans la théorie des coques exposée ci-dessus, on a fait l'hypothèse que l'épaisseur de la coque est faible vis-à-vis des rayons de courbure, et cela nous a permis d'adopter une expression simplifiée des déformations. L'erreur introduite est de l'ordre de  $\frac{t}{R}$ , où  $t$  est l'épaisseur de la coque, et  $R$  le plus petit rayon de courbure. Lorsque l'épaisseur est relativement importante, on doit donc abandonner la théorie ci-dessus et adopter une théorie plus raffinée. Selon l'ordre de grandeur de l'épaisseur, on pourra choisir, dans l'ordre :

(i) une théorie du second ordre, c'est-à-dire une théorie des coques d'épaisseur modérée utilisant les expressions (3.3.18). L'ordre de grandeur des erreurs introduites sera alors  $O\left(\left(\frac{t}{R}\right)^2\right)$ , ce qui permet de n'avoir qu'une erreur de 1% pour  $\frac{t}{R} = \frac{1}{10}$ .

(ii) une théorie des coques épaisses. On abandonne alors l'hypothèse de l'état plan de contrainte, et on décrit la déformation à l'aide des équations exactes (3.3.11). On choisit néanmoins une structure des déplacements dans le sens  $\zeta$ , souvent linéaire. Comme inconnues, on ne choisit plus les déplacements du feuillet moyen et les rotations, mais les déplacements sur les deux peaux.

(iii) un traitement de la coque en tant que volume. Toute hypothèse est alors bannie, et l'usage des coordonnées cylindriques s'impose, puisqu'il n'existe plus de direction préférentielle.

Les domaines d'application de ces diverses théories se recouvrent partiellement. Dans les applications numériques, elles sont essentiellement limitées par des problèmes de conditionnement. La limitation porte alors sur l'épaisseur minimum. Dans le cas des éléments finis de coques épaisses et des éléments de volume, le rapport entre l'épaisseur et la longueur de l'élément doit être limité à environ  $10^{-2}$  pour éviter la dégénérescence. Il est donc nécessaire d'utiliser un très grand nombre d'éléments si la coque est relativement mince. Par contre, avec les coques d'épaisseur modérée du premier ordre, nous n'avons jamais observé de dégénérescence pour des dimensions raisonnables. Des essais numériques ont par ailleurs montré que pour un rapport  $\frac{t}{R}$  de l'ordre de  $3 \cdot 10^{-2}$  à  $4 \cdot 10^{-2}$ , les coques épaisses et les coques d'épaisseur modérée du premier ordre donnent des résultats très comparables.

### 5.1. Coques épaisses

Comme nous l'avons dit, les coques épaisses se caractérisent par l'abandon de l'hypothèse de l'état plan de contrainte. Les déformations sont mesurées par les expressions exactes (3.3.11), mais on choisit une structure en  $\zeta$  des déplacements. La plus simple est la structure affine [D7]

$$\begin{aligned}
 u_s &= u_1 \left(1 - \frac{\zeta}{t}\right) + u_2 \frac{\zeta}{t} \\
 u_\theta &= v_1 \left(1 - \frac{\zeta}{t}\right) + v_2 \frac{\zeta}{t} \\
 u_\zeta &= w_1 \left(1 - \frac{\zeta}{t}\right) + w_2 \frac{\zeta}{t}
 \end{aligned}
 \tag{3.5.1}$$

où l'on a choisi une des peaux comme référence. En effet, puisque l'on exprime les déplacements en termes des déplacements des deux peaux, il n'y a aucune raison d'encore se référer au feuillet moyen. On remarquera que, contrairement au cas des coques minces ou d'épaisseur modérée, cette théorie donne accès au pincement ( $w_2 - w_1$ ). Les équations globales de ce type de coques ne sont généralement pas explicitées, car cette formulation ne peut pratiquement être mise en oeuvre que par voie numérique, du fait que tous les couplages apparaissent.

L'application de cette formulation suppose la continuité des pentes  $\frac{dr}{ds}$  sur les deux peaux. C'est là une de ses principales limitations. Aussi, nous croyons qu'il est plus simple d'utiliser une vraie formulation de volume, en coordonnées cylindriques, quitte à y introduire les hypothèses des coques épaisses dans un modèle par éléments finis. En effet, dans ce cas, il est possible d'utiliser la formulation paramétrique (hypo- ou iso-paramétrique) pour modéliser les coques à angles.

## 5.2. Volumes de révolution

Pour les volumes de révolution, on utilisera naturellement les coordonnées cylindriques. L'expression des déformations a déjà été dérivée à titre d'exemple ci-dessus (formules (3.2.49)). On trouve une littérature assez abondante concernant les applications des éléments finis aux volumes de révolution, spécialement dans le cas des sollicitations axisymétriques [D6, W1, R3, M4, M5, M6].

De la même façon que dans les coques, on ne peut atteindre l'axe de symétrie que moyennant certaines conditions de symétrie garantissant que l'énergie de déformation reste finie. Ce problème a été évoqué et résolu pour la première fois par BELYTSCHKO [B8, B9]. Cet auteur exigeait que les déformations soient finies. Comme nous l'avons vu, il suffit en fait qu'elles soient de carré sommable, mais les conclusions restent inchangées. Les seules déformations en cause sont

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\theta\theta} &= \frac{1}{r} \left( \frac{\partial u_{\theta}}{\partial \theta} + u_r \right) \\ \gamma_{r\theta} &= \frac{1}{r} \left( \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - u_{\theta} \right) + \frac{\partial u_{\theta}}{\partial r} \\ \gamma_{\theta z} &= \frac{\partial u_{\theta}}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} \end{aligned} \quad (3.5.2)$$

On obtient donc les conditions

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_{\theta}}{\partial \theta} + u_r &= 0 \quad (r^{1-\ell}) & \ell < 1 \\ \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - u_{\theta} &= 0 \quad (r^{1-\ell}) \\ \frac{\partial u_z}{\partial \theta} &= 0 \quad (r^{1-\ell}) \end{aligned} \quad (3.5.3)$$

Chacun de ces trois premiers membres doit donc être nul sur l'axe. Pour des déplacements de la forme

$$\begin{aligned} u_r &= u_{nm} \cos \left( n \theta + m \frac{\pi}{2} \right) \\ u_{\theta} &= v_{nm} \sin \left( n \theta + m \frac{\pi}{2} \right) \\ u_z &= w_{nm} \cos \left( n \theta + m \frac{\pi}{2} \right) \end{aligned} \quad (3.5.4)$$

on obtient les conditions

$$\begin{aligned}
 u_{nm} + n v_{nm} &= 0 \\
 -n u_{nm} - v_{nm} &= 0 \\
 -n w_{nm} &= 0
 \end{aligned}
 \tag{3.5.5}$$

Le déterminant de ce système est

$$\begin{vmatrix}
 1 & n & 0 \\
 -n & -1 & 0 \\
 0 & 0 & n
 \end{vmatrix}
 = n(n^2 - 1)
 \tag{3.5.6}$$

Il admet un zéro simple en  $n = 0$ , et un zéro double en  $n = 1$ . Dès lors, pour  $n > 1$ , les conditions sont

$$u_{nm} = v_{nm} = w_{nm} = 0 ;
 \tag{3.5.7}$$

pour  $n = 0$ ,

$$w_{nm} \text{ libre} , \quad u_{nm} = v_{nm} = 0
 \tag{3.5.8}$$

et pour  $n = 1$ ,

$$w_{nm} = 0 , \quad u_{nm} + v_{nm} = 0
 \tag{3.5.9}$$

### 5.3. Volumes incompressibles

On rencontre dans certaines applications des corps incompressibles ou presque. En constructions spatiales, c'est notamment le cas de la poudre des propulseurs à ergols solides. Il convient d'abord de noter que ces corps sont souvent très souples, ce qui peut justifier la nécessité d'une théorie non linéaire (grandes déformations). Mais même si l'on suppose que les déformations restent petites, on ne peut utiliser une formulation cinématiquement admissi-

ble avec  $\nu = 0,5$ , car il apparaît le facteur  $\frac{1}{1-2\nu}$  dans l'énergie de déformation :

$$W = G \left\{ \varepsilon_{ij} \varepsilon_{ij} + \frac{\nu}{1-2\nu} \varepsilon_{\ell\ell} \varepsilon_{ii} \right\}$$

On peut traiter le problème par deux voies différentes :

(i) On remplace la valeur  $\nu = 0,5$  par une valeur inférieure, mais voisine, par exemple  $\nu = 0,4995$ . Ce procédé peut être considéré comme une méthode de pénalisation [D8], car il consiste à ajouter à l'énergie correcte  $G \varepsilon_{ij} \varepsilon_{ij}$  le terme  $(\text{div } \vec{u})^2$  affecté du grand coefficient  $G \frac{\nu}{1-2\nu}$ . Mais une telle méthode ne donnera des résultats numériques convenables que si le modèle par éléments finis contient suffisamment de modes incompressibles, sans quoi l'énergie convergera vers zéro si  $\nu \rightarrow 0,5$  [D8,F6]. Or cette condition n'est pas nécessairement vérifiée dans les structures de révolution. Ainsi, par exemple, si l'on fixe tous les déplacements verticaux, les éléments finis polynomiaux ne contiennent aucun mode incompressible.

(ii) On peut aussi utiliser une formulation spéciale, due à HERRMANN [H4,D9,D10], où l'on introduit une variable supplémentaire, à savoir la pression. L'existence de la solution du problème discrétisé n'est pas toujours garantie, mais les conditions pour l'assurer sont à présent connues. En général, il n'y a pas de problème si l'on utilise des éléments de degré deux au moins [D11], si bien que cette méthode est plus sûre que la précédente, d'autant plus que l'inexistence de la solution se manifeste par la singularité de la matrice du système à résoudre.

## 6. RAIDISSEURS DE REVOLUTION

### 6.1. Equations générales

Les raidisseurs de révolution obéissent évidemment à

une théorie de poutres courbes. Il est commode de travailler dans un système d'axes inclinés par rapport aux axes canoniques  $e_r$  et  $e_z$ , de façon à obtenir le découplage des inerties. Notre système sera défini par les équations (fig.3.23)

$$\begin{aligned} r &= R + \xi \sin \phi + \eta \cos \phi \\ z &= Z - \xi \cos \phi + \eta \sin \phi \end{aligned} \quad (3.6.1)$$

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta, \quad z = z$$

où  $R$  et  $Z$  sont les coordonnées du centre de gravité de la section dans le plan méridien. La matrice jacobienne de ce système est

$$J = \frac{D(x,y,z)}{D(\xi,\theta,\eta)} = \begin{bmatrix} \sin \phi \cos \theta & -r \sin \theta & \cos \phi \cos \theta \\ \sin \phi \sin \theta & r \cos \theta & \cos \phi \sin \theta \\ -\cos \phi & 0 & \sin \phi \end{bmatrix} \quad (3.6.2)$$

On a

$$K_\xi = 1, \quad K_\theta = r, \quad K_\eta = 1 \quad (3.6.3)$$

et

$$B_\xi = 0, \quad B_\eta = 0, \quad B_\theta = \frac{1}{r} \begin{bmatrix} 0 & -\sin \phi & 0 \\ \sin \phi & 0 & \cos \phi \\ 0 & -\cos \phi & 0 \end{bmatrix} \quad (3.6.4)$$

On a donc

$$\epsilon_{\xi\xi} = \frac{\partial u_{\xi}}{\partial \xi}, \quad \epsilon_{\eta\eta} = \frac{\partial u_{\eta}}{\partial \eta},$$

$$\epsilon_{\theta\theta} = \frac{1}{r} \left\{ \frac{\partial u_{\theta}}{\partial \theta} + (u_{\xi} \sin \phi + u_{\eta} \cos \phi) \right\}$$

$$\gamma_{\xi\theta} = \frac{\partial u_{\theta}}{\partial \xi} + \frac{1}{r} \left( \frac{\partial u_{\xi}}{\partial \theta} - u_{\theta} \sin \phi \right),$$

$$\gamma_{\eta\theta} = \frac{\partial u_{\theta}}{\partial \eta} + \frac{1}{r} \left( \frac{\partial u_{\eta}}{\partial \theta} - u_{\theta} \cos \phi \right),$$

$$\gamma_{\xi\eta} = \frac{\partial u_{\xi}}{\partial \eta} + \frac{\partial u_{\eta}}{\partial \xi} \quad (3.6.5)$$

Une poutre se caractérise par les hypothèses  $\sigma_{\xi\xi} = 0$ ,  $\sigma_{\eta\eta} = 0$ ,  $\tau_{\xi\eta} = 0$ . Dans le principe de HELLINGER-REISSNER,

$$\int_V \left\{ \sigma_{ij} \frac{1}{2} (D_i u_j + D_j u_i) - \Phi(\sigma) - F_i u_i \right\} dV - \int_{\delta_2} \bar{t}_i u_i dS \quad \text{stat} \quad (3.6.6)$$

la variation des tensions conduit aux équations de compatibilité sous la forme des relations tension-déformations :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_{ij}} = \frac{1}{2} (D_i u_j + D_j u_i) \quad (3.6.7)$$

Dès lors, lorsqu'on annule a priori certaines tensions, on décharge le principe de ces relations. On peut donc les remplacer par certaines conditions, plus ou moins arbitraires. Il va de soi que la qualité de la solution en dépend directement. Un choix possible est celui de SAINT-VENANT, qui restitue les valeurs exactes

$$\varepsilon_{\xi\xi} = -\nu \varepsilon_{\theta\theta} \quad , \quad \varepsilon_{\eta\eta} = -\nu \varepsilon_{\theta\theta} \quad (3.6.8)$$

de façon à découvrir, par sa fameuse méthode 'semi-inverse', pour quels cas de charges la théorie des poutres est rigoureuse. C'est de ces relations que se déduisent d'ailleurs les déformations anticlastiques [F4,M7].

Notre point de vue est différent : il s'agit d'obtenir une théorie approchée donnant des résultats raisonnables. C'est pourquoi nous ferons simplement l'hypothèse de rigidité des sections :

$$\varepsilon_{\xi\xi} = 0 \quad , \quad \varepsilon_{\eta\eta} = 0 \quad , \quad \gamma_{\xi\eta} = 0 \quad (3.6.9)$$

On s'aperçoit aisément que la seule solution de ces trois relations consiste en un déplacement de la forme

$$\begin{aligned} u_{\xi} &= u + \psi (\eta - \eta_T) \\ u_{\eta} &= v - \psi (\xi - \xi_T) \end{aligned} \quad (3.6.10)$$

Par ailleurs, nous donnerons à  $u_{\theta}$  la forme suivante :

$$u_{\theta} = w + \alpha \xi - \beta \eta + W \quad (3.6.11)$$

où  $W$  représente le gauchissement de la section. Cela étant, si l'on note par un prime la dérivation par rapport à  $\theta$ , on peut écrire

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\theta\theta} &= \frac{1}{r} \{w' + \xi\alpha' - \eta\beta' + W' \\ &\quad + \sin \phi \{u + \psi (\eta - \eta_T)\}' + \cos \phi \{v - \psi (\xi - \xi_T)\}'\} \\ \gamma_{\xi\theta} &= \alpha + \frac{\partial W}{\partial \xi} + \frac{1}{r} \{u' + \psi' (\eta - \eta_T) \\ &\quad - \sin \phi (w + \alpha\xi - \beta\eta + W)\} \end{aligned} \quad (3.6.12)$$

$$\begin{aligned} \gamma_{\eta\theta} = & -\beta + \frac{\partial W}{\partial \eta} + \frac{1}{r} \{v' - \psi' (\xi - \xi_T) \\ & - \cos \phi (w + \alpha\xi - \beta\eta + W)\} \end{aligned}$$

où  $\xi_T$  et  $\eta_T$  sont les coordonnées du centre de torsion.

Une simplification importante peut être obtenue grâce à l'artifice suivant, proposé par HUCK [H3] dans le cas  $W = 0$  : dans l'expression de  $\gamma_{\xi\theta}$ , on ajoute et on retranche  $\frac{\alpha\eta \cos \phi}{r}$  :

$$\begin{aligned} \gamma_{\xi\theta} = & \alpha \left\{ 1 - \frac{\xi \sin \phi + \eta \cos \phi}{r} \right\}' \\ & + \frac{1}{r} \{u' - w \sin \phi + \eta (\beta \sin \phi + \alpha \cos \phi) + \psi' (\eta - \eta_T)\} \\ & + \frac{\partial W}{\partial \xi} - \frac{W \sin \phi}{r} \end{aligned}$$

Dans le crochet du premier terme, on reconnaît l'expression de  $\frac{R}{r}$ , ce qui permet d'écrire

$$\begin{aligned} \gamma_{\xi\theta} = & \frac{R}{r} \left\{ \alpha + \frac{u' - w \sin \phi}{R} + \frac{\eta}{R} (\beta \sin \phi + \alpha \cos \phi) \right. \\ & \left. + \frac{1}{R} \psi' (\eta - \eta_T) \right\} + \frac{\partial W}{\partial \xi} - \frac{W \sin \phi}{r} \end{aligned}$$

Enfin, si l'on remarque que

$$\frac{\partial W}{\partial \xi} - \frac{W \sin \phi}{r} = r \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{W}{r} \right)$$

on obtient finalement

$$\begin{aligned} \gamma_{\xi\theta} = & \frac{R}{r} \left\{ \alpha + \frac{u' - w \sin \phi}{R} + \frac{\eta}{R} (\beta \sin \phi + \alpha \cos \phi) \right. \\ & \left. + \frac{1}{R} \psi' (\eta - \eta_T) + \frac{r^2}{R} \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{W}{r} \right) \right\} \end{aligned} \quad (3.6.13)$$

D'une manière analogue, on peut obtenir

$$\begin{aligned} \gamma_{\eta\theta} = & \frac{R}{r} \left\{ -\beta + \frac{v' - w \cos \phi}{R} - \frac{\xi}{R} (\beta \sin \phi + \alpha \cos \phi) \right. \\ & \left. - \frac{1}{R} \psi' (\xi - \xi_T) + \frac{r^2}{R} \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{W}{r} \right) \right\} \end{aligned} \quad (3.6.14)$$

A ce stade, on fait l'hypothèse que les dimensions de la section sont très petites devant le rayon, ce qui permet de :

(i) remplacer les multiplicateurs  $\frac{1}{r}$  et  $\frac{R}{r}$  de  $\epsilon_{\theta\theta}$ ,  $\gamma_{\xi\theta}$  et  $\gamma_{\eta\theta}$  par  $\frac{1}{R}$  et 1. Cette approximation ne détruit pas la représentation des modes rigides, car elle ne fait qu'affecter chaque déformation d'un coefficient.

(ii) remplacer  $\frac{r^2}{R} \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{W}{r} \right)$  par  $\frac{R^2}{R} \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{W}{R} \right) = \frac{\partial W}{\partial \xi}$  et de même pour  $\frac{r^2}{R} \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{W}{r} \right)$ . Cette transformation est sans effet sur les modes rigides, car dans ces modes, les gauchissements sont nuls.

(iii) remplacer le jacobien  $r$  par  $R$  dans toutes les intégrales.

Les déformations se réduisent alors à

$$\begin{aligned} \epsilon_{\theta\theta} &= \frac{1}{R} [(w' + u \sin \phi + v \cos \phi) + \xi \alpha' + \eta \beta' \\ &\quad + \psi \{(\eta - \eta_T) \sin \phi - (\xi - \xi_T) \cos \phi\} + W'] \\ \gamma_{\xi\theta} &= \left[ \left\{ \alpha + \frac{u' - w \sin \phi}{R} \right\} + \eta \left\{ \frac{\alpha \cos \phi + \beta \sin \phi}{R} \right\} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\psi'}{R} (\eta - \eta_T) + \frac{\partial W}{\partial \xi} \right] \\ \gamma_{\eta\theta} &= \left[ \left\{ -\beta + \frac{v' - w \cos \phi}{R} \right\} - \xi \left\{ \frac{\beta \sin \phi + \alpha \cos \phi}{R} \right\} \right. \\ &\quad \left. - \frac{\psi'}{R} (\xi - \xi_T) + \frac{\partial W}{\partial \eta} \right] \end{aligned} \quad (3.6.15)$$

Dans la théorie des poutres rectilignes, on étudie généralement les gauchissements pour les sollicitations simples : flexion simple selon les deux axes et torsion uniforme. La condition de découplage flexion-torsion permet de déterminer le centre de torsion. Cela étant, on fait d'habitude les hypothèses suivantes :

(i) Les gauchissements de flexion ont pour seul effet marqué une diminution de la raideur en cisaillement, dont on tient compte par des sections réduites. Leur effet sur les tensions d'extension est négligeable. Les sections réduites sont indépendantes de la sollicitation.

(ii) Le gauchissement de torsion conserve sa forme, quelle que soit la sollicitation. Il est nécessaire, au moins pour les sections minces et ouvertes, de tenir compte de son effet en torsion non uniforme où, par l'intermédiaire des tensions longitudinales, il contribue de manière importante à la raideur.

Il convient donc d'étudier les gauchissements. Mais auparavant, il s'agit de distinguer la flexion de la torsion. Pour ce faire, il est commode de donner aux glissements  $\gamma_{\xi\theta}$  et  $\gamma_{\eta\theta}$  les formes équivalentes

$$\begin{aligned} \gamma_{\xi\theta} = & \left\{ \alpha + \frac{u' - w \sin \phi}{R} + \eta_T \frac{\alpha \cos \phi + \beta \sin \phi}{R} \right\} \\ & + \left\{ \frac{\alpha \cos \phi + \beta \sin \phi + \psi'}{R} \right\} (\eta - \eta_T) + \frac{\partial W}{\partial \xi} \end{aligned} \quad (3.6.16)$$

$$\begin{aligned} \gamma_{\eta\theta} = & \left\{ -\beta + \frac{v' - w \cos \phi}{R} - \xi_T \frac{\alpha \cos \phi + \beta \sin \phi}{R} \right\} \\ & \left\{ \frac{\alpha \cos \phi + \beta \sin \phi + \psi'}{R} \right\} (\xi - \xi_T) + \frac{\partial W}{\partial \eta} \end{aligned}$$

## 6.2. Les gauchissements de flexion

Nous définirons la flexion simple par les deux conditions suivantes :

(i) Les tensions azimutales sont linéaires en  $\xi$  et  $\eta$

(ii) La torsion  $\frac{\alpha \cos \phi + \beta \sin \phi + \psi'}{R}$  est nulle.

L'examen des expressions (3.6.16) fait alors ressortir l'existence d'un potentiel  $\Phi$  tel que

$$\gamma_{\xi\theta} = \frac{\partial \Phi}{\partial \xi}, \quad \gamma_{\eta\theta} = \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} \quad (3.6.17)$$

Ce potentiel est défini à une constante additive près par la relation

$$\begin{aligned} \Phi = W + \left\{ \alpha + \frac{u' - w \sin \phi}{R} + \eta_T \frac{\alpha \cos \phi + \beta \sin \phi}{R} \right\} \\ \xi + \left\{ -\beta + \frac{v' - w \cos \phi}{R} - \xi_T \frac{\alpha \cos \phi + \beta \sin \phi}{R} \right\} \eta \end{aligned}$$

Pour alléger les écritures, nous noterons dorénavant, pour les deux expressions entre accolades ci-dessus

$$\{\alpha + \dots\} \quad \text{et} \quad \{-\beta + \dots\}$$

On a évidemment

$$W = \Phi - \{\alpha + \dots\} \xi - \{-\beta + \dots\} \eta \quad (3.6.18)$$

Les tensions  $\sigma_{\theta\theta}$  sont, par définition, de la forme

$$\sigma_{\theta\theta} = a \xi + b \eta \quad (3.6.19)$$

On peut donc utiliser la forme dégénérée suivante du principe de HELLINGER-REISSNER :

$$\delta \int_{\theta_1}^{\theta_2} \left[ \int_{\Omega} \left\{ \sigma_{\theta\theta} \varepsilon_{\theta\theta} + \frac{G}{2} \left( \left( \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \right)^2 + \left( \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} \right)^2 \right) - \frac{\sigma_{\theta\theta}^2}{2E} \right\} d\Omega \right] R d\theta = 0 \quad (3.6.20)$$

Varions  $\Phi$  : de l'expression (3.6.18), on déduit  $\delta W = \delta \Phi$ , ce qui, tenant compte de (3.6.15), conduit à  $\delta \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{\delta \Phi'}{R}$ .

Il vient donc, après une intégration par parties,

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2} \left[ \int_{\Omega} \{ (-a' \xi - b' \eta) \delta \Phi + \delta \frac{GR}{2} \left( \left( \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \right)^2 + \left( \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} \right)^2 \right) \} d\Omega \right] d\theta = 0$$

soit, pour un effort tranchant constant,

$$\delta \left[ \int_{\Omega} \frac{GR}{2} \left\{ \left( \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \right)^2 + \left( \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} \right)^2 \right\} d\Omega - \int (a' \xi + b' \eta) \Phi d\Omega \right] = 0 \quad (3.6.21)$$

C'est le principe régissant le potentiel  $\Phi$ . La solution peut être obtenue par superposition :

$$\Phi = \frac{a'}{GR} \Phi_1 + \frac{b'}{GR} \Phi_2 \quad (3.6.22)$$

où  $\Phi_1$  et  $\Phi_2$  vérifient, quelle que soit la variation  $\delta\Phi$ , les équations

$$\int_{\Omega} \left( \frac{\partial \Phi_1}{\partial \xi} \frac{\delta \partial \Phi}{\partial \xi} + \frac{\partial \Phi_1}{\partial \eta} \frac{\delta \partial \Phi}{\partial \eta} \right) d\Omega = \int_{\Omega} \xi \delta \Phi d\Omega \quad (3.6.23)$$

$$\int_{\Omega} \left( \frac{\partial \Phi_2}{\partial \xi} \frac{\delta \partial \Phi}{\partial \xi} + \frac{\partial \Phi_2}{\partial \eta} \frac{\delta \partial \Phi}{\partial \eta} \right) d\Omega = \int_{\Omega} \eta \delta \Phi d\Omega$$

On en déduit les équations aux dérivées partielles

$$\frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial \eta^2} + \xi = 0 \quad (3.6.24)$$

$$\frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial \eta^2} + \eta = 0$$

et les conditions aux limites sur le contour  $\Gamma$  de la section :

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial n} = 0 \quad , \quad \frac{\partial \Phi_2}{\partial n} = 0 \quad (3.6.25)$$

D'autre part, un choix judicieux des fonctions  $\delta\Phi$  permet d'obtenir un certain nombre de relations intéressantes :

- en posant  $\delta\Phi = \xi$  :

$$\int_{\Omega} \frac{\partial \Phi_1}{\partial \xi} d\Omega = \int_{\Omega} \xi^2 d\Omega = I_1 \quad (3.6.26)$$

$$\int_{\Omega} \frac{\partial \Phi_2}{\partial \xi} d\Omega = \int_{\Omega} \xi \eta d\Omega = 0 \quad (3.6.27)$$

- en posant  $\delta\Phi = \eta$  :

$$\int_{\Omega} \frac{\partial \Phi_1}{\partial \eta} d\Omega = \int_{\Omega} \xi \eta d\Omega = 0 \quad (3.6.28)$$

$$\int_{\Omega} \frac{\partial \Phi_2}{\partial \eta} d\Omega = \int_{\Omega} \eta^2 d\Omega = I_2 \quad (3.6.29)$$

- en posant  $\delta\Phi = \Phi_1$  et  $\delta\Phi = \Phi_2$  :

$$\int_{\Omega} \left\{ \left( \frac{\partial \Phi_1}{\partial \xi} \right)^2 + \left( \frac{\partial \Phi_1}{\partial \eta} \right)^2 \right\} d\Omega = \int_{\Omega} \xi \Phi_1 d\Omega \quad (3.6.30)$$

$$\int_{\Omega} \left( \frac{\partial \Phi_1}{\partial \xi} \frac{\partial \Phi_2}{\partial \xi} + \frac{\partial \Phi_1}{\partial \eta} \frac{\partial \Phi_2}{\partial \eta} \right) d\Omega = \int_{\Omega} \xi \Phi_2 d\Omega = \int_{\Omega} \eta \Phi_1 d\Omega \quad (3.6.31)$$

$$\int_{\Omega} \left\{ \left( \frac{\partial \Phi_2}{\partial \xi} \right)^2 + \left( \frac{\partial \Phi_2}{\partial \eta} \right)^2 \right\} d\Omega = \int_{\Omega} \eta \Phi_2 d\Omega \quad (3.6.32)$$

- pour tout gauchissement vrai, c'est-à-dire pour toute fonction  $g$  vérifiant  $\int_{\Omega} g d\Omega = 0$ ,  $\int_{\Omega} g \xi d\Omega = 0$ ,  $\int_{\Omega} g \eta d\Omega = 0$ ,

$$\int_{\Omega} \left( \frac{\partial \Phi_1}{\partial \xi} \frac{\partial g}{\partial \xi} + \frac{\partial \Phi_1}{\partial \eta} \frac{\partial g}{\partial \eta} \right) d\Omega = \int_{\Omega} \xi g d\Omega = 0 \quad (3.6.33)$$

$$\int_{\Omega} \left( \frac{\partial \Phi_2}{\partial \xi} \frac{\partial g}{\partial \xi} + \frac{\partial \Phi_2}{\partial \eta} \frac{\partial g}{\partial \eta} \right) d\Omega = \int_{\Omega} \eta g d\Omega = 0 \quad (3.6.34)$$

On notera enfin que si la section possède un axe de symétrie, on a nécessairement

$$\int_{\Omega} \left( \frac{\partial \Phi_1}{\partial \xi} \frac{\partial \Phi_2}{\partial \xi} + \frac{\partial \Phi_1}{\partial \eta} \frac{\partial \Phi_2}{\partial \eta} \right) d\Omega = \int_{\Omega} \xi \Phi_2 d\Omega = \int_{\Omega} \eta \Phi_1 d\Omega = 0$$

En effet, supposons pour fixer les idées que l'axe de symétrie soit l'axe des  $\eta$ . On peut alors décomposer  $\Phi_1$  et  $\Phi_2$  en parties symétrique et antisymétrique, soit

$$\Phi_1 = \Phi_1^s + \Phi_1^a, \quad \Phi_2 = \Phi_2^s + \Phi_2^a$$

avec

$$\Phi_i^s(\xi, \eta) = \frac{1}{2} \{ \Phi_i(\xi, \eta) + \Phi_i(-\xi, \eta) \}$$

$$(i = 1, 2)$$

$$\Phi_i^a(\xi, \eta) = \frac{1}{2} \{ \Phi_i(\xi, \eta) - \Phi_i(-\xi, \eta) \}$$

On en déduit aisément que

$$\frac{\partial \Phi_i^s}{\partial \xi} \Big|_{(\xi, \eta)} = - \frac{\partial \Phi_i^s}{\partial \xi} \Big|_{(-\xi, \eta)} \quad \frac{\partial \Phi_i^s}{\partial \eta} \Big|_{(\xi, \eta)} = \frac{\partial \Phi_i^s}{\partial \eta} \Big|_{(\xi, \eta)}$$

$$\frac{\partial \Phi_i^a}{\partial \xi} \Big|_{(\xi, \eta)} = \frac{\partial \Phi_i^a}{\partial \xi} \Big|_{(-\xi, \eta)} \quad \frac{\partial \Phi_i^a}{\partial \eta} \Big|_{(\xi, \eta)} = - \frac{\partial \Phi_i^a}{\partial \eta} \Big|_{(\xi, \eta)}$$

d'où, pour  $i, j$  valant 1 ou 2,

$$\int_{\Omega} \left( \frac{\partial \Phi_i^s}{\partial \xi} \frac{\partial \Phi_j^a}{\partial \xi} + \frac{\partial \Phi_i^s}{\partial \eta} \frac{\partial \Phi_j^a}{\partial \eta} \right) d\Omega = 0$$

Dès lors, si l'on note que

$$\int_{\Omega} \Phi_1^s \xi \, d\Omega = 0 \qquad \int_{\Omega} \Phi_2^a \eta \, d\Omega = 0$$

on déduit aisément de (3.6.23) que

$$\int_{\Omega} \left\{ \left( \frac{\partial \Phi_1^s}{\partial \xi} \right)^2 + \left( \frac{\partial \Phi_1^s}{\partial \eta} \right)^2 \right\} d\Omega = 0 \rightarrow \Phi_1^s = \text{cte}$$

$$\int_{\Omega} \left\{ \left( \frac{\partial \Phi_2^a}{\partial \xi} \right)^2 + \left( \frac{\partial \Phi_2^a}{\partial \eta} \right)^2 \right\} d\Omega = 0 \rightarrow \Phi_2^a = \text{cte}$$

Par conséquent,

$$\int_{\Omega} \left( \frac{\partial \Phi_1}{\partial \xi} \frac{\partial \Phi_2}{\partial \xi} + \frac{\partial \Phi_1}{\partial \eta} \frac{\partial \Phi_2}{\partial \eta} \right) d\Omega = \int_{\Omega} \left( \frac{\partial \Phi_1^a}{\partial \xi} \frac{\partial \Phi_2^s}{\partial \xi} + \frac{\partial \Phi_1^a}{\partial \eta} \frac{\partial \Phi_2^s}{\partial \eta} \right) d\Omega = 0$$

ce qui démontre la thèse.

Calculons à présent l'énergie du cisaillement de flexion.

On a

$$\begin{aligned} 2U &= \int_{\Omega} GR \left\{ \left( \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \right)^2 + \left( \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} \right)^2 \right\} d\Omega \\ &= \frac{a'^2}{GR} \int_{\Omega} \left\{ \left( \frac{\partial \Phi_1}{\partial \xi} \right)^2 + \left( \frac{\partial \Phi_1}{\partial \eta} \right)^2 \right\} d\Omega \\ &\quad + \frac{2 a' b'}{GR} \int_{\Omega} \left\{ \frac{\partial \Phi_1}{\partial \xi} \frac{\partial \Phi_2}{\partial \xi} + \frac{\partial \Phi_1}{\partial \eta} \frac{\partial \Phi_2}{\partial \eta} \right\} d\Omega \\ &\quad + \frac{b'^2}{GR} \int_{\Omega} \left\{ \left( \frac{\partial \Phi_2}{\partial \xi} \right)^2 + \left( \frac{\partial \Phi_2}{\partial \eta} \right)^2 \right\} d\Omega \end{aligned}$$

Posant

$$S_{11} = \frac{I_1^2}{\int_{\Omega} \left\{ \left( \frac{\partial \Phi_1}{\partial \xi} \right)^2 + \left( \frac{\partial \Phi_1}{\partial \eta} \right)^2 \right\} d\Omega}$$

$$S_{12} = \frac{I_1 I_2}{\int_{\Omega} \left\{ \frac{\partial \Phi_1}{\partial \xi} \frac{\partial \Phi_2}{\partial \xi} + \frac{\partial \Phi_1}{\partial \eta} \frac{\partial \Phi_2}{\partial \eta} \right\} d \Omega} \quad (3.6.35)$$

$$S_{22} = \frac{I_2^2}{\int_{\Omega} \left\{ \left( \frac{\partial \Phi_2}{\partial \xi} \right)^2 + \left( \frac{\partial \Phi_2}{\partial \eta} \right)^2 \right\} d \Omega}$$

et notant que les moments sont donnés par

$$M_1 = I_1 a \quad , \quad M_2 = I_2 b \quad (3.6.36)$$

on obtient l'expression de l'énergie en termes des efforts tranchants :

$$2 U = \frac{1}{R} \left\{ \frac{M_1'^2}{GS_{11}} + 2 \frac{M_1' M_2'}{GS_{12}} + \frac{M_2'^2}{GS_{22}} \right\} \quad (3.6.37)$$

Pour exprimer l'énergie en termes des déformations, il convient de séparer le gauchissement par  $W$  des rotations dans l'expression de  $\phi$  : on a

$$\{\alpha + \dots\} = \frac{1}{I_1} \int_{\Omega} \Phi \xi d \Omega = \frac{a'}{GRI_1} \int_{\Omega} \Phi_1 \xi d \Omega + \frac{b'}{GRI_2} \int_{\Omega} \Phi_2 \xi d \Omega$$

et, en tenant compte des relations (3.6.30), (3.6.31), (3.6.35) et (3.6.36),

$$\{\alpha + \dots\} = \frac{M_1'}{GRS_{11}} + \frac{M_2'}{GRS_{12}} \quad (3.6.38)$$

On obtient d'une manière analogue

$$\{-\beta + \dots\} = \frac{M_1'}{GRS_{12}} + \frac{M_2'}{GRS_{22}} \quad (3.6.39)$$

Ces deux relations s'inversent en

$$M'_1 = \text{GRA}_{11} \{\alpha + \dots\} + \text{GRA}_{12} \{-\beta + \dots\} \quad (3.6.40)$$

$$M'_2 = \text{GRA}_{12} \{\alpha + \dots\} + \text{GRA}_{22} \{-\beta + \dots\}$$

où

$$A_{11} = \frac{1/s_{22}}{\frac{1}{s_{11}s_{22}} - \frac{1}{s_{12}^2}} \quad A_{22} = \frac{1/s_{11}}{\frac{1}{s_{11}s_{22}} - \frac{1}{s_{12}^2}}$$

$$A_{12} = - \frac{1/s_{12}}{\frac{1}{s_{11}s_{22}} - \frac{1}{s_{12}^2}} \quad (3.6.41)$$

sont les sections réduites de cisaillement. Dans le cas général, il existe donc un terme de couplage  $A_{12}$ . Ce terme disparaît si la section possède un axe de symétrie. L'énergie de déformation s'écrit donc finalement

$$2 U = R [ \text{GA}_{11} \{\alpha + \dots\}^2 + 2 \text{GA}_{12} \{\alpha + \dots\} \{-\beta + \dots\} + \text{GA}_{22} \{-\beta + \dots\}^2 ] \quad (3.6.42)$$

### 6.3. Le gauchissement de torsion

Par torsion uniforme, nous entendons l'état fictif où

- (i) Les tensions normales sont posées nulles dans le principe de HELLINGER-REISSNER. Ce faisant, on libère les gauchissements.
- (ii) Les termes constants des glissements sont nuls.
- (iii) La quantité  $\theta = \frac{\alpha \cos \phi + \beta \sin \phi + \psi'}{R}$  est constante.

L'énergie de déformation se réduit alors à

$$2 U = \int_{\Omega} GR \left[ \left\{ \frac{\partial W}{\partial \xi} + \theta (\eta - \eta_T) \right\}^2 + \left\{ \frac{\partial W}{\partial \eta} - \theta (\xi - \xi_T) \right\}^2 \right] d \Omega \text{ stat} \quad (3.6.43)$$

Le gauchissement de torsion  $g_T$  est par définition la solution du problème (3.6.43) pour  $\theta = 1$ . Il vérifie donc l'équation suivante :

$$\int_{\Omega} \left\{ \frac{\partial g_T}{\partial \xi} \frac{\partial \delta W}{\partial \xi} + \frac{\partial g_T}{\partial \eta} \frac{\partial \delta W}{\partial \eta} + (\eta - \eta_T) \frac{\partial \delta W}{\partial \xi} - (\xi - \xi_T) \frac{\partial \delta W}{\partial \eta} \right\} d \Omega = 0 \quad (3.6.44)$$

quelle que soit la fonction  $\delta W$ . On en déduit l'équation aux dérivées partielles régissant le gauchissement :

$$\frac{\partial^2 g_T}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 g_T}{\partial \eta^2} = 0 \quad (3.6.45)$$

qui s'assortit de la condition de contour

$$\frac{\partial g_T}{\partial n} + (\eta - \eta_T) n_{\xi} - (\xi - \xi_T) n_{\eta} = 0 \quad (3.6.46)$$

Notant que sur le contour, la normale et la tangente orientée de façon à parcourir le contour en laissant l'aire à sa gauche sont liées par les relations

$$n_{\xi} = t_{\eta} \quad n_{\eta} = -t_{\xi}$$

on peut écrire (3.6.46) sous la forme équivalente

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_T}{\partial n} + (\eta - \eta_T) t_{\eta} + (\xi - \xi_T) t_{\xi} \\ = \frac{\partial g_T}{\partial n} + \frac{1}{2} \frac{d}{ds} \{ (\eta - \eta_T)^2 + (\xi - \xi_T)^2 \} = 0 \end{aligned} \quad (3.6.46.a)$$

Si l'on appelle  $g_0$  la solution du problème (3.6.44) dans le cas où l'on pose  $\xi_T = 0$ ,  $\eta_T = 0$ , on a visiblement

$$g_o = g_T - \eta_T \xi + \xi_T \eta$$

soit

$$g_T = g_o + \eta_T \xi - \xi_T \eta \quad (3.6.47)$$

En d'autres termes, un déplacement du centre de torsion a pour seul effet d'ajouter une fonction linéaire au gauchissement. La recherche du gauchissement de torsion se fait donc de la manière suivante :

a) on recherche  $g_o$ . Ce gauchissement est défini à une constante près, que l'on fixe en imposant que

$$\int_{\Omega} g_o \, d\Omega = 0 \quad (3.6.48)$$

b)  $g_T$  est alors défini par les conditions de gauchissement vrai. Ces conditions assurent visiblement le découplage de la flexion et de la torsion au niveau de l'énergie d'extension, mais aussi au niveau de l'énergie de cisaillement, en vertu des relations (3.6.33) et (3.6.34). Elles fixent le centre de torsion :

$$0 = \int_{\Omega} g_T \xi \, d\Omega = \int_{\Omega} g_o \xi \, d\Omega + \eta_T I_1 \rightarrow \eta_T = -\frac{1}{I_1} \int_{\Omega} g_o \xi \, d\Omega \quad (3.6.49)$$

$$0 = \int_{\Omega} g_T \eta \, d\Omega = \int_{\Omega} g_o \eta \, d\Omega - \xi_T I_1 \rightarrow \xi_T = \frac{1}{I_2} \int_{\Omega} g_o \eta \, d\Omega$$

A ce sujet, il convient de faire la remarque suivante : l'équation (3.6.44) entraîne

$$0 = \int_{\Omega} \left( \frac{\partial g_T}{\partial \xi} \frac{\partial \Phi_1}{\partial \xi} + \frac{\partial g_T}{\partial \eta} \frac{\partial \Phi_1}{\partial \eta} \right) d\Omega = \int_{\Omega} (\xi - \xi_T) \frac{\partial \Phi_1}{\partial \eta} d\Omega - \int_{\Omega} (\eta - \eta_T) \frac{\partial \Phi_1}{\partial \xi} d\Omega$$

$$\begin{aligned} \delta &= \int_{\Omega} \left( \frac{\partial g_T}{\partial \xi} \frac{\partial \Phi_2}{\partial \xi} + \frac{\partial g_T}{\partial \eta} \frac{\partial \Phi_2}{\partial \eta} \right) d\Omega \\ &= \int_{\Omega} \left\{ (\xi - \xi_T) \frac{\partial \Phi_2}{\partial \eta} - (\eta - \eta_T) \frac{\partial \Phi_1}{\partial \xi} \right\} d\Omega \end{aligned}$$

ce qui, en vertu des relations (3.6.26) à (3.6.29), entraîne

$$\eta_T = \frac{1}{I_1} \left\{ \int_{\Omega} \left( \eta \frac{\partial \Phi_1}{\partial \xi} - \xi \frac{\partial \Phi_1}{\partial \eta} \right) d\Omega \right\} \quad (3.6.50)$$

$$\xi_T = - \frac{1}{I_2} \left\{ \int_{\Omega} \left( \eta \frac{\partial \Phi_2}{\partial \xi} - \xi \frac{\partial \Phi_2}{\partial \eta} \right) d\Omega \right\}$$

Ces relations expriment l'équivalence du centre de torsion et du centre de cisaillement.

Passons au calcul de l'énergie de torsion. On notera d'abord qu'en vertu de (3.6.44),

$$\int_{\Omega} \left\{ \left( \frac{\partial g_T}{\partial \xi} \right)^2 + \left( \frac{\partial g_T}{\partial \eta} \right)^2 \right\} d\Omega = - \int_{\Omega} \left\{ (\eta - \eta_T) \frac{\partial g_T}{\partial \xi} - (\xi - \xi_T) \frac{\partial g_T}{\partial \eta} \right\} d\Omega \quad (3.6.51)$$

Posant alors

$$I_T = \int_{\Omega} \left\{ (\eta - \eta_T)^2 + (\xi - \xi_T)^2 \right\} d\Omega \quad (3.6.52)$$

On obtient

$$\begin{aligned} 2U &= \theta^2 R \int_{\Omega} G \left[ \left\{ \frac{\partial g_T}{\partial \xi} + (\eta - \eta_T) \right\}^2 + \left\{ \frac{\partial g_T}{\partial \eta} - (\xi - \xi_T) \right\}^2 \right] d\Omega \\ &= GRJ \theta^2 \quad (3.6.53) \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned}
 J &= I_T + \int_{\Omega} \left\{ (\eta - \eta_T) \frac{\partial g_T}{\partial \xi} - (\xi - \xi_T) \frac{\partial g_T}{\partial \eta} \right\} d\Omega \\
 &\quad + \int_{\Omega} \left\{ \left( \frac{\partial g_T}{\partial \xi} \right)^2 + \left( \frac{\partial g_T}{\partial \eta} \right)^2 \right\} d\Omega \\
 &= I_T - \int_{\Omega} \left\{ \left( \frac{\partial g_T}{\partial \xi} \right)^2 + \left( \frac{\partial g_T}{\partial \eta} \right)^2 \right\} d\Omega \qquad (3.6.54)
 \end{aligned}$$

Le terme  $I_T$  représente la raideur calculée à la COULOMB. La raideur actuelle, dite de SAINT-VENANT, est toujours plus faible.

#### 6.4. Remarque générale sur les gauchissements

Si l'on rapproche la théorie ci-dessus d'une théorie équivalente pour les poutres rectilignes, on remarque que les équations des gauchissements sont identiques. Ainsi donc, moyennant les approximations que nous avons consenties dans le calcul des déformations, c'est-à-dire si les dimensions transversales de la poutre sont faibles, les sections réduites, la raideur de torsion de SAINT-VENANT et le centre de torsion restent ceux des poutres rectilignes de même section. Ce fait avait déjà été utilisé par certains auteurs [A5], mais n'avait pas encore, du moins à notre connaissance, reçu de démonstration.

En particulier, les diverses méthodes permettant de déterminer les gauchissements de manière approchée restent valables. On trouvera par exemple dans [M7], [D12], [F5] un certain nombre de telles méthodes.

### 6.5. Sollicitations quelconques

Comme nous l'avons signalé ci-dessus, nous ne tiendrons compte, dans le calcul des efforts longitudinaux, que du gauchissement de torsion. De plus, nous supposons que ce gauchissement ne change pas de forme, ce qui revient à écrire

$$u_{\theta} = w + \alpha \xi - \beta \eta + k g_T \quad (3.6.55)$$

L'énergie d'extension du gauchissement sera donc

$$\frac{E}{R} k'^2 K$$

avec

$$K = \int_{\Omega} g_T^2 d\Omega$$

et n'est pas couplée aux termes de flexion. L'énergie de déformation d'une portion  $[\theta_1, \theta_2]$  de la poutre s'écrit alors, tous calculs faits :

$$\begin{aligned} 2 U = & \int_{\theta_1}^{\theta_2} \left[ \frac{E\Omega}{R^2} \{w' + u \sin \phi + v \cos \phi - \psi \eta_T \sin \phi + \psi \xi_T \cos \phi\}^2 \right. \\ & + \frac{EK}{R^2} k'^2 + \frac{EI_1}{R^2} \{\alpha' + \psi \cos \phi\}^2 + \frac{EI_2}{R^2} \{\beta' - \psi \sin \phi\}^2 \\ & + GA_{11} \left\{ \alpha + \frac{u' - w \sin \phi}{R} + \eta_T \frac{\alpha \cos \phi + \beta \sin \phi}{R} \right\}^2 \\ & + GA_{12} \left\{ \alpha + \frac{u' - w \sin \phi}{R} + \eta_T \frac{\alpha \cos \phi + \beta \sin \phi}{R} \right\} \\ & \quad \left\{ -\beta + \frac{v' - w \cos \phi}{R} - \xi_T \frac{\beta \sin \phi + \alpha \cos \phi}{R} \right\} \\ & + GA_{22} \left\{ -\beta + \frac{v' - w \cos \phi}{R} - \xi_T \frac{\beta \sin \phi + \alpha \cos \phi}{R} \right\}^2 \\ & + J \left\{ \frac{\alpha \cos \phi + \beta \sin \phi + \psi'}{R} \right\}^2 \\ & + (I_T - J) \left. \frac{\alpha \cos \phi + \beta \sin \phi + \psi'}{R} - k \right\}^2 \Big] R d\theta \end{aligned}$$

(3.6.56)

### 6.6. L'approximation de WAGNER

Lorsque la raideur de torsion de COULOMB est beaucoup plus grande que celle de SAINT-VENANT :

$$I_T \gg J \quad (3.6.57)$$

le dernier terme de (3.6.56) est affecté d'un coefficient énorme par rapport au précédent. On ne fera donc qu'une faible erreur en posant

$$k = \frac{\alpha \cos \phi + \beta \sin \phi + \psi'}{R} \quad (3.6.58)$$

ce qui permet d'omettre le dernier terme et de remplacer  $\frac{EK}{R^2} k'^2$  par

$$EK \left( \frac{\alpha' \cos \phi + \beta' \sin \phi + \psi''}{R} \right)^2 \quad (3.6.59)$$

Cette approximation a été introduite par WAGNER [M7] dans le cas des poutres rectilignes. Elle est employée de manière très générale, souvent sans se soucier de la condition (3.6.57). L'étude d'un certain nombre de cas simples montre qu'elle revient à négliger le terme de COULOMB  $\theta' = \frac{M_T}{GI_T}$  [D12]. L'hypothèse (3.6.57) est particulièrement bien vérifiée dans le cas des sections minces ouvertes.

### 6.7. Omission du terme de gauchissement

Considérons des rotations de la forme

$$\begin{aligned} \alpha &= \bar{\alpha} \sin \left( n \theta + m \frac{\pi}{2} \right) \\ \beta &= \bar{\beta} \sin \left( n \theta + m \frac{\pi}{2} \right) \\ \psi &= \bar{\psi} \cos \left( n \theta + m \frac{\pi}{2} \right). \end{aligned} \quad (3.6.60)$$

Si l'on fait l'hypothèse de WAGNER, le rapport entre l'énergie de gauchissement et l'énergie de torsion est donné par

$$\zeta = \frac{n^2 EK}{GJR^2} \quad (3.6.61)$$

Il est naturel de négliger le terme de gauchissement chaque fois que  $\zeta$  est inférieur à l'erreur introduite par l'hypothèse  $r \approx R$  qui est à la base de la théorie. Si  $\Delta R$  est la plus grande variation de rayon dans la section, on obtient donc la condition

$$\zeta \leq \frac{\Delta R}{R} \quad (3.6.62)$$

Cette condition fixe le plus grand nombre d'onde azimutal pour lequel le terme de gauchissement peut être négligé :

$$n \leq \sqrt{\frac{GJ}{EK} R \Delta R} \quad (3.6.63)$$

Considérons par exemple un raidisseur de section rectangulaire. Une théorie simplifiée, mais conduisant à des résultats bien approchés [D12], donne

$$J = \frac{4 I_1 I_2}{I_1 + I_2}, \quad K = \frac{I_1 I_2}{\Omega}$$

soit

$$n \leq \sqrt{\frac{R \Delta R}{2(1+\nu)} \frac{4 \Omega}{I_1 + I_2}}$$

Pour les dimensions suivantes :

$$b \text{ (largeur du profil)} = 0,1 \text{ m}$$

$$t \text{ (épaisseur du profil)} = 0,005 \text{ m}$$

$$R = 1 \text{ m,}$$

on obtient, si le raidisseur est disposé radialement,  
 $\Delta R = 0,05$  m et

$$n \leq 9,61$$

Ainsi, pour les faibles valeurs de  $n$ , on peut omettre le terme de gauchissement sans commettre d'erreur plus grande que l'erreur intrinsèque de la théorie utilisée.

### 6.8. Déport du centre de gravité

Dans beaucoup de cas, le centre de gravité de la section du raidisseur n'appartient pas au feuillet moyen de la coque. Soient  $-\xi_c$ ,  $-\eta_c$  les coordonnées du point du feuillet moyen de la coque qui sert de référence : on a

$$u = u_c + \eta_c \psi, \quad v = v_c - \xi_c \psi, \quad w = w_c + \alpha \xi_c - \beta \eta_c \quad (3.6.64)$$

$$\alpha_c = \alpha, \quad \beta_c = \beta, \quad \psi_c = \psi, \quad R_c = R - \xi_c \cos \phi - \eta_c \sin \phi$$

où l'indice  $c$  désigne les variables de la coque. Dans le cadre de la méthode des éléments finis, ce changement de variables se fait très simplement après le calcul des matrices de l'élément [A5].

On utilise souvent une méthode approchée consistant à introduire des inerties équivalentes. Cette méthode peut être justifiée comme suit : les différents termes apparaissant dans l'expression (3.6.56) de l'énergie de déformation se transforment de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \text{a) } \frac{1}{R} \{w' + u \sin \phi + v \cos \phi - \psi \eta_T \sin \phi + \psi \xi_T \cos \phi\} = \\ \frac{R_c}{R} \frac{1}{R_c} \{w'_c + u_c \sin \phi + v_c \cos \phi - \psi_c \eta_T \sin \phi + \psi_c \xi_T \cos \phi \\ + (\alpha'_c - \psi_c \cos \phi) \xi_c - (\beta_c - \psi_c \sin \phi) \eta_c\} \quad (3.6.65) \end{aligned}$$

$$b) \frac{\alpha' - \psi \cos \phi}{R} = \frac{R_c}{R} \frac{\alpha_c' - \psi_c \cos \phi}{R_c} \quad (3.6.66)$$

$$c) \frac{\beta' - \psi \sin \phi}{R} = \frac{R_c}{R} \frac{\beta_c' - \psi_c \sin \phi}{R_c} \quad (3.6.67)$$

$$\begin{aligned} d) \alpha + \frac{u' - w \sin \phi}{R} + \eta_T \frac{\alpha \cos \phi + \beta \sin \phi}{R} \\ = \alpha_c \left( 1 - \frac{\xi_c \cos \phi}{R} - \frac{\eta_c \sin \phi}{R} \right) + \frac{u_c' - w_c \sin \phi}{R} \\ + \eta_T \frac{\alpha_c \cos \phi + \beta_c \sin \phi}{R} + \eta_c \frac{\psi_c' + \alpha_c \cos \phi + \beta_c \sin \phi}{R} \\ = \frac{R_c}{R} \left\{ \alpha_c + \frac{u_c' - w_c \sin \phi}{R_c} + \eta_T \frac{\alpha_c \cos \phi + \beta_c \sin \phi}{R_c} \right. \\ \left. + \eta_c \frac{\psi_c' + \alpha_c \cos \phi + \beta_c \sin \phi}{R_c} \right\} \quad (3.6.68) \end{aligned}$$

e) de la même manière,

$$\begin{aligned} - \beta + \frac{v' - w \cos \phi}{R} - \xi_T \frac{\beta \sin \phi + \alpha \cos \phi}{R} \\ = \frac{R_c}{R} \left\{ -\beta_c + \frac{v_c' - w_c \cos \phi}{R_c} - \xi_T \frac{\alpha_c \cos \phi + \beta_c \sin \phi}{R_c} \right. \\ \left. - \xi_c \frac{\psi_c' + \alpha_c \cos \phi + \beta_c \sin \phi}{R_c} \right\} \quad (3.6.69) \end{aligned}$$

$$f) \frac{\psi' + \alpha \cos \phi + \beta \sin \phi}{R} = \frac{R_c}{R} \frac{\psi_c' + \alpha_c \cos \phi + \beta_c \sin \phi}{R_c} \quad (3.6.70)$$

Si la variation de rayon due au déport n'est pas trop grande, on peut assimiler le rapport  $\frac{R_c}{R}$  à l'unité. On remarque alors que dans l'équation (3.6.65), il apparaît les courbures (3.6.66) et (3.6.67). Ces termes mèneront d'une part à définir les inerties équivalentes

$$I_1^c = I_1 + \xi_c^2 \Omega$$

$$I_2^c = I_2 + \eta_c^2 \Omega \quad (3.6.71)$$

$$I_{12}^c = \xi_c \eta_c \Omega$$

et, d'autre part, à des termes de couplage de raideurs  $\xi_T \Omega$  et  $\eta_T \Omega$ . Si l'on s'intéresse à des modes à prédominance flexionnelle, ce qui est généralement le cas en vibrations, on peut négliger ces couplages. D'autre part, on retrouve dans les expressions (3.6.68) et (3.6.69) la torsion (3.6.70). On définira donc de même un module de torsion équivalent

$$GJ^c = G (J + \xi_c^2 A_{11} + 2 \xi_c \eta_c A_{12} + \eta_c^2 A_{22}); \quad (3.6.72)$$

ici, les termes de couplage sont nécessairement petits, du fait de la petitesse des déformations dues à l'effort tranchant. Ainsi, moyennant les conditions que nous venons d'énoncer, le raidisseur déporté peut s'analyser comme un raidisseur situé sur le feuillet moyen, à condition de remplacer les inerties et le module de torsion par les valeurs équivalentes (3.6.71) et (3.6.72).

## 7. MODELISATION DES MATERIAUX MULTICOUCHES

Suivant la terminologie d'ENGRAND et BORDAS [E1], nous appellerons multicouche toute structure constituée de couches peu épaisses de matériaux différents assemblés par collage. Par sandwich, nous désignerons un matériau multicouche particulier composé d'une âme (souvent en "nid d'abeilles") et de deux semelles nettement plus minces que l'âme.

L'étude des structures multicouches peut être envisagée selon divers points de vue :

- (i) La recherche du comportement structural de la coque multicouche.

- (ii) La recherche des amortissements que l'on peut obtenir en adjoignant un revêtement viscoélastique, à une coque.
- (iii) L'étude de la tenue des collages. En effet, les colles résistent généralement très mal en traction et d'une manière limitée au cisaillement.

Il va de soi que le choix d'un modèle du multicouche doit être fait en fonction des renseignements attendus. C'est pourquoi nous allons passer en revue les différents modèles proposés en indiquant pour chacun ce qu'il permet de prévoir.

### 7.1. Coque de KIRCHHOFF-LOVE équivalente

Si l'on considère que chaque couche obéit à l'hypothèse de KIRCHHOFF-LOVE, on se rend aisément compte qu'il en est de même de la coque entière [E1]. On définit alors aisément les lois constitutives en exprimant que les déplacements dans le plan de la coque sont linéaires : l'énergie de déformation de la couche  $i$  étant

$$\int_{\zeta_{i-}}^{\zeta_{i+}} c_{\alpha\beta\gamma\delta}^{(i)} (\epsilon_{\alpha\beta} + \zeta \chi_{\alpha\beta}) (\epsilon_{\gamma\delta} + \zeta \chi_{\gamma\delta}) d\zeta \quad (3.7.1)$$

on fait la somme. Si l'on appelle  $e_i$  l'épaisseur de la couche  $i$  et  $\bar{\zeta}_i$  la cote de son feuillet moyen, on obtient

$$c_{\alpha\beta\gamma\delta}^{(i)} \left\{ e_i \epsilon_{\alpha\beta} \epsilon_{\gamma\delta} + e_i \bar{\zeta}_i (\epsilon_{\alpha\beta} \chi_{\gamma\delta} + \epsilon_{\gamma\delta} \chi_{\alpha\beta}) + \left( \frac{e_i^3}{12} + \bar{\zeta}_i^2 e_i \right) \chi_{\alpha\beta} \chi_{\gamma\delta} \right\} \quad (3.7.2)$$

Lorsque les modules varient de façon homogène, c'est-à-dire si

$$c_{\alpha\beta\gamma\delta}^{(i)} = \lambda_i \bar{c}_{\alpha\beta\gamma\delta} \quad (3.7.3)$$

où  $\bar{C}_{\alpha\beta\gamma\delta}$  représente des modules de référence, on peut se ramener à une coque équivalente par un changement de référence des cotes :

$$\zeta_i \mapsto \bar{\zeta}_i = \zeta_i - \zeta_0 \quad (3.7.4)$$

$\zeta_0$  étant choisi de façon à assurer le découplage extension-flexion :

$$\zeta_0 = \frac{\sum_i \lambda_i \bar{\zeta}_i e_i}{\sum_i \lambda_i e_i} \quad (3.7.5)$$

La coque équivalente a des épaisseurs différentes pour les déformations d'extension et de flexion, définies par

$$\bar{C}_{\alpha\beta\gamma\delta} t_E = \sum_i C_{\alpha\beta\gamma\delta}^{(i)} e_i \rightarrow t_E = \sum_i \lambda_i e_i \quad (3.7.6)$$

$$\begin{aligned} \bar{C}_{\alpha\beta\gamma\delta} \frac{t_F^3}{12} &= \sum_i C_{\alpha\beta\gamma\delta}^{(i)} \left( \frac{e_i^3}{12} + \bar{\zeta}_i^2 e_i \right) \\ \rightarrow t_F &= \sqrt[3]{\sum_i \lambda_i (e_i^3 + 12 \bar{\zeta}_i^2 e_i)} \end{aligned} \quad (3.7.7)$$

Si la relation d'homogénéité (3.7.3) n'est pas vérifiée, on ne peut plus nécessairement assurer le découplage par un seul déplacement du feuillet moyen. Mais pour un comportement essentiellement flexionnel ou essentiellement extensionnel, on peut négliger le couplage. Choisisant alors une épaisseur de référence  $t$ , on définit alors les modules équivalents

$$C_{\alpha\beta\gamma\delta}^{(E)} = \frac{1}{t} \sum_i e_i C_{\alpha\beta\gamma\delta}^{(i)} \quad (3.7.8)$$

$$C_{\alpha\beta\gamma\delta}^{(F)} = \frac{12}{t^3} \sum_i \left( \frac{e_i^3}{12} + \bar{\zeta}_i^2 e_i \right) C_{\alpha\beta\gamma\delta}^{(i)} \quad (3.7.9)$$

Une telle approche ne se justifie que si la coque est mince et si les modules des différentes couches sont assez peu différents. En particulier, elle s'adapte assez

mal au cas du sandwich, où l'âme est notablement plus souple que les semelles : en effet, il est peu raisonnable de supposer que l'effet de l'effort tranchant est négligeable dans ce cas. En outre, elle ne permet de répondre qu'au problème (i), à savoir le comportement global de la coque.

### 7.2. Coque de HENCKY-REISSNER équivalent à un sandwich

Considérons un sandwich dissymétrique (fig.3.24). Nous supposons que ses semelles ont une épaisseur très faible devant celle de l'âme. Dans ces conditions, on peut le réduire à une coque d'épaisseur modérée moyennant les hypothèses suivantes [D13,D14,M8,M9] :

- (1) L'âme ne résiste qu'au cisaillement
- (2) Les semelles résistent comme des membranes
- (3) Les déplacements dans le plan du sandwich sont linéaires affines dans l'âme, et vérifient l'hypothèse de KIRCHHOFF-LOVE dans les semelles. En outre, vu la faible épaisseur des semelles, on ne fera qu'une faible erreur en écrivant qu'elles sont connectées à l'âme en leur feuillet moyen. Cette approximation cadre bien avec l'hypothèse 2.

Ces hypothèses mènent à écrire, en appelant  $d$  la cote de l'axe neutre de flexion,

$$\epsilon_{\alpha\beta} = \begin{cases} \bar{\epsilon}_{\alpha\beta} + (\zeta - d) \bar{\chi}_{\alpha\beta} & \text{dans l'âme} \\ \bar{\epsilon}_{\alpha\beta} + \left(\frac{h}{2} - d\right) \bar{\chi}_{\alpha\beta} + \text{flexion dans la semelle 2} \\ \epsilon_{\alpha\beta} - \left(\frac{h}{2} + d\right) \bar{\chi}_{\alpha\beta} + \text{flexion dans la semelle 1} \end{cases} \quad (3.7.10)$$

$$\dot{\gamma}_{\alpha 3} = \begin{cases} \bar{\gamma}_{\alpha 3} & \text{dans l'âme} \\ 0 & \text{dans les semelles} \end{cases} \quad (3.7.11)$$

ce qui conduit à l'expression suivante de l'énergie de déformation :

$$\begin{aligned} 2 U = & e_2 C_{\alpha\beta\gamma\delta}^{(2)} \{ \bar{\epsilon}_{\alpha\beta} + (\frac{h}{2} - d) \bar{\chi}_{\alpha\beta} \} \{ \epsilon_{\gamma\delta} + (\frac{h}{2} - d) \bar{\chi}_{\gamma\delta} \} \\ & + e_1 C_{\alpha\beta\gamma\delta}^{(1)} \{ \bar{\epsilon}_{\alpha\beta} - (\frac{h}{2} + d) \bar{\chi}_{\alpha\beta} \} \{ \epsilon_{\gamma\delta} - (\frac{h}{2} + d) \bar{\chi}_{\gamma\delta} \} \\ & + h G_{\alpha\beta} \bar{\gamma}_{\alpha 3} \bar{\gamma}_{\beta 3} \end{aligned} \quad (3.7.12)$$

où  $C_{\alpha\beta\gamma\delta}$  et  $G_{\alpha\beta}$  désignent respectivement les modules membranaires et les modules de cisaillement. Regroupant les termes en  $\bar{\epsilon}_{\alpha\beta}$  et  $\bar{\chi}_{\alpha\beta}$ , on obtient

$$\begin{aligned} 2 U = & (e_1 C_{\alpha\beta\gamma\delta}^{(1)} + e_2 C_{\alpha\beta\gamma\delta}^{(2)}) \bar{\epsilon}_{\alpha\beta} \bar{\epsilon}_{\gamma\delta} \\ & + \{ e_2 (\frac{h}{2} - d) C_{\alpha\beta\gamma\delta}^{(2)} - e_1 (\frac{h}{2} + d) C_{\alpha\beta\gamma\delta}^{(1)} \} \\ & (\bar{\epsilon}_{\alpha\beta} \bar{\chi}_{\gamma\delta} + \bar{\epsilon}_{\gamma\delta} \bar{\chi}_{\alpha\beta}) \\ & + \{ e_2 (\frac{h}{2} - d)^2 C_{\alpha\beta\gamma\delta}^{(2)} + e_1 (\frac{h}{2} + d)^2 C_{\alpha\beta\gamma\delta}^{(1)} \} \\ & \bar{\chi}_{\alpha\beta} \bar{\chi}_{\gamma\delta} + h G_{\alpha\beta} \bar{\gamma}_{\alpha 3} \bar{\gamma}_{\beta 3} \end{aligned} \quad (3.7.13)$$

Si l'on fait l'hypothèse supplémentaire de variation homogène des modules membranaires :

$$C_{\alpha\beta\gamma\delta}^1 = \lambda_1 \bar{C}_{\alpha\beta\gamma\delta} \quad C_{\alpha\beta\gamma\delta}^2 = \lambda_2 \bar{C}_{\alpha\beta\gamma\delta} \quad (3.7.14)$$

on peut découpler l'extension et la flexion en posant

$$d = \frac{\frac{h}{2} (\lambda_1 e_1 - \lambda_2 e_2)}{\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2} \quad (3.7.15)$$

On obtient alors les raideurs suivantes :

$$\begin{aligned}
 - \text{ extension} & : \bar{C}_{\alpha\beta\gamma\delta} (\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2) \\
 - \text{ flexion} & : \bar{C}_{\alpha\beta\gamma\delta} h^2 \frac{\lambda_1 e_1 \lambda_2 e_2}{\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2} \\
 - \text{ cisaillement} & : G_{\alpha\beta} h
 \end{aligned} \tag{3.7.16}$$

dont on peut rendre compte en définissant une coque de référence de modules  $\bar{C}_{\alpha\beta\gamma\delta}$  et  $G_{\alpha\beta}$ , et d'épaisseurs

$$\left[ \begin{array}{ll}
 t_E = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 & \text{pour l'extension} \\
 t_F = \sqrt[3]{12 h^2 \frac{\lambda_1 e_1 \lambda_2 e_2}{\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2}} & \text{pour la flexion} \\
 t_G = h & \text{pour le cisaillement}
 \end{array} \right. \tag{3.7.17}$$

Cette approche permet de prévoir le comportement global du sandwich, et l'amortissement de l'âme. Elle satisfait donc aux exigences (i) et (ii). Pour ce qui est des efforts de liaison dans le multicouche, elle ne permet que la prévision de l'effort rasant, à l'exclusion des efforts de décollement.

### 7.3. Empilement de coques d'épaisseur modérée

On peut aussi traiter les multicouches en superposant des coques d'épaisseur modérée. Une telle approche a été pratiquée analytiquement, dans le cas des sandwiches, par YI-YUAN YU [Y1] et numériquement dans le cas général, par ENGRAND et BORDAS [E1]. Dans son application aux méthodes numériques, cette approche se révèle assez lourde, car il faut exprimer les liaisons de différentes couches par des contraintes linéaires agissant à la fois sur les déplacements et les rotations de chaque couche. Les rela-

tions de compatibilité s'écrivent en effet

$$\bar{u}_\alpha^{(i)} + \frac{e_i}{2} \bar{\phi}_\alpha^{(i)} = \bar{u}_\alpha^{(i+1)} - \frac{e_{i+1}}{2} \bar{\phi}_\alpha^{(i+1)} \quad (3.7.18)$$

$$\bar{w}^{(i)} = \bar{w}^{(i+1)}$$

En outre, on n'a toujours pas accès aux tensions de décollement.

#### 7.4. Empilement de volumes et de coques minces

Dans le cas de multicouches composés d'une alternance d'âmes et de feuilles minces par rapport aux âmes, on peut modéliser les âmes par des volumes ou des coques épaisses et les feuilles par des coques [D7]. On connecte alors sans grande erreur les déplacements des âmes à ceux des feuilletts moyens des coques. Cette méthode présente les avantages suivants : d'une part, elle est assez simple à mettre en oeuvre, et d'autre part, elle permet de prévoir les tensions de décollement. Elle pêche un peu au niveau de la compatibilité âme-feuille, mais cette erreur décroît avec l'épaisseur des feuilles. Par contre, elle ne permet pas de traiter le cas des âmes minces.

### 8. DIVERSES MODELISATIONS DES RAIDISSEURS

Nous terminerons cette étude par quelques mots sur la prise en compte des raidisseurs. Une première approche a été décrite au paragraphe 6, et consiste à considérer les raidisseurs circulaires comme des poutres courbes. Si les raidisseurs ont une forme compliquée, ou si les hypothèses de la théorie ci-dessus (indéformabilité de la section, faible extension radiale) sont mal vérifiées, on peut aussi traiter les raidisseurs comme des coques ou des combinaisons de coques et de poutres circulaires. Le nombre de degrés de liberté augmentera, mais le problème

du déport de l'axe neutre sera éliminé.

Lorsque les raidisseurs sont suffisamment nombreux, on peut aussi en tenir compte de manière approchée en les répartissant sur la coque. Considérons pour fixer les idées une coque raidie dans la direction  $x_1$  (fig.3.25). Les raidisseurs sont le plus souvent disposés d'un seul côté de la coque, ce qui signifie que le centre de gravité de la section d'un raidisseur est situé à une certaine distance  $e$  de la coque. Pour calculer les raideurs équivalentes, on isole une portion de la coque contenant un raidisseur et limitée des deux côtés à mi-chemin des raidisseurs adjacents. On considère alors des états de déformation constants dans la portion considérée, et on écrit l'énergie de déformation du système coque-raisseur pour une longueur unitaire selon  $x_1$  : posant

$$\left[ \begin{array}{l} D_c = \frac{E_c}{1 - \nu^2} \\ \Omega = \text{section du raidisseur} \\ I = \text{inertie du raidisseur en flexion selon } x_1 \\ A_{11}, A_{22}, A_{12} : \text{sections de cisaillement du raidisseur} \\ G_r J = \text{raideur de torsion de SAINT-VENANT du raidisseur,} \end{array} \right. \quad (3.8.1)$$

on obtient

$$\begin{aligned} 2 U = D_c t \ell \{ \bar{\epsilon}_{11}^2 + \bar{\epsilon}_{22}^2 + 2 \nu \bar{\epsilon}_{11} \bar{\epsilon}_{22} \} \\ + D_c \frac{t^3}{12} \ell \{ \bar{\chi}_{11}^2 + \bar{\chi}_{22}^2 + 2 \nu \bar{\chi}_{11} \bar{\chi}_{22} \}^2 \\ + G_c t \ell \{ \bar{\gamma}_{12}^2 + \bar{\gamma}_{13}^2 + \bar{\gamma}_{23}^2 \} + G_c \frac{t^3}{12} \ell \bar{\chi}_{12}^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + E_r \Omega \{\bar{\epsilon}_{11} - e \bar{\chi}_{11}\}^2 + E_r I \bar{\chi}_{11}^2 \\
& + G_r A_{22} \{\bar{\gamma}_{12} - e \bar{\chi}_{12}\}^2 + G_r J \bar{\chi}_{12}^2 \\
& + G_r A_{11} \bar{\gamma}_{13}^2 + 2 G_r A_{12} \{\bar{\gamma}_{12} - e \bar{\chi}_{12}\} \bar{\gamma}_{13}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& = \bar{\epsilon}_{11}^2 t \ell \{D_c + E_r \frac{\Omega}{t\ell}\} + \bar{\epsilon}_{22}^2 D_c t \ell \\
& + 2 \nu \bar{\epsilon}_{11} \bar{\epsilon}_{22} D_c t \ell \\
& + \bar{\chi}_{11}^2 \frac{t^3}{12} \ell \{D_c + E_r \frac{12}{t^3\ell} (I + \Omega e^2)\} \\
& + \bar{\chi}_{22}^2 D_c \frac{t^3\ell}{12} + 2 \nu D_c \frac{t^3\ell}{12} \bar{\chi}_{11} \bar{\chi}_{22} \\
& + \bar{\chi}_{12}^2 \frac{t^3\ell}{12} \{G_c + G_r \frac{12}{t^3\ell} (J + A_{22} e^2)\} \\
& + \bar{\gamma}_{12}^2 t \ell \{G_c + G_r \frac{A_{22}}{t\ell}\} \\
& + \bar{\gamma}_{13}^2 t \ell \{G_c + G_r \frac{A_{11}}{t\ell}\} + \bar{\gamma}_{23}^2 G_c t \ell \\
& + 2 \bar{\gamma}_{12} \bar{\gamma}_{13} t \ell G_r \frac{A_{12}}{t\ell} - 2 \bar{\gamma}_{13} \bar{\gamma}_{12} G_r A_{12} e \\
& - 2 E_r \Omega e \bar{\epsilon}_{11} \bar{\chi}_{11} - 2 G_r A_{22} e \bar{\gamma}_{12} \bar{\chi}_{12}
\end{aligned}$$

(3.8.2)

ce qui conduit aux relations constitutives moyennes :

$$N_{11} = t (D_c + E_r \frac{\Omega}{t\ell}) \bar{\epsilon}_{11} + t D_c \nu \bar{\epsilon}_{22} - E_r \Omega \frac{e}{\ell} \bar{\chi}_{11}$$

$$N_{22} = t D_c \nu \bar{\epsilon}_{11} + t D_c \bar{\epsilon}_{22}$$

$$N_{12} = t (G_c + G_r \frac{A_{22}}{t\ell}) \bar{\gamma}_{12} + G_r \frac{A_{12}}{\ell} \bar{\gamma}_{13}$$

$$M_{11} = \frac{t^3}{12} \{D_c + \frac{12 E_r}{t^3 \ell} (I + \Omega e^2)\} \bar{\chi}_{11} + \nu D_c \frac{t^3}{12} \bar{\chi}_{22} - E_r \Omega \frac{e}{\ell} \bar{\epsilon}_{11}$$

$$M_{22} = \frac{t^3}{12} D_c \nu \bar{\chi}_{11} + \frac{t^3}{12} D_c \bar{\chi}_{22} \quad (3.8.3)$$

$$M_{12} = \frac{t^3}{12} \{G_c + \frac{12 G_r}{t^3 \ell} (J + A_{22} e^2)\} \bar{\chi}_{12} - G_r A_{12} \frac{e}{\ell} \bar{\gamma}_{13} - G_r A_{22} \frac{e}{\ell} \bar{\gamma}_{12}$$

$$Q_1 = t \{G_c + G_r \frac{A_{11}}{t\ell}\} \bar{\gamma}_{13} + G_r \frac{A_{12}}{\ell} \bar{\gamma}_{12} - G_r A_{12} \frac{e}{\ell} \bar{\chi}_{12}$$

$$Q_2 = G_c t \bar{\gamma}_{23}$$

On s'aperçoit qu'il n'est pas possible de découpler totalement l'extension de la flexion par une simple translation du feuillet moyen. Il faut donc se résoudre à négliger les couplages. Pour les couplages  $\bar{\epsilon}_{11} - \bar{\chi}_{11}$  et  $\bar{\gamma}_{12} - \bar{\chi}_{12}$ , cela n'est licite que si l'on recherche une solution à nette prédominance extensionnelle ou flexionnelle. Par contre,  $A_{12}$  est nul dans un grand nombre de cas pratiques. Dans le cadre de cette approximation, on obtient simplement

$$N_{11} = (D_c + E_r \frac{\Omega}{t\ell}) t \bar{\epsilon}_{11} + \nu D_c t \bar{\epsilon}_{22}$$

$$N_{22} = \nu D_c t \bar{\epsilon}_{11} + D_c t \bar{\epsilon}_{22}$$

$$N_{12} = (G_c + G_r \frac{A_{22}}{t\ell}) t \bar{\gamma}_{12}$$

$$M_{11} = \{D_c + \frac{12 E_r}{t^3 \ell} (I + \Omega e^2)\} \bar{\chi}_{11} + \nu D_c \frac{t^3}{12} \bar{\chi}_{22}$$

(3.8.4)

$$M_{22} = \nu D_c \frac{t^3}{12} \bar{\chi}_{11} + D_c \frac{t^3}{12} \bar{\chi}_{22}$$

$$M_{12} = \{G_c + \frac{12 G_r}{t^3 \ell} (J + A_{22} e^2)\} \frac{t^3}{12} \bar{\chi}_{12}$$

$$Q_1 = \{G_c + G_r \frac{A_{11}}{t\ell}\} t \bar{\gamma}_{13}$$

$$Q_2 = G_c t \bar{\gamma}_{23}$$

Quelle est la validité d'un tel procédé de répartition des raidisseurs ? Il est bien clair que si la solution varie peu d'un raidisseur à l'autre, on pourra obtenir une solution convenablement approchée; qu'au contraire, si l'on recherche un mode concentré entre deux raidisseurs, on ne pourra l'obtenir. Pour évaluer l'erreur introduite, nous raisonnerons comme suit : si l'on fait abstraction des erreurs provenant de l'omission des couplages, on obtient la solution correcte si les déformations sont constantes sur la section de longueur  $\ell$  considérée. En réalité, elles varient sur cette longueur. Soit  $\lambda$  une déformation particulière. On a, en prenant le raidisseur comme référence,

$$\lambda(x_2) = \lambda(0) + \int_0^{x_2} \frac{\partial \lambda}{\partial x_2} d\xi$$

d'où, en vertu de l'inégalité de SCHWARZ-CAUCHY,

$$|\lambda(x_2) - \lambda(0)| \leq \left| \int_0^{x_2} \frac{\partial \lambda}{\partial x_2} d\xi \right| \leq \left\{ \int_{-\ell/2}^{\ell/2} \left( \frac{\partial \lambda}{\partial x_2} \right)^2 d\xi \right\}^{1/2} \ell^{1/2}$$

Il vient donc

$$\int_{-\ell/2}^{\ell/2} |\lambda(x_2) - \lambda(\frac{\ell}{2})|^2 dx_2 \leq \ell^2 \int_{-\ell/2}^{\ell/2} \left( \frac{\partial \lambda}{\partial x_2} \right)^2 dx_2$$

ce qui constitue une borne à l'énergie de l'erreur. Faisant la somme sur tous les intervalles correspondants à une longueur totale L, on obtient la borne

$$\ell^2 \int_{-L/2}^{L/2} \left( \frac{\partial \lambda}{\partial x_2} \right)^2 dx_2$$

Pour un mode de longueur d'onde L, de la forme

$$\lambda = A \sin \left( \frac{\pi x_2}{L} + \phi \right)$$

on obtient donc une erreur relative

$$\frac{\ell^2 \int_{-L/2}^{L/2} \left( \frac{\partial \lambda}{\partial x_2} \right)^2 dx_2}{\int_{-L/2}^{L/2} \lambda^2 dx_2} = \pi^2 \left( \frac{\ell}{L} \right)^2 \approx 10 \left( \frac{\ell}{L} \right)^2 \quad (3.8.5)$$

C'est l'ordre de grandeur de l'erreur introduite. Ainsi, pour une structure contenant 20 raidisseurs, on obtient, sur le mode le plus simple, une erreur de l'ordre de 2,5 %.

Il convient de noter que dans les structures de révolution, le procédé que nous venons d'exposer est le seul possible pour tenir compte des raidisseurs longitudinaux. Cependant, si ces raidisseurs sont disposés régulièrement,

on peut étudier, d'une part, les modes de faible nombre d'onde azimutal par le procédé ci-dessus et, d'autre part, les modes en trèfle dont les noeuds sont situés sur les raidisseurs en négligeant ceux-ci. Il est par ailleurs évident que pour les modes axisymétriques, la répartition des raidisseurs n'entraîne pas d'erreur.



CHAPITRE IVMETHODE DE SEMI-DISCRETISATIONPAR ELEMENTS FINIS DEVELOPPES EN SERIES DE FOURIER

## I. INTRODUCTION

La méthode des éléments finis est à présent reconnue comme un outil sûr et efficace pour l'étude des structures. Née il y a une vingtaine d'années, de l'intuition des ingénieurs pour qui elle constituait une généralisation de l'analyse matricielle des structures, elle a à présent reçu une justification mathématique rigoureuse. La raison de son succès doit être recherchée dans son extrême souplesse d'utilisation, notamment dans la représentation des formes les plus diverses.

Un certain nombre de structures possèdent une direction privilégiée selon laquelle les caractéristiques élastiques et géométriques sont constantes ou, du moins, peuvent approximativement être considérées comme telles. Ainsi, dans une poutre en caisson prismatique, la direction longitudinale est privilégiée; dans les structures de révolution, c'est la direction azimutale. Pour de telles structures, l'application pure et simple de la méthode des éléments finis est avantageusement remplacée par des méthodes de semi-discrétisation, où l'on utilise des éléments finis dans les directions non privilégiées, et des développements en fonctions orthogonales dans la direction privilégiée. C'est en substance le principe des bandes finies de CHEUNG [C1,C2]. Mais dans le cas des structures à géométrie de révolution, l'idée d'une semi-discrétisation utilisant les séries de FOURIER est bien plus ancienne. En fait, l'analyse des coques de révolution par développements en séries de FOURIER date de la recherche de solutions analytiques [A3,N1]. Les éléments finis de coques développés en série de FOURIER sont apparus vers 1965, soit peu après les éléments de coques axisymétriques [P2] et ont été développés par de nombreux auteurs [Z1,S4,A5,Z2,P1].

Les avantages de cette méthode sont multiples :

(i) Economie : pour N modes de FOURIER à M degrés de liberté chacun, il suffit de résoudre N systèmes matriciels de dimension M et de recombinaison, ce qui donne :

$\approx N \times M^3$  multiplications pour les résolutions

$\approx 2N \times M$  multiplications pour la recombinaison des charges et des déplacements en N stations,

soit au total  $\approx N (M^3 + 2M)$  multiplications. Le même problème, par éléments finis, nécessiterait quelque  $N^3 \times M^3$  opérations.

(ii) Amélioration possible de la solution : si la solution est jugée par trop grossière dans la direction azimutale, on peut l'améliorer en calculant quelques modes supplémentaires. Au contraire, dans le cadre d'une discrétisation complète, le calcul doit être entièrement refait.

(iii) Découplage des modes en analyse modale et en stabilité linéaire : les coques de révolution présentent généralement un spectre assez serré, où les modes de nombres d'ondes azimutaux différents sont très rapprochés en fréquence, au point que leur identification expérimentale est souvent délicate. L'étude d'un nombre d'onde azimutal à la fois permet de séparer nettement les différents modes.

En contrepartie, la méthode des séries de FOURIER présente les inconvénients suivants :

(i) Il faut au préalable décomposer la mise en charge en série de FOURIER et, après l'analyse, effectuer une recombinaison. Cet inconvénient est assez mineur, car ces opérations dont il est question sont peu coûteuses.

(ii) La structure doit être strictement de révolution.

En particulier, tout raidisseur longitudinal doit être réparti.

(iii) L'inconvénient le plus grave réside dans la difficulté de tenir compte des fixations non axisymétriques.

(iv) Le découplage des modes ne peut être obtenu que moyennant certaines restrictions sur l'anisotropie.

Ces deux derniers problèmes seront étudiés en détail dans la suite de l'exposé.

## 2. GENERALITES CONCERNANT LES DEVELOPPEMENTS EN SERIES DE FOURIER

### 2.1. Découplage de la raideur

Les déplacements seront développés d'une des manières suivantes :

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^1 u_{n m} \cos \left( n \theta + m \frac{\pi}{2} \right) \quad (4.2.1.a)$$

ou

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^1 u_{n m}^* \sin \left( n \theta + m \frac{\pi}{2} \right) \quad (4.2.1.b)$$

où  $n$  sera appelé nombre d'onde (azimutal) et  $m$ , phase. Le choix de cette écriture, plutôt que le classique développement en cosinus et sinus, résulte de considérations pratiques. En effet, en dehors du cas particulier  $n = 0$ , les développements ci-dessus permettent d'utiliser exactement les mêmes programmes pour les deux harmoniques de même nombre d'onde.

Le calcul des déformations nécessite la dérivation de certains déplacements par rapport à  $\theta$ , ce qui change les sinus en cosinus et inversement. Lors du calcul de l'énergie de déformation, deux modes différant par leur nombre d'onde azimutal sont nécessairement découplés, en vertu des relations d'orthogonalité

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \cos k \theta \cos \ell \theta d \theta &= \pi \delta_{k\ell} (1 + \delta_{k0}) \\ \int_0^{2\pi} \cos k \theta \sin \ell \theta d \theta &= 0 \\ \int_0^{2\pi} \sin k \theta \sin \ell \theta d \theta &= \pi \delta_{k\ell} (1 - \delta_{k0}) \end{aligned} \quad (4.2.2)$$

Par contre, les deux modes correspondant à un même nombre d'onde azimutal peuvent être couplés. En effet, les déformations de ces deux modes peuvent s'écrire sous la forme

$$\begin{aligned} e_{n0} &= a_0 \cos n \theta + b_0 \sin n \theta \\ e_{n1} &= -a_1 \sin n \theta + b_1 \cos n \theta \end{aligned} \quad (4.2.3)$$

si bien que leur somme sera

$$e_n = e_{n0} + e_{n1} = (a_0 + b_1) \cos n \theta + (b_0 - a_1) \sin n \theta$$

L'énergie correspondante, intégrée sur une circonférence, aura donc la forme

$$\pi r \{(a_0 + b_1)^T H (a_0 + b_1) + (b_0 - a_1)^T H (b_0 - a_1)\} \quad (4.2.4)$$

où  $H$  est la matrice de HOOKE du matériau, et ne sera découplée que si

$$b_1^T H a_0 = 0 \quad \text{et} \quad b_0^T H a_1 = 0 \quad (4.2.5)$$

On peut donner à ces conditions une forme plus utilisable en remarquant qu'un choix judicieux des développements (4.2.1.a) ou (4.2.1.b) pour les différents déplacements permet de séparer la variable  $\theta$  dans chaque déformation. On peut alors écrire

$$a_0 = \begin{bmatrix} c_0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad b_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ d_0 \end{bmatrix}, \quad a_1 = \begin{bmatrix} c_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad b_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ d_1 \end{bmatrix} \quad (4.2.6)$$

et décomposer la matrice de HOOKE en

$$H = \begin{bmatrix} H_{cc} & H_{cd} \\ H_{dc} & H_{dd} \end{bmatrix} \quad (4.2.7)$$

ce qui permet de mettre l'énergie sous la forme

$$\pi r \{ c_0^T H_{cc} c_0 + 2 c_0^T H_{cd} d_1 + c_1^T H_{dd} c_1 + c_1^T H_{cc} c_1 - 2 c_1^T H_{cd} d_0 + d_0^T H_{dd} d_0 \} \quad (4.2.8)$$

La condition de découplage se ramène donc à exiger que la sous-matrice  $H_{cd}$  soit nulle. En d'autres termes, la matrice de HOOKE ne peut coupler que les déformations qui, dans un même mode, correspondent à la même fonction trigonométrique. Il s'agit généralement d'une restriction sur les possibilités d'anisotropie.

Les deux conditions ci-dessus : séparation de la variable  $\theta$  et découplage de la matrice de HOOKE, déterminent le choix des développements. Ainsi, dans le cas d'un solide tridimensionnel, les déformations s'écrivent

$$\varepsilon_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r}$$

$$\epsilon_{\theta\theta} = \frac{u_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta}$$

$$\epsilon_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z}$$

$$\gamma_{r\theta} = \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{1}{r} \left( \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - u_\theta \right)$$

$$\gamma_{rz} = \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial z}$$

$$\gamma_{\theta z} = \frac{\partial u_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta}$$

(4.2.9)

Que le corps soit isotrope ou non, les trois déformations directes  $\epsilon_{rr}$ ,  $\epsilon_{\theta\theta}$ ,  $\epsilon_{zz}$  seront généralement couplées par l'effet de POISSON et il doit donc leur correspondre la même fonction trigonométrique. On choisira par exemple  $\cos(n\theta + m\frac{\pi}{2})$ , ce qui donne

- pour  $u_r$  : un développement en  $\cos(n\theta + m\frac{\pi}{2})$
- pour  $u_z$  : un développement en  $\cos(n\theta + m\frac{\pi}{2})$  (4.2.10)
- pour  $u_\theta$  : un développement en  $\sin(n\theta + m\frac{\pi}{2})$

En conséquence, les glissements seront développés de la façon suivante :

- $\gamma_{r\theta}$  en  $\sin(n\theta + m\frac{\pi}{2})$
- $\gamma_{rz}$  en  $\cos(n\theta + m\frac{\pi}{2})$  (4.2.11)
- $\gamma_{\theta z}$  en  $\sin(n\theta + m\frac{\pi}{2})$

On constate que  $\gamma_{r\theta}$  et  $\gamma_{\theta z}$  sont développés en sinus, tandis que les autres déformations sont développées en cosinus. Dès lors, la loi de HOOKE devra avoir la forme

$$\begin{bmatrix} \sigma_{rr} \\ \sigma_{\theta\theta} \\ \sigma_{zz} \\ \tau_{rz} \\ \tau_{r\theta} \\ \tau_{\theta z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} & H_{13} & H_{14} & 0 & 0 \\ H_{21} & H_{22} & H_{23} & H_{24} & 0 & 0 \\ H_{31} & H_{32} & H_{33} & H_{34} & 0 & 0 \\ H_{41} & H_{42} & H_{43} & H_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & H_{55} & H_{56} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & H_{65} & H_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_{rr} \\ \epsilon_{\theta\theta} \\ \epsilon_{zz} \\ \gamma_{rz} \\ \gamma_{r\theta} \\ \gamma_{\theta z} \end{bmatrix} \quad (4.2.12)$$

soit se limiter à 13 coefficients indépendants, au lieu de 21 dans le cas général.

Examinons à présent le cas des coques de révolution décrites en (ch.3,3). Les déformations  $\bar{\epsilon}_{ss}$ ,  $\bar{\epsilon}_{\theta\theta}$ ,  $\bar{\chi}_{ss}$ ,  $\bar{\chi}_{\theta\theta}$  auront un développement en  $\cos(n\theta + m\frac{\pi}{2})$  si l'on développe  $u$ ,  $w$ ,  $\alpha$  en  $\cos(n\theta + m\frac{\pi}{2})$  et  $v$ ,  $\beta$  en  $\sin(n\theta + m\frac{\pi}{2})$ . Alors,  $\bar{\epsilon}_{ss}$ ,  $\bar{\epsilon}_{\theta\theta}$ ,  $\bar{\chi}_{ss}$ ,  $\bar{\chi}_{\theta\theta}$ ,  $\bar{\gamma}_{s\zeta}$  seront développés en cosinus, tandis que  $\bar{\gamma}_{s\theta}$ ,  $\bar{\chi}_{s\theta}$ ,  $\bar{\gamma}_{\theta\zeta}$  seront développés en sinus. Dès lors, la matrice de HOOKE pourra être de la forme

$$\begin{bmatrix} N_{ss} \\ N_{\theta\theta} \\ N_{s\theta} \\ M_{ss} \\ M_{\theta\theta} \\ M_{s\theta} \\ Q_s \\ Q_\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & 0 & C_{14} & C_{15} & 0 & C_{17} & 0 \\ C_{21} & C_{22} & 0 & C_{24} & C_{25} & 0 & C_{27} & 0 \\ 0 & 0 & C_{33} & 0 & 0 & C_{36} & 0 & C_{38} \\ C_{41} & C_{42} & 0 & C_{44} & C_{45} & 0 & C_{47} & 0 \\ C_{51} & C_{52} & 0 & C_{54} & C_{55} & 0 & C_{57} & 0 \\ 0 & 0 & C_{63} & 0 & 0 & C_{66} & 0 & C_{68} \\ C_{71} & C_{72} & 0 & C_{74} & C_{75} & 0 & C_{77} & 0 \\ 0 & 0 & C_{83} & 0 & 0 & C_{86} & 0 & C_{88} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\epsilon}_{ss} \\ \bar{\epsilon}_{\theta\theta} \\ \bar{\gamma}_{s\theta} \\ \bar{\chi}_{ss} \\ \bar{\chi}_{\theta\theta} \\ \bar{\chi}_{s\theta} \\ \bar{\gamma}_{s\zeta} \\ \bar{\gamma}_{\theta\zeta} \end{bmatrix} \quad (4.2.13)$$

Pour une anisotropie provenant de la prise en compte approchée de lisses et raidisseurs, on en déduit les conditions suivantes :

(i) Les lisses et raidisseurs ne peuvent être disposés que dans une parallèle ou un méridien, sans quoi il apparaîtra des termes  $C_{13}$ ,  $C_{23}$ , ...

(ii) Des lisses ou raidisseurs dont la ligne moyenne est située dans un plan méridien, et décrits par les relations (3.8.3) doivent être symétriques par rapport à ce plan, sous peine de voir apparaître, du fait du couplage en cisaillement, des termes  $C_{37}$  et  $C_{67}$ .

Examinons enfin le cas des raidisseurs définis au chapitre 3, section 6. Ici, pas de problème. En effet, si l'on choisit un développement en cosinus pour  $u$ ,  $v$ ,  $\psi$ , et en sinus pour  $w$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $k$ , chaque paramètre de déformation est séparé par rapport à  $\theta$ , et on constate que le seul couplage, dû au terme  $A_{12}$ , respecte les conditions énoncées ci-dessus.

On constate donc qu'en général, les déplacements et les rotations seront développés de la manière suivante :

$$u_r = \sum_{n,m} u_{nm} \cos (n \theta + m \frac{\pi}{2})$$

$$u_\theta = \sum_{n,m} v_{nm} \sin (n \theta + m \frac{\pi}{2})$$

$$u_z = \sum_{n,m} w_{nm} \cos (n \theta + m \frac{\pi}{2})$$

(4.2.14)

$$\phi_r = \sum_{n,m} \alpha_{nm} \sin (n \theta + m \frac{\pi}{2})$$

$$\phi_\theta = \sum_{n,m} \beta_{nm} \cos (n \theta + m \frac{\pi}{2})$$

$$\phi_z = \sum_{n,m} \gamma_{nm} \sin (n \theta + m \frac{\pi}{2})$$

Lorsque les conditions de découplage ne sont pas remplies, il est nécessaire d'analyser simultanément les deux modes correspondant à un même nombre d'ondes azimutal, avec les couplages appropriés. Une autre technique, développée par LESTINGI et PADOVAN [L4,P3,P4], consiste à utiliser les séries de FOURIER complexes. Les deux méthodes sont équivalentes. Mais nous préférons les séries réelles, d'une part parce qu'elles ont une signification physique plus intuitive, d'autre part parce que leur application peut être réalisée dans le cadre d'un programme classique d'éléments finis, utilisant exclusivement les variables réelles.

## 2.2. Développement du second membre

Le travail des forces appliquées est une fonctionnelle

linéaire  $P(u)$  du champ de déplacements. Comme on peut considérer chaque composante de déplacement séparément, nous nous contenterons d'examiner le cas où  $u$  est une variable scalaire. Nous supposons que cette variable est développée en série de la manière suivante :

$$u(r, \theta, z) = \sum_{nm} u_{nm}(r, z) \cos(n\theta + m\frac{\pi}{2}) \quad (4.2.15)$$

Dès lors, du fait de la linéarité de la fonctionnelle  $P$ , que nous supposons bornée, on a

$$\begin{aligned} \underline{P}(u) &= \underline{P}\left\{ \sum_{nm} u_{nm}(r, z) \cos(n\theta + m\frac{\pi}{2}) \right\} \\ &= \sum_{nm} \underline{P}\left\{ u_{nm}(r, z) \cos(n\theta + m\frac{\pi}{2}) \right\} \end{aligned} \quad (4.2.16)$$

Or il est clair que pour  $n$  et  $m$  fixés,  $\underline{P}\{u_{nm} \cos(n\theta + m\frac{\pi}{2})\}$  se réduit à une fonctionnelle linéaire de  $u_{nm}$ , que nous appellerons  $\underline{P}_{nm}$ . Cette définition nous permet d'écrire

$$\underline{P}(u) = \sum_{nm} \underline{P}_{nm}(u_{nm}). \quad (4.2.17)$$

Le second membre peut être considéré comme une somme de distributions sur le plan méridien.

Examinons le cas particulier d'une fonctionnelle  $P$  intégrale, c'est-à-dire de la forme

$$\underline{P}(u) = \int_{\text{méridien}} r dA \int_0^{2\pi} p u d\theta$$

où  $p$  est une fonction de  $r, \theta, z$  (charge de volume). Il vient alors

$$\begin{aligned} \underline{P}(u) &= \sum_{nm} \int_{\text{méridien}} u_{nm} r dA \int_0^{2\pi} p \cos(n\theta + m\frac{\pi}{2}) d\theta \\ &= \sum_{nm} \int_{\text{méridien}} u_{nm} \bar{p}_{nm} dA \end{aligned}$$

ce qui définit les fonctions  $\bar{p}_{nm}$  de  $r$  et  $z$  par

$$\bar{p}_{nm} = \int_0^{2\pi} p r \cos \left( n \theta + m \frac{\pi}{2} \right) d \theta, \quad (4.2.18)$$

densités des fonctionnelles  $P_{nm}$  définies en (4.2.17). Du fait de nos hypothèses, la fonction  $p$  peut être développée en série de FOURIER, sous la forme

$$p = \sum_{nm} p_{nm} \cos \left( n \theta + m \frac{\pi}{2} \right) \quad (4.2.19)$$

avec les relations classiques

$$p_{nm} = k_{nm} \int_0^{2\pi} p \cos \left( n \theta + m \frac{\pi}{2} \right) d \theta \quad (4.2.20)$$

où

$$k_{nm} = \frac{1}{2\pi} (2 - \delta_{n,0}) \quad (4.2.21)$$

On constate donc que les coefficients  $\bar{p}_{nm}$  sont liés aux coefficients de FOURIER classiques  $p_{nm}$  de la charge par la relation

$$\bar{p}_{nm} = \frac{1}{k_{nm}} \cdot \frac{1}{r} \cdot p_{nm} \quad (4.2.22)$$

En d'autres termes, la charge  $p$  admet le développement conjugué

$$r \cdot p = \sum_{nm} \bar{p}_{nm} \overline{\cos \left( n \theta + m \frac{\pi}{2} \right)} \quad (4.2.23)$$

où

$$\overline{\cos \left( n \theta + m \frac{\pi}{2} \right)} = \frac{1}{k_{nm}} \cos \left( n \theta + m \frac{\pi}{2} \right) \quad (4.2.24)$$

est la base de fonctions conjuguée à la base des  $\cos \left( n \theta + m \frac{\pi}{2} \right)$ . Les deux bases  $\{\cos \left( n \theta + m \frac{\pi}{2} \right)\}$  et  $\{\overline{\cos \left( n \theta + m \frac{\pi}{2} \right)}\}$  sont biorthonormales :

$$\int_0^{2\pi} \cos \left( n \theta + m \frac{\pi}{2} \right) \overline{\cos \left( p \theta + q \frac{\pi}{2} \right)} d \theta = \delta_{np} \delta_{mq} \quad (4.2.25)$$

Poussant un peu plus loin la généralité, considérons le cas où la fonctionnelle  $P$  n'est intégrale que par rapport à  $r$  et  $z$ . C'est le cas d'une charge portée par un plan méridien donné, soit  $\theta = 0$ . En effet, dans ce cas,

$$\underline{P(u)} = \sum_n \int_{\text{méri-}} r p(r,z) u_{n0}(r,z) dA \quad (4.2.26)$$

Il vient alors

$$\begin{aligned} \bar{p}_{n,0}(r,z) &= r p(r,z) \\ \bar{p}_{n,1}(r,z) &= 0 \end{aligned} \quad (4.2.27)$$

On peut encore écrire formellement

$$r \cdot p(r,\theta,z) = \sum_{nm} \bar{p}_{nm} \overline{\cos \left( n \theta + m \frac{\pi}{2} \right)}$$

mais ce développement ne converge pas et n'a de sens que dans le cadre des distributions, ce qui signifie que le travail reste fini. En particulier, la définition (4.2.20) n'a plus de sens, de même que la relation (4.2.22). Il est clair que dans ce cas, une recombinaison de la densité de charge est dépourvue de sens, et il ne faut pas s'étonner de voir apparaître de fortes oscillations lors d'une recombinaison numérique. Le seul critère valable de convergence du développement est alors la faible variation du travail  $P(u)$  lorsque l'on ajoute des modes de FOURIER.

Des considérations analogues peuvent être tenues pour des développements en  $\sin \left( n \theta + m \frac{\pi}{2} \right)$ . Dans ce cas, on aura

$$r \cdot \bar{p}_{nm} = \frac{1}{k_{nm}} p_{nm} \quad (4.2.28)$$

et

$$\overline{\sin} \left( n \theta + m \frac{\pi}{2} \right) = \frac{1}{k_{mn}} \sin \left( n \theta + m \frac{\pi}{2} \right) \quad (4.2.29)$$

Le tableau suivant illustre les relations de dualité entre les déplacements et les charges régulières (correspondant à une fonctionnelle intégrale) :

	déplacements	charges
Base	$\cos \left( n \theta + m \frac{\pi}{2} \right)$ $\sin \left( n \theta + m \frac{\pi}{2} \right)$	$\overline{\cos} \left( n \theta + m \frac{\pi}{2} \right)$ $\overline{\sin} \left( n \theta + m \frac{\pi}{2} \right)$
Développement	$u = \sum_{nm} u_{nm} \begin{matrix} \cos \left( n \theta + m \frac{\pi}{2} \right) \\ \sin \left( n \theta + m \frac{\pi}{2} \right) \end{matrix}$	$r.p = \sum_{nm} \overline{p}_{nm} \begin{matrix} \overline{\cos} \left( n \theta + m \frac{\pi}{2} \right) \\ \overline{\sin} \left( n \theta + m \frac{\pi}{2} \right) \end{matrix}$
Coeff. de FOURIER	$u_{nm} = \int_0^{2\pi} u \begin{matrix} \overline{\cos} \left( n \theta + m \frac{\pi}{2} \right) \\ \overline{\sin} \left( n \theta + m \frac{\pi}{2} \right) \end{matrix} d\theta$	$\overline{p}_{nm} = \int_0^{2\pi} r.p \begin{matrix} \cos \left( n \theta + m \frac{\pi}{2} \right) \\ \sin \left( n \theta + m \frac{\pi}{2} \right) \end{matrix} d\theta$
Travail	$P(u) = \sum_{nm} \int_{\text{méridien}} \overline{p}_{nm} u_{nm} dA$	

Le lecteur au courant du calcul tensoriel constatera que l'analogie est frappante. C'est que nous sommes partis des mêmes conditions d'invariance du travail.

### 2.3. Calcul numérique des coefficients de FOURIER

Nous avons vu qu'il convient de décomposer la charge

en série de FOURIER. Si elle est donnée analytiquement, on peut calculer les coefficients par variation des primitives. Mais bien souvent, les charges sont données point par point ou ont une expression analytique compliquée. Dans ce cas l'intégration numérique s'impose. Une méthode particulièrement simple repose sur l'interpolation trigonométrique [L5, D15]. Soit  $f(\theta)$  la fonction dont on cherche les harmoniques jusqu'à un nombre d'ondes  $\leq n$ . On approche la fonction  $f(x)$  par le développement limité

$$f(\theta) \approx \frac{a_0}{\sqrt{2}} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos k\theta + b_k \sin k\theta) \quad (4.2.30)$$

les coefficients  $a_0$ ,  $a_k$  et  $b_k$  étant déterminés par les  $(2n+1)$  conditions

$$f(\theta_i) = \frac{a_0}{\sqrt{2}} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos k\theta_i + b_k \sin k\theta_i) \quad i=1, \dots, 2n+1 \quad (4.2.31)$$

les conditions s'écrivent sous forme matricielle

$$C q = g \quad (4.2.32)$$

où

$$q^T = (a_0, a_1, b_1, \dots, a_n, b_n)$$

$$g^T = (f(\theta_1), \dots, f(\theta_{2n+1}))$$

$$C = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \cos \theta_1 & \sin \theta_1 & \cos 2\theta_1 & \sin 2\theta_1 & \dots & \sin n\theta_1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \cos \theta_2 & \sin \theta_2 & \cos 2\theta_2 & \sin 2\theta_2 & & \sin n\theta_2 \\ \cdot & & & & & & \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \cos \theta_{2n+1} & \sin \theta_{2n+1} & \dots & \dots & \dots & \sin n\theta_{2n+1} \end{bmatrix}$$

(4.2.33)

On a donc

$$q = C^{-1} g$$

et, par conséquent,

$$\int_0^{2\pi} f(\theta) \begin{Bmatrix} \cos k \theta \\ \sin k \theta \end{Bmatrix} d\theta =$$

$$\int_0^{2\pi} \begin{Bmatrix} \cos k \theta \\ \sin k \theta \end{Bmatrix} \left( \frac{1}{\sqrt{2}}, \cos \theta, \sin \theta, \cos 2\theta, \sin 2\theta, \dots, \sin n\theta \right) d\theta \cdot C^{-1} g$$

(4.2.34)

Mais du fait des relations d'orthogonalité (4.2.2), une seule des fonctions de base  $\frac{1}{\sqrt{2}}, \dots, \sin n\theta$  a une contribution non nulle à l'intégrale et, par conséquent, pour évaluer un coefficient de FOURIER, une seule ligne de  $C^{-1}$  est nécessaire.

Si l'on choisit comme support les points

$$\theta_k = \frac{2k\pi}{2n+1} + \phi, \quad k = 0, \dots, 2n \quad (4.2.35)$$

avec

$$0 \leq \phi \leq \frac{2\pi}{2n+1}$$

on a les relations d'orthogonalité discrètes

$$\sum_{k=0}^{2n} \sin p \theta_k \sin q \theta_k = \frac{2n+1}{2} \delta_{pq} (1 + \delta_{p0})$$

$$\sum_{k=0}^{2n} \cos p \theta_k \cos q \theta_k = \frac{2n+1}{2} \delta_{pq} (1 + \delta_{p0}) \quad (4.2.36)$$

$$\sum_{k=0}^{2n} \sin p \theta_k \cos p \theta_k = 0$$

dont la vérification est aisée [L5]. Dès lors,

$$C^{-1} = \frac{2}{2 \cdot n + 1} C^T$$

ce qui constitue une simplification considérable : il vient en effet

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{\sqrt{2}}{2 \cdot n + 1} \sum_i f(\theta_i) \\ a_k &= \frac{2}{2 \cdot n + 1} \sum_i f(\theta_i) \cos k \theta_i \\ b_k &= \frac{2}{2 \cdot n + 1} \sum_i f(\theta_i) \sin k \theta_i \end{aligned} \quad (4.2.37)$$

ce qui entraîne

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} f(\theta) d\theta &= \int_0^{2\pi} \frac{a_0}{\sqrt{2}} d\theta = \frac{2\pi}{2 \cdot n + 1} \sum_i f(\theta_i) \\ \int_0^{2\pi} f(\theta) \cos k \theta d\theta &= \int_0^{2\pi} a_k \cos^2 k \theta d\theta \\ &= \frac{2\pi}{2 \cdot n + 1} \sum_i f(\theta_i) \cos k \theta_i \end{aligned} \quad (4.2.38)$$

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} f(\theta) \sin k \theta d\theta &= \int_0^{2\pi} b_k \sin^2 k \theta d\theta \\ &= \frac{2\pi}{2 \cdot n + 1} \sum_i f(\theta_i) \sin k \theta_i \end{aligned}$$

Si l'on choisit  $\phi = \frac{\pi}{2 \cdot n + 1}$ , ces formules sont identiques à celles que l'on aurait obtenues en divisant la circonférence en  $(2 \cdot n + 1)$  sous-intervalles égaux, et en prenant

la valeur de la fonction au milieu de chaque intervalle (formule de la valeur centrale).

La convergence de cette méthode est assez aisée à prouver. En effet, la fonction  $f(\theta)$  peut être mise sous la forme

$$f(\theta) = \frac{a_0}{\sqrt{2}} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos k\theta + b_k \sin k\theta) + R_n(\theta)$$

où le reste  $R_n(\theta)$  contient tous les harmoniques de rang plus élevé que  $n$ . Dès lors, comme l'intégration est effectuée sans erreur pour les premiers termes, l'erreur est donnée par

$$\frac{2\pi}{2n+1} \sum_i R_n(\theta_i) \begin{cases} 1 \\ \cos k\theta_i \\ \sin k\theta_i \end{cases} \leq 2\pi \sup_{[0,2\pi]} |R_n(\theta_i)| \quad (4.2.39)$$

Ainsi, la méthode ci-dessus converge si la fonction  $f(\theta)$  converge uniformément. Or un théorème dû à DIRICHLET [D16] affirme : "si  $f$  est à variation bornée sur  $(0, 2\pi)$ , sa série converge en tout point  $\theta$  vers la valeur  $\frac{1}{2} \{f(\theta_+) + f(\theta_-)\}$ ; la convergence est uniforme sur tout segment où  $f$  est continue". Il faut donc éviter de placer des points d'intégration au droit des discontinuités, ce qui permet de remplacer le second membre par

$$2\pi \sup_{\substack{\text{intervalles } [\alpha, \beta] \\ \text{de continuité}}} \sup |R_n(\theta_i)| \quad (4.2.40)$$

Lorsque l'on possède la loi  $\theta \mapsto f(\theta)$ , si compliquée soit-elle, on peut organiser les calculs par approximations successives, en calculant les intégrales numériques sur 3, 9, 27, 81 ... points successivement, c'est-à-dire en ajoutant chaque fois deux points dans chaque intervalle. Ce procédé permet de s'arrêter lorsque la précision est jugée suffisante, ce que l'on teste en examinant l'évolution des intégrales cherchées.

### 3. LES FIXATIONS ASYMETRIQUES EN STATIQUE

Si la définition d'une charge quelconque se fait aisément par décomposition en série de FOURIER, il n'en va pas de même des fixations asymétriques. Il s'agit d'un des problèmes les plus délicats de l'analyse par modes de FOURIER. Ce problème, essentiel par le fait qu'il conditionne l'applicabilité même des développements de FOURIER en statique, n'avait, à notre connaissance, pas encore été résolu.

Nous distinguerons deux cas :

(i) la fixation des déplacements à une fonction connue sur une circonférence complète

(ii) des fixations ponctuelles en certains points de certaines circonférences.

Si le premier problème est de résolution aisée, le deuxième est de loin plus difficile. Par ailleurs, nous verrons que dans beaucoup de cas, il faut se contenter d'une fixation approchée.

#### 3.1. Fixation à une fonction connue sur une circonférence

Dans le cas où les fixations s'expriment sous la forme

$$u(\theta) = f(\theta) \text{ donnée sur une circonférence} \quad (4.3.1)$$

il suffit de donner à chaque harmonique  $u_{nm}$  la valeur

$$u_{nm} = \frac{(1 + \delta_{n,0})}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) \begin{cases} \cos(n\theta + m\frac{\pi}{2}) \\ \sin(n\theta + m\frac{\pi}{2}) \end{cases} d\theta \quad (4.3.2)$$

selon que le développement de  $u$  est en cosinus ou en sinus.

Il convient cependant de noter que la fixation exacte à  $f(\theta)$  ne sera réalisée qu'après superposition d'une infinité de modes de FOURIER. Comme, en pratique, on se contente d'un développement limité, la fixation ne sera qu'approchée. On sait cependant que les coefficients de FOURIER  $u_{nm}$  minimisent l'erreur quadratique moyenne :

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left\{ f(\theta) - \sum_{n=1}^N \sum_{m=0}^1 u_{nm} \cos\left(n\theta + m\frac{\pi}{2}\right) \right\}^2 d\theta \quad (4.3.3)$$

C'est donc le meilleur choix possible au sens des moindres carrés. D'autre part, les conditions d'extrémalité de (4.3.3) s'écrivent encore

$$\int_0^{2\pi} \left\{ f(\theta) - \sum_{n=1}^N \sum_{m=0}^1 u_{nm} \cos\left(n\theta + m\frac{\pi}{2}\right) \right\} \delta u_{nm} \cos\left(n\theta + m\frac{\pi}{2}\right) d\theta = 0 \quad (4.3.4)$$

Dès lors, si  $p$  est la réaction, on obtient, en posant  $\delta u_{nm} = p_{nm}$ ,

$$\int_0^{2\pi} \left\{ f(\theta) - \sum_{n=1}^N \sum_{m=0}^1 u_{nm} \cos\left(n\theta + m\frac{\pi}{2}\right) \right\} p_{nm} \cos\left(n\theta + m\frac{\pi}{2}\right) d\theta = 0 \quad (4.3.5)$$

ce qui signifie que les harmoniques  $p_{nm}$  représentés ont leur travail inchangé.

### 3.2. Fixation en quelques points d'une circonférence

Soit une analyse limitée à un nombre  $N$  de modes non identiquement nuls pour un déplacement  $u$ . Sur une circonférence donnée, on veut exprimer un nombre  $F$  de fixations ponctuelles de  $u$ . Selon les valeurs respectives de  $N$  et  $F$ , il convient de distinguer trois cas :

(i)  $F > N$  Dans ce cas, on a plus de conditions que de modes, et les fixations ne peuvent être exprimées exactement.

(ii)  $F = N$  Dans ce cas, les composantes de FOURIER sont déterminées exactement par les conditions aux limites. La vérification de celles-ci est exacte.

(iii)  $F < N$  Les conditions aux limites laissent subsister une certaine liberté sur la frontière. Les fixations pourront être vérifiées exactement. Les deux premiers cas se traitent de la même manière. Quant au dernier, il nécessite un traitement spécial, d'ailleurs plus difficile. Mais il faut bien se rendre compte que c'est le seul cas où la solution sera vraiment valable, en ce sens que l'on pourra étudier la perturbation due à l'appui.

3.2.1. Le nombre de fixations est supérieur ou égal au nombre de modes de FOURIER ( $N \leq F$ )

Soient  $\theta_1, \dots, \theta_F$  les azimuts des points où sont faites les fixations. On doit donc résoudre le problème suivant

$$\begin{cases} u(\theta_1) = u_1 \\ \vdots \\ u(\theta_F) = u_F \end{cases} \quad (4.3.6)$$

Comme ces équations ne sont pas, en général, compatibles, nous utiliserons la méthode des moindres carrés. Il s'agit donc de minimiser la forme quadratique

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(u_i, a_{nm}) = & \sum_{i=1}^F \{ u_i^2 - 2 \sum_{nm} a_{nm} \cos(n\theta_i + m\frac{\pi}{2}) \cdot u_i \\ & + \sum_{nm} \sum_{pq} a_{nm} a_{pq} \cos(n\theta_i + m\frac{\pi}{2}) \\ & \cos(p\theta_i + q\frac{\pi}{2}) \} \end{aligned} \quad (4.3.7)$$

Posant

$$C = \begin{bmatrix} 1 & \cos \theta_1 & \cos (\theta_1 + \frac{\pi}{2}) & \dots \\ 1 & \cos \theta_2 & \cos (\theta_2 + \frac{\pi}{2}) & \dots \\ \vdots & & & \\ 1 & \cos \theta_F & \cos (\theta_F + \frac{\pi}{2}) & \dots \end{bmatrix} \quad (4.3.7)$$

$$u^T = \{u_1, \dots, u_F\}, \quad a = \{a_{nm}\} \quad (4.3.8)$$

il vient

$$(u_i, a_{nm}) = u^T u - 2 u^T C a + a^T C^T C a \quad (4.3.9)$$

La solution du problème est donc

$$a = \{C^T C\}^{-1} C^T u \quad (4.3.10)$$

Pour le cas du développement en  $\sin (n \theta + m \frac{\pi}{2})$ , le même raisonnement reste valable, sauf à remplacer la matrice  $C$  par la matrice

$$S = \begin{bmatrix} \sin \frac{\pi}{2} & \sin \theta_1 & \sin (\theta_1 + \frac{\pi}{2}) & \dots \\ \vdots & & & \\ \sin \frac{\pi}{2} & \sin \theta_F & \sin (\theta_F + \frac{\pi}{2}) & \dots \end{bmatrix} \quad (4.3.11)$$

Il vient alors

$$a = \{S^T S\}^{-1} S^T u \quad (4.3.12)$$

Dans le cas de fixations équidistantes sur la circonférence, les formules (4.3.10) et (4.3.12) se simplifient notablement. En effet, dans ce cas, les matrices C et S ont leurs colonnes orthogonales, du moins si aucun terme intermédiaire ne manque dans le développement, ce qui permet d'écrire

$$\begin{aligned} \{C^T C\}^{-1} &= \frac{1}{F} \text{diag} (c_{nm}) \\ \{S^T S\}^{-1} &= \frac{1}{F} \text{diag} (s_{nm}) \end{aligned} \quad (4.3.13)$$

avec

$$\begin{aligned} c_{nm} &= \begin{cases} 2 & \text{si } n \neq 0, m \neq 0 \\ 1 & \text{si } n = 0, m = 0 \\ 0 & \text{si } n = 0, m = 1 \end{cases} \\ s_{nm} &= \begin{cases} 2 & \text{si } n \neq 0, m \neq 0 \\ 0 & \text{si } n = 0, m = 0 \\ 1 & \text{si } n = 0, m = 1 \end{cases} \end{aligned} \quad (4.3.14)$$

Il vient donc simplement, dans le cas des fixations équidistantes,

$$a_{nm} = \begin{bmatrix} \frac{C_{nm}}{F} \sum_{i=1}^F f(\theta_i) \cos(n\theta_i + m\frac{\pi}{2}) \\ \frac{S_{nm}}{F} \sum_{i=1}^F f(\theta_i) \sin(n\theta_i + m\frac{\pi}{2}) \end{bmatrix} \quad (4.3.15)$$

selon le développement utilisé. Ces formules peuvent d'ailleurs être considérées comme un prolongement des formules

(4.2.38) au cas où le nombre de modes calculés dépasse le nombre de points d'interpolation.

Lorsque  $N < F$ , il s'agit évidemment d'une méthode approchée. Il convient donc de vérifier quelles sont les valeurs effectivement prises par le déplacement au droit des fixations. En règle générale, lorsque  $N$  diffère peu de  $F$ , on obtient d'excellents résultats, mais la solution est nettement moins satisfaisante si  $F$  est beaucoup plus grand que  $N$ . Considérons par exemple un tassement d'appui unitaire en  $\theta = 0^\circ$  d'une structure sur 52 appuis. On obtient, pour un développement en cosinus :

$$w_{nm} = \frac{C_{nm}}{52} \cos \left( m \frac{\pi}{2} \right),$$

soit

$$w_{00} = \frac{1}{52}, \quad w_{n0} = \frac{1}{26}, \quad w_{n1} = 0.$$

Calculons la somme des termes en  $0^\circ$ , lorsque  $n$  croît : on obtient, pour un développement jusqu'au nombre d'onde  $n$  :

$$w(0) = \frac{2n + 1}{52},$$

ce qui donne une erreur de 21% pour  $n = 20$  ( $N = 41$ ), de 1,9% pour  $n = 25$  ( $N = 51$ ). On constate donc que l'erreur sur les fixations n'est petite que si  $N$  diffère peu de  $F$ , comme on pouvait s'y attendre.

Remarquons enfin que si toutes les fixations ponctuelles envisagées sont nulles, les formules (4.2.10) et (4.2.12) donnent

$$a = \begin{bmatrix} (C^T C)^{-1} C^T \\ (S^T S)^{-1} S^T \end{bmatrix} 0 = 0 \quad (4.3.16)$$

ce qui signifie que dans le cas de  $F \geq N$  fixations homogènes sur la circonférence, la seule solution, est de fixer toutes les composantes de FOURIER. Il est donc impossible de tenir compte des oscillations entre les appuis, et ceux-ci équivalent, dans le cadre de l'analyse, à un appui continu.

### 3.2.2. Le nombre de fixations est strictement inférieur au nombre d'analyses

Dans ce cas, il est possible de vérifier exactement les fixations. Celles-ci peuvent être considérées comme des contraintes linéaires de la forme

$$\sum_{nm} (q_j)_{nm} \begin{bmatrix} \cos (n \theta_i + m \frac{\pi}{2}) \\ \sin (n \theta_i + m \frac{\pi}{2}) \end{bmatrix} = \bar{q}_j (\theta_i) \quad (4.3.17)$$

Comme ces contraintes lient les différents harmoniques, ceux-ci cessent d'être découplés, le système à résoudre étant

$$\begin{bmatrix} K_{00} & & & & & & & H_{00} \\ & K_{01} & & & & & & H_{01} \\ & & K_{10} & & & & & H_{10} \\ & & & K_{11} & & & & H_{11} \\ & & & & \cdot & & & \cdot \\ & & & & \cdot & & & \cdot \\ & & & & \cdot & & & \cdot \\ & & & & \cdot & & & \cdot \\ H_{00}^T & H_{01}^T & H_{10}^T & H_{11}^T & \dots & 0 & & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_{00} \\ q_{01} \\ q_{10} \\ q_{11} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{00} \\ g_{01} \\ g_{10} \\ g_{11} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \bar{q}_j \end{bmatrix} \quad (4.3.18)$$

où  $\bar{q}$  représente le vecteur des multiplicateurs de LAGRANGE

associé aux contraintes linéaires, qui sont représentées par l'équation matricielle

$$H_{00}^T q_{00} + H_{01}^T q_{01} + H_{10}^T q_{10} + \dots = \bar{q} \quad (4.3.19)$$

Dans bien des cas cependant, les fixations ponctuelles sont concentrées sur un petit nombre de cercles. On peut alors éviter la résolution du système complet (4.3.18) par la technique du superélément [L6] :

- a) pour chaque mode de FOURIER, on crée un superélément réduit aux seuls cercles concernés par les contraintes, c'est-à-dire que l'on condense tous les autres degrés de liberté.
- b) on établit l'expression des contraintes linéaires.
- c) on résout le système couplé formé au moyen des superéléments et des contraintes linéaires, ce qui fournit les déplacements cherchés sur les cercles où il y a des fixations ponctuelles.

Les fixations sont alors déterminées. Pour achever le problème,

- d) on restitue les déplacements intérieurs et les tensions de chaque superélément.
- e) on recombine déplacements et tensions.

L'avantage de cette technique est de limiter la résolution du système couplé à sa plus simple expression. Si, au vu des résultats, on estime que le nombre de modes de FOURIER utilisés est insuffisant, il faut créer les superéléments relatifs aux nouveaux harmoniques et refaire les étapes b, c, d et e, mais les anciens superéléments peuvent être réutilisés.

Insistons encore sur le fait que si l'on désire obtenir des renseignements précis sur le comportement de la structure au voisinage des appuis, il est nécessaire d'utiliser un nombre de modes nettement supérieur au nombre d'appuis situés sur une même circonférence, de manière à représenter le champ de déplacements avec suffisamment de richesse. Il va de soi que lorsque le nombre d'appuis est très grand, cette technique manque de souplesse. Dans ce cas, il est préférable d'analyser la zone des appuis au moyen d'un fin maillage par éléments finis classiques, en utilisant comme conditions aux limites les résultats d'une analyse sommaire par développements de FOURIER.

#### 4. ELEMENT DE COQUE A GEOMETRIE DE REVOLUTION

##### 4.1. Déplacements et connexion

Il s'agit d'un élément de coque basé sur la théorie exposée au chapitre 3. Les développements en série sont du type

$$\begin{aligned}
 u(s, \theta) &= \sum_{nm} u_{nm}(s) \cos(n\theta + m\frac{\pi}{2}) \\
 v(s, \theta) &= \sum_{nm} v_{nm}(s) \sin(n\theta + m\frac{\pi}{2}) \\
 w(s, \theta) &= \sum_{nm} w_{nm}(s) \cos(n\theta + m\frac{\pi}{2}) \\
 \alpha(s, \theta) &= \sum_{nm} \alpha_{nm}(s) \cos(n\theta + m\frac{\pi}{2}) \\
 \beta(s, \theta) &= \sum_{nm} \beta_{nm}(s) \sin(n\theta + m\frac{\pi}{2})
 \end{aligned} \tag{4.4.1}$$

On déduit donc des relations (3.3.14) et (3.3.22) l'expres-

sion suivante des paramètres de déformation

$$\bar{\varepsilon}_{ss} = \sum_{nm} \left( \frac{du_{nm}}{ds} + \frac{w_{nm}}{R_s} \right) \cos \left( n \theta + m \frac{\pi}{2} \right)$$

$$\bar{\varepsilon}_{\theta\theta} = \sum_{nm} \left( \frac{n}{r} v_{nm} + \frac{u_{nm}}{r} \frac{dr}{ds} + \frac{w_{nm}}{R_\theta} \right) \cos \left( n \theta + m \frac{\pi}{2} \right)$$

$$\bar{\chi}_{ss} = \sum_{nm} \left( \frac{d\alpha_{nm}}{ds} \right) \cos \left( n \theta + m \frac{\pi}{2} \right)$$

$$\bar{\chi}_{\theta\theta} = \sum_{nm} \left( \frac{1}{r} \alpha_{nm} \frac{dr}{ds} + \frac{n}{r} \beta_{nm} \right) \cos \left( n \theta + m \frac{\pi}{2} \right)$$

$$\bar{\gamma}_s = \sum_{nm} \left( \frac{dv_{nm}}{ds} \right) \sin \left( n \theta + m \frac{\pi}{2} \right) \quad (4.4.2)$$

$$\bar{\gamma}_\theta = \sum_{nm} \left( -\frac{n}{r} u_{nm} - \frac{1}{r} v_{nm} \frac{dr}{ds} \right) \sin \left( n \theta + m \frac{\pi}{2} \right)$$

$$\bar{\gamma}_{s\zeta} = \sum_{nm} \left( \alpha_{nm} + \frac{dw_{nm}}{ds} - \frac{u_{nm}}{R_s} \right) \cos \left( n \theta + m \frac{\pi}{2} \right)$$

$$\bar{\gamma}_{\theta\zeta} = \sum_{nm} \left( \beta_{nm} - \frac{n}{r} w_{nm} - \frac{v_{nm}}{R_\theta} \right) \sin \left( n \theta + m \frac{\pi}{2} \right)$$

$$\bar{\delta}_s = \sum_{nm} \left( \frac{d\beta_{nm}}{ds} - \frac{1}{R_s} \frac{dv_{nm}}{ds} \right) \sin \left( n \theta + m \frac{\pi}{2} \right)$$

$$\bar{\delta}_\theta = \sum_{nm} \left( -\frac{n}{r} \alpha_{nm} - \frac{1}{r} \beta_{nm} \frac{dr}{ds} + \frac{1}{R_\theta} \left( \frac{n}{r} u_{nm} + \frac{1}{r} v_{nm} \frac{dr}{ds} \right) \right) \sin \left( n \theta + m \frac{\pi}{2} \right)$$

Dans chaque élément, on utilise la coordonnée normalisée

$$\xi = \frac{s}{l} \quad (4.4.3)$$

où  $l$  est la longueur de l'élément. Cette coordonnée varie entre 0 et 1, ce qui assure un meilleur conditionnement numérique. Pour le degré  $k$  ( $k = 2,3$ ), et pour un harmonique  $(n,m)$  donné, on pose alors

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \sum_{p=0}^k \begin{bmatrix} \alpha_p \\ \beta_p \\ \gamma_p \end{bmatrix} \xi^p \quad \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \sum_{p=0}^{k-1} \begin{bmatrix} \delta_p \\ \varepsilon_p \end{bmatrix} \xi^p \quad (4.4.4)$$

soit, sous une forme matricielle globale,

$$u = N(\xi) a, \quad (4.4.5)$$

où  $u$  sont les déplacements,  $a$  les paramètres de ces champs, et  $N$  une matrice de monômes. Comme degrés de liberté de l'élément, on choisira (fig.4.1)

- les trois déplacements  $u_r$ ,  $u_\theta$ ,  $u_z$  aux cercles nodaux d'extrémité
- les rotations  $(\alpha, \beta)$  en ces mêmes cercles
- les trois déplacements en  $(k-1)$  cercles intermédiaires
- les rotations  $\alpha$  et  $\beta$  en  $(k-2)$  cercles intermédiaires.

Ces degrés de libertés  $q$  peuvent être exprimés en termes des paramètres par une relation dite de connexion :

$$q = C a \quad (4.4.6)$$

#### 4.2. Calcul de la matrice de raideur

On calcule les paramètres de déformation par les relations (4.4.2) soit formellement, en appelant  $\delta$  l'opé-

rateur approprié,

$$e = \partial u = \partial N a = B a = B C^{-1} q \quad (4.4.7)$$

L'utilisation des paramètres  $\bar{\gamma}_s$ ,  $\bar{\gamma}_\theta$ ,  $\bar{\delta}_s$ ,  $\bar{\delta}_\theta$ , au lieu de  $\bar{\gamma}_{s\theta}$  et  $\bar{\chi}_{s\theta}$ , présente l'avantage que la matrice B est composée de monômes et se prête de ce fait à une organisation pseudo-formelle des calculs. Cette technique, abondamment pratiquée dans le logiciel SAMCEF et par ailleurs assez peu connue, permet de mener les calculs d'une manière systématique et économique. On en trouvera une description détaillée dans [D15].

Si H est la matrice de HOOKE, la densité d'énergie sera

$$W = \frac{1}{2} e^T H e \quad (4.4.8)$$

Intégrant sur l'élément, on obtient

$$U_{nm} = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 W r \ell d\xi = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 (e^T H e) r \ell d\xi$$

Certains paramètres de déformation sont pondérés par un sinus, d'autres par un cosinus : nous écrirons donc

$$e = e_c \cos \left( n \theta + m \frac{\pi}{2} \right) + e_s \sin \left( n \theta + m \frac{\pi}{2} \right) \quad (4.4.9)$$

ce qui entraîne

$$W = W_c \cos^2 \left( n \theta + m \frac{\pi}{2} \right) + W_s \sin^2 \left( n \theta + m \frac{\pi}{2} \right) \quad (4.4.10)$$

avec

$$W_c = \frac{1}{2} e_c^T H e_c \quad (4.4.11)$$

$$W_s = \frac{1}{2} e_s^T H e_s$$

le terme croisé devant être nul, comme nous l'avons vu dans la section 2 de ce chapitre. Il vient donc

$$U_{nm} = c_{nm} \int_0^1 W_c r \ell d\xi + s_{nm} \int_0^1 W_s r \ell d\xi \quad (4.4.12)$$

avec

$$c_{nm} = \int_0^{2\pi} \cos^2 \left( n\theta + m\frac{\pi}{2} \right) d\theta = \pi \{ 1 + \delta_{n,0} (1 - 2\delta_{m,1}) \} \quad (4.4.13)$$

$$s_{nm} = \int_0^{2\pi} \sin^2 \left( n\theta + m\frac{\pi}{2} \right) d\theta = \pi \{ 1 - \delta_{n,0} (1 - 2\delta_{m,0}) \}$$

Finalement, si l'on note

$$e_c = B_c a, \quad e_s = B_s a \quad (4.4.14)$$

on obtient

$$U = \frac{1}{2} a^T I a \quad (4.4.15)$$

où apparaît la raideur paramétrique

$$I = c_{nm} \int_0^1 (B_c^T H B_c) r \ell d\xi + s_{nm} \int_0^1 (B_s^T H B_s) r \ell d\xi \quad (4.4.16)$$

La matrice de raideur  $y$  est directement liée par la relation

$$K = C^{-T} I C^{-1} \quad (4.4.17)$$

Pour effectuer l'intégration, la méthode pseudo-formelle exige le calcul préalable d'une table d'intégrales de la forme

$$A(i,j) = \int_0^1 \xi^i r^{-j} r \ell d\xi \quad (4.4.18)$$

La présence d'exposants négatifs rend l'intégration par variation des primitives imprécise [M4]. Aussi a-t-on re-

cours à une méthode de GAUSS à neuf points, qui assure une bonne précision et une excellente stabilité numérique. De plus, nous verrons que cette méthode permet de traiter correctement les éléments situés sur l'axe.

#### 4.3. Passage aux axes structuraux. Compatibilité

Dans le but de pouvoir traiter les coques à angles ainsi que les intersections de coques, il convient de ramener les déplacements dans le système structural ( $r, \theta, z$ ). Pour les déplacements du feuillet moyen, cette transformation est un changement d'axes élémentaires et ne pose pas de problème : on a en effet (fig.4.2)

$$u = u_r \sin \phi - u_z \cos \phi$$

$$w = u_r \cos \phi + u_z \sin \phi \quad (4.4.19)$$

$$v = u_\theta$$

Par contre, les rotations  $\alpha$  et  $\beta$  sont au nombre de deux, tandis que les rotations structurales sont au nombre de trois,  $\phi_r, \phi_\theta, \phi_z$ . Pour exprimer la connexion, on développe les premières en termes des secondes (fig.4.3)

$$\alpha = \phi_\theta$$

$$(4.4.20)$$

$$\beta = \phi_r \sin \phi + \phi_z \cos \phi$$

Cette relation n'étant pas bijective, il est naturel de se demander ce que cela signifie. Tout d'abord, lorsque deux éléments de coque se raccordent sans former d'angle, il est clair que les conditions correctes sont (fig.4.4)

$$\alpha (1) = \alpha (2) \quad , \quad \beta (1) = \beta (2) \quad (4.4.21)$$

ce qui exprime en fait que les déplacements  $u$  et  $v$  sont

continus sur toute l'épaisseur de la coque. On s'y ramène en posant

$$\phi_{\zeta} = \phi_r \cos \phi + \phi_z \sin \phi = 0 \quad (4.4.22)$$

ce qui peut être obtenu simplement à l'aide d'axes locaux. Par contre, lorsque les deux éléments de coque forment un angle, la géométrie est discontinue, et on se rend aisément compte que la notion de compatibilité des rotations  $\beta$  perd son sens (fig.4.5). Les relations

$$\beta(1) = -\phi_r \sin \phi(1) + \phi_z \cos \phi(1) \quad (4.4.23)$$

$$\beta(2) = -\phi_r \sin \phi(2) + \phi_z \cos \phi(2)$$

forment alors un système bijectif, ce qui revient à dire que tout se passe comme si les rotations  $\beta(1)$  et  $\beta(2)$  n'étaient pas connectées. L'examen des conditions aux limites (3.3.37) montre que la condition de transition naturelle associée à la continuité de  $\beta$  est la transmission de l'effort  $M_{s\theta}$ . Dès lors, l'effort  $M_{s\theta}$  s'annule au sens faible à l'extrémité des éléments. Il existe un phénomène analogue dans les idéalizations de coques à facettes par des coques de HENCKY-REISSNER, ce qui contredit l'opinion communément répandue [11] selon laquelle ces coques seraient parfaitement compatibles. Cependant, ce phénomène ne prête pas à conséquence si le rayon de courbure est grand devant l'épaisseur. On se rappellera d'ailleurs que la théorie des caissons [F7,F8] néglige totalement la variation de cisaillement sur l'épaisseur des tôles, de même que la théorie approchée des coques cylindriques ouvertes de SCHOERER [10].

#### 4.4. Matrice de masse

En analyse dynamique, il faut évaluer la masse. L'énergie cinétique s'écrit

$$2 T = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 r \ell d\xi \int_{-t/2}^{t/2} \rho \{ (\dot{u} + \zeta \dot{\alpha})^2 + (\dot{v} + \zeta \dot{\beta})^2 + \dot{w}^2 \} \left(1 + \frac{\zeta}{R_s}\right) \left(1 + \frac{\zeta}{R_\theta}\right) d\zeta \quad (4.4.24)$$

Négligeant les termes de courbure, on obtient l'expression condensée

$$\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 (\dot{u}^T J \dot{u}) r \ell d\xi \quad (4.4.25)$$

avec

$$J = \text{diag} \left\{ \rho t, \rho t, \rho t, \rho \frac{t^3}{12}, \rho \frac{t^3}{12} \right\} \quad (4.4.26)$$

Tenant compte des relations (4.4.5) et (4.4.6), on obtient successivement

$$2 T = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 (\dot{a}^T N^T J N \dot{a}) r \ell d\xi = \dot{q}^T M \dot{q} \quad (4.4.27)$$

avec

$$M = C^{-T} \left\{ \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 (N^T J N) r \ell d\xi \right\} C^{-1} \quad (4.4.28)$$

qui peut être décomposée, comme la raideur, en

$$C^{-T} \left\{ c_{nm} \int_0^1 (N_c^T J N_c) r \ell d\xi + s_{nm} \int_0^1 (N_s^T J N_s) r \ell d\xi \right\} C^{-1} \quad (4.4.29)$$

Dans le cas des sandwiches et des coques raidies, il faut remplacer  $J$  par une matrice équivalente. Le calcul de ces caractéristiques est assez aisé [D17], et ne sera pas détaillé ici.

#### 4.5. Termes thermiques

En présence d'un accroissement de température  $T(s, \theta, \zeta)$  par rapport à la température de référence, la densité d'énergie de déformation dépend de la température. Il convient donc de la développer en série des déformations et de la température. En se limitant au second ordre, on obtient

$$W = W_0(T) - T \beta_{ij} \varepsilon_{ij} + \frac{1}{2} C_{ijkl} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl} \quad (4.4.30)$$

Pour  $\varepsilon_{ij} = 0$ , on obtient les tensions

$$\sigma_{ij}(T) = \left. \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{ij}} \right|_{\varepsilon_{ij}=0} = -\beta_{ij} T \quad (4.4.31)$$

ce qui signifie que les termes  $(-T\beta_{ij})$  ne sont autres que les tensions de bridage de DUHAMEL. Pour obtenir leur expression en termes des coefficients de dilatation thermique  $\alpha_{ij}$ , considérons une dilatation libre d'un morceau de la structure, préalablement découpé pour supprimer les relations de compatibilité. Cette dilatation tendra à minimiser l'énergie, ce qui entraîne

$$\beta_{ij} T = -C_{ijkl} \varepsilon_{kl}$$

soit

$$\varepsilon_{kl} = -C_{klij}^{-1} \beta_{ij} T = \alpha_{kl} T$$

ou encore

$$\beta_{ij} = -C_{ijkl} \alpha_{kl} \quad (4.4.32)$$

Nous nous limiterons au cas où le corps est thermiquement orthotrope, c'est-à-dire pour la coque

$$\beta_{s\theta} = 0 \quad , \quad \beta_{s\zeta} = 0 \quad , \quad \beta_{\theta\zeta} = 0 \quad (4.4.33)$$

L'énergie de la coque, intégrée sur l'épaisseur s'écrit alors, en omettant le terme invariant  $W_0$ ,

$$W = N_{ss} (T) \bar{\epsilon}_{ss} + N_{\theta\theta} (T) \bar{\epsilon}_{\theta\theta} + M_{ss} (T) \bar{\chi}_{ss} \\ + M_{\theta\theta} (T) \bar{\chi}_{\theta\theta} + W_2,$$

où  $W_2$  est le terme classique d'énergie élastique, tandis que les efforts de réduction de DUHAMEL sont donnés par

$$N_{ss} (T) = - \int_{-t/2}^{t/2} \beta_{ss} T \mu d \zeta \\ N_{\theta\theta} (T) = - \int_{-t/2}^{t/2} \beta_{\theta\theta} T \mu d \zeta \\ M_{ss} (T) = - \int_{-t/2}^{t/2} \beta_{ss} T \zeta \mu d \zeta \\ M_{\theta\theta} (T) = - \int_{-t/2}^{t/2} \beta_{\theta\theta} T \zeta \mu d \zeta \quad (4.4.34)$$

où

$$\mu = \left(1 + \frac{\zeta}{R_s}\right) \left(1 + \frac{\zeta}{R_\theta}\right).$$

Pour une température de la forme  $T = T_0 + \zeta T_1$ , on obtient donc, en négligeant les termes de courbure,

$$N_{ss} (T) = - \beta_{ss} T_0 t \quad , \quad N_{\theta\theta} (T) = - \beta_{\theta\theta} T_0 t \\ M_{ss} (T) = - \beta_{ss} T_1 \frac{t^3}{12} \quad , \quad M_{\theta\theta} (T) = - \beta_{\theta\theta} T_1 \frac{t^3}{12} \quad (4.4.35)$$

Le terme d'énergie thermique peut être interprété comme le travail d'une charge. En effet, il s'écrit sous la forme  $s^T (T) e$ , où  $s$  est le vecteur des tensions thermiques; tenant compte de (4.4.7), on a donc

$$W_1 = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 r \ell \{s^T (T) B C^{-1} q\} d\xi = -g^T q,$$

où

$$g = -C^{-T} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 (B^T s (T)) r \ell d\xi \quad (4.4.36)$$

s'interprète comme une charge.

Enfin, les tensions se calculent par

$$s = \frac{\partial W}{\partial e} = \frac{\partial}{\partial e} (s (T)^T e + \frac{1}{2} e^T H e) = H e + s (T) \quad (4.4.37)$$

ce qui signifie qu'il faut ajouter aux tensions provenant des déformations les tensions de bridage de DUHAMEL (4.4.34).

## 5. ELEMENTS DE TORES ISOPARAMETRIQUES

Pour les volumes, on peut utiliser une grande variété d'éléments, comme des tores triangulaires [M4] ou rectangulaires [D7]. Mais les éléments les plus utiles sont sans conteste les éléments de tore isoparamétriques dans le plan méridien. Les éléments isoparamétriques sont à présent bien connus [Z2,Z3,M11,M6]. Mais jusqu'à présent, tous les exposés des éléments isoparamétriques ont été présentés en termes des fonctions de forme, plutôt que des monômes. Or, une formulation basée sur l'utilisation des monômes et d'une matrice de connexion présente les avantages suivants :

- (i) les monômes sont des fonctions simples, alors que les fonctions de forme ont une expression compliquée et constituent une importante source d'erreurs lors de la programmation.

(ii) la dérivation des monômes se fait aisément par une méthode pseudo-formelle, tandis que pour les fonctions de forme, il faut effectuer la dérivation analytiquement et transcrire le résultat dans le logiciel, ce qui est une nouvelle source d'erreurs.

(iii) la méthode des monômes permet de programmer des éléments de degré variable, ainsi que la réduction de degré sur un bord, de façon à rendre possible la transition entre éléments de degrés différents.

En un mot, la méthode des monômes est plus simple, plus souple et plus générale. Ces nombreux avantages nous ont amené à repenser entièrement la méthode de génération des éléments isoparamétriques en abandonnant l'utilisation des fonctions de forme.

#### 5.1. Définition des éléments isoparamétriques. Connexion

Un élément isoparamétrique est caractérisé par le fait que les coordonnées et les déplacements sont décrits par les mêmes fonctions. On a donc

$$\begin{cases} x_i = s^T b(i) \\ u_i = s^T a(i) \end{cases} \quad (4.5.1)$$

où  $i$  est l'indice de la composante considérée, et  $s$ , un vecteur de fonctions des variables  $\xi_k$ , linéairement indépendantes.

La connexion s'exprime alors d'une manière classique; les points de connexion étant numérotés de 1 à  $N$ , on a

$$\begin{cases} x_i(1) = s^T(1) b(i) \\ \vdots \\ x_i(N) = s^T(N) b(i), \end{cases}$$

soit, sous forme condensée,

$$y(i) = C b(i) \quad (4.5.2)$$

où

$$y^T(i) = \{x_i(1), \dots, x_i(N)\} \quad (4.5.3)$$

$$C^T = \{s(1), \dots, s(N)\} \quad (4.5.4)$$

De la même façon, on a

$$q(i) = C a(i) \quad (4.5.5)$$

avec

$$q^T(i) = \{u_i(1), \dots, u_i(N)\} \quad (4.5.6)$$

### 5.2. Représentation des modes rigides

Lorsque le vecteur  $s$  contient la fonction constante  $\xi \mapsto 1$ , on a la relation fondamentale

$$s^T C^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} = 1 \quad (4.5.7)$$

que l'on déduit aisément de l'indépendance linéaire des fonctions composant le vecteur  $s$ . Cette relation entraîne que les modes rigides de translation sont représentés. En effet, si l'on pose

$$q^T(i) = \beta \{1, \dots, 1\}, \quad \beta \in \mathbb{R},$$

on obtient

$$u_i = \beta s^T C^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} = \beta \quad (4.5.8)$$

Posons à présent

$$q(i) = \alpha y(j).$$

Il vient alors, en vertu de (4.4.38),

$$u_i = s^T C^{-1} q(i) = \alpha s^T C^{-1} y(j) = \alpha x_j \quad (4.5.9)$$

Ainsi, du fait de la caractérisation (4.5.1) des éléments isoparamétriques et moyennant condition de présence de la fonction constante, les modes constants et linéaires sont toujours présents. En coordonnées cartésiennes, cela signifie que les modes rigides et les modes de déformation constante sont représentés. Pour un tore de révolution, les modes rigides sont des fonctions linéaires affines de  $r$  et  $z$ , multipliées par  $1$ ,  $\cos \theta$  ou  $\sin \theta$ . Ils sont donc représentés. Par contre, les modes de déformation constante sont absents, car ils contiennent des termes en  $\frac{1}{r}$ .

### 5.3. Expressions des déformations et de l'énergie

Le calcul des déformations nécessite la dérivation des déplacements. Introduisant la matrice jacobienne

$$J_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial \xi_j} \quad (4.5.10)$$

on obtient

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_j} = (J^{-T})_{jk} \frac{\partial u_i}{\partial \xi_k} = \frac{1}{J} (\text{mineur}_{jk} J) \frac{\partial u_i}{\partial \xi_k} \quad (4.5.11)$$

où  $J$  est le déterminant jacobien. Le calcul de l'énergie demandera donc l'évaluation d'intégrales du type

$$\frac{1}{J} (\text{mineur}_{jk} J) (\text{mineur}_{lm} J) \frac{\partial u_i}{\partial \xi_k} \frac{\partial u_p}{\partial \xi_m} \quad (4.5.12)$$

où le jacobien apparaît au dénominateur : il s'agit de fractions rationnelles.

#### 5.4. Intégration numérique

L'expression de l'énergie de déformation est telle que son calcul exact est difficile, sinon impossible. Il est donc nécessaire de recourir à l'intégration numérique. La question qui se pose alors est de savoir quelle précision il faut exiger de l'intégration, étant entendu qu'il s'agit d'un facteur déterminant dans le coût de génération de l'élément. Nous verrons en effet que le nombre d'opérations est sensiblement proportionnel au nombre de points d'intégration.

Pour ce qui est de la convergence, on se réfère généralement à un critère dû à B.IRONS [23]. Si B est la matrice liant les déformations aux paramètres du champ :

$$e = B a = B \begin{bmatrix} a(1) \\ a(2) \\ a(3) \end{bmatrix} \quad (4.5.13)$$

les forces de l'élément sont données par

$$g = \left( \int_V B^T H B dV \right) a, \quad (4.5.14)$$

H étant la matrice de HOOKE. Nous avons vu que dans le cas des coordonnées cartésiennes, les modes de déformation constante sont toujours présents dans un élément isoparamétrique. Cela étant, le critère de B.IRONS stipule que les forces cor-

respondant à ces modes de déformation constante, soit

$$\int_V HB \, dV \quad (4.4.15)$$

doivent être intégrés exactement. Si l'on suppose que la matrice de HOOKE est constante, cela revient à dire que les déformations doivent être intégrées exactement. Etant donné l'expression des déformations en coordonnées cartésiennes :

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} (D_i u_j + D_j u_i) \quad (4.5.16)$$

et le fait que les coordonnées ont par définition la même forme que les déplacements, il est équivalent d'exiger le calcul correct de

$$\int_V \frac{1}{2} (D_i x_j + D_j x_i) \, dV = \delta_{ij} V \quad (4.5.17)$$

ce qui signifie qu'en coordonnées cartésiennes, le critère de B. IRONS revient à exiger l'intégration exacte du volume de l'élément.

Il est intéressant de noter que ce critère admet une interprétation variationnelle [D15]. Le principe général à trois champs contenant toutes les équations de l'élasticité peut s'écrire

$$U(e) - \int_V s^T (e - \partial u) \, dV - P(u) \quad \text{stat,} \quad (4.5.18) \\ \text{u, s, e}$$

où  $U(e)$  représente l'énergie de déformation,  $P(u)$  le travail des charges,  $e$  les déformations,  $s$  les tensions. La variation des tensions  $s$  conduit à l'équation

$$\int_V \delta s^T (e - \partial u) \, dV = 0. \quad (4.5.19)$$

Si l'on choisit un champ  $s$  constant dans chaque élément, ce qui représente le minimum pour assurer la constistance, on obtient l'équation

$$\int_{E \& t} e \, dV = \int_{E \& t} \partial u \, dV \quad (4.5.20)$$

Définissons le champ de déformation  $e$  comme l'interpolé de  $\partial u$  aux points d'intégration : l'équation (4.5.20) équivaut alors au critère de B. IRONS. L'avantage de cette présentation réside dans le fait qu'elle ne nécessite pas que les coordonnées soient cartésiennes. Si la condition (4.5.20) est vérifiée, le principe (4.5.18) se ramène au principe simplifié

$$U(e) - P(u) \quad \text{stat} \quad (4.5.21)$$

qui, vu la liaison entre  $e$  et  $\partial u$ , s'identifie à un principe de variation des déplacements. Enfin, on remplace l'énergie de déformation par une autre fonctionnelle :

$$U^*(e) = \sum_i \mathcal{H}_i W\{e(x_i)\} \quad (4.5.22)$$

$\mathcal{H}_i$  et  $x_i$  étant les poids et points d'intégration. Lorsque le diamètre des éléments décroît,  $U^* \rightarrow U$ . Ceci décrit complètement le processus d'intégration numérique.

Mais il existe une deuxième limitation : si le nombre de points d'intégration est trop faible, certains modes peuvent être totalement dépourvus d'énergie, ce qui crée une singularité artificielle de la matrice de raideur. Illustrons ce phénomène sur l'exemple très simple [S5] d'un champ thermique bilinéaire sur un rectangle (fig.4.6). On a

$$T = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 x y \quad (4.5.23)$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \alpha_2 + \alpha_4 y$$

$$\frac{\partial T}{\partial y} = \alpha_3 + \alpha_4 x \quad (4.5.24)$$

si bien que selon le critère d'IRONS, un seul point de GAUSS, située en (0,0), suffirait pour effectuer l'intégration. Mais alors, la paramètre  $\alpha_4$  est dépourvu d'énergie car  $x$  et  $y$  s'annulent à l'origine. On est donc obligé d'utiliser une formule à 4 points.

Dans le même ordre d'idées, l'utilisation d'une formule comportant le minimum de points pour éviter les modes dépourvus d'énergie peut conduire à des aberrations si tous les poids ne sont pas positifs. Supposons par exemple que l'on intègre une barre du troisième degré à l'aide d'une formule de NEWTON-COTES ouverte à trois points (fig.4.7). Les poids sont  $\frac{2}{3}$ ,  $-\frac{1}{3}$ ,  $\frac{2}{3}$ . La déformation s'écrit

$$\varepsilon = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 x^2 \quad (4.5.25)$$

Etant du second degré, elle sera correctement intégrée; de plus, elle est parfaitement définie par ses valeurs aux trois points  $x = \frac{1}{4}$ ,  $x = \frac{1}{2}$ ,  $x = \frac{3}{4}$ . Mais le mode

$$\varepsilon = \frac{(x - \frac{1}{4})(x - \frac{3}{4})}{(\frac{1}{2} - \frac{1}{4})(\frac{1}{2} - \frac{3}{4})} \quad (4.5.26)$$

a une énergie égale à  $-\frac{1}{3} E \Omega$ , valeur négative ! Ce résultat, tout à fait inadmissible, illustre la nécessité d'utiliser une formule à poids positifs lorsque le nombre de points d'intégration est réduit au strict minimum.

Pour ce qui est des diverses formules d'intégration numérique possibles, l'ouvrage le plus complet est certainement celui de STROUD [S6]. On trouvera dans [D15] un exposé orienté vers l'application aux éléments finis.

5.5. Un nouvel algorithme de génération des éléments isoparamétriques

Voici enfin l'algorithme annoncé. Nous le présentons ici en supposant qu'il y a trois coordonnées et trois composantes de déplacement. Les autres cas s'en déduisent de manière évidente. De même, nous ne considérerons que le calcul de la raideur, car le calcul de la masse, des forces généralisées, etc... , procède des mêmes idées et est plus simple.

5.5.1. Définition des coordonnées et des déplacements.

Connexion

Nous avons vu ci-dessus que les coordonnées et les composantes du déplacement dépendent de la même façon des variables  $\xi_k$ , ce que nous avons noté

$$\begin{cases} x_i = s^T(\xi) b(i) \\ u_i = s^T(\xi) a(i); \end{cases} \quad (4.5.27)$$

que les coordonnées et les déplacements nodaux sont liés à leurs paramètres respectifs  $b(i)$  et  $a(i)$  par la même relation de connexion

$$\begin{cases} y(i) = C b(i) \\ q(i) = C a(i) \end{cases} \quad (4.5.28)$$

avec

$$\begin{aligned} y(i)^T &= \{x_i(\xi_1), \dots, x_i(\xi_N)\} \\ q(i)^T &= \{u_i(\xi_1), \dots, u_i(\xi_N)\} \end{aligned} \quad (4.5.29)$$

$$C^T = \{s^T(\xi_1), \dots, s^T(\xi_N)\}$$

$\xi_1, \dots, \xi_N$  étant les points de l'espace de référence correspondant aux noeuds de l'élément.

L'ensemble de variation des  $\xi$  est une forme géométrique souvent très simple (cube) ou, en tout cas, toujours régulière. Dès lors, on peut assurer que l'inversibilité de la matrice de connexion  $C$  ne dépend pas de la forme géométrique finale. En particulier, deux ou plusieurs noeuds peuvent être confondus. Pour un élément de degré constant, on peut même inverser cette matrice une fois pour toutes et considérer  $C^{-1}$  comme une donnée. Par contre, pour un élément de degré variable, l'inversion numérique de cette matrice dans chaque élément est plus avantageuse, d'autant que cette procédure permet la réduction de degré sur un bord.

#### 5.5.2. Matrice jacobienne, déterminant jacobien, matrice des mineurs

La matrice jacobienne est donnée par

$$J_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial \xi_j} = \frac{\partial s^T}{\partial \xi_j} \cdot b(i) = p^T(j) b(i) \quad (4.5.30)$$

avec

$$p(j) = \frac{\partial s}{\partial \xi_j} \quad (4.5.31)$$

Posant

$$P = \begin{bmatrix} p^T(1) \\ p^T(2) \\ p^T(3) \end{bmatrix} \quad (4.5.32)$$

on a donc

$$J = \{P b (1) , P b (2) , P b (3)\} \quad (4.5.33)$$

Le déterminant jacobien est alors donné par

$$\mathcal{J} = \text{dtm } J \quad (4.5.34)$$

Enfin, on définira la matrice des mineurs

$$M_{ij} = \text{mineur}_{ij} J \quad (4.5.35)$$

### 5.5.3. Déformations

Le calcul des déformations implique celui des dérivées des déplacements. Ce dernier s'effectue à l'aide de la formule

$$\frac{\partial u_k}{\partial x_i} = (J^{-T})_{ij} \frac{\partial u_k}{\partial \xi_j} = \frac{1}{\mathcal{J}} M_{ij} p^T (j) a (k) \quad (4.5.36)$$

Regroupant toutes les déformations en un vecteur  $e$ , on obtient une expression de la forme

$$e = B a \quad (4.5.37)$$

où

$$a^T = \{a^T (1) , a^T (2) , a^T (3)\} \quad (4.5.38)$$

### 5.5.4. Energie de déformation

Si  $H$  est la matrice de HOOKE du matériau, la densité d'énergie de déformation est donnée par

$$W = \frac{1}{2} e^T H e \quad (4.5.39)$$

Au point d'intégration numéro  $k$ , on a donc, en vertu de (4.5.37),

$$W (k) = \frac{1}{2} a^T I (k) a \quad (4.5.40)$$

avec

$$I(k) = B^T(k) H(k) B(k) \quad (4.5.41)$$

Faisant la somme sur les différents points d'intégration, avec les poids  $\mathcal{H}(k)$ , on obtient

$$U = \frac{1}{2} a^T I a \quad (4.5.42)$$

avec

$$I = \sum_k \mathcal{H}(k) I(k) \quad (4.5.43)$$

#### 5.5.5. Matrice de raideur

Il faut encore exprimer les relations de connexion.

Si l'on pose

$$\bar{C} = \begin{bmatrix} C & 0 & 0 \\ 0 & C & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix} \quad (4.5.44)$$

ces relations peuvent s'écrire

$$a = \bar{C}^{-1} q \quad (4.5.45)$$

ce qui donne

$$U = \frac{1}{2} a^T I a = \frac{1}{2} q^T K q \quad (4.5.46)$$

avec

$$K = \bar{C}^{-T} I \bar{C}^{-1} \quad (4.5.47)$$

### 5.5.6. Réduction de degré

La réduction de degré sur une face revient à exprimer les déplacements  $q$  en termes d'un nombre réduit de déplacements  $q_R$ , à l'aide d'une relation du type

$$q = R q_R \quad (4.5.48)$$

La détermination de la matrice  $R$  se fait de la manière suivante : sur une face, les déplacements sont de la forme

$$u(i) = m^T c(i) \quad (4.5.49)$$

où  $m^T$  est un vecteur de monômes, et  $c(i)$  un vecteur de paramètres, dépendant des  $a(i)$  d'une manière qu'il n'est pas nécessaire de préciser. Après réduction, ils sont de la forme

$$u_R(i) = m_R^T c(i) \quad (4.5.50)$$

où  $m_R$  est un vecteur de même dimension que  $m$ , composé de certaines fonctions de  $m$ , les autres étant remplacées par zéro. Les deux relations (4.5.49) et (4.5.50) permettent de définir des matrices de connexion locales  $C_F$  et  $C_{F,R}$  telles que

$$q_F = C_F c, \quad q_{F,R} = C_{F,R} c \quad (4.5.51)$$

Seule la première est inversible, ce qui permet d'écrire la relation

$$q_{F,R} = C_{F,R} c = C_{F,R} C_F^{-1} q_F \quad (4.5.52)$$

qui exprime que les champs  $u$  et  $u_R$  sont identiques. Cette relation permet de déduire la matrice  $R$  par

$$\begin{bmatrix} q_0 \\ q_{F,R} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & C_{F,R} C_F^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_0 \\ q_F \end{bmatrix} \quad (4.5.53)$$

$q_0$  représentant les déplacements non affectés par la réduction, ce qui donne

$$R = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & C_{F,R} C_F^{-1} \end{bmatrix} \quad (4.5.54)$$

La matrice de réduction peut être appliquée directement sur la matrice de connexion  $\bar{C}$ , ce qui conduit à la matrice

$$\hat{C} = \bar{C}^{-1} R \quad (4.5.55)$$

remplaçant  $\bar{C}^{-1}$  dans (4.5.47).

De la même manière, les changements d'axes éventuels peuvent être effectués directement sur la matrice de connexion.

#### 5.5.7. Résumé de l'organisation des calculs

L'organisation des calculs peut être résumée par le schéma suivant :

- (1)  $\left[ \begin{array}{l} \text{Calcul de la matrice de connexion} \\ \text{Inversion de la matrice de connexion} \\ \text{Application éventuelle des opérateurs de réduction} \\ \text{et de changement d'axes} \end{array} \right.$

- (2) Calcul des paramètres  $b$  à partir des coordonnées  $y$

- (3) Boucle sur les points d'intégration

$$\left[ \begin{array}{l} \text{Calcul de } p(k) \\ \text{Calcul de } J(k) \\ \text{Calcul de } M(k) \\ \text{Calcul de } B(k) \\ \text{Calcul de } I(k) \\ I \leftarrow I + \mathcal{H}(k) I(k) \end{array} \right] \quad k = 1, \text{ nb de points}$$

(4) Matrice de raideur :

$$K = \bar{C}^{-T} I \bar{C}^{-1}$$

Comparant cet algorithme avec la méthode classique des fonctions de forme, on constate que les calculs qui se répètent en chaque point de GAUSS sont simplifiés du fait de l'utilisation des monômes. Comme c'est cette partie répétitive qui prédomine dans le coût de génération, il en découle que notre méthode est plus économique.

L'application de cette méthode aux volumes de révolution s'inspire des mêmes principes pour la coque et n'entraîne pas de difficulté technique nouvelle. Elle ne sera pas détaillée ici.

## 6. LES ELEMENTS DE FLUIDE [D2,D3]

Les éléments de fluide sont destinés à calculer les matrices N, C, S, B et D définies en (2.2.2), ainsi qu'à construire automatiquement la contrainte de conservation du volume (2.3.4).

### 6.1. Eléments finis de volume fluide

Ces éléments contribuent à la formation de la matrice de masse N du fluide définie par

$$\frac{1}{2} \dot{f}^T N \dot{f} = \int_{V_f} \rho_f \frac{D_i \dot{\phi} D_i \dot{\phi}}{2} dV \quad (4.6.1)$$

Leur contribution à la formation de la matrice de raideur est identiquement nulle.

Considérons plus spécialement le cas d'un tore triangulaire (fig.4.8). Sa géométrie est entièrement définie par les coordonnées r et z de ses trois sommets dans une section méridienne. Le champ de potentiel  $\phi$  y est approximé au moyen d'un polynôme complet de degré variable k des coordonnées r et z :

$$\phi_{nm}(r,z) = \sum_{i=0}^k \sum_{j=0}^i \alpha_{ij} r^j z^{i-j} \quad (4.6.2)$$

Le degré variable  $k$  peut prendre des valeurs allant de 1 à 4, cette dernière valeur étant, pour des raisons qui apparaîtront plus loin, la plus courante. Les paramètres du champ, en nombre  $(k+1)(k+2)/2$  sont exprimés en fonction des valeurs locales du potentiel aux trois sommets, en  $(k-1)$  points équidistants sur chacun des trois côtés et en  $(k-1)_+ (k-2)_+ / 2$  points intérieurs. Ces derniers, correspondant aux "bulles" de l'élément, et donc sans intérêt du point de vue de la connexion, sont éliminés par l'opération classique de condensation.

### 6.2. Eléments de connexion fluide-structure

Il s'agit d'un pseudo-élément sans épaisseur que l'on intercale entre la structure et le fluide pour réaliser leur connexion. On y définit séparément l'interface de structure et l'interface de fluide au moyen de quatre noeuds qui, s'ils sont géométriquement confondus deux à deux, n'en sont pas moins différents quant à leurs degrés de liberté (fig.4.9).

La première interface appartient à la structure. Qu'il s'agisse d'un élément de coque ou d'un élément de volume, le champ de déplacements est toujours un polynôme de degré variable de la forme :

$$\begin{bmatrix} u_{nm} \\ v_{nm} \\ w_{nm} \end{bmatrix} = \sum_{i=0}^k \begin{bmatrix} \alpha_i \\ \beta_i \\ \gamma_i \end{bmatrix} s^i \quad (4.6.3)$$

$s$  étant la coordonnée courante du feuillet moyen de la coque ou de l'interface de l'élément de volume.

La seconde interface est une interface de fluide. Le potentiel des déplacements  $y$  est discrétisé au moyen d'un polynôme de degré variable  $\ell$  :

$$\phi_{nm} = \sum_{i=0}^{\ell} \delta_i s^i \quad (4.6.4)$$

Les degrés des déplacements et du potentiel sont indépendants, à condition cependant de vérifier l'inégalité

$$k < \ell \quad (4.6.5)$$

Cette condition, qui revient à dire que l'on ne définit pas plus de flux que ne le permet le degré du potentiel, est nécessaire pour éviter la formation de singularités dans la matrice de masse du problème assemblé.

La contribution  $S$  de cet élément à la matrice de raideur est définie par

$$\frac{1}{2} q^T S_q = \int_{S_f} \rho_f \vec{g} \cdot \vec{n} \frac{u_n^2}{2} dS \quad (4.6.6)$$

L'élément apporte aussi une contribution à la matrice de masse, qui est la matrice de couplage  $D$  telle que

$$\ddot{f}^T D q = \int_{S_f} \rho_f \ddot{\phi} n_i u_i dS \quad (4.6.7)$$

D'autre part, on a vu au chapitre 2 que, dans le cas  $n = 0$ ,  $m = 0$ , il y a lieu d'introduire la contrainte linéaire d'invariance du volume de fluide pour permettre de lever la singularité de la matrice  $N$ . La contribution  $C^T D$  de l'élément à cette contrainte est définie par

$$v e^T D q = v \int_{S_f} \rho_f n_i u_i dS \quad (4.6.8)$$

La présence du multiplicateur de LAGRANGE  $v$  associée à cette contrainte linéaire nécessite la définition d'un cinquième noeud. Ce noeud est commun à tous les éléments de connexion

fluide-structure et fluide-surface libre d'un même réservoir. Comme sa position est indifférente, on peut convenir de la placer de telle façon que, pour tous les éléments de connexion fluide-structure, il soit situé du même côté que le fluide. C'est une façon simple de définir le sens de la normale extérieure.

On réalise la connexion de cet élément avec la structure en identifiant les trois déplacements aux noeuds et en  $(k-1)$  points intermédiaires sur l'interface de la structure. Les rotations de coque ne sont jamais connectées. Quant à la connexion avec le fluide, elle est réalisée par identification du potentiel des déplacements aux noeuds du fluide et en  $(l-1)$  points intermédiaires sur l'interface de fluide.

### 6.3. Élément de connexion fluide-surface libre

Pour réaliser la connexion entre le potentiel des déplacements discrétisé dans le fluide et les déplacements indépendants de surface libre, on utilise un pseudo-élément spécialisé. Il s'agit d'une couronne circulaire sans épaisseur, définie par quatre noeuds indépendants mais géométriquement confondus deux à deux (fig.4.10).

Sur la première interface, on définit un champ de déplacements de surface libre sous la forme d'un polynôme de degré variable  $k$  du rayon :

$$\eta_{nm} = \sum_{i=0}^k \alpha_i r^i \quad (4.6.9)$$

La seconde interface appartient au fluide. Le potentiel des déplacements  $y$  est discrétisé au moyen d'un polynôme de degré variable  $l$  :

$$\phi_{nm} = \sum_{i=0}^l \beta_i r^i \quad (4.6.10)$$

Les degrés du champ des déplacements de surface libre et du potentiel sont soumis à la même condition,  $k < \ell$ , que dans l'élément de connexion fluide-structure, pour les mêmes raisons.

La contribution C de cet élément à la matrice de raideur est définie par

$$\frac{1}{2} y^T C y = \int_{\Gamma} \rho_f g \frac{\eta^2}{2} d\Gamma \quad (4.6.11)$$

L'élément apporte aussi une contribution à la matrice de masse : c'est la matrice de couplage B telle que

$$f^T B y = \int_{\Gamma} \rho_f \phi \eta dS \quad (4.6.12)$$

En outre, dans le cas ( $n=0, m=0$ ), il y a lieu de faire participer l'élément à l'expression de la contrainte linéaire d'incompressibilité permettant de lever la singularité de la matrice N. La contribution  $e^T B$  de l'élément à cette contrainte est donnée par

$$v e^T B y = v \int_{\Gamma} \rho_f \eta dS \quad (4.6.13)$$

On associe donc également un cinquième noeud au multiplicateur de LAGRANGE  $v$  de la contrainte. Ce noeud, qui doit évidemment coïncider avec celui des éléments de couplage fluide-structure, peut par ailleurs avoir une position quelconque par rapport à la surface libre.

La connexion de cet élément avec le fluide s'obtient par simple identification du potentiel des déplacements aux noeuds de fluide et en  $(\ell-1)$  points intermédiaires de l'interface de fluide.

Quant aux déplacements de surface libre, ils sont libres de toute condition a priori et l'absence des dérivées de ces déplacements dans le principe mène à conclure

qu'ils n'ont aucune raison d'être continus. On n'exprimera donc pas les paramètres du champ des déplacements de surface libre en fonction des valeurs locales aux extrémités de l'élément, mais uniquement en fonction de ses valeurs locales en  $(k+1)$  points de l'interface. Ces points sont choisis de telle façon que leur distance soit constante, même au passage d'un élément à l'autre, du moins pour un découpage régulier. Ainsi, pour définir les  $(k+1)$  points intermédiaires, choisit-on les rayons successifs :

$$r_i = \left\{ r_o - \frac{r_f - r_o}{2(k+1)} \right\} + \frac{i}{k+1} (r_f - r_o) \quad (4.6.14)$$

où  $r_o$  et  $r_f$  sont les rayons des noeuds d'extrémités de l'élément.

#### 6.4. Possibilité de "mater" la surface libre

Si le degré du polynôme des déplacements de surface libre ne peut ni égaler, ni surpasser celui du potentiel dans le fluide, rien ne s'oppose à ce qu'il lui soit franchement inférieur. Or, le nombre de modes de surface libre dont une idéalisation peut rendre compte est directement proportionnel au nombre d'éléments de surface libre et à leur degré. Un moyen efficace d'éviter la prolifération de ces modes, généralement peu intéressants, consiste donc à limiter le nombre d'éléments de surface libre et à les construire d'un degré peu élevé (degré zéro éventuellement). L'expérimentation numérique montre que cet artifice n'entraîne pas de distorsion appréciable des autres modes et fréquences propres du système. Cette possibilité, d'un grand intérêt pratique, est une des originalités intéressantes de la formulation adoptée.

### 7. PROBLEMES PARTICULIERS

#### 7.1. Eléments touchant l'axe

Ainsi que nous l'avons fait ressortir au chapitre 3,

il existe au voisinage de l'axe une singularité que l'on ne peut lever sans exprimer certaines conditions de symétrie. Ces conditions ont été explicitées au chapitre 3 pour les structures. Pour ce qui est du fluide, sa masse provient du gradient du potentiel des déplacements :

$$2 T = \int_{V_f} \rho_f \left\{ \left( \frac{\partial \dot{\phi}}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left( \frac{\partial \dot{\phi}}{\partial \theta} \right)^2 + \left( \frac{\partial \dot{\phi}}{\partial z} \right)^2 \right\} r \, dr \, d\theta \, dz \quad (4.7.1)$$

soit, pour l'harmonique (n,m) :

$$2 T_{nm} = \int_{\text{méridien}} \rho_f \left\{ \left( \frac{\partial \dot{\phi}_{nm}}{\partial r} \right)^2 + n^2 \left( \frac{\dot{\phi}}{r} \right)^2 + \left( \frac{\partial \dot{\phi}}{\partial z} \right)^2 \right\} r \, dr \, dz \quad (4.7.2)$$

On en déduit aisément que le potentiel doit être nul sur l'axe pour tout n différent de zéro.

Une première manière de tenir compte de ces conditions de symétrie consiste à utiliser des éléments spéciaux pour le voisinage de l'axe, où les hypothèses ad hoc sont introduites a priori dans le champ des déplacements [B8,B9,M1]. Le principal désavantage de cette méthode réside dans la nécessité de programmer des éléments supplémentaires, différents pour les différents harmoniques de FOURIER, puisque les conditions ne sont pas les mêmes pour tous, et d'un usage relativement moindre.

Il existe une autre technique, plus simple. Si l'on examine les modes singuliers sur l'axe, on constate qu'ils ne posent des problèmes que lors de la phase d'intégration. La tentation est grande d'utiliser une formule d'intégration numérique ouverte, c'est-à-dire ne comportant des points d'intégration qu'à l'intérieur des éléments. Les intégrales singulières sont alors remplacées par des nombres grands mais finis. Or cette méthode, si audacieuse qu'elle puisse paraître, peut être justifiée [D15,D17]. En effet, l'intégration numérique consistant à remplacer une mesure  $I$  par une autre mesure  $\tilde{I}$ , il va sans dire que l'espace des fonc-

tions sommables pour  $I$  et celui des fonctions sommables pour  $\tilde{I}$  seront généralement différents. Dans notre cas, la solution consistera toujours en des fonctions sommables pour  $I$  et  $\tilde{I}$  et, comme il s'agit de polynômes, on a de plus, si la formule d'intégration est d'un degré suffisant

$$I(f) = \tilde{I}(f) \quad (4.7.3)$$

Evidemment, on ne connaît pas  $f$  a priori, mais on sait qu'elle est combinaison de fonctions  $g_k$ , non sommables pour  $I$  mais sommables pour  $\tilde{I}$ , car finies aux points d'intégration, ce qui permet d'écrire

$$I(f) = \tilde{I}(f) = \tilde{I}\left(\sum_k g_k\right) = \sum_k \tilde{I}(g_k) \quad (4.6.18)$$

Par conséquent, le calcul des intégrales est correct pour la solution. Cette démonstration originale est valable quelle que soit la manière dont les conditions sont introduites, même si c'est par contraintes linéaires, comme il est nécessaire de le faire pour les conditions du type

$$u_r + u_\theta = 0 \quad (4.7.4)$$

En résumé, on obtient la solution correcte en utilisant des éléments normaux, intégrés par une méthode numérique ouverte, et en appliquant les conditions de symétrie requises.

Un problème se pose cependant pour les coques, lorsqu'elles coupent l'axe sans lui être perpendiculaires. En effet, dans ce cas, il y a lieu d'introduire la condition (3.3.80.a), ce qui ne peut se faire par de simples relations sur les déplacements. En pratique, on ignore simplement cette condition. Les termes de raideur correspondants étant très grands, il en résultera que cette condition sera reprise par une espèce de pénalisation et sera donc vérifiée

de manière approchée, avec par ailleurs une certaine détérioration du conditionnement. La même technique pourrait d'ailleurs être pratiquée pour les autres conditions [B9]. Mais leur vérification exacte est possible et nous semble préférable, car elle réduit généralement la taille du système et ne porte pas atteinte au conditionnement, sauf si l'on utilise des contraintes linéaires (modes  $n=1$ ).

## 7.2. Calcul des tensions

### 7.2.1. Moyennes d'éléments

Il est bien connu que le calcul des tensions locales, aux noeuds par exemple, ne fournit que de piètres résultats, très difficiles à interpréter du fait de leurs discontinuités. C'est pourquoi, il est d'usage de se contenter d'une connaissance moins détaillée des tensions. Dans le cas des coordonnées cartésiennes, on peut se baser sur le fait que les équations d'équilibre obtenues à partir du principe variationnel sont limitées à quelques moyennes : pour toute variation de déplacement, contenue dans le modèle, on a une équation de la forme

$$\int_V \sigma_{ij} D_j \delta u_i dV - \int_V F_i \delta u_i dV - \int_{S_2} \bar{t}_i \delta u_i dS = 0 \quad (4.7.5)$$

ce qui montre que l'équilibre s'établit entre les quantités

$$\int_{Elt} \sigma_{ij} D_j \delta u_i^{(k)} dV \quad (4.7.6)$$

où  $u_i^{(k)}$  est le déplacement associé à un degré de liberté donné. Comme tous les éléments possèdent le mode de déformation constante, on obtient, pour ce mode particulier, les quantités

$$\int_{Elt} \sigma_{ij} dV \quad (4.7.7)$$

qui jouissent donc de propriétés privilégiées vis-à-vis de l'équilibre. La technique usuellement adoptée consiste donc à calculer les tensions moyennes, ce qui peut se faire simplement, en multipliant la matrice de raideur par les vecteurs des coordonnées des noeuds de l'élément, puis en divisant par le volume : si  $y(k)$  est le vecteur des  $x_k$  aux noeuds, on a en effet

$$\begin{aligned}
 K y(k) &= \int_{E\ell t} \sigma_{ij} \frac{1}{2} (D_i x_k + D_j x_k) dV \\
 &= \frac{1}{2} \int_{E\ell t} \sigma_{ij} dV \cdot (\delta_{ik} + \delta_{jk}) \\
 &= \frac{1}{2} \int_{E\ell t} (\sigma_{ik} + \sigma_{kj}) dV \quad (4.7.8)
 \end{aligned}$$

Malheureusement, du fait que les modes de déformation constante sont absents en coordonnées curvilignes, cette technique tombe en défaut. Il faut donc se résoudre à calculer directement des moyennes. On peut en imaginer deux espèces :

a) des moyennes sur le volume,

$$\sigma_V = \frac{\int_V \sigma r dr d\theta dz}{\int_V r dr d\theta dz} \quad (4.7.9)$$

b) des moyennes sur la section méridienne

$$\sigma_M = \frac{\int_{\text{méridien}} \sigma dr dz}{\int_{\text{méridien}} dr dz} \quad (4.7.10)$$

Les premières semblent constituer le prolongement logique des tensions (4.7.7). Mais elles présentent de gros

désavantages au niveau de l'interprétation des résultats. En effet, celle-ci se fait naturellement dans le plan méridien. Or la structure des  $\sigma_V$  laisse prévoir, et l'expérience le confirme, que ces tensions sont à attribuer en un point de rayon

$$r_V = \frac{\int_V r^2 \, d r \, d z}{\int_V r \, d r \, d z} \quad (4.7.11)$$

tandis que les tensions  $\sigma_M$  coïncident fort bien avec les tensions du centre de gravité de la section méridienne. Ce fait est illustré par la figure (4.11), donnant les moments de flexion d'une plaque circulaire appuyée à sa périphérie et soumise à une charge concentrée en son centre. Cette plaque, de 300 mm de rayon, est idéalisée par trois éléments de coque de révolution. On constate que, surtout près de l'axe, le positionnement des moyennes de volume doit être fait selon la formule (4.7.11), ce qui rend l'interprétation des résultats fastidieuse et malaisée.

Considérons par ailleurs une coque épaisse de forme cylindrique, et supposons que les tensions azimutales  $\sigma_{\theta\theta}$  soient uniformément réparties sur son épaisseur (fig.4.12). Le calcul des moments moyens sur le volume par

$$\frac{\int_V \zeta \sigma_{\theta\theta} r \, d r \, d \theta \, d z}{\int_V r \, d r \, d \theta \, d z} \quad (4.7.12)$$

conduit à une valeur non nulle, tandis que le calcul des moments moyens sur la surface méridienne par

$$\frac{\int_{\text{méridien}} \zeta \sigma_{\theta\theta} \, d r \, d z}{\int_{\text{méridien}} d r \, d z} \quad (4.7.13)$$

même à un moment nul, ce qui est plus naturel.

Ces quelques faits nous ont conduit à calculer systématiquement les tensions moyennes sur la surface méridienne et non sur le volume.

### 7.2.2. Moyennes d'interfaces

Les moyennes d'éléments fournissent des résultats très satisfaisants du point de vue de leur exactitude, mais peu détaillés. Ce manque de détails est particulièrement gênant dans les éléments de volume. Mais précisément, nous allons montrer que pour les éléments de volume de degré deux au moins, il existe des moyennes d'interfaces qui se transmettent exactement et constituent donc un renseignement particulièrement précieux. Considérons donc une interface (fig.4.13), que nous décrirons à l'aide du système de coordonnées (3.3.3) avec  $\zeta = 0$ . Les déformations s'écrivent donc, sur cette interface,

$$\epsilon_{ss} = \frac{\partial u_s}{\partial s} + \frac{u_\zeta}{R_s}$$

$$\epsilon_{\theta\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_s}{r} \frac{dr}{ds} + \frac{u_\zeta}{R_\theta}$$

$$\gamma_{s\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial u_s}{\partial \theta} - \frac{u_\theta}{r} \frac{dr}{ds} + \frac{\partial u_\theta}{\partial s}$$

(4.7.14)

$$\epsilon_{\zeta\zeta} = \frac{\partial u_\zeta}{\partial \zeta}$$

$$\gamma_{s\zeta} = \frac{\partial u_s}{\partial \zeta} + \frac{\partial u_\zeta}{\partial s} - \frac{u_s}{R_s}$$

$$\gamma_{\theta\zeta} = \frac{\partial u_\theta}{\partial \zeta} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\zeta}{\partial \theta} - \frac{u_\theta}{R_\theta}$$

La continuité des déplacements implique que les déformations  $\epsilon_{ss}$ ,  $\epsilon_{\theta\theta}$ ,  $\gamma_{s\theta}$  sont transmises d'un élément à l'autre. D'autre part, la présence d'un ou deux noeuds sur l'interface entraîne que les modes donnés par

$$\begin{aligned}\delta u_s &= U s (\ell - s) \\ \delta u_\zeta &= W s (\ell - s) \\ \delta u_\theta &= V s (\ell - s)\end{aligned}\tag{4.7.15}$$

sur l'interface considérée et nuls sur toutes les autres, sont présents dans l'idéalisation (fig.4.14). Il en résulte les équations d'équilibre

$$\begin{aligned}\delta U \left\{ \int_0^\ell \tau_{s\zeta}^{(1)} r s (\ell-s) ds - \int_0^\ell \tau_{s\zeta}^{(2)} r s (\ell-s) ds \right\} &= 0 \\ \delta V \left\{ \int_0^\ell \tau_{\theta\zeta}^{(1)} r s (\ell-s) ds - \int_0^\ell \tau_{\theta\zeta}^{(2)} r s (\ell-s) ds \right\} &= 0 \\ \delta W \left\{ \int_0^\ell \sigma_{\zeta\zeta}^{(1)} r s (\ell-s) ds - \int_0^\ell \sigma_{\zeta\zeta}^{(2)} r s (\ell-s) ds \right\} &= 0\end{aligned}\tag{4.7.16}$$

Posant

$$\bar{\sigma}_{ij} = \frac{\int_0^\ell \sigma_{ij} r s (\ell-s) ds}{\int_0^\ell r s (\ell-s) ds}\tag{4.7.17}$$

ces équations peuvent encore s'écrire

$$\bar{\tau}_{s\zeta}^{(1)} = \bar{\tau}_{s\zeta}^{(2)}, \quad \bar{\tau}_{\theta\zeta}^{(1)} = \bar{\tau}_{\theta\zeta}^{(2)}, \quad \bar{\sigma}_{\zeta\zeta}^{(1)} = \bar{\sigma}_{\zeta\zeta}^{(2)}\tag{4.7.18}$$

La continuité de  $\epsilon_{ss}$ ,  $\epsilon_{\theta\theta}$ ,  $\gamma_{s\theta}$  implique par ailleurs celle des moyennes :

$$\bar{\varepsilon}_{ss}^{(1)} = \bar{\varepsilon}_{ss}^{(2)}, \quad \bar{\varepsilon}_{\theta\theta}^{(1)} = \bar{\varepsilon}_{\theta\theta}^{(2)}, \quad \bar{\gamma}_{s\theta}^{(1)} = \bar{\gamma}_{s\theta}^{(2)} \quad (4.7.19)$$

Or les relations de HOOKE peuvent être écrites

$$\begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix} \quad (4.7.20)$$

où

$$\begin{aligned} s_1^T &= (\sigma_{ss}, \sigma_{\theta\theta}, \tau_{s\theta}) & , & & s_2^T &= (\tau_{s\zeta}, \tau_{\theta\zeta}, \sigma_{\zeta\zeta}) \\ e_1^T &= (\varepsilon_{ss}, \varepsilon_{\theta\theta}, \gamma_{s\theta}) & , & & e_2^T &= (\gamma_{s\zeta}, \gamma_{\theta\zeta}, \gamma_{\zeta\zeta}) \end{aligned} \quad (4.7.21)$$

On en déduit aisément les relations mixtes

$$\begin{bmatrix} s_1 \\ e_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} \\ E_{21} & E_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ s_2 \end{bmatrix} \quad (4.7.22)$$

avec

$$\begin{aligned} E_{11} &= H_{11} - H_{12} H_{22}^{-1} H_{21} & , & & E_{12} &= H_{12} H_{22}^{-1} \\ E_{21} &= - H_{22}^{-1} H_{21} & , & & E_{22} &= H_{22}^{-1} \end{aligned} \quad (4.7.23)$$

Dès lors, si l'on fait la moyenne sur l'interface, on obtient

$$\begin{bmatrix} \bar{s}_1^{(1)} \\ \bar{e}_2^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{11}^{(1)} & E_{12}^{(1)} \\ E_{21}^{(1)} & E_{22}^{(1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{e}_1^{(1)} \\ \bar{s}_2^{(1)} \end{bmatrix} \quad (4.7.24)$$

et

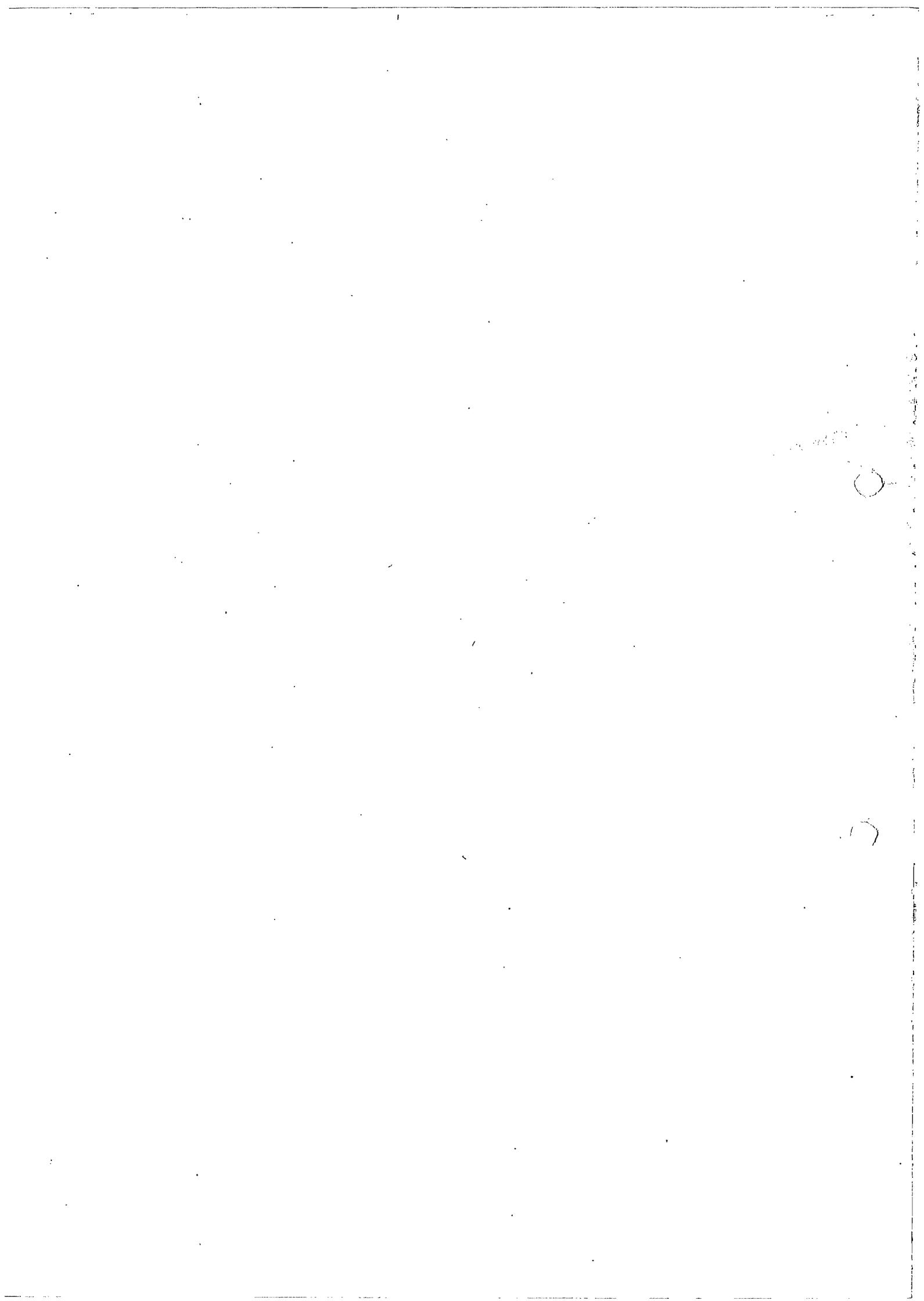
$$\begin{bmatrix} \bar{s}_1^{(2)} \\ \bar{e}_2^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{11}^{(2)} & E_{12}^{(2)} \\ E_{21}^{(2)} & E_{22}^{(2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{e}_1^{(2)} \\ \bar{s}_2^{(2)} \end{bmatrix}$$

Dès lors, du fait que  $\bar{e}_1^{(1)} = \bar{e}_1^{(2)}$  et  $\bar{s}_2^{(1)} = \bar{s}_2^{(2)}$ , on en déduit que, si les deux éléments ont la même matrice de HOOKE,

$$\bar{s}_1^{(1)} = \bar{s}_1^{(2)} \quad \text{et} \quad \bar{e}_2^{(1)} = \bar{e}_2^{(2)} \quad (4.7.25)$$

ce qui signifie que les moyennes de tension (4.7.17) sont transmises exactement. Si, par contre, les matrices de HOOKE sont différentes, seules les tractions de surface  $\bar{s}_1$  et les déformations d'interface  $\bar{e}_2$  sont transmises, ce qui est parfaitement normal.

Cette propriété permet de considérer les moyennes (4.7.17) comme des renseignements particulièrement sûrs sur l'état de tension, et plus détaillées que les tensions moyennes. En particulier, ces quantités sont très utiles pour évaluer les efforts de jonction dans les multicouches.



CHAPITRE V

EFFETS DE LA SOLLICITATION STATIQUE INITIALE

## I. INTRODUCTION

Lors de l'établissement du principe variationnel général des interactions fluide-structure, nous avons signalé que la sollicitation statique initiale provoque l'apparition de termes supplémentaires d'énergie, dits "géométriques" ou "de précontrainte". C'est à ceux-ci qu'est consacré le présent chapitre.

Pour éviter toute équivoque, précisons une fois pour toute que lorsque nous parlerons de précontrainte, il s'agira simplement d'un état de tension initial et non pas de la technique utilisée dans les structures en béton pour les prémunir de l'extension (et qui, bien souvent, est à proprement parler une postcontrainte). En particulier, notre précontrainte pourra influencer la stabilité de la structure, contrairement aux câbles noyés dans le béton.

Le comportement d'un grand nombre de structures minces peut être fortement influencé par un état initial. Un cas très simple est celui de la plaque, dont la raideur en flexion peut être nettement augmentée ou diminuée par une traction ou une compression initiale. Pour les réservoirs des lanceurs, la sollicitation statique sera généralement composée de la pression du fluide, augmentée de la pression interne du gaz situé au-dessus de lui, du poids propre, et du poids des étages supérieurs. En vol, ces poids sont d'ailleurs nettement majorés du fait de l'accélération. Le problème de la précontrainte comporte dès lors deux aspects :

(i) la vérification de la stabilité de l'équilibre statique sous ces charges initiales

(ii) l'étude de la modification de raideur qu'elles entraînent et du glissement du spectre propre

qui en résulte.

Dans le cas général, l'étude des interactions entre l'état initial et l'effet des sollicitations ultérieures relève de l'élasticité non linéaire (non-linéarités géométriques). Il existe cependant une classe de problèmes dont l'étude reste linéaire ou peut être linéarisée. C'est notamment le cas de la plaque soumise à une précontrainte d'extension, puis à une sollicitation de flexion. L'étude de ces problèmes s'effectue en deux étapes linéaires qui seront, dans le cas de la plaque, l'étude linéaire de l'extension et l'étude de la flexion, en tenant compte de l'extension initiale. Le domaine de validité de ce type d'études, que nous appellerons élasticité quasi-linéaire, semble être resté assez flou et, bien plus, n'en ayant pas approfondi les hypothèses de base, on ne savait pas, le plus souvent, distinguer les termes prépondérants des termes négligeables.

C'est à ces questions que nous tenterons d'abord de donner une réponse. Partant d'une formulation développée par FRAEIJIS de VEUBEKE [F3] où les rotations et les déformations se trouvent séparées, on fait l'hypothèse que les déformations sont petites. On peut alors, en considérant des rotations de plus en plus grandes, construire des théories approchées de précision croissante, dont la plus simple est la théorie linéaire. On s'arrête à l'ordre suivant, ce qui permet de considérer des rotations d'une dizaine de degrés avec une erreur inférieure à 1%.

On étudie alors les conditions d'applicabilité de l'analyse quasi-linéaire. Cette étude fait clairement ressortir le domaine de validité de la méthode, en établissant quatre conditions nécessaires dont la signification est illustrée par des exemples. Il s'agit essentiellement d'une mise au point de certains faits déjà pressentis par le passé [L6].

L'application au cas dynamique ne pose pas de grand problème. Pour l'étude de la stabilité, on présente une méthode duale nouvelle, basée sur une filière de principes variationnels déduits par la méthode de FRIEDRICHS. Le principe obtenu est assez semblable à celui qu'a utilisé CARNOY [C4], bien que reposant sur une base assez différente. Il restait à traiter le problème de l'amélioration des solutions en statique où, bien souvent, on utilise une méthode de double analyse du problème sous le système complet de charges. On montre qu'il est possible, dans le cas général, de définir une décomposition en charges d'extension et de flexion, ce qui permet d'utiliser une autre méthode, plus générale, puis les conditions de coïncidence des résultats sont examinées.

Enfin, on étudie l'effet de la pression initiale. Le terme de compressibilité est évalué, ce qui fait ressortir que son influence est souvent faible. On expose alors le paradoxe de MORAND et OHAYON, lié au fait que la pression n'est pas une charge morte, et on montre dans quelles conditions ce paradoxe est levé par l'introduction des termes non linéaires de pression. Finalement, l'ordre de grandeur des différents termes de pression est discuté.

## 2. ETUDE DES STRUCTURES DANS L'HYPOTHESE DES PETITES DEFORMATIONS.

### 2.1. Rotations et déformations

Appelons  $D$  la matrice  $\{D_j u_i\}$  des dérivées des déplacements. La matrice jacobienne de la transformation faisant passer des coordonnées initiales aux coordonnées après déformation est alors donnée par

$$J = \{D_j (x_i + u_i)\} = I + D \quad (5.2.1)$$

où  $I$  est la matrice unité. On peut décomposer la matrice jacobienne en deux opérations essentiellement différentes [F3] : une déformation pure, correspondant à une matrice  $(I + H)$ , avec  $H$  symétrique, et une rotation pure, correspondant à une matrice orthonormale  $(I + A)$ , de façon que

$$J = I + D = (I + A)(I + H) \quad (5.2.2)$$

ce qui entraîne

$$D = H + A(I + H) \quad (5.2.3)$$

Cette décomposition est unique [G11]. L'énergie de déformation dépend alors de la seule matrice  $H$ , dont les six composantes forment ce que l'on appelle la mesure de JAUMANN de la déformation. Comme celle de GREEN, elle vérifie les trois propriétés fondamentales d'une mesure de déformation, à savoir :

D 1 : nullité de la mesure lorsque les déplacements sont nuls

D 2 : invariance lors d'une translation

D 3 : invariance lors d'une rotation finie.

En outre, on peut montrer [F3] que les déformations de JAUMANN sont liées à celles de GREEN par les relations

$$2 g_{ij} = h_{ij} + h_{ji} + h_{im} h_{jm} \quad (5.2.4)$$

Les axes principaux de ces deux tenseurs coïncident, et leurs valeurs propres sont liées par la relation :

$$2 g(i) = 2 h(i) + h^2(i) \quad (5.2.5)$$

Dans ces axes, les déformations de GREEN s'écrivent

$$\frac{\{d(x_i + u_i)\}^2 - \{dx_i\}^2}{(dx_i)^2} = 2g(i)$$

soit

$$2g(i) = 2 \frac{du_i}{dx_i} + \left(\frac{du_i}{dx_i}\right)^2 \quad (5.2.6)$$

ce qui montre que les déformations de JAUMANN mesurent l'accroissement proportionnel des longueurs. Cette mesure de déformation est donc celle de l'expérimentateur, ce qui a amené FRAEIJIS de VEUBEKE à l'appeler "engineering strain tensor" [F3]. Malheureusement, elle n'a pas d'expression analytique simple dans le cas général, ce qui explique qu'on lui préfère souvent la mesure de GREEN. Mais nous verrons qu'elle se prête particulièrement bien aux simplifications.

Nous aurons besoin de la condition d'orthonormalité de la matrice  $(I + A)$ . Elle s'écrit

$$I = (I + A^T)(I + A) = I + A + A^T + A^T A$$

soit

$$A + A^T + A^T A = 0 \quad (5.2.7)$$

## 2.2. Petites déformations

Dans les structures raides, les déformations élastiques restent toujours petites. En effet, les tensions sont données par les relations

$$s_{ij} = C_{ijkl} h_{kl} \quad (5.2.8)$$

Considérons par exemple le cas de l'acier. On a, pour des sollicitations très sévères dans un acier de bonne qualité,

$$s_{ij} = 0 (5 \cdot 10^1)$$

$$C_{ijkl} = 0 (10^4)$$

ce qui signifie que

$$h_{k\ell} = 0 (5 \cdot 10^{-3}).$$

Par conséquent, si l'on admet une erreur de l'ordre de 1%, on peut écrire

$$I + H \approx I \tag{5.2.9}$$

ce qui entraîne, à partir de (5.2.3),

$$D = H + A (I + H) \approx H + A \tag{5.2.10}$$

Mais les définitions précédentes ne permettent pas de calculer simplement les déformations et les rotations. On peut évidemment se servir de la relation (5.2.4) et confondre les déformations de JAUMANN et celles de GREEN, comme l'a fait BIOT [B11, B12, B13, B14]. Mais moyennant des approximations sur la relation (5.2.7), on peut obtenir d'autres expressions plus simples.

### 2.2.1. Première approximation

Cherchons d'abord à vérifier la relation (5.2.7) en négligeant tous les termes du second ordre en les dérivées de déplacements. On posera donc

$$A = \alpha D + \beta D^T \tag{5.2.11}$$

et on imposera à cette matrice la condition simplifiée

$$A + A^T = 0 \quad (5.2.12)$$

Il vient

$$(\alpha + \beta)(D + D^T) = 0$$

soit

$$\alpha = -\beta \quad (5.2.13)$$

Dès lors, en vertu de la relation (5.2.10),

$$H = D - A = (1 - \alpha) D + \alpha D^T.$$

Cette matrice ne sera symétrique que si  $\alpha = 1 - \alpha = \frac{1}{2}$ ,  
ce qui donne finalement

$$A = \frac{1}{2} (D - D^T) = \Omega \quad (5.2.14)$$

$$H = \frac{1}{2} (D + D^T) = E.$$

On constate qu'il s'agit tout simplement des expressions classiques de la théorie linéarisée, correspondant à la décomposition de HELMHOLTZ de D en parties symétrique E et antisymétrique  $\Omega$ . Outre la petitesse des déformations, cette théorie postule celle du carré des rotations, c'est-à-dire

$$\Omega^T \Omega \ll \Omega \quad (5.2.15)$$

Or, pour avoir  $|\omega_{ij}| \approx 10^{-2}$ , on doit limiter les rotations à environ 0,5 degré, ce qui est très petit.

### 2.2.2. Seconde approximation

Pour pouvoir représenter de plus grandes rotations,

cherchons une expression du type

$$A = \Omega + R \quad (5.2.16)$$

où R ne contient que des termes du second ordre en les rotations. Les déformations seront alors données par

$$H = D - A = D - \Omega - R = E - R, \quad (5.2.17)$$

ce qui entraîne que la matrice R doit être symétrique. La condition (5.2.7) s'écrit alors

$$0 = A + A^T + A^T A = \Omega + \Omega^T + \Omega^T \Omega + R + R^T + 3\text{ème ordre.}$$

Vu la symétrie de la matrice R, on vérifiera donc cette relation jusqu'au second ordre en posant

$$R = -\frac{1}{2} \Omega^T \Omega \quad (5.2.18)$$

D'une façon assez surprenante, ce choix dépasse nos exigences initiales, car les termes du troisième ordre s'annulent aussi : en effet,

$$\begin{aligned} (\Omega^T - \frac{1}{2} \Omega^T \Omega) (\Omega - \frac{1}{2} \Omega^T \Omega) &= \Omega^T \Omega - \frac{1}{2} \Omega^T \Omega^T \Omega - \frac{1}{2} \Omega^T \Omega \Omega \\ &\quad + \frac{1}{4} \Omega^T \Omega \Omega^T \Omega \end{aligned}$$

et vu la symétrie gauche de  $\Omega$ , on a

$$\Omega^T \Omega \Omega = -\Omega^T \Omega^T \Omega.$$

Par conséquent, le choix

$$\begin{aligned} A &= \Omega - \frac{1}{2} \Omega^T \Omega \\ H &= E + \frac{1}{2} \Omega^T \Omega \end{aligned} \quad (5.2.19)$$

correspond à faire l'hypothèse suivante sur les rotations

$$|\omega_{ij}|^3 \ll 1.$$

Pour une erreur maximum de 1%, on peut aller jusqu'à une dizaine de degrés. Ce fait est illustré par la figure (5.1), qui représente la trajectoire de l'extrémité d'une barre tournant sans déformation, pour la mesure linéaire  $\varepsilon$ , pour la mesure approchée  $h$  définie en (5.2.19) et pour la mesure exacte de GREEN. Pour cette dernière, la trajectoire est un cercle d'équation

$$g = \frac{u}{\ell} + \frac{1}{2} \frac{u^2}{\ell^2} + \frac{1}{2} \frac{v^2}{\ell^2} = 0;$$

pour la mesure (5.2.19), c'est une parabole d'équation

$$h = \frac{u}{\ell} + \frac{1}{2} \frac{v^2}{\ell^2} = 0,$$

et enfin, pour la mesure linéaire, c'est la droite  $\frac{u}{\ell} = 0$ . Les deux courbes  $h = 0$  et  $g = 0$  sont osculatrices. Les expressions (5.2.19) forment donc la base d'une théorie des rotations modérées.

Dans le formalisme des tenseurs cartésiens, si l'on pose

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ij} &= \frac{1}{2} (D_i u_j + D_j u_i) \\ \omega_{ij} &= \frac{1}{2} (D_i u_j - D_j u_i), \end{aligned} \tag{5.2.20}$$

on obtient

$$h_{ij} = \varepsilon_{ij} + \frac{1}{2} \omega_{im} \omega_{jm}. \tag{5.2.21}$$

### 3. ELASTICITE QUASI-LINEAIRE

3.1. Supposons qu'il existe un état de déformation ini-

tial, représenté par le champ de déplacements  $\hat{u}$ , autour duquel on étudie des perturbations  $u$ . On a alors

$$\varepsilon_{ij} \text{ (total)} = \overset{\circ}{\varepsilon}_{ij} + \varepsilon_{ij} \quad (5.3.1)$$

$$\omega_{ij} \text{ (total)} = \overset{\circ}{\omega}_{ij} + \omega_{ij} ,$$

si bien que les déformations prennent la forme

$$\begin{aligned} h_{ij} &= (\overset{\circ}{\varepsilon}_{ij} + \varepsilon_{ij}) + \frac{1}{2} (\overset{\circ}{\omega}_{im} + \omega_{im})(\overset{\circ}{\omega}_{jm} + \omega_{jm}) \\ &= \overset{\circ}{h}_{ij} + \overset{1}{h}_{ij} + \overset{2}{h}_{ij}, \end{aligned} \quad (5.3.2)$$

où apparaissent les grandeurs

$$\overset{\circ}{h}_{ij} = \overset{\circ}{\varepsilon}_{ij} + \frac{1}{2} \overset{\circ}{\omega}_{im} \overset{\circ}{\omega}_{jm} \quad (5.3.3)$$

$$\overset{1}{h}_{ij} = \varepsilon_{ij} + \frac{1}{2} (\overset{\circ}{\omega}_{im} \omega_{jm} + \overset{\circ}{\omega}_{jm} \omega_{im}) \quad (5.3.4)$$

$$\overset{2}{h}_{ij} = \frac{1}{2} \omega_{im} \omega_{jm} \quad (5.3.5)$$

De ces expressions, on déduit que la densité d'énergie de déformation a la forme

$$W = \overset{\circ}{W} + \overset{1}{W} + \overset{2}{W} + \overset{3}{W} + \overset{4}{W},$$

avec

$$\overset{\circ}{W} = \frac{1}{2} C_{ijkl} \overset{\circ}{h}_{ij} \overset{\circ}{h}_{kl}$$

$$\overset{1}{W} = C_{ijkl} \overset{\circ}{h}_{ij} \overset{1}{h}_{kl}$$

$$\overset{2}{W} = \frac{1}{2} C_{ijkl} \overset{1}{h}_{ij} \overset{1}{h}_{kl} + C_{ijkl} \overset{\circ}{h}_{ij} \overset{2}{h}_{kl} \quad (5.3.6)$$

$$W^3 = C_{ijkl} h_{ij}^1 h_{kl}^2$$

$$W^4 = \frac{1}{2} C_{ijkl} h_{ij}^2 h_{kl}^2$$

Il y correspond, après intégration sur le volume, la décomposition suivante de l'énergie en parties homogènes :

$$U = U^0 + U^1 + U^2 + U^3 + U^4 \quad (5.3.7)$$

avec

$$U^i = \int_V W^i dV \quad (5.3.8)$$

### 3.2. Problème initial et perturbation

Considérons d'abord le problème initial : la structure est soumise à une précontrainte qui s'exprime sous la forme d'un travail  $Q(u)$ . Dans ce qui suit nous ferons l'hypothèse suivante :

H 1 : Les charges initiales sont mortes, c'est-à-dire que le travail qui leur correspond est une fonctionnelle linéaire des déplacements.

Cette hypothèse permet d'englober les charges d'inertie d'ALEMBERT, mais non les charges de pression, dont la direction varie avec la déformation.

Le problème de la recherche de l'état de tension initial a donc la forme

$$U(u^0, u^0) - Q(u^0) \quad \min_{u^0 \in E} \quad (5.3.9)$$

où  $E$  est l'espace des déplacements cinématiquement admissibles. Dans le cas où le problème est discrétisé,  $E$  sera

l'espace des déplacements contenus dans le modèle. La recherche de l'extremum se fait par annulation de la variation première. Or cette condition s'écrit, dans le formalisme de la formule (5.3.8)

$${}^1 U(v) - Q(v) = 0 \quad \text{pour tout } v \in \overset{\circ}{E} \quad (5.3.10)$$

Quant au problème perturbé, il s'agit de la réponse à un supplément de charge, correspondant au travail  $R(u)$ . Il s'écrit donc en général

$$\overset{\circ}{U} + {}^1 U + {}^2 U + {}^3 U + {}^4 U - Q - R \quad \min_{u \in \overset{1}{E}} \quad (5.3.11)$$

où  $\overset{1}{E}$  est l'espace des perturbations cinématiquement admissibles et, encore une fois, dans le cas d'un problème discrétisé, l'ensemble des déplacements présents dans le modèle. On ne doit pas nécessairement avoir  $\overset{1}{E} = \overset{\circ}{E}$ , mais il faut cependant assurer la condition suivante :

H 2 :  $\overset{1}{E} \subset \overset{\circ}{E}$ , c'est-à-dire que toute perturbation du second modèle doit être un mode de déplacement contenu dans le premier.

Cette condition implique aussi que le premier problème ne peut être résolu en présence d'un plus grand nombre de fixations que le second; que le maillage par éléments finis du premier problème doit être au moins aussi fin que celui du second. Lorsque l'hypothèse H2 est vérifiée, on a automatiquement, par (5.3.10),

$${}^1 U(u) - Q(u) = 0 \quad (5.3.12)$$

ce qui signifie que la perturbation est soumise au principe

$${}^2 U + {}^3 U + {}^4 U - R(u) \quad \min_{u \in \overset{1}{E}} \quad (5.3.13)$$

où l'on a par ailleurs éliminé tous les termes qui ne dépendent que des déplacements initiaux.

### 3.3. Linéarisation

Le problème (5.3.13) est non linéaire, car l'énergie de déformation contient des termes du troisième et du quatrième ordre en les dérivées des déplacements. Ces termes sont

$$U_3 = \frac{1}{2} \int_V C_{ijkl} h_{ij}^l \omega_{km} \omega_{lm} dV \quad (5.3.14)$$

$$U_4 = \frac{1}{8} \int_V C_{ijkl} \omega_{im} \omega_{jm} \omega_{kn} \omega_{ln} dV. \quad (5.3.15)$$

Le domaine de validité de l'analyse quasi-linéaire sera donc limité aux cas où l'influence de ces termes est négligeable. Tout d'abord, le terme  $U_4$  est classiquement négligé dans les analyses linéaires. Nous admettrons que la même approximation est valable, ce qui constitue notre troisième hypothèse:

H 3 :  $U_4$  est négligeable.

Il s'agit d'une restriction sur la grandeur des déplacements. Considérons par exemple le cas d'une plaque. L'énergie de flexion a pour ordre de grandeur

$$\frac{Dt^3}{24} \chi^2 \approx \frac{Dt^3}{24} \frac{w^2}{\ell^4},$$

où  $D = \frac{E}{2}$ , et  $\ell$  est une longueur d'onde du mode de flexion; l'ordre de grandeur de  $W_4$  est

$$\frac{Dt}{8} \omega^4 \approx \frac{Dt}{8} \frac{w^4}{\ell^4}.$$

Dès lors, le rapport des deux énergies a pour ordre de grandeur

$$\frac{W_4}{W_f} \approx 3 \left(\frac{w}{t}\right)^2,$$

ce qui signifie que le carré de la flèche doit être petit devant le carré de l'épaisseur [L3]. Un autre cas où les termes du quatrième ordre peuvent être négligés est celui où il existe une très forte précontrainte d'extension (membranes et câbles fortement tendus). La condition est alors visiblement

$$|\omega|^2 \ll \varepsilon \quad (5.3.16)$$

ce qui nécessite, dans le cas d'une membrane,

$$\left(\frac{w}{l}\right)^2 \ll \varepsilon.$$

Enfin, le terme du troisième ordre  $\overset{3}{U}$  n'est certainement pas négligeable a priori, puisqu'il est identique au second terme de  $\overset{2}{U}$ , sauf à remplacer  $h_{ij}$  par  $h_{ij}^1$ . Il faut donc imposer cette condition comme hypothèse supplémentaire :

$$\underline{H\ 4} : |C_{ijkl} h_{ij}^1 \omega_{km} \omega_{lm}| \ll |C_{ijkl} h_{ij}^0 \omega_{km} \omega_{lm}|.$$

Il s'agit essentiellement d'une condition de découplage entre la sollicitation initiale et la perturbation. Comme on a

$$h_{ij}^1 = \varepsilon_{ij} + \frac{1}{2} (\omega_{im}^0 \omega_{jm}^0 + \omega_{im}^0 \omega_{jm}^0),$$

on en déduit en particulier que les rotations initiales doivent être très faibles, car les termes en  $\omega_{im}^0 \omega_{jm}^0$  sont de la même nature que les termes  $\omega_{km}^0 \omega_{lm}^0$  et n'ont donc aucune raison d'en être découplés. Ceci permet d'écrire les expressions simplifiées

$$h_{ij}^0 \approx \varepsilon_{ij}$$

$$h_{ij}^1 \approx \varepsilon_{ij}$$

(5.3.16)

$$\begin{aligned} \overset{2}{W} &\approx \frac{1}{2} C_{ijkl} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl} + \frac{1}{2} C_{ijkl} \overset{\circ}{\varepsilon}_{ij} \omega_{km} \omega_{lm} \\ &= \frac{1}{2} C_{ijkl} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl} + \frac{1}{2} \overset{\circ}{s}_{ij} \omega_{im} \omega_{jm} \end{aligned}$$

### 3.4. Exemples

Pour bien faire comprendre la portée exacte des considérations qui précèdent, nous allons examiner un certain nombre d'exemples typiques, en allant du plus simple au plus complexe.

#### 3.4.1. Câbles tendus

Considérons un câble mince, de raideur en flexion négligeable, tendu par une force  $N$ . La position de référence est le câble parfaitement horizontal, et on lui applique des charges transversales. On a

$$\overset{\circ}{\varepsilon} = \frac{N}{\Omega} \quad (5.3.17)$$

où  $\Omega$  est la section du câble,

$$\varepsilon = \frac{du}{dx} = 0 \quad (5.3.18)$$

car le câble n'a que des déplacements verticaux, et, puisqu'il n'y a pas de cisaillement,

$$\gamma = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \rightarrow \omega = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \frac{dv}{dx} \quad (5.3.19)$$

Dès lors,

$$\overset{2}{U} = \int_0^l dx \int_{\Omega} \left\{ E \cdot 0 + \frac{1}{2} \frac{N}{\Omega} \left( \frac{dv}{dx} \right)^2 \right\} d\Omega = \frac{1}{2} N \int_0^l \left( \frac{dv}{dx} \right)^2 dx$$

$$\overset{3}{U} = 0 \quad (5.3.20)$$

$$U^4 = \frac{1}{8} \int_0^{\ell} dx \int_{\Omega} E \left( \frac{dv}{dx} \right)^4 d\Omega = \frac{1}{8} E \Omega \int_0^{\ell} \left( \frac{dv}{dx} \right)^4 dx$$

Traisons entièrement le cas du câble soumis à une charge concentrée en son milieu. L'équation différentielle du problème est

$$- N \frac{d^2 v}{dx^2} - \frac{E\Omega}{2} \frac{d}{dx} \left( \left( \frac{dv}{dx} \right)^3 \right) = 0$$

Elle admet visiblement une solution linéaire par morceaux

$$v = \begin{cases} v \frac{2x}{\ell} & \text{dans } ]0, \frac{\ell}{2}[ \\ v \frac{2(\ell-x)}{\ell} & \text{dans } ]\frac{\ell}{2}, \ell[ \end{cases}$$

Quant à la condition de transition au droit de la charge, elle s'écrit

$$\left( N \frac{dv}{dx} + \frac{1}{2} E \Omega \left( \frac{dv}{dx} \right)^3 \right) \Big|_{\frac{\ell}{2}^-} - \left( N \frac{dv}{dx} + \frac{1}{2} E \Omega \left( \frac{dv}{dx} \right)^3 \right) \Big|_{\frac{\ell}{2}^+} = P,$$

soit

$$P = N \frac{4V}{\ell} + E \Omega \left( \frac{2V}{\ell} \right)^3$$

ou encore

$$\frac{P}{E\Omega} = 4 \frac{N}{E\Omega} \frac{V}{\ell} + 8 \left( \frac{V}{\ell} \right)^3 = 8 \left( \frac{V}{\ell} \right)^3 + \alpha \frac{V}{\ell}, \quad (5.3.21)$$

avec

$$\alpha = \frac{4N}{E\Omega} \quad (5.3.22)$$

Le terme du troisième ordre sera négligeable si

$$\left( \frac{V}{\ell} \right)^2 \ll \frac{\alpha}{8} = \frac{N}{2E\Omega}$$

Pour un câble d'acier, sous 10 hb de tension initiale,  
 $\frac{N}{2E\Omega} = 2,5 \cdot 10^{-4}$ , et l'erreur sera inférieure à 1% si

$$\frac{V}{\ell} \leq 2,2 \cdot 10^{-3} \quad (5.3.23)$$

Calculons la charge en termes de  $\frac{V}{\ell}$ , pour diverses valeurs de  $\alpha$  :

Valeur de P en fonction de $\frac{V}{\ell}$						
$\frac{V}{\ell}$	0,001	0,002	0,003	0,004	0,005	0,01
$\alpha = 0$	$8,10^{-9}$	$6,4 \cdot 10^{-8}$	$2,16 \cdot 10^{-7}$	$5,12 \cdot 10^{-7}$	$1,10^{-6}$	$8,10^{-6}$
$\alpha = 10^{-4}$	$1,08 \cdot 10^{-7}$	$2,64 \cdot 10^{-7}$	$5,16 \cdot 10^{-7}$	$9,12 \cdot 10^{-7}$	$1,5 \cdot 10^{-6}$	$9,10^{-6}$
$\alpha = 10^{-3}$	$1,008 \cdot 10^{-6}$	$2,064 \cdot 10^{-6}$	$3,216 \cdot 10^{-6}$	$4,512 \cdot 10^{-6}$	$6,10^{-6}$	$1,8 \cdot 10^{-6}$
$\alpha = 2 \cdot 10^{-3}$	$2,008 \cdot 10^{-6}$	$4,064 \cdot 10^{-6}$	$6,216 \cdot 10^{-6}$	$8,512 \cdot 10^{-6}$	$1,3 \cdot 10^{-5}$	$2,8 \cdot 10^{-6}$

Ces valeurs sont reportées à la figure 5.2. On constate que pour les petites valeurs de  $\frac{V}{\ell}$ , la théorie quasi-linéaire donne d'excellents résultats.

#### 3.4.2. Plaques de KIRCHHOFF

Le champ de déplacement d'une plaque de KIRCHHOFF a la forme

$$u_1(x, y, z) = u(x, y) - z D_1 w(x, y)$$

$$u_2(x, y, z) = v(x, y) - z D_2 w(x, y) \quad (5.3.24)$$

$$u_3(x, y, z) = w(x, y),$$

où  $D_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$ . On en déduit les expressions suivantes pour les déformations linéaires :

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= D_1 u - z D_{11} w \\ \varepsilon_{22} &= D_2 v - z D_{22} w \\ \gamma_{12} &= (D_1 v + D_2 u) - 2 z D_{12} w \end{aligned} \quad (5.3.25)$$

Quant aux rotations linéaires, elles sont données par

$$\begin{aligned} \omega_{12} &= \frac{1}{2} (D_1 v - D_2 u) \\ \omega_{13} &= D_1 w \\ \omega_{23} &= D_2 w. \end{aligned} \quad (5.3.26)$$

On notera que ces rotations ne dépendent pas de  $z$ . L'énergie de précontrainte s'écrit donc

$$\begin{aligned} 2 U_g &= \int_V \overset{\circ}{s}_{ij} \omega_{im} \omega_{jm} dV = \int_A dA \int_{-t/2}^{t/2} \overset{\circ}{s}_{ij} \omega_{im} \omega_{jm} dV \\ &= \int_A \left\{ \int_{-t/2}^{t/2} \overset{\circ}{s}_{ij} dz \right\} \omega_{im} \omega_{jm} dA. \end{aligned}$$

Seules apparaîtront donc les résultantes, à l'exclusion de tout moment. Explicitement, on obtient

$$\begin{aligned} \int_A \{ \overset{\circ}{N}_{11} (\omega_{12}^2 + \omega_{13}^2) + \overset{\circ}{N}_{22} (\omega_{21}^2 + \omega_{31}^2) + 2 \overset{\circ}{N}_{12} \omega_{13} \omega_{23} \\ + 2 \overset{\circ}{Q}_1 \omega_{12} \omega_{32} + 2 \overset{\circ}{Q}_2 \omega_{21} \omega_{23} \} dA = \end{aligned}$$

$$= \int_A \{ (\overset{\circ}{N}_{11} + \overset{\circ}{N}_{22}) \omega_{12}^2 + \overset{\circ}{N}_{11} \omega_{13}^2 + \overset{\circ}{N}_{22} \omega_{23}^2 \\ + 2 \overset{\circ}{N}_{12} \omega_{13} \omega_{23} + 2 \overset{\circ}{Q}_1 \omega_{12} \omega_{32} + 2 \overset{\circ}{Q}_2 \omega_{21} \omega_{31} \} dA$$

et, en exprimant les rotations en termes des déplacements,

$$2 U_g = \int_A \{ (\overset{\circ}{N}_{11} + \overset{\circ}{N}_{22}) \left( \frac{D_1 v - D_2 u}{2} \right)^2 + \overset{\circ}{Q}_1 (D_2 u - D_1 v) D_2 w \\ + \overset{\circ}{Q}_2 (D_1 v - D_2 u) D_1 w + \overset{\circ}{N}_{11} (D_1 w)^2 \\ + 2 \overset{\circ}{N}_{12} D_1 w D_2 w + \overset{\circ}{N}_{22} (D_2 w)^2 \} dA \quad (5.3.27)$$

Examinons la condition de découplage H4. La fonctionnelle  $\overset{3}{U}$  a la même forme que  $U_g$ , ce qui signifie que cette condition s'écrit

$$\int_A \{ \overset{1}{N}_{11} + \overset{1}{N}_{22} \left( \frac{D_1 v - D_2 u}{2} \right)^2 + \overset{1}{Q}_1 (D_2 u - D_1 v) D_2 w \\ + \overset{1}{Q}_2 (D_1 v - D_2 u) D_1 w + \overset{1}{N}_{11} (D_1 w)^2 + 2 \overset{1}{N}_{12} D_1 w D_2 w \\ + \overset{1}{N}_{22} (D_2 w)^2 \} dA \approx 0 \quad (5.3.28)$$

Un cas classique de vérification de (5.3.28) est décrit par les conditions suivantes :

A 1 - L'état initial est essentiellement membranaire, et la perturbation ne modifie pas sensiblement les efforts de membrane, c'est-à-dire

$$\overset{1}{N}_{11} \ll \overset{\circ}{N}_{11}, \quad \overset{1}{N}_{22} \ll \overset{\circ}{N}_{22}, \quad \overset{1}{N}_{12} \ll \overset{\circ}{N}_{12}$$

A 2 - La rotation perpendiculièrément au plan,  $\frac{1}{2} (D_2 u - D_1 v)$ , ne varie pas au cours de la perturbation. Cette condition est nécessaire dans la mesure où les efforts tranchants  $Q_1$  et  $Q_2$  ne sont pas nuls lors de la perturbation.

Ces hypothèses supplémentaires mènent à une nouvelle simplification des termes de précontrainte : on peut en effet omettre tous les termes en  $\frac{1}{2} (D_2 u - D_1 v)$ , ce qui conduit à l'expression classique de BRYAN [B15,T5,K3,K4] :

$$2 U_g = \int_A \{ \overset{\circ}{N}_{11} (D_1 w)^2 + 2 \overset{\circ}{N}_{12} D_1 w D_2 w + \overset{\circ}{N}_{22} (D_2 w)^2 \} d A \quad (5.3.29)$$

Tous les termes de cette expression admettent une interprétation physique simple, qui est détaillée dans [D18].

Ce n'est cependant pas le seul cas possible. En particulier, dans le cas d'une plaque longue et étroite assimilable à une poutre, l'expression (5.3.29) ne permet pas de représenter le flambement de la plaque dans son plan. Pour un tel problème - qui n'a d'ailleurs de sens que s'il existe un dispositif raidissant le déversement et le voilement - les hypothèses A1 et A2 doivent être remplacées par les suivantes :

B 1 - L'état initial correspond à de l'extension simple, en ce sens que  $\overset{\circ}{N}_{11}$  et  $\overset{\circ}{N}_{22}$  sont pratiquement constants sur la largeur de la plaque.

B 2 - La perturbation est telle que

$$\int_{-b/2}^{b/2} \overset{\circ}{N}_{11} d y \ll \int_{-b/2}^{b/2} \overset{\circ}{N}_{11} d y \quad ,$$

$$\int_{-b/2}^{b/2} \overset{\circ}{N}_{22} d y \ll \int_{-b/2}^{b/2} \overset{\circ}{N}_{22} d y \quad ,$$

$$D_2 \omega_{12} \approx 0, \quad Q_1 \approx 0, \quad Q_2 \approx 0$$

Dans ces conditions, il convient de conserver le terme

$$\int_A (\overset{\circ}{N}_{11} + \overset{\circ}{N}_{22}) \left( \frac{D_1 v - D_2 u}{2} \right)^2 dA. \quad (5.3.30)$$

Il ressort de cette analyse que si l'on veut pouvoir représenter le raidissement géométrique aussi bien dans le plan que hors du plan dans le cas des structures du genre poutre, les termes à conserver sont

$$\int_A \left\{ \overset{\circ}{N}_{11} (D_1 w)^2 + 2 \overset{\circ}{N}_{12} D_1 w + D_2 w + \overset{\circ}{N}_{22} (D_2 w)^2 + (\overset{\circ}{N}_{11} + \overset{\circ}{N}_{22}) \left( \frac{D_1 v - D_2 u}{2} \right)^2 \right\} dA. \quad (5.3.31)$$

Mais il convient alors de vérifier a posteriori que la solution vérifie les hypothèses A ou B pour s'assurer de la validité du calcul.

### 3.4.3. Plaques de HENCKY

Abandonnant l'hypothèse que les sections normales au feuillet moyen conservent cette propriété au cours de la déformation, la théorie de HENCKY se caractérise par le champ de déplacement suivant :

$$\begin{aligned} u_1(x, y, z) &= u(x, y) + z \alpha(x, y) \\ u_2(x, y, z) &= v(x, y) + z \beta(x, y) \\ u_3(x, y, z) &= w(x, y) \end{aligned} \quad (5.3.32)$$

Par conséquent, les déformations et les rotations deviennent

$$\epsilon_{11} = D_1 u + z D_1 \alpha$$

$$\epsilon_{22} = D_2 v + z D_2 \beta$$

$$\gamma_{12} = (D_1 v + D_2 u) + z (D_1 \beta + D_2 \alpha)$$

$$\gamma_{13} = (\alpha + D_1 w)$$

$$\gamma_{23} = (\beta + D_2 w)$$

(5.3.33)

$$\omega_{12} = \frac{1}{2} (D_1 v - D_2 u) + \frac{z}{2} (D_1 \beta - D_2 \alpha)$$

$$\omega_{13} = \frac{1}{2} (D_1 w - \alpha)$$

$$\omega_{23} = \frac{1}{2} (D_2 w - \beta)$$

Les termes de précontrainte sont donc donnés par

$$2 U_g = \int_A d A \int_{-t/2}^{t/2} \{ s_{11}^{\circ} (\omega_{12}^2 + \omega_{13}^2) + s_{22}^{\circ} (\omega_{21}^2 + \omega_{23}^2)$$

$$+ 2 s_{12}^{\circ} \omega_{13} \omega_{23} + 2 s_{13}^{\circ} \omega_{12} \omega_{32}$$

$$+ 2 s_{23}^{\circ} \omega_{21} \omega_{31} \} d A$$

$$= \int_A d A \int_{-t/2}^{t/2} \{ s_{11}^{\circ} \left( \frac{D_1 w - \alpha}{2} \right)^2 + s_{22}^{\circ} \left( \frac{D_2 w - \beta}{2} \right)^2$$

$$+ 2 s_{12}^{\circ} \left( \frac{D_1 w - \alpha}{2} \right) \left( \frac{D_2 w - \beta}{2} \right)$$

$$+ (s_{11}^{\circ} + s_{22}^{\circ}) \left( \frac{D_1 v - D_2 u}{2} + z \frac{D_1 \beta - D_2 \alpha}{2} \right)^2$$

$$\begin{aligned}
& + 2 \overset{\circ}{s}_{13} \left( \frac{D_1 v - D_2 u}{2} + z \frac{D_1 \beta - D_2 \alpha}{2} \right) \left( \frac{\beta - D_2 w}{2} \right) \\
& + 2 \overset{\circ}{s}_{23} \left( \frac{D_2 u - D_1 v}{2} + z \frac{D_2 \alpha - D_1 \beta}{2} \right) \\
& \quad \left( \frac{\alpha - D_1 w}{2} \right) \} dz \\
= & \int_A \left[ \overset{\circ}{N}_{11} \left( \frac{D_1 w - \alpha}{2} \right)^2 + \overset{\circ}{N}_{22} \left( \frac{D_2 w - \beta}{2} \right)^2 \right. \\
& + 2 \overset{\circ}{N}_{12} \left( \frac{D_1 w - \alpha}{2} \right) \left( \frac{D_2 w - \beta}{2} \right) \\
& + (\overset{\circ}{N}_{11} + \overset{\circ}{N}_{22}) \left\{ \left( \frac{D_1 v - D_2 u}{2} \right)^2 + \frac{t^2}{12} \left( \frac{D_1 \beta - D_2 \alpha}{2} \right)^2 \right\} \\
& + 2 (\overset{\circ}{M}_{11} + \overset{\circ}{M}_{22}) \left( \frac{D_1 v - D_2 u}{2} \right) \left( \frac{D_1 \beta - D_2 \alpha}{2} \right) \\
& + 2 \overset{\circ}{Q}_1 \left( \frac{D_1 v - D_2 u}{2} \right) \left( \frac{\beta - D_2 w}{2} \right) \\
& \left. + 2 \overset{\circ}{Q}_2 \left( \frac{D_2 u - D_1 v}{2} \right) \left( \frac{\alpha - D_1 w}{2} \right) \right] dA. \quad (5.3.34)
\end{aligned}$$

Les termes du troisième ordre ont exactement la même forme, sauf à remplacer  $\overset{\circ}{N}_{11}, \dots$ , par  $\overset{1}{N}_{11}, \dots$ . Dès lors, la condition de découplage H4 sera encore obtenue moyennant les hypothèses A ou B, si l'on fait abstraction du terme

$$(\overset{\circ}{N}_{11} + \overset{\circ}{N}_{22}) \frac{t^2}{12} \left( \frac{D_1 \beta - D_2 \alpha}{2} \right)^2$$

qui, représentant la contribution de la variation sur l'épaisseur de la rotation autour de la normale, doit naturellement

être petit. On en déduit l'expression suivante des termes de raideur géométrique :

$$\begin{aligned}
 2 U_g = \int_A \{ & \overset{\circ}{N}_{11} \left( \frac{D_1 w - \alpha}{2} \right)^2 + \overset{\circ}{N}_{22} \left( \frac{D_2 w - \beta}{2} \right)^2 \\
 & + 2 \overset{\circ}{N}_{12} \left( \frac{D_1 w - \alpha}{2} \right) \left( \frac{D_2 w - \beta}{2} \right) \\
 & + (\overset{\circ}{N}_{11} + \overset{\circ}{N}_{22}) \left( \frac{D_1 v - D_2 u}{2} \right)^2 \} d A. \quad (5.3.35)
 \end{aligned}$$

Si l'on compare cette expression à celle des plaques de KIRCHHOFF (5.3.31), on constate qu'elle n'en diffère que par le fait que les dérivées de  $w$  sont remplacées par les expressions

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2} (D_1 w - \alpha) &= D_1 w - \frac{1}{2} \gamma_{13} \\
 \frac{1}{2} (D_2 w - \beta) &= D_2 w - \frac{1}{2} \gamma_{23}
 \end{aligned} \quad (5.3.36)$$

qui n'en diffèrent que par des termes de glissement. Comme notre théorie est bâtie sur l'hypothèse que les déformations sont très petites, on en déduit que les expressions (5.3.31) et (5.3.35) sont équivalentes et que, par conséquent, on peut utiliser l'expression (5.3.31) pour les plaques de HENCKY aussi bien que pour les plaques de KIRCHHOFF.

Le cas où la plaque de HENCKY est un modèle équivalent pour représenter un sandwich nécessite une attention particulière. En effet, dans ce cas, les expressions (5.3.31) et (5.3.35) cessent d'être équivalentes, du fait de la grandeur des glissements, mais ce fait même invalide les déductions de l'une et l'autre. Pour obtenir l'expression correcte, il convient d'étudier directement le sandwich lui-même. Nous utiliserons la description du paragraphe (7.2) du chapitre 3, soit

$$u_{\alpha} = \begin{cases} \bar{u}_{\alpha} + (\zeta-d) \bar{\phi}_{\alpha} & \text{dans l'âme} \\ \bar{u}_{\alpha} + (\frac{h}{2}-d) \bar{\phi}_{\alpha} - (\zeta-\frac{h}{2}) D_{\alpha} w & \text{dans la semelle 2} \\ \bar{u}_{\alpha} - (\frac{h}{2}+d) \bar{\phi}_{\alpha} - (\zeta+\frac{h}{2}) D_{\alpha} w & \text{dans la semelle 1.} \end{cases} \quad (5.3.37)$$

Les rotations s'écrivent donc :

$$\omega_{12} = \begin{cases} \frac{1}{2} \{ (D_1 \bar{u}_2 - D_2 \bar{u}_1) + (\zeta-d) (D_1 \bar{\phi}_2 - D_2 \bar{\phi}_1) \} & (\text{âme}) \\ \frac{1}{2} \{ (D_1 \bar{u}_2 - D_2 \bar{u}_1) + (\frac{h}{2}-d) (D_1 \bar{\phi}_2 - D_2 \bar{\phi}_1) \} & (\text{semelle 2}) \\ \frac{1}{2} \{ (D_1 \bar{u}_2 - D_2 \bar{u}_1) - (\frac{h}{2}+d) (D_1 \bar{\phi}_2 - D_2 \bar{\phi}_1) \} & (\text{semelle 1}) \end{cases} \quad (5.3.38)$$

$$\omega_{\alpha 3} = \begin{cases} \frac{1}{2} (D_{\alpha} w - \bar{\phi}_{\alpha}) & (\text{âme}) \\ D_{\alpha} w & (\text{semelle 2}) \\ D_{\alpha} w & (\text{semelle 1}) \end{cases} \quad (5.3.39)$$

Un état membranaire sera caractérisé par des tensions proportionnelles aux modules, soit

$$s_{\alpha\beta} = \begin{cases} 0 & \text{dans l'âme} \\ \lambda_2 S_{\alpha\beta} & \text{dans la semelle 2} \\ \lambda_1 S_{\alpha\beta} & \text{dans la semelle 1} \end{cases} \quad (5.3.40)$$

On obtient donc, en tenant compte de (3.7.17),

$$\int_{\text{épaisseur}} s_{\alpha\beta} \omega_{\alpha 3} \omega_{\beta 3} d\zeta = S_{\alpha\beta} D_{\alpha} w D_{\beta} w (\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2) \\ = t_E S_{\alpha\beta} D_{\alpha} w D_{\beta} w$$

$$\begin{aligned}
& \int_{\text{épaisseur}} (\overset{\circ}{s}_{11} + \overset{\circ}{s}_{22}) \omega_{12}^2 d\zeta = e_1 \lambda_1 (s_{11} + s_{22}) \cdot \\
& \left\{ \left( \frac{D_1 \bar{u}_2 - D_2 \bar{u}_1}{2} \right)^2 - 2 \left( \frac{h}{2} + d \right) \left( \frac{D_1 \bar{u}_2 - D_2 \bar{u}_1}{2} \right) \left( \frac{D_1 \bar{\phi}_2 - D_2 \bar{\phi}_1}{2} \right) \right. \\
& \left. + \left( \frac{h}{2} + d \right)^2 \left( \frac{D_1 \bar{\phi}_2 - D_2 \bar{\phi}_1}{2} \right)^2 \right\} + e_2 \lambda_2 (s_{11} + s_{22}) \\
& \left\{ \left( \frac{D_1 \bar{u}_2 - D_2 \bar{u}_1}{2} \right) + 2 \left( \frac{h}{2} - d \right) \left( \frac{D_1 \bar{u}_2 - D_2 \bar{u}_1}{2} \right) \left( \frac{D_1 \bar{\phi}_2 - D_2 \bar{\phi}_1}{2} \right) \right. \\
& \left. + \left( \frac{h}{2} - d \right)^2 \left( \frac{D_1 \bar{\phi}_2 - D_2 \bar{\phi}_1}{2} \right)^2 \right\} \\
& = (s_{11} + s_{22}) \left\{ t_E \left( \frac{D_1 \bar{u}_2 - D_2 \bar{u}_1}{2} \right)^2 + \frac{t_F^3}{12} \left( \frac{D_1 \bar{\phi}_2 - D_2 \bar{\phi}_1}{2} \right)^2 \right\}
\end{aligned}$$

Si l'on a choisi  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  de telle façon que  $\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 = 1$ , ce qui est loisible, puisque les modules de référence  $\bar{C}_{\alpha\beta\gamma\delta}$  ne sont déterminés qu'à une constante multiplicative près, on a  $\overset{\circ}{N}_{\alpha\beta} = S_{\alpha\beta}$ , ce qui donne

$$\begin{aligned}
2 U_g = \int_A & \left[ \overset{\circ}{N}_{\alpha\beta} D_\alpha w D_\beta w + (\overset{\circ}{N}_{11} + \overset{\circ}{N}_{22}) \left\{ \left( \frac{D_1 \bar{u}_2 - D_2 \bar{u}_1}{2} \right)^2 \right. \right. \\
& \left. \left. + h^2 \lambda_1 e_1 \lambda_2 e_2 \left( \frac{D_1 \bar{\phi}_2 - D_2 \bar{\phi}_1}{2} \right)^2 \right\} \right] dA.
\end{aligned}$$

En admettant que

$$h^2 (D_1 \bar{\phi}_2 - D_2 \bar{\phi}_1)^2 \ll (D_1 \bar{u}_2 - D_2 \bar{u}_1)^2,$$

c'est-à-dire que la rotation autour de la normale varie peu sur l'épaisseur, on obtient finalement

$$\begin{aligned}
2 U_g = \int_A \{ & \overset{\circ}{N}_{11} (D_1 w)^2 + \overset{\circ}{N}_{22} (D_2 w)^2 + 2 \overset{\circ}{N}_{12} (D_1 w D_2 w) \\
& + (\overset{\circ}{N}_{11} + \overset{\circ}{N}_{22}) \left( \frac{D_1 \bar{u}_2 - D_2 \bar{u}_1}{2} \right)^2 \} dA, \quad (5.3.41)
\end{aligned}$$

ce qui montre que c'est l'expression des plaques de KIRCHHOFF qui reste valable. Aussi, le plus simple est d'utiliser cette expression dans tous les cas, puisqu'elle est également équivalente à la formule plus compliquée (5.3.36) des vraies plaques de HENCKY.

#### 3.4.4. Coques de révolution

Pour les coques de révolution décrites au chapitre 3, paragraphe 3, les termes de précontrainte ont la forme

$$\begin{aligned}
2 U_g = \int_V \{ & \overset{\circ}{s}_{ss} (\omega_{s\zeta}^2 + \omega_{s\theta}^2) + \overset{\circ}{s}_{\theta\theta} (\omega_{\theta\zeta}^2 + \omega_{\theta s}^2) \\
& + 2 \overset{\circ}{s}_{s\theta} \omega_{s\zeta} \omega_{\zeta\theta} + \overset{\circ}{s}_{s\zeta} \omega_{s\theta} \omega_{\zeta\theta} + \overset{\circ}{s}_{\theta\zeta} \omega_{\theta s} \omega_{\zeta s} \} \\
= \int_V \{ & \overset{\circ}{s}_{ss} \omega_{s\zeta}^2 + \overset{\circ}{s}_{\theta\theta} \omega_{\theta\zeta}^2 + 2 \overset{\circ}{s}_{s\theta} \omega_{s\zeta} \omega_{\theta\zeta} \\
& + (\overset{\circ}{s}_{ss} + \overset{\circ}{s}_{\theta\theta}) \omega_{s\theta}^2 \} dV. \\
& + \int_V \{ \overset{\circ}{s}_{s\zeta} \omega_{s\theta} \omega_{\zeta\theta} + \overset{\circ}{s}_{\theta\zeta} \omega_{\theta s} \omega_{\zeta s} \} dV. \quad (5.3.42)
\end{aligned}$$

Le raisonnement est le même que pour les plaques de HENCKY. Pour les mêmes raisons, nous remplacerons  $\omega_{s\zeta}$  et  $\omega_{\theta\zeta}$  par  $u_{\zeta|s}$  et  $u_{\zeta|\theta}$ , ces deux grandeurs étant données par

$$u_{\zeta|s} = \left(1 + \frac{\zeta}{R_s}\right)^{-1} \left(\frac{\partial w}{\partial s} - \frac{u}{R_s}\right) \approx \frac{\partial w}{\partial s} - \frac{u}{R_s}$$

$$u_{\theta}|_s = \left(1 + \frac{\zeta}{R_{\theta}}\right)^{-1} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} - \frac{v}{R_{\theta}}\right) \approx \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} - \frac{v}{R_{\theta}} \quad (5.3.43)$$

Les termes en  $\left(1 + \frac{\zeta}{R_s}\right)^{-1} \approx \left(1 - \frac{\zeta}{R_s}\right)$  et  $\left(1 + \frac{\zeta}{R_{\theta}}\right)^{-1} \approx \left(1 - \frac{\zeta}{R_{\theta}}\right)$  doivent en effet être très peu différents de l'unité si l'on veut éviter le couplage avec la flexion, qui contredirait l'hypothèse H4. Enfin,

$$\begin{aligned} \omega_{s\theta} &= \frac{1}{2} (u_s|_{\theta} - u_{\theta}|_s) \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \left(1 + \frac{\zeta}{R_{\theta}}\right)^{-1} (\gamma_{\theta} + \zeta \delta_{\theta}) - \left(1 + \frac{\zeta}{R_s}\right)^{-1} (\gamma_s + \zeta \delta_s) \right\} \\ &\approx \frac{1}{2} (\gamma_{\theta} - \gamma_s) \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{v}{r} \frac{dr}{ds} - \frac{\partial v}{\partial s} \right). \end{aligned} \quad (5.3.44)$$

Les termes de raideur géométrique seront donc donnés par

$$\begin{aligned} 2 U_g &= \int_A \left\{ N_{ss}^{\circ} \left( \frac{\partial w}{\partial s} - \frac{u}{R_s} \right)^2 + N_{\theta\theta}^{\circ} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} - \frac{v}{R_{\theta}} \right)^2 \right. \\ &\quad + 2 N_{s\theta}^{\circ} \left( \frac{\partial w}{\partial s} - \frac{u}{R_s} \right) \left( \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} - \frac{v}{R_{\theta}} \right) \\ &\quad \left. + (N_{ss}^{\circ} + N_{\theta\theta}^{\circ}) \left( \frac{\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{v}{r} \frac{dr}{ds} - \frac{\partial v}{\partial s}}{2} \right)^2 \right\} dA. \end{aligned} \quad (5.3.45)$$

#### 4. ETUDE DYNAMIQUE DES STRUCTURES PRECONTRAINTES

L'application de la théorie ci-dessus à la recherche du spectre propre d'une coque en présence d'une précontrainte ne pose guère de problème. D'une part, la sollicitation statique est, dans la plupart des problèmes de coques, représentée d'une manière assez satisfaisante par l'état de tension membranaire, sauf en certains points particuliers

comme les encastremements et raccordements. Mais les zones où les tensions de flexion sont importantes sont généralement assez peu étendues, et correspondent souvent à des points où la déformée dynamique est petite. D'autre part, les modes dynamiques influencés par la précontrainte sont à prédominance flexionnelle, ce qui assure le découplage. Enfin, le domaine des vibrations linéaires est également celui des amplitudes (arbitrairement petites, ce qui justifie l'hypothèse H3.

Dans la pratique, les opérations sont organisées en deux étapes.

- (i) Etude statique, dont les résultats sont conservés sur une mémoire périphérique.
- (ii) Etude dynamique, avec les matrices corrigées à l'aide des résultats de l'étude précédente.

L'expérience montre que les résultats de l'analyse dynamique peuvent être fortement influencés par la précontrainte, sauf pour les modes axisymétriques. Pour ceux-ci, en effet, l'effort azimutal est sans effet, puisque  $u_{\zeta}|_{\theta} = 0$ , et l'effort longitudinal a peu d'influence, car son ordre de grandeur est, pour  $\frac{1}{R_s} = 0$

$$t s_{ss}^{\circ} \left(\frac{\partial w}{\partial s}\right)^2 \approx t s_{ss}^{\circ} \left(\frac{W}{\ell}\right)^2$$

où  $W$  et  $\ell$  sont les ordres de grandeur de  $w$  et de la longueur d'onde, tandis que l'énergie est dominée par le terme membranaire

$$D t \frac{W^2}{R}$$

Le rapport des deux termes est donc

$$\frac{s_{ss}}{D} \frac{R}{\ell},$$

soit, pour  $\ell \geq R$ , de l'ordre du rapport des tensions aux modules.

## 5. ETUDE DE LA STABILITE

Dans certains cas de précontrainte (compression), les termes géométriques ont pour effet de diminuer la rigidité. Lorsqu'il existe un mode  $u$  tel que  $U_2(u) = 0$ , la structure ne peut reprendre que les charges orthogonales à ce mode. Il s'agit d'un cas d'instabilité par bifurcation. Le test du signe de  $U_2$  n'est d'ailleurs rien d'autre que le test de la variation seconde, qui s'introduit ici comme l'incapacité de la structure à recevoir une charge, selon le point de vue de TIMOSHENKO [T5].

Un fait intéressant, dans l'étude de la stabilité à l'aide des variables  $\varepsilon_{ij}$  et  $\omega_{ij}$ , est la possibilité d'une analyse statiquement admissible de la stabilité, moyennant cependant certaines conditions restrictives pour une des formulations proposées. Partons du critère de la variation seconde. Selon l'usage, on donne la forme du champ de tensions, et on recherche le facteur  $\Lambda$  tel que l'instabilité se produise.  $\Lambda$  est la charge critique (généralisée). On écrit donc

$$s_{ij} = -\Lambda S_{ij} \quad (5.5.1)$$

Cela étant, les rotations peuvent être mises sous la forme du pseudo-vecteur  $\vec{\omega}$  défini par

$$\omega_{ij} = e_{ijk} \omega_k \quad (5.5.2)$$

Le critère de la variation seconde s'écrit alors

$$= \frac{1}{2} \int_V C_{ijkl} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl} dV - \frac{1}{2} \Lambda \int_V S_{pq} e_{pmi} e_{qmj} \omega_i \omega_j dV \quad \text{stat} \\ u \quad (5.5.3)$$

étant entendu que  $\varepsilon_{ij}$  et  $\omega_i$  dépendent des déplacements selon les relations

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (D_i u_j + D_j u_i) \quad (5.5.4)$$

$$\omega_i = \frac{1}{2} e_{ijk} D_j u_k \quad (5.5.5)$$

Il s'agit d'un problème aux valeurs propres, qui s'étudie par les méthodes classiques des problèmes à deux matrices. On trouvera une description détaillée de ces méthodes dans [G3], [H5].

Suivant la méthode classique de FRIEDRICHS [C3], on se libère des conditions (5.5.4) et (5.5.5) à l'aide de deux champs de multiplicateurs  $\lambda_{ij}$  et  $\mu_i$ , ce qui définit les deux "potentiels de dislocation"

$$\mathcal{D}_1 = \int_V \lambda_{ij} \left\{ \frac{1}{2} (D_i u_j + D_j u_i) - \varepsilon_{ij} \right\} \quad (5.5.6)$$

$$\mathcal{D}_2 = - \int_V \mu_i \left\{ \frac{1}{2} e_{ijk} D_j u_k - \omega_i \right\} \quad (5.5.7)$$

On obtient ainsi un principe à 5 champs :

$$\mathcal{G}(u, \varepsilon, \omega, \lambda, \mu) = \mathcal{U} + \mathcal{D}_1 + \mathcal{D}_2 \quad \text{stat} \\ u, \varepsilon, \omega, \lambda, \mu \quad (5.5.8)$$

Les variations des différents champs conduisent aux équations suivantes :

$$\delta u_i \rightarrow - D_j \frac{\lambda_{ij} + \lambda_{ji}}{2} - \frac{1}{2} e_{ijk} D_j \mu_k = 0 \text{ dans } V \\ - n_j \frac{\lambda_{ji} + \lambda_{ij}}{2} - \frac{1}{2} e_{ijk} n_j \mu_k = 0 \text{ sur } S_2, \quad (5.5.9)$$

$S_2$  étant la partie libre de la frontière. Il s'agit visiblement d'équations d'équilibre.

$$\delta \varepsilon_{ij} \rightarrow C_{ijkl} \varepsilon_{kl} = \lambda_{ij} \quad (5.5.10)$$

Ces équations expriment les relations tensions-déformations suivant la loi de HOOKE classique.

$$\delta \omega_i \rightarrow \Lambda S_{pq} e_{pmi} e_{qmj} \omega_j = \mu_i \quad (5.5.11)$$

Il s'agit de relations liant les efforts  $\mu_i$  aux rotations. Enfin, les variations de  $\lambda_{ij}$  et  $\mu_i$  restituent les équations de compatibilité (5.5.6) et (5.5.7).

C'est ici qu'intervient l'hypothèse restrictive que nous avons annoncée. Le schéma classique consiste à éliminer les variables  $\varepsilon_{ij}$  et  $\omega_i$  en termes des tensions  $\lambda_{ij}$  et  $\mu_i$ . Si la relation (5.5.10) est toujours inversible, il n'en est pas de même de (5.5.11). En effet, on a

$$e_{pmi} e_{qmj} S_{pq} = S_{pq} (\delta_{pq} \delta_{ij} - \delta_{pj} \delta_{iq}) = (S_{pp} \delta_{ij} - S_{ij}) \quad (5.5.12)$$

et cette matrice peut être singulière. En admettant qu'elle ne le soit pas, soit  $R_{ij}$  son inverse. On a alors

$$\varepsilon_{ij} = C_{ijkl}^{-1} \lambda_{kl} \quad (5.5.13)$$

$$\omega_i = \frac{1}{\Lambda} R_{ij} \mu_j$$

et la restitution de ces relations mène au principe canonique suivant :

$$\begin{aligned} \mathcal{V}(u, \lambda, \mu) = & \int_V \left\{ \lambda_{ij} \frac{1}{2} (D_i u_j + D_j u_i) - \frac{1}{2} C_{ijkl}^{-1} \lambda_{ij} \lambda_{kl} \right\} dV \\ & - \int_V \left\{ \mu_i \frac{1}{2} e_{ijk} D_j u_k - \frac{1}{2\Lambda} R_{ij} \mu_i \mu_j \right\} dV \quad \text{stat.} \\ & u, \mu, \lambda \end{aligned} \quad (5.5.14)$$

Ce principe contient à la fois les équations d'équilibre et les relations tensions-déformations (5.5.10) et (5.5.11).

Finalement, si l'on impose que l'équilibre soit vérifié a priori, ce qui s'exprime le plus simplement par la condition de nullité du travail virtuel :

$$\int_V \{ \lambda_{ij} \frac{1}{2} (D_i \delta u_j + D_j \delta u_i) - \mu_i \frac{1}{2} e_{ijk} D_j \delta u_k \} dV = 0 ,$$

pour tout  $\delta u_i$  admissible,

on peut soustraire cette dernière relation, avec  $\delta u_i = u_i$ , au principe (5.5.14), ce qui mène à la fonctionnelle

$$\mathcal{E}(\lambda, \mu) = \int_V \frac{1}{2} C_{ijkl}^{-1} \lambda_{ij} \lambda_{kl} dV - \frac{1}{2} \int_V R_{ij} \mu_i \mu_j dV$$

stat  
 $\lambda, \mu$

(5.5.15)

Malheureusement, le fait que la matrice  $(S_{pp} \delta_{ij} - S_{ij})$  peut être singulière hypothèque sérieusement la formulation ci-dessus. Pour contourner cette difficulté, on peut, au lieu d'éliminer les rotations  $\omega_i$  en termes des tensions conjuguées, procéder à l'élimination inverse

$$\mu_i = \Lambda (S_{pp} \delta_{ij} - S_{ij}) \omega_j,$$

ce qui conduit à une nouvelle forme de principe canonique :

$$\begin{aligned} \mathcal{E}^*(u, \lambda, \omega) = & \int_V \{ \lambda_{ij} \frac{1}{2} (D_i u_j + D_j u_i) - \frac{1}{2} C_{ijkl}^{-1} \lambda_{ij} \lambda_{kl} \} dV \\ & - \Lambda \int_V \{ (S_{pp} \delta_{ij} - S_{ij}) \omega_j \frac{1}{2} e_{irs} D_r u_s \\ & - \frac{1}{2} (S_{pp} \delta_{ij} - S_{ij}) \omega_i \omega_j \} dV , \end{aligned} \quad (5.5.16)$$

équivalent au principe (5.5.14), mais toujours défini.  
Les équations d'équilibre s'écrivent à présent

$$D_j \left( \frac{\lambda_{ij} + \lambda_{ji}}{2} \right) + \frac{1}{2} e_{ijk} D_j (S_{\ell\ell} \delta_{kp} - S_{kp}) \omega_p = 0 \text{ dans } V \quad (5.5.17)$$

$$n_j \left( \frac{\lambda_{ij} + \lambda_{ji}}{2} \right) + \frac{1}{2} e_{ijk} n_j (S_{\ell\ell} \delta_{kp} - S_{kp}) \omega_p = 0 \text{ sur } S_2.$$

Supposant ces relations vérifiées a priori, on obtient alors la forme suivante du principe dual :

$$\xi^*(\lambda, \omega) = \int_V \frac{1}{2} C_{ijkl}^{-1} \lambda_{ij} \lambda_{kl} dV - \frac{\Lambda}{2} \int_V (S_{pp} \delta_{ij} - S_{ij}) \omega_i \omega_j dV \quad \text{stat} \quad \lambda, \omega \quad (5.5.18)$$

Cette dernière formulation est très voisine de celle que CARNOY [C4] a développée en se basant sur un principe général pour l'élasticité non linéaire, dû à FRAEIJIS de VEUBEKE [F3]. Pour les poutres, les équations d'équilibre (5.5.17) sont identiques à celles de TIMOSHENKO [T5].

## 6. ETUDES STATIQUES QUASI-LINEAIRES

Dans le cas de l'analyse dynamique ou de l'étude de stabilité, on partait d'un état statique connu, dont on supposait a priori qu'il correspondait à de petites rotations et à un état de tension membranaire, et la validité de l'analyse reposait sur le fait que les modes dynamiques et les modes d'instabilité sont généralement inextensionnels. Les problèmes statiques se posent généralement d'une manière toute différente. En effet, c'est généralement le système complet de charges qui est donné. Dans certains cas simples, comme celui des plaques planes, il est aisé de reconnaître les charges provoquant l'extension de celles qui sont responsables de la flexion, mais dans le cas géné-

ral, c'est loin d'être le cas. C'est pourquoi, il est fréquent d'utiliser un autre schéma d'analyse :

(i) On procède d'abord à une analyse linéaire sous le système complet de charges

(ii) On en extrait les tensions membranaires, qui serviront à calculer les termes de précontrainte  $U_g$

(iii) On réétudie la structure sous le système complet de charges, en utilisant l'expression  $U_\ell + U_g$  de l'énergie de déformation,  $U_\ell$  étant la partie linéaire de celle-ci.

Cependant, nous allons montrer qu'il est possible de définir dans le cas général une décomposition en charges d'extension et charges de flexion, par une méthode un peu plus élaborée. Pour une certaine classe de problèmes, les deux méthodes sont équivalentes, mais l'étude d'exemples nous montre que la méthode décomposée est plus générale que la méthode de double analyse du système complet.

### 6.1. Le problème linéaire

Considérons d'abord un problème linéaire quelconque. Il peut être exprimé sous la forme suivante :

"Chercher le déplacement  $u$  tel que, pour tout  $v$  admissible,

$$2 U_\ell (u, v) - P (v) = 0 , \quad (5.6.1)$$

où

$$U_\ell (u, v) = \frac{1}{2} \int_V s_{ij} (u) \varepsilon_{ij} (v) d V , \quad (5.6.2)$$

tandis que  $P (v)$  est le travail des charges".

Séparons dans l'intégrale (5.6.2) les tensions  $\overset{e}{s}_{ij}$  qui apparaîtront dans les termes de précontrainte, des autres  $\overset{f}{s}_{ij}$ . Nous les appellerons respectivement tensions d'extension et tensions de flexion. On peut alors écrire

$$U_{\ell}(u,v) = V_e(u,v) + V_f(u,v) \quad (5.6.3)$$

avec

$$V_e(u,v) = \frac{1}{2} \int_V \overset{e}{s}_{ij}(u) \varepsilon_{ij}(v) dV \quad (5.6.4)$$

$$V_f(u,v) = \frac{1}{2} \int_V \overset{f}{s}_{ij}(u) \varepsilon_{ij}(v) dV. \quad (5.6.5)$$

On notera que ces deux formes bilinéaires ne sont pas nécessairement symétriques, c'est-à-dire qu'en général,

$$V_e(u,v) \neq V_e(v,u) \quad , \quad V_f(u,v) \neq V_f(v,u), \quad (5.6.6)$$

la dissymétrie provenant du couplage extension-flexion. Ces définitions permettent d'écrire le problème linéaire sous la forme de la recherche du déplacement  $u_1$  tel que

$$2 V_e(u_1,v) + 2 V_f(u_1,v) = P(v). \quad (5.6.7)$$

Le déplacement  $u_1$  étant fixé, il est clair que  $V_e(u_1,v)$  et  $V_f(u_1,v)$  sont des fonctionnelles linéaires de  $v$  et peuvent donc être considérées comme l'expression de travaux. Ceci nous permet de définir

- la charge d'extension par la relation

$$Q(v) = 2 V_e(u_1,v) \quad (5.6.8)$$

- la charge de flexion, par

$$R(v) = 2 V_f(u_1,v). \quad (5.6.9)$$

Il découle de (5.6.7) que

$$P(v) = Q(v) + R(v). \quad (5.6.10)$$

### 6.2. Le problème décomposé

Le problème décomposé consiste à rechercher d'abord un "déplacement d'extension"  $\bar{u}_1^e$  tel que, pour tout  $v$  admissible, on ait

$$2 V(\bar{u}_1^e, v) = Q(v), \quad (5.6.11)$$

ce qui s'écrit encore

$$2 V_e(\bar{u}_1^e, v) + 2 V_f(\bar{u}_1^e, v) = 2 V_e(u_1, v). \quad (5.6.12)$$

Appelant

$$\bar{u}_1^f = u_1 - \bar{u}_1^e \quad (5.6.13)$$

"déplacement linéaire de flexion", on en déduit la relation

$$V_f(\bar{u}_1^e, v) = V_e(\bar{u}_1^f, v) \quad (5.6.14)$$

traduisant la symétrie du couplage extension-flexion. Le déplacement linéaire de flexion vérifie par ailleurs la relation

$$2 V_e(\bar{u}_1^f, v) + 2 V_f(\bar{u}_1^f, v) = R(v) \quad (5.6.15)$$

comme on s'en rend aisément compte en soustrayant les équations (5.6.7) et (5.6.12).

Dans une seconde étape, on recherche un "meilleur déplacement de flexion"  $\bar{u}_2^f$  en résolvant l'équation variationnelle

$$\begin{aligned}
2 V_e (\overset{f}{u}_2, v) + 2 V_f (\overset{f}{u}_2, v) + 2 U_g (\overset{e}{u}_1, \overset{f}{u}_2, v) &= R_1 (v) \\
&= 2 V_f (u_1, v)
\end{aligned}
\tag{5.6.16}$$

où la forme trilineaire  $2 U_g$  est la variation des termes géométriques

$$2 U_g (\overset{e}{u}_1, \overset{f}{u}_2, v) = \int_V s_{ij}^{\circ} (\overset{e}{u}_1) \omega_{im} (\overset{f}{u}_2) \omega_{jm} (v) dV. \tag{5.6.17}$$

A ce stade, il faut évidemment supposer que les hypothèses H1 à H4 sont vérifiées. En particulier, l'hypothèse H4 s'écrit

$$2 U_g (\overset{f}{u}_2, \overset{f}{u}_2, v) \ll 2 U_g (\overset{e}{u}_1, \overset{f}{u}_2, v), \tag{5.6.18}$$

ce qui implique que les tensions d'extension dues au déplacement de flexion sont très faibles. Il en découle d'ailleurs que

$$V_e (\overset{f}{u}_2, v) \ll V_e (\overset{e}{u}_1, v) \tag{5.6.19}$$

La solution est alors donnée par

$$u_2 = \overset{e}{u}_1 + \overset{f}{u}_2. \tag{5.6.20}$$

### 6.3. La technique de double analyse du problème complet

La technique précédente nécessite donc trois analyses : la première pour obtenir  $u_1$ , ce qui permet de définir la charge fictive  $Q$ ; la deuxième pour obtenir  $\overset{e}{u}_1$  et, finalement, la troisième pour obtenir  $\overset{f}{u}_2$ . En outre, il faut recombinaison  $\overset{e}{u}_1$  et  $\overset{f}{u}_2$  pour obtenir la solution. Dans la méthode de double analyse du problème complet, on calcule les termes géométriques à partir du déplacement linéaire complet  $u_1$ , et on recherche un nouveau déplacement en résolvant l'équation

$$\begin{aligned}
2 V_e (u_3, v) + 2 V_f (u_3, v) + 2 U_g (\overset{e}{u}_1 + \overset{f}{u}_1, u_3, v) \\
= Q_1 (v) + R_1 (v) \\
= 2 V_e (u_1, v) + 2 V_f (u_1, v) \quad (5.6.21)
\end{aligned}$$

La question de la validité de cette méthode se ramène visiblement à déterminer dans quelles conditions on a  $u_2 = u_3$ . Supposons d'abord que cette égalité est vérifiée. On a donc

$$u_3 - \overset{f}{u}_2 = \overset{e}{u}_1. \quad (5.6.22)$$

Faisant alors la différence des équations (5.6.21) et (5.6.16), on obtient :

$$\begin{aligned}
2 V_e (\overset{e}{u}_1, v) + 2 V_f (\overset{e}{u}_1, v) + 2 U_g (\overset{e}{u}_1, \overset{e}{u}_1, v) + 2 U_g (\overset{f}{u}_1, \overset{e}{u}_1, v) \\
+ 2 U_g (\overset{f}{u}_1, \overset{f}{u}_2, v) = Q_1 (v), \quad (5.6.22)
\end{aligned}$$

soit, en tenant compte de la définition (5.6.12) de  $\overset{e}{u}_1$ ,

$$2 U_g (\overset{e}{u}_1, \overset{e}{u}_1, v) + 2 U_g (\overset{f}{u}_1, \overset{e}{u}_1, v) + 2 U_g (\overset{f}{u}_1, \overset{f}{u}_2, v) = 0, \quad (5.6.23)$$

ce qui fournit une condition nécessaire. Les deux premiers termes s'annulent si le déplacement d'extension correspond à des rotations nulles, ce qui restitue à  $\overset{e}{u}_1$  sa signification physique simple. Pour que le dernier terme s'annule, il faut que les tensions d'extension dues au déplacement linéaire de flexion s'annulent, ce qui constitue une condition de découplage. Pour montrer que la condition (5.6.23) est aussi suffisante, réécrivons l'équation (5.6.16) sous la forme équivalente

$$\begin{aligned}
V_e (u_2 - \overset{e}{u}_1, v) + V_f (u_2 - \overset{e}{u}_1, v) + U_g (\overset{e}{u}_1, u_2 - \overset{e}{u}_1, v) \\
= V_f (\overset{e}{u}_1, v) + V_f (\overset{f}{u}_1, v),
\end{aligned}$$

et ajoutons aux deux membres la quantité

$$V_e (\bar{u}_1, v) + V_f (\bar{u}_1, v) + U_g (\bar{u}_1, \bar{u}_1, v) + U_g (\bar{u}_1, \bar{u}_1, v) \\ + U_g (\bar{u}_1, \bar{u}_2, v).$$

On obtient ainsi la relation

$$V_e (u_2, v) + V_f (u_2, v) + U_g (\bar{u}_1 + \bar{u}_1, u_2, v) = \\ V_e (u_1, v) + V_f (u_1, v) + U_g (\bar{u}_1, \bar{u}_1, v) + U_g (\bar{u}_1, \bar{u}_1, v) \\ + U_g (\bar{u}_1, \bar{u}_2, v),$$

qui montre que lorsque la condition (5.6.23) est vérifiée, le déplacement  $u_2$  vérifie aussi l'équation (5.6.23) définissant  $u_3$ .

#### 6.4. Conditions pratiques d'applicabilité

Les conditions ci-dessus se résument donc ainsi : le déplacement d'extension  $\bar{u}_1$  doit correspondre à de très faibles rotations, et les tensions d'extension dues aux déplacements de flexion doivent être négligeables devant celles qu'induit le déplacement d'extension. Malheureusement, on ne connaît généralement pas celui-ci. Cependant, pour une coque convenablement appuyée, on a l'égalité

$$\int_S w | \alpha \ w | \alpha \ d S \leq C \int_S w | \alpha \beta \ w | \alpha \beta \ d S,$$

où  $C$  est une constante dépendant des dimensions de la coque. Des lors, montrer que les rotations sont faibles équivaut à montrer que le déplacement d'extension induit de faibles tensions de flexion, soit, en tenant compte de (5.6.14),

$$V_f (u_1^e, v) = V_e (u_1^f, v) \ll V_e (u_1^e, v), \quad (5.6.24)$$

Cette condition peut être testée directement, mais au prix d'une analyse complémentaire, en recherchant le déplacement  $\overset{e}{u}$  : étant donné l'équation (5.6.12), on constate qu'elle s'écrit

$$V_e (\overset{e}{u}_1, v) \approx V_e (u_1, v), \quad (5.6.25)$$

c'est-à-dire que les tensions d'extension correspondant à  $\overset{e}{u}_1$  et à  $u_1$  sont très peu différentes. Si l'on appelle  $\mathcal{M}$  l'opérateur linéaire qui à une charge  $P$  associe la charge d'extension  $Q$  par  $Q = \mathcal{M} P$ , la condition (5.6.25) signifie encore que l'opérateur  $\mathcal{M}$  est idempotent

$$Q = \mathcal{M} P = \mathcal{M} \mathcal{M} P. \quad (5.6.26)$$

On peut encore éviter la recherche de  $\overset{e}{u}$  en remarquant que la deuxième condition s'écrit

$$V_e (u_3 - \overset{e}{u}_1, v) \ll V_e (\overset{e}{u}_1, v)$$

Dès lors, si l'on exclut le cas  $u_1 \approx u_3$ , où la seconde analyse est inutile, il suffit de vérifier que

$$V_e (u_3 - \overset{e}{u}_1, v) - V_e (\overset{f}{u}_1, v) = V_e (u_3 - u_1, v) \ll V_e (\overset{e}{u}_1, v) \quad (5.6.27)$$

ou encore que

$$V_e (u_3 - u_1, v) \ll V_e (u_1, v), \quad (5.6.28)$$

c'est-à-dire que les tensions d'extension restent pratiquement inchangées lors de la seconde analyse. Ce critère permet de vérifier a posteriori la validité de la méthode, d'une manière particulièrement simple.

### 6.5. Exemples

Nous illustrerons les considérations qui précèdent,

notamment la décomposition des charges, à l'aide de deux exemples simples.

6.5.1. Considérons d'abord la potence représentée à la figure (5.3.a) soumise à une charge verticale et dirigée de haut en bas au point B. L'analyse statique linéaire conduit à des tensions d'extension et de flexion dans le montant vertical, de flexion dans la partie horizontale. La charge d'extension est par définition celle qui correspond aux tension d'extension du montant vertical. C'est donc une charge  $F$  placée en A. Sous cette charge, on obtient le déplacement  $\bar{u}^e$  représenté à la figure (5.3.b). La charge de flexion, différence des deux précédentes, est donc constituée d'une force  $F$  vers le haut en A, et d'une force  $F$  vers le bas en B. Le déplacement  $\bar{u}^f$  résultant est représenté à la figure (5.3.c). On remarquera que le point A ne se déplace qu'horizontalement, car l'effort normal dans le montant vertical est nul. La nullité de celui-ci signifie d'ailleurs que le découplage est vérifié pour cette charge.

6.5.2. Examinons à présent le portique articulé représenté à la figure (5.4.a). Vu la symétrie, on peut n'en étudier que la moitié, à condition d'imposer que la rotation et le déplacement horizontal soient nuls en B. Nous appellerons respectivement  $k_u^a$  et  $k_v^a$  les raideurs selon  $u$  et selon  $v$  du montant vertical,  $k_u^b$  et  $k_v^b$  celles de la poutre horizontale. L'analyse linéaire du portique conduit aux résultats suivants :

$$F = (k_u^a + k_u^b) u_{A,1} = k_u^b (1 + \alpha) u_{A,1} \quad (5.6.29)$$

avec

$$\alpha = \frac{k_u^a}{k_u^b} ; \quad (5.6.30)$$

$$G = k_v^a v_{A,1} ; \quad (5.6.31)$$

$$G = \frac{k_v^a k_v^b}{k_v^a + k_v^b} v_{B,1} \quad (5.6.32)$$

Les efforts d'extension dans les poutres sont donnés par

$$N_{b,1} = k_u^b u_{A,1} = \frac{F}{1 + \alpha} \quad (5.6.33)$$

$$N_{a,1} = + G.$$

Il y correspond une charge d'extension constituée d'une force verticale  $G$  et d'une force horizontale  $\frac{F}{1 + \alpha}$  aux articulations (fig.5.4.b). Sous cette charge, on obtient les efforts d'extension suivants :

$$N_{b,1}^e = \frac{F}{(1 + \alpha)^2} \quad (5.6.34)$$

$$N_{a,1}^e = + G$$

On constate que si  $N_a$  n'a pas changé,  $N_b$  a diminué. Il existe donc un couplage. Le déplacement  $u^e$  a les caractéristiques suivantes :

$$u_{A,1}^e = \frac{F}{k_u^b} \cdot \frac{1}{(1 + \alpha)^2} \quad (5.6.35)$$

$$v_{A,1}^e = v_{B,1}^e = \frac{G}{k_v^a}$$

La charge de flexion est égale à la différence des deux précédentes. Elle est représentée à la figure (5.4.c). L'analyse statique linéaire sous cette charge conduit aux équations :

$$v_{A,1}^f = 0$$

$$G = k_v^b \frac{f}{v}_{B,1} \quad (5.6.36)$$

$$\frac{\alpha F}{1 + \alpha} = k_u^b (1 + \alpha) f_{u,A,1}$$

Il vient donc

$$f_{u,A,1} = \frac{F}{k_u^b} \frac{\alpha}{(1 + \alpha)^2} \quad (5.6.37)$$

et

$$\frac{N_{b,1}^f}{N_{b,1}^e} = \frac{F \alpha / (1 + \alpha)^2}{F / (1 + \alpha)^2} = \alpha \quad (5.6.38)$$

ce qui permet de chiffrer le couplage.

Résolvons le problème décomposé : le déplacement  $f_{u,2}$  s'obtient en appliquant la charge de flexion à la structure, après avoir remplacé dans celle-ci

$$k_u^a \text{ par } k_u^a + N_{a,1}^e \hat{k}_u^a = k_u^a + G \hat{k}_u^a \quad (5.6.39)$$

$$k_v^b \text{ par } k_v^b + N_{b,1}^e \hat{k}_v^b = k_v^b + \frac{F}{(1 + \alpha)^2} \hat{k}_v^b ,$$

où  $\hat{k}_u^a$  et  $\hat{k}_v^b$  sont les raideurs géométriques des éléments a et b, pour une charge unitaire. On obtient :

$$\frac{f}{v}_{A,2} = 0$$

$$\frac{f}{v}_{B,2} = \frac{G}{k_v^b + \frac{F}{(1 + \alpha)^2} \hat{k}_v^b}$$

$$f_{u,A,2} = \frac{\alpha F}{1 + \alpha} \cdot \frac{1}{k_u^a + k_u^b + G \hat{k}_u^a} \quad (5.6.40)$$

soit, en posant

$$\hat{\alpha} = \frac{\hat{k}_u^a}{k_u^b}, \quad (5.6.41)$$

$$f_{u,A,2} = \frac{\alpha F}{k_u^b} \frac{1}{(1 + \alpha)(1 + \alpha + G \hat{\alpha})} \quad (5.6.42)$$

Le déplacement devient donc, au total,

$$u_{A,2} = e_{u,A,1} + f_{u,A,2} = \frac{F}{k_u^b} \frac{1}{1 + \alpha} \left\{ \frac{1}{1 + \alpha} + \frac{\alpha}{1 + \alpha + G \hat{\alpha}} \right\} \quad (5.6.43)$$

$$v_{B,1} = e_{v,B,1} + f_{v,B,2} = G \left\{ \frac{1}{k_v^a} + \frac{1}{k_v^b + \frac{F}{(1 + \alpha)^2} \hat{k}_v^b} \right\}$$

Du fait du couplage, l'effort  $N_b$  a changé : il vaut à présent

$$N_{b,2} = k_u^b u_{A,2} = F \frac{1}{1 + \alpha} \left\{ \frac{1}{1 + \alpha} + \frac{\alpha}{1 + \alpha + G \hat{\alpha}} \right\},$$

ce qui donne

$$\frac{N_{b,2} - N_{b,1}}{N_{b,1}} = - \frac{G \hat{\alpha} \alpha}{(1 + \alpha)^2 (1 + \alpha + G \hat{\alpha})} \quad (5.6.44)$$

Etudions à présent la structure par la méthode de double analyse sous le système complet de charges : on remplace

$$k_u^a \text{ par } k_u^a + N_{a,1} \hat{k}_u^a = k_u^a + G \hat{k}_u^a$$

$$k_v^b \text{ par } k_v^b + N_{b,1} \hat{k}_v^b = k_v^b + \frac{F}{1 + \alpha} \hat{k}_v^b$$

ce qui donne

$$u_{A,3} = \frac{F}{k_u^a + k_u^b + G \hat{k}_u^a} = \frac{F}{k_u^b} \frac{1}{1 + \alpha + G \hat{\alpha}}$$

$$v_{A,3} = \frac{G}{k_u^a} \tag{5.6.46}$$

$$v_{B,3} = G \left\{ \frac{1}{k_v^a} + \frac{1}{k_v^b + \frac{F}{1 + \alpha} \hat{k}_v^b} \right\}$$

De la même façon que ci-dessus, le couplage entraîne une modification de  $N_b$  : on a

$$N_{b,3} = k_u^b u_{A,3} = F \frac{1}{1 + \alpha + G \hat{\alpha}} \tag{5.6.47}$$

et

$$\frac{N_{b,3} - N_{b,1}}{N_{b,1}} = - \frac{F G \hat{\alpha}}{(1 + \alpha)(1 + \alpha + G \hat{\alpha})} \tag{5.6.48}$$

Comparons les résultats. Tout d'abord, on remarquera que le paramètre  $\alpha$  est petit, car

$$\alpha = \frac{k_u^a}{k_u^b} = \frac{3 E_a I_a}{l_a^3} \cdot \frac{l_b}{E_b \Omega_b}$$

est de l'ordre de grandeur du carré du rapport des dimensions transversales des poutres à leur longueur. Dès lors, la variation des tensions d'extension dans la méthode décomposée est relativement petite si  $G \hat{\alpha}$  est de l'ordre de l'unité, ce qui signifie que la condition H4 est vérifiée et que, par conséquent, cette méthode est valable dans le cas considéré. Au contraire, la méthode de double analyse du pro-

bème complet n'est valable que si  $G \hat{\alpha}$  est très petit. Ainsi donc, il existe des cas où la méthode décomposée reste valable, alors que la méthode de double analyse du problème complet cesse de l'être. L'application de la méthode décomposée est cependant plus lourde, car elle nécessite d'une part le calcul des charges d'extension, d'autre part, une analyse supplémentaire pour obtenir le déplacement d'extension  $\hat{u}$  et enfin, une recombinaison. Cependant, ces calculs sont nettement plus simples qu'une analyse non linéaire complète.

## 7. INFLUENCE DU TERME DE COMPRESSIBILITE DU GAZ

Nous avons vu au chapitre 1 qu'il existe un terme de compressibilité du gaz. Nous nous proposons d'évaluer son influence. En vertu de la formule (1.4.51), ce terme peut s'écrire

$$\frac{\gamma}{2} \frac{p}{v} \left( \int_{S(0)} n_i u_i dS \right)^2 \quad (5.7.1)$$

Tout d'abord, ce terme est visiblement nul pour tous les modes non axisymétriques, ce qui réduit le problème à l'évaluation de ce terme dans le seul cas des modes à symétrie de révolution.

Considérons pour fixer les idées une virole cylindrique appuyée à ses extrémités et partiellement remplie de liquide. La fréquence d'un mode est donnée par le quotient de RAYLEIGH :

$$\omega^2 = \rho(u) = \frac{U(u)}{T(u)} \quad (5.7.2)$$

où  $U(u)$  est l'énergie de déformation et  $T(u)$ , l'énergie cinétique. Comme on le constate en examinant les formulations d'ARCHER et RUBIN et de HUNT, le liquide ne modifie que la masse. Par contre, le gaz ne modifie que la

raideur. Dès lors, si  $\Delta U$  est la modification de raideur due au gaz, on a

$$\frac{\Delta \omega^2}{\omega^2} = \frac{\Delta U}{U} \quad (5.7.3)$$

Calculons d'abord l'énergie de déformation dans le cadre de l'hypothèse de KIRCHHOFF-LOVE. On a, par (3.3.14), (3.3.22) et (3.3.59)

$$\epsilon_{ss} = \frac{du}{ds}, \quad \epsilon_{\theta\theta} = \frac{w}{R}, \quad \chi_{ss} = -\frac{d^2 w}{ds^2}$$

toutes les autres déformations étant nulles. Nous admettons que le déplacement est purement radial, ce qui donne

$$2 U = 2 \pi \int_0^{\ell} \left\{ \frac{Et}{1-\nu^2} \frac{w^2}{R^2} + \frac{Et^3}{12(1-\nu)^2} \left( \frac{d^2 w}{ds^2} \right)^2 \right\} R ds \quad (5.7.4)$$

La variation de volume vaut

$$2 \pi R \int_0^{\ell} w ds$$

ce qui entraîne

$$2 \Delta U = \frac{\gamma p}{\pi R^2 \alpha \ell} (2 \pi R \int_0^{\ell} w ds)^2 \quad (5.7.5)$$

Considérons un mode sinusoïdal :

$$w = W \sin \frac{q \pi x}{\ell} \quad (5.7.6)$$

Il vient

$$2 U = \frac{\pi E t \ell}{(1-\nu^2) R} \left\{ 1 + \frac{\pi^4 q^4 t^2 R^2}{12 \ell^4} \right\} W^2 \quad (5.7.7)$$

et

$$2 \Delta U = 4 \gamma p \frac{\ell}{\pi \alpha} (1 - \cos q \pi)^2 W^2 \quad (5.7.8)$$

Cette expression est nulle chaque fois que le nombre  $q$  de ventres est pair. Dans les autres cas, elle vaut

$$2 \Delta U = 8 \gamma p \frac{l}{\pi \alpha} W^2 \quad (5.7.9)$$

ce qui entraîne finalement

$$\frac{\Delta \omega^2}{\omega^2} = \frac{8\gamma(1-\nu^2)}{\pi^2 \alpha \left(1 + \frac{\pi^4 q^4 t^2 R^2}{12l^4}\right)} \frac{pR}{Et} \leq \frac{8\gamma(1-\nu^2)}{\pi^2} \frac{1}{\alpha} \frac{pR}{Et} \quad (5.7.10)$$

Pour  $\gamma = 1,4$  et  $\nu = 0,3$ , on a ainsi

$$\frac{\Delta \omega^2}{\omega^2} \leq 1,033 \frac{1}{\alpha} \frac{pR}{Et} \quad (5.7.11)$$

A ce stade, on remarquera que  $\frac{pR}{E}$  n'est autre que la tension membranaire  $\sigma_\theta$  correspondant à la pression  $p$ . Il semble raisonnable de limiter cette tension à 25 hb, puisque les tensions hydrostatiques et dynamiques devront y être ajoutées. Il vient alors, pour  $E = 21000$  hb,

$$\frac{\Delta \omega^2}{\omega^2} \leq 1,230 \cdot 10^{-3} \cdot \frac{1}{\alpha}$$

On constate donc que l'influence de la compressibilité du gaz est assez faible, sauf lorsque le réservoir est très rempli. La même conclusion reste valable si le réservoir a des fonds, à condition que ceux-ci soient dessinés de telle manière que l'état membranaire soit prépondérant, ce qui est généralement vérifié dans les constructions spatiales, du fait de l'exigence d'un faible poids.

En conclusion, il est licite d'omettre le terme de compressibilité du gaz si le réservoir n'est pas trop rempli.

8. TERMES GEOMETRIQUES DE PRESSION : LE PARADOXE DE MORAND ET OHAYON

Dans ce qui précède, nous avons supposé (hypothèse H1) que les charges initiales sont mortes. Or ce n'est pas le cas de la pression, car la direction de celle-ci suit la normale de la coque. C'est la raison d'être des termes géométriques de pression, que nous avons obtenus au chapitre 1 (formule 1.4.41).

D'une manière plus précise, considérons une coque de révolution soumise à pression interne. Cette pression induit des efforts d'extension  $\overset{\circ}{N}_{ss}$  et  $\overset{\circ}{N}_{\theta\theta}$ , et les termes géométriques de l'énergie de déformation s'écrivent

$$U_g = \int_0^l ds \int_0^{2\pi} \left\{ \frac{1}{2} \overset{\circ}{N}_{ss} \left( \frac{\partial w}{\partial s} - \frac{u}{R_s} \right)^2 + \frac{1}{2} \overset{\circ}{N}_{\theta\theta} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} - \frac{v}{R_\theta} \right)^2 + \frac{1}{8} (\overset{\circ}{N}_{ss} + \overset{\circ}{N}_{\theta\theta}) \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{v}{r} \frac{dr}{ds} - \frac{\partial v}{\partial s} \right)^2 \right\} r d\theta \quad (5.8.1)$$

Considérons une rotation autour de l'axe  $e_z^+$ , d'un angle  $\Omega$  : elle correspond à un champ de déplacements azimutaux donnés par

$$v = \Omega r \quad (5.8.2)$$

On obtient donc

$$U_g = \pi \Omega^2 \int_0^l \left\{ \overset{\circ}{N}_{\theta\theta} \left( \frac{r}{R_\theta} \right)^2 + (\overset{\circ}{N}_{ss} + \overset{\circ}{N}_{\theta\theta}) \left( \frac{dr}{ds} \right)^2 \right\} r d\theta \neq 0, \quad (5.8.3)$$

alors que l'équilibre est visiblement indifférent. C'est le paradoxe de MORAND et OHAYON [M2]. Comme l'expliquent très bien ces auteurs, ce phénomène est dû au fait que l'on a considéré la pression comme une charge morte. Lors de la rotation, il apparaît donc (fig.5.6) une composante

de pression dans la direction azimutale, proportionnelle à  $\Omega$ , si bien que la pression a un effet de ressort sur la rotation.

Selon les mêmes auteurs, la situation se rétablit si l'on tient compte des termes géométriques de pression. Tout d'abord, il est bien clair que ce ne sera vrai que si l'état de tension correspondant est purement membranaire, car l'expression (5.8.2) ne contient que les efforts d'extension. Les termes géométriques de pression s'écrivent explicitement, en admettant que la pression s'exerce sur le feuillet moyen,

$$U_p = \frac{1}{2} \int_0^{\ell} ds \int_0^{2\pi} p \left\{ \left( \frac{\partial w}{\partial s} - \frac{u}{R_s} \right) u + \left( \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} - \frac{v}{R_\theta} \right) v - \left( \frac{\partial u}{\partial s} + \frac{w}{R_s} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{u}{r} \frac{dr}{ds} + \frac{w}{R_\theta} \right) w \right\} r ds \quad (5.8.4)$$

Signalons au passage que le dernier terme, qui représente la variation de la surface, peut être négligé sans nuire en aucune sorte à la représentation des modes rigides.

Pour le mode de rotation (5.8.2), on a

$$U_p = - \pi \Omega^2 \int_0^{\ell} p \frac{r^3}{R_\theta} ds \quad (5.8.5)$$

Il reste à montrer que  $U_g + U_p = 0$ . Pour cela, transformons le deuxième terme de (5.8.3) : on a

$$N_{\theta\theta} \left( \frac{dr}{ds} \right)^2 = N_{\theta\theta} \sin^2 \phi = \frac{d}{ds} (r N_{ss}) \sin \phi ,$$

la dernière équation étant une conséquence de l'équation d'équilibre membranaire

$$\frac{d}{ds} (r N_{ss}) = N_{\theta\theta} \sin \phi , \quad (5.8.6)$$

cas particulier de (3.3.32). On a donc, en intégrant par parties,

$$\int_0^{\ell} \overset{\circ}{N}_{\theta\theta} \left(\frac{dr}{ds}\right)^2 r ds = \left\{ r \overset{\circ}{N}_{ss} r \sin \phi \right\}_0^{\ell} - \int_0^{\ell} r \overset{\circ}{N}_{ss} \sin^2 \phi ds + \int_0^{\ell} r^2 \overset{\circ}{N}_{ss} \frac{\cos \phi}{R_s} ds \quad (5.8.7)$$

Introduisant ce résultat dans (5.8.3), on obtient

$$U_g = \pi \Omega^2 \left[ \left\{ r \overset{\circ}{N}_{ss} r \sin \phi \right\}_0^{\ell} + \int_0^{\ell} r^2 \cos \phi \left( \frac{\overset{\circ}{N}_{ss}}{R_s} + \frac{\overset{\circ}{N}_{\theta\theta}}{R_{\theta}} \right) ds \right] \quad (5.8.8)$$

Le premier terme est repris par les réactions, si bien qu'il ne reste plus que

$$U_g + U_p = \pi \Omega^2 \int_0^{\ell} r^2 \cos \phi \left( \frac{\overset{\circ}{N}_{ss}}{R_s} + \frac{\overset{\circ}{N}_{\theta\theta}}{R_{\theta}} - p \right) ds = 0, \quad (5.8.9)$$

en vertu de l'équation d'équilibre membranaire

$$\frac{\overset{\circ}{N}_{ss}}{R_s} + \frac{\overset{\circ}{N}_{\theta\theta}}{R_{\theta}} = p. \quad (5.8.10)$$

Une transformation analogue permet de démontrer que les énergies  $U_g$  et  $U_p$  se compensent également pour les deux autres modes rigides de rotation.

Malheureusement, dans les cas pratiques, la situation se présente moins bien. D'une part, il est rare que l'état de tension correspondant à la pression initiale soit strictement membranaire. Chaque fois que la surface a une discontinuité de pentes ou de courbure, il apparaît des termes de flexion. Cette difficulté peut cependant être contournée. On peut en effet étudier la structure en statique par la théorie membranaire. Les équations d'équilibre seront alors

satisfaites au sens membranaire et, a fortiori, au sens flexionnel, ce qui signifie que la variation première sera bien nulle. Pour l'analyse membranaire par éléments finis, il faut respecter la condition  $E_1 \ll E_0$ , c'est-à-dire que le champ des déplacements doit être au moins aussi riche que dans l'analyse flexionnelle. On notera par ailleurs que dans l'analyse membranaire, seul  $u_z$  doit être connecté, comme on peut s'en rendre compte en inspectant la fonctionnelle. L'inconvénient de cette méthode est qu'elle nécessite l'utilisation d'un élément supplémentaire.

Mais ce n'est pas tout. Dans la pratique courante, on écrit les termes géométriques  $U_g$  à l'aide des moyennes sur l'élément des efforts  $N_{ss}$  et  $N_{\theta\theta}$ . Dès lors, la compensation désirée est perdue, même si l'on utilise la pression moyenne, car à celle-ci correspond un  $N_{ss}$  variable, comme le montre l'équation (5.8.6).

Dans ces conditions, la prise en compte des termes géométriques de pression devient assez discutable. En effet, en dehors des modes de torsion ( $n = 0$ ,  $m = 1$ ) et de flexion ( $n = 1$ ) d'ensemble, où la coque se comporte en définitive comme une poutre, l'effet non linéaire de la pression est d'autant plus faible que la longueur d'onde du mode est petite. Ainsi, si l'on considère les modes en trèfle d'un cylindre, on peut écrire avec une bonne approximation

$$v_{nm} \approx -\frac{1}{n} w_{nm}$$

Il vient donc

$$\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} - \frac{v}{R_\theta} \approx -\frac{1}{r} (n w_{nm} + v_{nm}) = \frac{n}{r} w_{nm} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right).$$

Dès lors,

$$\overset{\circ}{N}_{\theta\theta} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} - \frac{v}{R_\theta} \right)^2 \approx \overset{\circ}{N}_{\theta\theta} \frac{n^2}{r} w_{nm}^2 \left( 1 - \frac{1}{n^2} \right)^2,$$

tandis que le terme non linéaire de pression s'écrit

$$\overset{\circ}{N}_{\theta\theta} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} - \frac{v}{R_\theta} \right) \frac{v}{R_\theta} \approx \overset{\circ}{N}_{\theta\theta} \frac{1}{r} w_{nm}^2 \left( 1 - \frac{1}{n^2} \right).$$

Le rapport des deux termes est de l'ordre de  $\frac{1}{n^2}$  et décroît donc rapidement lorsque  $n$  croît. C'est pourquoi, pour  $n$  suffisant, il est licite de négliger le terme non linéaire de pression.



CHAPITRE VI

EXPERIMENTATION NUMERIQUE

## I. INTRODUCTION

La mise en oeuvre du calcul numérique des problèmes d'interaction fluide-structure a nécessité un effort de programmation assez important. Il fallait d'une part créer une bibliothèque d'éléments finis structuraux, coques, volumes, raidisseurs, développés en séries de Fourier; d'autre part, élaborer les éléments de fluide; enfin, aménager le logiciel SAMCEF d'analyse des milieux continus du Laboratoire d'Aéronautique de l'Université de Liège pour lui permettre d'effectuer les opérations décrites au chapitre 2.

Lorsque la première version incluant le fluide est devenue opérationnelle, après environ un an de travail en équipe, il s'agissait d'un des rares logiciels permettant le traitement entièrement automatique de ce type de problèmes. Depuis, nous n'avons cessé d'y apporter des améliorations, portant à la fois sur les performances, l'augmentation des possibilités, et la "portabilité" des dits programmes.

C'est avec cet outil qu'ont été réalisées les applications qui suivent. Toutes sont inspirées de problèmes concrets apparaissant dans les lanceurs. Leur but est d'une part de justifier les formulations décrites dans les chapitres précédents à l'aide de recoupements divers; d'autre part, d'illustrer un certain nombre de faits physiques qui caractérisent ce type de structures.

L'un de ceux-ci, particulièrement frappant dans l'analyse dynamique des structures de révolution, et qui a provoqué l'étonnement lors des premiers calculs analytiques [A3,A6], est la dépendance compliquée des fréquences vis-à-vis des nombres d'ondes. Alors que dans les poutres et les plaques, la pulsation est une fonction croissante des nombres d'ondes, dans les coques de révolution, il n'en est rien. Si l'on examine la variation des pulsations des différents modes de même nombre d'onde longitudinal  $q$ ,

lorsque le nombre d'onde azimutal  $n$  croît, on constate qu'elles commencent par décroître, passent par un minimum, puis finissent par croître (fig.6.1.1). Ce phénomène a été clairement expliqué par ARNOLD et WARBURTON [A6]. Le quotient de RAYLEIGH, rapport de l'énergie de déformation à l'énergie cinétique, est composé de deux termes :

$$\omega^2 = \omega_e^2 + \omega_f^2,$$

le premier correspondant à l'extension, et le second à la flexion. Lorsque  $n$  croît, le premier diminue, tandis que le second croît; pour les faibles valeurs du nombre d'onde azimutal, c'est l'extension qui est prépondérante, tandis que pour ses grandes valeurs, la flexion prend le dessus. Le minimum est obtenu lorsque ces deux termes ont à peu près la même grandeur (fig.6.1.2). Nous rencontrerons un grand nombre de telles courbes. Par ailleurs, l'effet d'une pression interne sur ce comportement sera analysé.

Après un certain nombre d'applications de la méthode à des coques sèches, on présente des problèmes incluant l'effet du fluide. Ceux-ci vont de la simple étude du balottement d'un fluide dans un réservoir rigide - problème simple mais d'une grande importance pratique en ce qui concerne le guidage des engins spatiaux - à l'analyse des modes d'interaction fluide-structure dans des réservoirs de lanceurs existants ou en projet.

Dans les différents cas, nous avons recherché le plus possible de recoupements. Ceux-ci consistent en des confrontations, soit avec l'expérience, soit avec des résultats d'autres calculs, soit enfin, lorsque c'était possible, avec des solutions analytiques.

Dans un certain nombre de ces exemples, la comparaison a été faite avec des calculs tridimensionnels. L'impression générale qui s'en dégage dès l'abord est une grande supériorité pratique des éléments développés en séries de Fourier. Cette supériorité se manifeste à trois niveaux :

- Tout d'abord, la mise en oeuvre d'une telle description ne nécessite la discrétisation que du plan méridien. Il en résulte d'une part une grande simplicité du fichier de données et d'autre part, la possibilité d'utiliser des maillages très fins sans pour autant mener à des calculs prohibitifs, le nombre de degrés de liberté restant toujours très raisonnable.

- Le calcul est toujours beaucoup plus économique. Dans bien des cas, pour une modélisation bien plus riche, la discrétisation par éléments à géométrie de révolution nécessite 10 à 20 fois moins de temps de calcul qu'un modèle tridimensionnel.

- Les modes dynamiques, comme d'ailleurs les modes critiques de stabilité sont bien séparés en fréquence ou en charge critique, ce qui n'est pas le cas dans les modélisations tridimensionnelles, comme permettent de le prévoir, dans le cas dynamique, les courbes de la figure (6.1.1). On peut donc dire que la qualité même des résultats est meilleure.

Ces avantages, qui seront mis en évidence dans les applications qui suivent, nous permettent d'affirmer que la méthode de discrétisation par éléments finis développés en séries de Fourier constitue une des approches les plus efficaces des problèmes de révolution.

## 2. ANALYSE DYNAMIQUE D'UNE ANTENNE SPHERIQUE

Il s'agit d'un modèle d'antenne en forme de calotte sphérique, du type utilisé dans les satellites de télécommunication. Ce modèle est schématisé à la figure (6.1). La coque est encastrée en son centre par ancrage entre deux blocs épais. OLSON et LINDBERG [01] l'ont étudiée à la fois par l'expérience et à l'aide d'éléments finis triangulaires à double courbure. Il s'agit d'éléments de coques plates,

où le déplacement transversal est du cinquième degré, et les champs tangentiels, du troisième, avec une connexion plus que conforme. D'autres résultats ont été obtenus par IDELSOHN [I3], à l'aide d'éléments de coques plans, et par MOL [M5], à l'aide d'un élément de coque tronc-conique.

Nous avons étudié ce problème avec des éléments de coque à géométrie de révolution, basés sur la théorie du chapitre 3. Il s'agit en l'occurrence d'éléments de coque profonde à double courbure. La section méridienne a été représentée par 11 éléments de degré 3. Les calculs ont été effectués de  $n = 0$  à  $n = 7$ . Les résultats sont consignés dans le tableau suivant.  $n$  y désigne comme d'habitude le nombre d'onde azimutal, tandis que  $q$  est le nombre d'onde longitudinal.

On constate que pour tous les modes  $q > 0$ , les résultats des différentes analyses concordent très bien avec l'expérience. Pour  $q = 0$ , la situation est un peu différente. En fait, l'étude des modes correspondants montre qu'en dehors d'un voisinage limité du bloc dur, l'antenne se comporte à peu près comme un corps rigide. Il est clair que dans ces conditions, la perfection de l'encastrement joue un grand rôle. Il semble bien que l'encastrement réalisé sur le modèle expérimental n'était pas parfait. Si les résultats numériques d'OLSON et LINDBERG semblent meilleurs, c'est parce que ces auteurs ont prolongé la coque jusqu'à l'axe, et imposé sur celui-ci les conditions d'encastrement, négligeant ainsi totalement le bloc rigide. D'ailleurs, pour ces modes  $q = 0$ , nos résultats recourent très bien ceux qu'IDELSOHN a obtenus par une analyse tri-dimensionnelle, ce qui renforce la thèse d'un problème de modélisation.

Il est intéressant de noter que notre idéalisation, quoique bien plus riche que celle d'IDELSOHN, qui a modélisé un quart de circonférence par un maillage  $3 \times 6$  (fig.6.3) comporte trois fois moins de degrés de liberté.

n	q	présente analyse	f [M5]	f [I3]	f [01]	f [01]
0	0	260,7	258,8	263,94	145,15	
0	1	862,6	866,4		875,20	891
0	2	950,8	951,9		934,46	1034
0	3	1186,3	1187,4		1111,4	1234
0	4	1616,1				
1	0	78,46		80,62	28,372	16
1	1	862,1		818,94	878,1	882
1	2	957,6			946,30	940
1	3	1199,3			1142,1	
1	4	1633,6				
2	0	43,39		40,16	29,311	26
2	1	895,18			893,04	870
2	2	1004,4			986,31	1034
2	3	1255,3				
2	4	1700				
3	0	72,821		74	69,269	49
3	1	901,39		805,79	910,17	918
3	2	1041,7			1044,5	1081
3	3	1326,4				
3	4	1797,3				
4	0	123,62		125,1	123,36	98
4	1	929,14			947,15	946
4	2	1130			1144	
4	3	1436,96				
4	4	1938				
5	0	187,38		187,5	190,51	162
5	1	977,18		1026,88	1000,4	1003
5	2	1215,97				
5	3	1590,4				
5	4	2125,9				

n	q	présente analyse	f [M5]	f [I3]	f [01]	f [01]
6	0	262,22		260,87	271,01	241
6	1	1043,8			1071,3	1076
6	2	1343,0				
6	3	1778,9				
6	4	2356,0				
7	0	347,21		347,1	361,72	331
7	1	1129,3			1168	1170
7	2	1490,5				
7	3	1992,96				
7	4	2618,9				

De plus, la modélisation par éléments à symétrie de révolution mène évidemment à une largeur de front d'équations beaucoup plus faible.

### 3. VIBRATIONS D'UN CYLINDRE RAIDI

Le cylindre représenté à la figure (6.4) est assez représentatif des structures raidies que l'on rencontre en constructions aéro-spatiales. Il a été analysé par AL-NAJAFI et WARBURTON [A5], par la méthode des éléments finis. Ces auteurs présentent en outre des résultats expérimentaux.

Cette structures a été idéalisée de différentes façons, ce qui illustre diverses solutions possibles :

(1) Idéalisation par éléments de volume à géométrie de révolution (fig.6.5). Il s'agit en fait d'éléments spéciaux, du premier degré dans le sens de l'épaisseur, et du second ou du troisième degré dans le sens de la longueur. La portion de coque sous le raidisseur est idéalisée par un élément de volume de révolution du premier degré, et le raidisseur est du second ou du troisième degré dans le sens radial et du premier degré dans le sens longitudinal. Au total, on

obtient 28 éléments et 312 ou 450 degrés de liberté, selon que l'on utilise le degré 2 ou le degré 3. C'est la plus fidèle, mais aussi la plus chère des idéalizations axisymétriques.

(2) Idéalisation par éléments de coque et raidisseurs de révolution. Dans ceux-ci, on tient compte de l'excentrement des raidisseurs par le procédé des inerties équivalentes décrit au chapitre 3 (6.8). Pour cette idéalisation, on a utilisé 18 éléments de coque de degré 3 et 5 raidisseurs, soit 222 degrés de liberté.

(3) Enfin, un modèle tridimensionnel, composé de membranes planes et d'éléments spéciaux de raidisseurs a été réalisé. Cette idéalisation comporte 132 éléments et mène à un problème à 792 degrés de liberté.

Quant à l'idéalisation d'AL-NAJAFI et WARBURTON, elle est composée d'éléments de coques et de raidisseurs de révolution et s'apparente donc assez fort au modèle (2).

Deux types de conditions aux limites ont été traités : libre-libre et "librement appuyé". Ce dernier type d'appui se caractérise par  $u_r = 0$ ,  $u_\theta = 0$ . Les auteurs précités l'ont réalisé physiquement à l'aide de flasques d'extrémités usinées en biseau (fig.6.4).

Les divers résultats sont comparés dans le tableau suivant :

Libre-libre		$f_1$	$f_2$	$f_3$	$f_4$	$f_5$
n=2	[A1] El. finis	340	317	1665	3225	4578
	[A1] Exp.	342	323	1685	3268	—
	(1) degré 2	344	327	1717	3305	4615
	(1) degré 3	342	325	1716	3305	4619
n=4	[A1] El. finis	1547	1537	1895	2290	3044
	[A1] Exp.	1551	1539	1890	2287	3044
	(1) degré 2	1612	1598	1923	2352	3126
	(1) degré 3	1602	1586	1909	2342	3119

Librement appuyé		$f_1$	$f_2$	$f_3$	$f_4$	$f_5$
n=2	[A1] El. finis	834	2317	3767	4895	5715
	[A1] Exp.	809	2132	3421	—	—
	(1) degré 2	847	2336	3771	4881	5694
	(1) degré 3	846	2332	3767	4880	5698
	(2)	836	2305	3709	4791	—
	(3)	826	—	—	—	—

Dans le cas libre-libre, seules les idéalizations du type (1) ont été utilisées. On constate que les résultats sont en assez bonne concordance avec l'expérience. Cependant, les fréquences sont un peu surestimées, comme on peut le constater en les comparant à celles qu'AL-NAJAFI et WARBURTON ont calculées. Ce phénomène est lié à l'idéalisation par des volumes du premier degré selon l'épaisseur. En effet, dans ce modèle, l'état plan de tension n'est pas exactement atteint, contrairement au cas des coques où il s'agit d'une

hypothèse de base. En tant que véritable modèle cinématiquement admissible, qui mène naturellement à sous-estimer la déformation transversale, le volume sera donc toujours un peu plus raide que la coque.

Passons au cas simplement appuyé. Les conditions d'appui sont  $u_r = u_\theta = 0$ . Les différents résultats de calcul se recoupent fort bien, mais diffèrent quelque peu des résultats expérimentaux. C'est que les conditions d'appui envisagées, très simples dans le cadre des calculs, sont extrêmement difficiles à respecter exactement dans le cadre de l'expérience. Dans d'autres exemples similaires, réalisés expérimentalement par les mêmes auteurs [A3], le même phénomène s'est produit. Si l'on compare les résultats numériques, on constate que les modélisations par éléments de volume restent légèrement plus raides que les autres, du moins pour les premiers modes. Quant à l'idéalisation (2), elle est un peu plus souple que celle d'AL-NAJAFI et WARBURTON, ce qui peut s'interpréter par le fait qu'à la différence de ces auteurs, nous tenons compte de la déformation due à l'effort tranchant. Enfin, le modèle tridimensionnel prédit une fréquence plus faible que les autres. On notera que dans ce modèle, la coque est représentée par un prisme dodécagonal.

La figure (6.6) représente les déformées, dans le cas libre-libre. On constate que pour  $n = 4$ , l'effet des raidisseurs se fait plus nettement sentir que pour  $n = 2$ . Il est surtout sensible pour le troisième mode, qui affecte une forme quelque peu tourmentée.

La comparaison des analyses tridimensionnelle et axisymétrique par éléments de coque sur le plan de la mise en oeuvre est particulièrement instructive. L'idéalisation tridimensionnelle comportait 132 éléments et la définition de ses 264 noeuds a nécessité l'utilisation d'un programme de génération de maillage. Le calcul des deux modes rigides et des deux premiers modes propres, de valeur propre con-

fondue, a nécessité un temps de passage de 465 secondes C.P.U. sur l'ordinateur I.B.M. 370/158 de l'université de Liège. Quant à l'idéalisation par éléments de coques et raidisseurs de révolution, ses données ont été composées directement en très peu de temps; le calcul ne fournit chaque fois qu'un seul des deux modes confondus, ce qui accélère le processus. Pour obtenir les deux premiers modes  $n = 4$ , 24,2 secondes C.P.U. ont suffi, sur la même machine. L'économie est donc spectaculaire. Si l'on ajoute le fait que les deux modes confondus de l'analyse tridimensionnelle s'obtiennent en général mêlés, ce qui signifie qu'il faut les séparer dans une opération de post-traitement; que l'idéalisation en question, de type membranaire, n'est valable que pour les faibles valeurs de  $n$ , la supériorité de l'analyse axisymétrique apparaît de manière encore plus nette.

#### 4. MODES CRITIQUES D'UN CYLINDRE

La recherche des modes critiques d'un cylindre dans le cadre d'une idéalisation tridimensionnelle est généralement une tâche assez malaisée. D'une part, les premiers modes critiques ont généralement un nombre d'onde longitudinal assez élevé, par exemple, de 7 à 15, ce qui nécessite des maillages relativement fins et donc des analyses coûteuses. De plus, pour les différentes valeurs du nombre d'onde azimutal  $n$ , on obtient des valeurs assez voisines des charges critiques, ce qui mène à une grande difficulté de séparer les différents modes critiques. On se rend aisément compte de cette propriété de quasi-dégénérescence des modes critiques en examinant la formule approchée suivante, qui s'établit aisément dans le cadre de la première approximation de LOVE [15]

$$n_{ss} = \frac{1}{x} + \frac{(t/r)^2}{12(1-\nu^2)} x, \quad (6.4.1)$$

où

$$n_{ss} = \frac{|N_{ss}|}{Et} , \quad x = \frac{(\lambda^2 + n^2)^2}{\lambda^2} , \quad \lambda = \frac{q\pi r}{l} ,$$

$q$  étant le nombre d'onde azimutal. Pour chaque valeur de  $n$ ,  $x$  peut varier entre  $4n^2$  et l'infini. La charge critique correspond au minimum de  $n_{ss}$ . Or celui-ci est obtenu pour

$$x_0 = \sqrt{12(1-\nu^2)} \frac{r}{t} ,$$

et cette valeur peut être obtenue (ou du moins, approchée, puisque  $\lambda$  est une variable discrète), pour tout  $n$  vérifiant

$$n \leq \frac{1}{2} \sqrt{x_0}$$

soit pour un grand nombre de nombres d'ondes si  $\frac{r}{t}$  est suffisamment grand, ce qui est le cas des coques minces. Ainsi, pour  $\frac{r}{t} = 100$ , et  $\nu = 0,3$ , la charge critique minimum est susceptible d'apparaître pour tout  $n$  inférieur ou égal à 9. On risque donc, dans une analyse tridimensionnelle d'obtenir 17 modes critiques de valeurs propres voisines du minimum théorique

$$(n_{ss})_0 = \frac{2}{x} , \tag{6.4.2}$$

ce qui est assez désastreux du point de vue des méthodes itératives classiquement utilisées pour la recherche des valeurs propres et modes propres d'une matrice.

Au contraire, l'utilisation d'éléments développés en séries de FOURIER conduit à une séparation automatique des différents modes propres et, de plus, l'utilisation de maillages raffinés ne risque pas de mener à des coûts d'analyse exagérés. Il faut, bien sûr, étudier la structure pour un certain nombre de nombres d'ondes azimutaux pour obtenir tous les modes critiques dangereux, mais chacune de ces analyses est à la fois simple et peu coûteuse et le passage de l'une à l'autre ne nécessite que la spécification du nouveau  $n$ .

Considérons par exemple le cylindre d'acier représenté à la figure (6.7). Nous sommes précisément dans le cas où  $r/t = 100$ , ce qui signifie que les analyses doivent porter sur les valeurs de  $n$  allant de 0 à 9. Nous nous limiterons ici aux cas  $n = 0$  et  $n = 4$  et, dans chacun de ces cas, aux modes symétriques par rapport au plan coupant le cylindre à mi-longueur. On obtient les résultats suivants :

Modes critiques $n = 0$			
mode	q	$ N_{ss} $ (Eléments finis)	$ N_{ss} $ (form.6.4.1)
1	11	127,9093	127,7532
2	13	131,2456	130,5514
3	9	143,4947	143,5083

Modes critiques $n = 4$			
mode	q	$ N_{ss} $ (Eléments finis)	$ N_{ss} $ (form.6.4.1)
1	11	126,7048	127,0920
2	13	132,6857	133,1610
3	9	134,7572	134,9040
4	15	147,9714	148,7430
5	7	164,1898	165,2700

On constate que la correspondance est excellente. La comparaison des résultats pour  $n = 0$  et  $n = 4$  met d'ailleurs clairement en évidence le caractère de quasi-dégénérescence signalé qui, dans le cadre de la présente analyse, ne pose aucun problème particulier.

## 5. VIBRATIONS D'UNE COQUE CYLINDRIQUE SOUS PRESSION INTERNE

5.1. Cet exemple, tiré d'un article de FUNG, SECHLER et KAPLAN [F9], consiste à étudier les vibrations d'un cylindre "librement appuyé" soumis à une pression interne. Il illustre très clairement l'effet de raidissement de la pressurisation, qui entraîne un très net relèvement des fréquences propres, spécialement pour les modes incluant beaucoup de flexion. Cet effet peut être exploité de façon bénéfique dans les réservoirs de lanceurs. Généralement, les fréquences propres les plus basses apparaissent pour une valeur de  $n$  de l'ordre de 5, pour des dimensions raisonnables. Il s'agit des modes pour lesquels l'énergie d'extension et celle de flexion interviennent pour une part à peu près équivalente dans le quotient de RAYLEIGH. Une pression interne apporte des termes complémentaires de raideur qui sont, comme nous allons le voir, proportionnels aux carrés des nombres d'ondes. Il en résultera donc, pour les nombres d'ondes envisagés, un net raidissement, ce qui permet en définitive de relever les fréquences minima sans devoir ajouter de matière aux réservoirs.

La structure étudiée par FUNG et al. est un cylindre d'aluminium de 3,5 in de diamètre, de 0,001 in d'épaisseur et de 11 in de longueur.

### 5.2. Solutions analytiques

Les auteurs ci-dessus ont établi une théorie des vibrations des cylindres sous pression, mais la résolution de leur équation aux fréquences mène à une équation du troisième degré extrêmement compliquée. Ce que voyant, ils ont fait, d'une part, l'hypothèse que l'énergie cinétique des déplacements longitudinaux et azimutaux est négligeable devant celle des déplacements radiaux et, d'autre part, l'hypothèse que le nombre d'onde azimutal  $n$  est grand. Ils ont ainsi obtenu la formule approchée suivante :

$$\Omega^2 = \frac{\lambda^4}{(n^2 + \lambda^2)^2} + \frac{(t/r)^2}{12(1-\nu^2)} (\lambda^2 + n^2)^2 + n_{ss} \lambda^2 + n_{\theta\theta} n^2, \quad (6.5.1)$$

où

$$\Omega^2 = \frac{\rho r^2}{E} \omega^2 \quad (6.5.2)$$

$$\lambda = \frac{q\pi r}{l}, \quad q \text{ étant le nombre d'onde longitudinal}, \quad (6.5.3)$$

$$n_{ss} = \frac{N_{ss}}{Et}, \quad n_{\theta\theta} = \frac{N_{\theta\theta}}{Et}, \quad (6.5.4)$$

avec  $N_{ss} = \frac{pr}{2}$ ,  $N_{\theta\theta} = pr$ .

Dans cette formule, le premier terme représente la contribution de l'extension, le deuxième, celle de la flexion, et les deux derniers correspondent à la mise en charge initiale.

Nous avons pu améliorer cette formule en adoptant la démarche suivante. Soient  $U$ ,  $V$  et  $W$  les amplitudes des déplacements  $u$ ,  $v$  et  $w$  en leurs ventres respectifs.

a) On détermine les valeurs de  $U$  et  $V$  en termes de  $W$  en exprimant que ces déplacements doivent minimiser l'énergie d'extension, pour  $W$  donné. C'est en effet le prolongement logique de la théorie inextensionnelle de RAYLEIGH [R5]. On obtient ainsi

$$U = -\alpha W, \quad V = -\beta W, \quad (6.5.5)$$

avec

$$\alpha = \frac{\lambda (n^2 - \nu \lambda^2)}{(\lambda^2 + n^2)^2}, \quad \beta = \frac{n (n^2 + (2+\nu) \lambda^2)}{(\lambda^2 + n^2)^2} \quad (6.5.6)$$

b) On réintroduit ces valeurs dans le principe de Hamilton. On ne garde par ailleurs que les termes prépondé-

rants de l'énergie de flexion, c'est-à-dire ceux qui correspondent aux plus grandes puissances de  $\lambda$  et  $n$ .

On obtient de la sorte la formule suivante :

$$\Omega^2 = \frac{\frac{\lambda^4}{(n^2 + \lambda^2)^2} + \frac{(t/r)^2}{12(1-\nu^2)} (n^2 + \lambda^2)^2 + n_{ss} \lambda^2 + n_{\theta\theta} (n-\beta)^2}{1 + \alpha^2 + \beta^2} \quad (6.5.7)$$

Notre méthode est en fait une application analytique (simplifiée) de la condensation statique de GUYAN-IRONS. La formule obtenue diffère de celle de FUNG et al., d'une part, par un facteur correctif et, d'autre part, par une correction de l'influence de  $n_{\theta\theta}$ . Pour les grandes valeurs de  $n$ , on a, si  $\lambda$  reste de l'ordre de l'unité,

$$\alpha \approx \frac{\lambda}{n^2}, \quad \beta \approx \frac{1}{n}, \quad (6.5.8)$$

ce qui montre que les deux formules finissent par se confondre.

### 5.3. Résultats numériques et expérimentaux

Nous avons modélisé le cylindre à l'aide de 11 éléments de coque à géométrie de révolution de degré 3, ce qui mène à 126 degrés de liberté. Les fréquences des trois premiers modes propres ont été calculées pour  $n = 2, 3, 5$ , avec des pressions valant 0, 1, 2 psi. Les résultats de ces différentes analyses sont consignés dans le tableau (6.5.1). En regard de ceux-ci, on trouvera les résultats obtenus par les formules (6.5.1) et (6.5.7) ainsi que les fréquences obtenues expérimentalement par FUNG et al. Il convient cependant de considérer ces derniers résultats avec prudence, car les modes n'ont pas été identifiés, si bien que correspondance ne peut être établie que sur base des fréquences.

Tableau (6.5.1) - Cylindre sous pression

n	q	p (psi)	fréquences (Hz)			
			EL.FINIS	FORM. (6.5.1)	FORM. (6.5.7)	EXPER.
2	1	0	933	1051	933	-
		1	987	1156	987,6	987
		2	1038	1251	1039	-
	2	0	3161	3574	3164	-
		1	3181	3609	3182	3178
		2	3199	3644	3201	3207
	3	0	5783	6433	5785	-
		1	5796	6456	5799	-
		2	5810	6478	5812	-
3	1	0	458	484	457	454
		1	756	863	755,9	-
		2	966	1120	965,9	-
	2	0	1686	1787	1687	-
		1	1795	1930	1796	-
		2	1897	2063	1898	1845
	3	0	3375	3574	3372	-
		1	3435	3653	3431	-
		2	3494	3729	3491	3444
5	1	0	188	193	189,6	-
		1	1131	1201	1131	1134
		2	1588	1687	1589	-
	2	0	677	692	677,8	660
		1	1312	1380	1312	-
		2	1727	1825	1727	1713
	3	0	1447	1478	1446	-
		1	1840	1909	1839	1843
		2	2164	2259	2162	-

La comparaison des différents résultats montre que les fréquences obtenues par éléments finis sont en excellent accord avec celles que prédit la formule (6.5.7), ainsi qu'avec les résultats expérimentaux. Moins bonne est la correspondance avec la formule (6.5.1). En l'absence de pression, on observe déjà un écart, et celui-ci ne fait que s'amplifier lorsque la pression augmente, pour atteindre 17% dans le plus mauvais des cas. Pour  $n = 5$ , l'écart diminue, ce qui est logique, puisque la formule (6.5.1) n'est valable que pour les grandes valeurs de  $n$ .

La figure (6.8.1) illustre la grande variation des fréquences propres avec la pression. En particulier, pour  $n = 5$ ,  $q = 1$ , la fréquence passe de 188 pour  $p = 0$  à 1588 Hz pour  $p = 2$  psi, ce qui est considérable.

L'évolution de la fréquence propre du mode  $\lambda = 1$  en fonction de  $n$ , pour les différentes valeurs de la pression, est représentée à la figure (6.8.2). Elle illustre clairement le relèvement de la fréquence minimum obtenu par la pressurisation.

## 6. RESERVOIR CYLINDRIQUE RIGIDE REMPLI DE LIQUIDE

Outre les modes d'interaction fluide-structure, dont la connaissance est essentielle pour la précision de l'effet POGO, on peut être amené à étudier les modes de ballonnement du liquide dans les réservoirs, qui jouent un rôle important dans les problèmes de guidage de l'engin en vol.

L'exemple qui suit est destiné à mettre en évidence la capacité de la formulation adoptée pour le fluide de représenter correctement les modes de ballonnement du liquide. En outre, il illustre la manière de tenir compte des conditions de paroi rigide. Le cylindre représenté à la figure (6.9) a un rayon  $r_0$  et une hauteur  $h$ . A la paroi, le liquide n'a pas de déplacement normal. Cette condition s'ob-

tient simplement en laissant libre le potentiel des déplacements à la surface rigide. Dans ce cas particulier, il n'y a donc pas lieu d'utiliser les éléments de connexion fluide-structure. Sur la figure (6.1), on a représenté les éléments de surface libre avec une certaine épaisseur, de manière à les rendre visibles.

Ce problème a une solution analytique bien connue, les pulsations étant données par

$$\omega_p^2 = \frac{\lambda_p}{r_0} \operatorname{th} \left( \frac{h \lambda_p}{r_0} \right), \quad (6.6.1)$$

où  $\lambda_p$  est la  $p^{\text{ème}}$  solution de l'équation

$$J_n'(\lambda) = 0, \quad (6.6.2)$$

$n$  étant la périodicité azimutale du mode considéré, et  $J_n$ , la fonction de Bessel d'ordre  $n$ .

Le problème a été traité pour  $n = 0$ , en discrétisant le fluide aux degrés 3 et 4, pour  $n = 1$ , au degré 4, et enfin, pour  $n = 2$ , au degré 4. La comparaison des résultats obtenus avec les solutions analytiques est illustrée ci-après.

$n = 0$	analytique	degré 3	degré 4
$\omega_1$	2,642	2,642	2,642
$\omega_2$	3,732	3,735	3,732
$\omega_3$	4,509	4,546	4,510
$\omega_4$	5,162	5,291	5,173
$\omega_5$	5,739	6,175	5,789

n = 1	analytique	degré 4
$\omega_1$	1,519	1,520
$\omega_2$	3,220	3,220
$\omega_3$	4,127	4,128
$\omega_4$	4,838	4,842
$\omega_5$	5,452	5,476

n = 2	analytique	degré 4
$\omega_1$	2,265	2,265
$\omega_2$	3,645	3,645
$\omega_3$	4,464	4,464
$\omega_4$	5,132	5,141
$\omega_5$	5,718	5,758

On constate que la correspondance est très bonne, surtout pour  $n = 1$  et  $n = 2$ . Pour  $n = 0$ , elle l'est un peu moins dans le cas du degré 3, mais le degré 4 conduit à des résultats très satisfaisants.

## 7. HEMISPHERE ELASTIQUE REMPLI DE LIQUIDE

Cet exemple est repris de la référence [G1]. Il s'agit d'un hémisphère d'aluminium de 200 in de rayon, de 0,1 in d'épaisseur, contenant un fluide (LOX) dont la densité de masse vaut  $1,06 \cdot 10^{-4}$  lb sec<sup>2</sup>/in<sup>4</sup>. Les conditions aux limites sont constituées par un appui simple à l'équateur.

La figure (6.10) illustre le découpage en éléments finis. Pour la clarté, les éléments de couplage fluide-coque et fluide-surface libre  $y$  sont représentés avec une épais-

seur non nulle. Le fluide est pris de degré 4, la coque et la surface libre, de degré 3.

La figure (6.11) montre la comparaison des fréquences propres avec celles obtenues par GUYAN et AL. Les figures (6.12) à (6.16) représentent les modes propres les plus significatifs parmi ceux qui ont été obtenus.

On remarquera le très bon accord avec les résultats de la référence [G1] en ce qui concerne l'ensemble des fréquences propres et la forme des premiers modes de surface libre. L'accord est moins bon en ce qui concerne la forme des modes de couplage coque-fluide. A ce sujet, il convient de remarquer que les déformées de surface libre obtenues dans [G1] semblent peu conformes à la réalité, contrairement à celles que donne la présente formulation.

En ce qui concerne les déformées de la coque, les formes tourmentées obtenues ici peuvent s'expliquer par le fait que la masse du liquide est très grande vis-à-vis de celle de la coque.

Cette analyse comportait 266 degrés de liberté, qui ont été condensés à 52 (dont 16 de surface libre) au terme d'une division en 8 sous-structures. L'analyse modale a porté sur le calcul des 18 premiers modes propres parmi lesquels figuraient les 15 modes de surface libre dont l'idéalisation permettait de rendre compte (16 d.d.l. de surface libre moins 1, en raison de la contrainte d'incompressibilité).

Afin d'utiliser l'aptitude de la formulation adoptée à limiter le nombre de modes de surface libre lorsque ceux-ci ne sont pas désirés, le même problème a été repris avec rigoureusement le même découpage et les mêmes degrés pour le fluide et la coque, mais en spécifiant le degré 0 pour les déplacements de surface libre. Les degrés de liberté de surface libre ont ainsi été réduits à 4 sur un total de

254, condensé à 40 pour la résolution finale. Les modes de surface libre représentables n'étaient donc plus qu'au nombre de 3, et le troisième mode de couplage coque fluide est devenu le sixième, au lieu du dix-huitième, ce qui a permis d'économiser le calcul de 12 modes de surface libre, soit environ 30% du temps total de calcul. Le tableau suivant illustre les écarts enregistrés sur les fréquences propres :

Nature des modes propres	Surface libre de degré 3		Surface libre de degré 0		Ecart (%)
	n°	f (Hz)	n°	f (Hz)	
1 <sup>e</sup> surf.libre	1	0,42656	1	0,44134	3,5
2 <sup>e</sup> surf.libre	2	0,58257	2	0,64058	10
3 <sup>e</sup> surf.libre	3	0,70295	3	0,80039	14
1 <sup>e</sup> coque-fluide	15	6,48249	4	6,48193	0,0086
2 <sup>e</sup> coque-fluide	17	9,97342	5	9,97237	0,011
3 <sup>e</sup> coque-fluide	18	12,31327	6	12,29545	0,14

On constate que les fréquences propres des modes de couplage coque-fluide ne sont pratiquement pas affectées (moins de 1,5 ‰) par la réduction du degré de la surface libre.

#### 8. ETAGE L 17 DU LANCEUR DIAMANT B

Le lanceur DIAMANT B complet est représenté à la figure (6.17). Le calcul par éléments finis porte sur son premier étage L 17 sans bâti moteur. Il s'agit d'une structure composée de deux réservoirs cylindriques à fonds elliptiques dont on désire déterminer le comportement dynamique, en vue de la prévision de l'effet POGO, pour un taux de vidange de 25% d'ergols consommés. La structure ainsi que son idéalisation par éléments finis sont représentées à la figure (6.18). Le

modèle utilisé comporte 20 éléments de coque de degré 3 et de 20 éléments de fluide de degré 4. Quant à la surface libre, elle est prise de degré 0. De cette façon, il n'apparaît dans le calcul aucun mode de surface libre, si bien que les premiers modes obtenus sont des modes de couplage fluide-coque. L'idéalisation comporte 444 degrés de liberté qui, après condensation du fluide, se réduisent à 95 pour la résolution finale.

Les résultats d'un calcul effectué par la méthode d'ARCHER et RUBIN nous ont été communiqués [L7]. La comparaison est faite dans le tableau suivant :

	fréquence (Hz)		masse généralisée (kgm <sup>2</sup> )	
	Présente formulation	[L7]	Présente formulation	[L7]
mode 1	33,189	33,602	1,407.10 <sup>6</sup>	1,452.10 <sup>6</sup>
mode 2	57,45	57,429	7,064.10 <sup>6</sup>	6,994.10 <sup>6</sup>

Ces résultats concordent très bien, comme on peut le constater. En outre, l'accord avec l'expérience a été jugé très satisfaisant. On remarquera à ce sujet que la forme très élancée de la structure étudiée se prête assez bien à l'utilisation de la méthode d'ARCHER et RUBIN, ce qui ne serait pas le cas pour des structures plus larges.

La figure (6.19) présente la forme du premier mode. On trouvera à la figure (6.20) la courbe des pressions le long de l'axe de symétrie.

Le second mode, qui correspond à l'effet POGO en fin de vol, est représenté à la figure (6.21). On remarquera l'importance des déplacements au fond du réservoir de N<sub>2</sub>O<sub>4</sub>. Ce déplacement et l'importante fluctuation de pression qui en

résultes étaient à la base du POGO observé dans les premiers vols [D19]. Les pressions sont représentées à la figure (6.22).

### 9. MODES EN TREFLE D'UN RESERVOIR DE LANCEUR PARTIELLEMENT REMPLE DE LIQUIDE

La structure représentée à la figure 6.23 est un des deux réservoirs du premier étage d'un lanceur lourd. Si l'on compare sa forme à celle des réservoirs précédents, on constate qu'il est beaucoup plus trapu. Il s'agit de calculer les fréquences de vibration de ce réservoir pour un taux de remplissage de 33%, ainsi que de prévoir l'altération du spectre dû à une pression de gaz de 2 bar.

Selon certains auteurs [H7], on peut idéaliser une telle structure en ne considérant que sa virole. On admet alors que les deux extrémités de celle-ci reposent sur des appuis glissants, c'est-à-dire que l'on y fixe  $u_r$ ,  $u_\theta$ ,  $\phi_r$ ,  $\phi_\theta$ ,  $\phi_z$ . Moyennant quoi, ils utilisent la formule [T6].

$$\Omega^2 = \frac{\frac{\lambda^4}{(\lambda^2 + n^2)^2} + \frac{1}{12(1-\nu^2)} \frac{t^2}{r^2} (\lambda^2 + n^2)^2 + n_{ss} \lambda^2 + n_{\theta\theta} n^2}{1 + \gamma} \quad (6.8.1)$$

où

$$\gamma = \frac{1}{n} \frac{\rho_f}{\rho_c} \frac{b}{t} \frac{r}{\ell} \left( 1 - \frac{\sin \frac{2\lambda b}{r}}{\frac{2\lambda b}{r}} \right) \quad (6.8.2)$$

On reconnaît, au numérateur, la formule (6.5.1). Le facteur correctif  $(1 + \gamma)$  est destiné à tenir compte de la masse du fluide. Il est calculé par une méthode comparable à celle d'ARCHER et RUBIN. A nouveau, on peut améliorer la formule ci-dessus, en remplaçant le terme  $n_{\theta\theta} n^2$  par  $n_{\theta\theta} (n - \beta)^2$ ,  $\beta$  étant donné par la formule (6.5.6); quant au dénominateur, il n'est pas nécessaire de le corriger, car  $\gamma$  est très grand devant  $\alpha^2$  et  $\beta^2$ . Pour tenir compte du fait que la coque n'est

pas appuyée mais encastrée, on remplace, à l'instar d'ARNOLD et WARBURTON [A3], le nombre d'onde longitudinal  $q$  par  $(q + 0,3)$ .

Nous avons donc d'abord étudié la virole seule. Le maillage par éléments finis est schématisé à la figure (6.24). Les calculs ont été effectués pour  $n = 2,5$  et 10, en l'absence de pression et sous une pression de 2 bar. Les résultats sont consignés dans le tableau (6.8.1). En regard de ces valeurs, nous avons porté les fréquences calculées par la formule (6.8.1) améliorée.

Tableau (6.8.1) - Virole du réservoir

p (bar)	n	Eléments finis	Analytique
0	2	63,7	73,5
	5	23,6	28,7
	10	14,9	13,6
2	2	63,9	74,2
	5	39,7	44,3
	10	55,3	85,7

On constate que la correspondance des résultats est assez relative. Ces écarts sont dus au fait que, sous l'influence du fluide, les modes de la coque sont assez bien déformés. Or la formule (6.8.1) est établie en supposant qu'ils restent sinusoïdaux. L'écart est surtout sensible pour la coque sous pression, ce qui s'explique par le fait que la précontrainte qui, dans ce cas, joue un rôle déterminant, raidit les dérivées des déplacements, bien plus sensibles à une déformation du mode que les déplacements qui interviennent dans la raideur de membrane. Cependant, l'allure des courbes d'évolution de la fréquence en fonction de  $n$  est respectée. Ces

courbes, représentées à la figure (6.25), sont tout-à-fait caractéristiques de ce genre de problème : en l'absence de pression la fréquence minimum a lieu pour  $n$  de l'ordre de 10; la pression a pour effet de hâter la croissance de la fréquence.

L'effet de la pression hydrostatique est également très important. Pour mettre ce fait en évidence, nous avons recalculé les fréquences en incluant la pression hydrostatique dans le calcul de la précontrainte. Les résultats sont les suivants :

Tableau (6.8.2) : effet de la pression hydrostatique

p (bar)	n	avec p.hydr.	sans p.hydr.
0	2	40,5	63,7
	5	35,6	23,6
	10	30,0	14,9
2	2	65,0	64,3
	5	49,4	39,2
	10	61,7	54,0

On constate donc que cet effet est très marqué.

Enfin, le réservoir complet a été étudié. La modélisation du fond est représentée à la figure (6.2.6). Les mêmes analyses, soit

$p = 0$  :  $n = 2,5$  et  $10$

$p = 2$  bar :  $n = 2,5$  et  $10$ ,

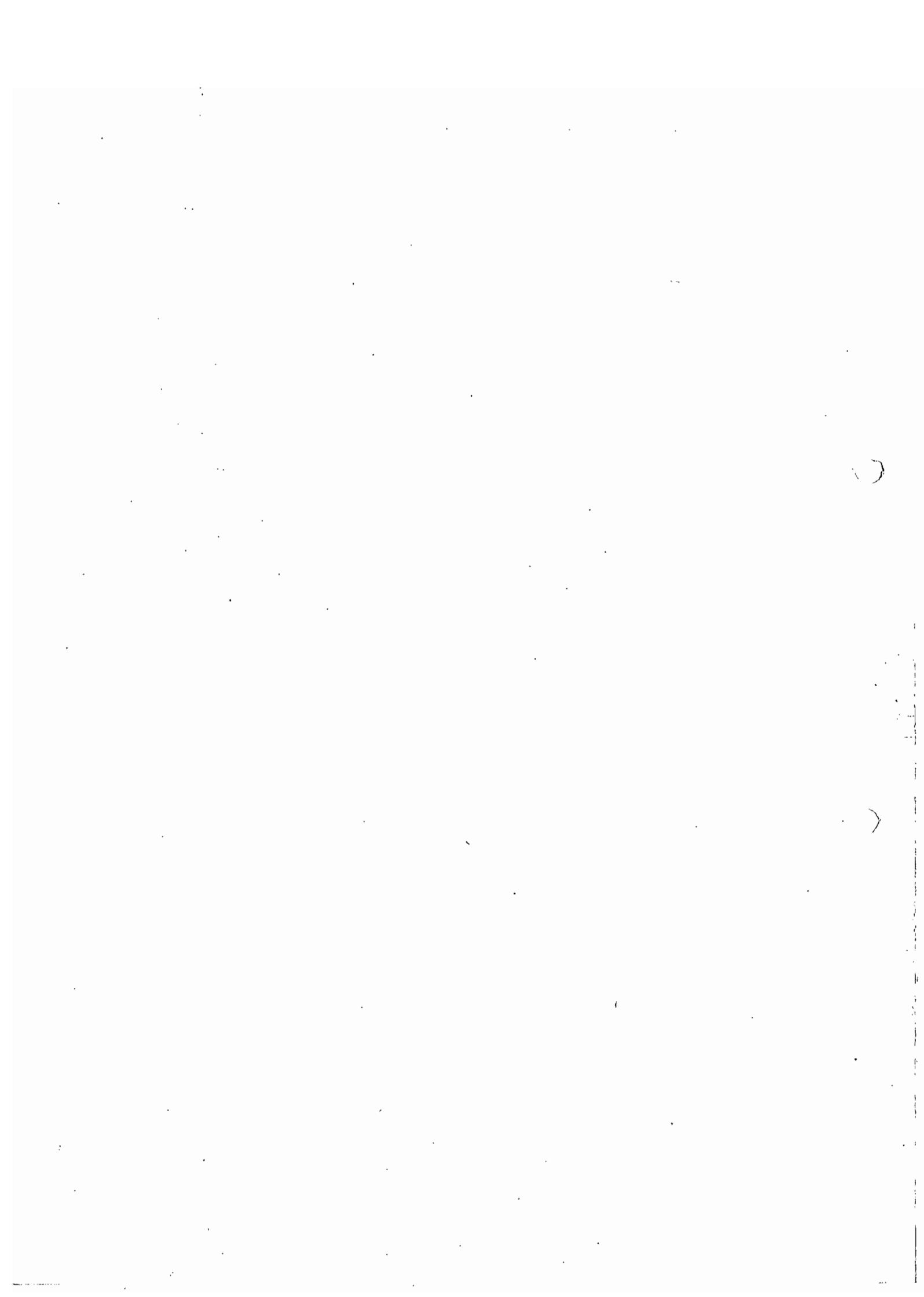
ont été faites. Pour toutes ces analyses, on a imposé comme condition aux limites un appui simple à la jonction de la virole et du fond inférieur. L'effet de la pression hydrostatique a été inclus de façon systématique.

Un fait frappant dans les résultats obtenus est la présence de modes de fonds correspondant à des fréquences plus basses que celles de la virole. Ainsi, par exemple, lors de l'analyse ( $p = 2$ ,  $n = 2$ ), on a obtenu, outre les deux modes de surface libre, un mode de fond inférieur à 34,1 Hz, alors que le premier mode de virole est situé à 60,3 Hz. Par ailleurs, les fréquences sont très différentes de celles que l'on obtient en étudiant la virole seule, comme le montre le tableau suivant :

Tableau (6.8.3) : réservoir avec fonds

p (bar)	n	1 <sup>e</sup> mode		2 <sup>e</sup> mode	
		type	f (Hz)	type	f (Hz)
0	2	fond inf.	24,8	virole	55,7
	5	virole	31,0	virole	59,9
	10	virole	16,5	virole	27,3
2	2	fond inf.	34,1	virole	60,3
	5	virole	44,5	virole	82,5
	10	virole	54,2	virole	110,8

Il apparaît donc que l'approximation consistant à n'étudier que la virole est largement insuffisante, du moins pour ce genre de réservoirs très peu élancés.



## CONCLUSIONS

La présente étude a montré qu'en partant d'un principe variationnel purement lagrangien, dans lequel le liquide est effectivement décrit par son potentiel des déplacements, on arrive à une formulation élégante et complète du problème hydroélastique. Ce formalisme se prête extrêmement bien à une discrétisation par éléments finis de l'ensemble fluide-structure, conduisant ainsi à une méthode de résolution homogène et efficace. La discrétisation du potentiel des déplacements dans le fluide mène à une description à la fois économique et complète de celui-ci et permet en outre un accès aisé à la fluctuation de pression qui, comme nous l'avons déjà souligné, est essentielle pour la prévision de l'effet POGO. Les applications ont permis de montrer que la discrétisation séparée des déplacements de la surface libre, outre qu'elle facilite l'interprétation de la forme des modes propres, permet de limiter le nombre de modes de surface libre lorsque ceux-ci sont indésirables, sans altérer de manière sensible les autres modes propres du système.

Par ailleurs, la méthode de résolution proposée, qui permet de condenser simultanément tous les degrés de liberté du fluide et une partie des degrés de liberté de la structure, permet d'envisager le traitement de systèmes à grand nombre de degrés de liberté.

La description de la structure s'est avérée très satisfaisante. L'effet de précontrainte, dû notamment à la pression interne, y a été inclus, et son influence sur les fréquences propres s'est révélée très importante.

Les exemples traités, dont l'accord, tant avec les solutions théoriques qu'avec les résultats d'autres méthodes numériques et de l'expérience, est excellent, confirment la validité des solutions théoriques proposées. Sur le plan pratique, la technique des éléments finis développés en séries de Fourier s'est affirmée comme une méthode particulièrement économique et efficace d'étude des structures de révolution.

Signalons enfin que les méthodes proposées, quoique présentées dans le cadre particulier des constructions aérospatiales, trouvent un champ d'application beaucoup plus vaste. Elles s'avèrent également d'un grand intérêt dans maintes applications de la construction mécanique et du génie civil.

BIBLIOGRAPHIE



- [A1] J.S. ARCHER et C.P. RUBIN  
"Improved linear axisymmetrical shell-fluid model for launch vehicle longitudinal response analysis"  
AFFDL-TR-66-80 , pp 823 - 847
- [A2] L. ANQUEZ, D. LANGE et J. PELLAS  
"Programme de calcul des modes propres d'une coque souple axisymétrique partiellement remplie de liquide"  
Note technique ONERA n° 39/6042 SY 08OR, 1973
- [A3] R.N. ARNOLD et G.B. WARBURTON  
"The flexural vibrations of thin cylinders"  
Proceedings Institution of Mechanical Engineers 167 (A)  
pp 62 - 80, 1953
- [A4] H.M. ADELMAN, D.S. CATHERINES et W.C. WALTON Jr.  
"A method for computation of vibration modes and frequencies of orthotropic thin shells of revolution"  
NASA-TN-D-4972, 1969
- [A5] A.M.J. AL-NAJAFI et G.B. WARBURTON  
"Free vibration of ring-stiffened cylindrical shells"  
Jl. Sound Vib., 1970, 13 (1), 9-25
- [A6] R.N. ARNOLD et G.B. WARBURTON  
"Flexural Vibrations of the Walls of Thin Cylindrical Shells Having Freely Supported Ends"  
Proceedings of the Royal Society (London), Series A, Vol. 197, p 238, 1949
- [B1] J. BOUJOT  
"Sur l'analyse des caractéristiques vibratoires d'un liquide contenu dans un réservoir"  
Journal de Mécanique, Vol. 11, n° 4, décembre 1972

- [B2] H. BERGER et R. OHAYON  
"Application de la méthode des éléments finis au calcul des caractéristiques vibratoires d'une coque élastique remplie de liquide".  
Note technique ONERA n° 40/6042 SY 080 R, 1973
- [B3] H. BERGER, J. BOUJOT et R. OHAYON  
"Vibrations d'un fluide parfait incompressible contenu dans une coque souple. Formulation variationnelle et étude numérique par la méthode des éléments finis".  
Note technique ONERA n° 30/6042 SY 070 R, 1972
- [B4] B. BUDIANSKY et P.P. RADKOWSKI  
"Numerical Analysis of Unsymmetrical Bending of Shells of Revolution"  
A.I.A.A. Journal, Vol. 1, n° 8, August 1963
- [B5] B. BUDIANSKY et J.L. SANDERS Jr.  
"On the best first order linear shell theory"  
Progress in Applied Mechanics, Macmillan Co., New York, 1963
- [B6] F. BROGAN, K. FORSBERG, S. SMITH  
"Experimental and analytical investigation of the dynamic behavior of a cylinder with a cutout"
- [B7] R.L. BISPLINGHOFF  
"The finite twisting and bending of heated elastic lifting surfaces"  
Mitteilungen aus dem Institut für Flugzeugstatik und Leichtbau Verlag Leeman, Zürich, n° 4, 1958
- [B8] T. BELYTSCHKO  
"Finite elements for axisymmetric solids under arbitrary loadings with modes on origin"  
A.I.A.A. Jl. Vol. 10, n° 11, 1972, pp 1532 - 1533

- [B9] K.E. BUCK  
"Comment on "Finite elements for axisymmetric solids under arbitrary loadings with modes on origin"  
A.I.A.A. Jl. Vol. 11, n° 9, 1973, pp 1357 - 1358
- [B10] D. BUSCHNELL  
"Analysis of buckling and vibration of ring-stiffened, segmented shells of revolution"  
Int. J. Solids Structures, 1970, Vol. 6, pp 157 - 181  
Pergamon Press
- [B11] M.A. BIOT  
"Théorie de l'élasticité du second ordre avec application à la théorie du flambage"  
Annales de la Société Scientifique de Bruxelles, Tome LIV, série I, pp 104 - 112
- [B12] M.A. BIOT  
"Sur la stabilité de l'équilibre élastique. Equations de l'élasticité d'un milieu soumis à tension initiale"  
Annales de la Société Scientifique de Bruxelles, Tome LIV, série B, pp 18 - 21, 1934
- [B13] M.A. BIOT  
"Non-linear Theory of Elasticity and the Linearized Case for a Body under Initial Stress"  
Philosophical Magazines, Ser. 7, Vol. XXVII, pp 468 - 489, 1939
- [B14] M.A. BIOT  
"Internal buckling under initial stress in finite elasticity"  
Proceedings of the Royal Society, A, volume 273, pp 306 - 328, 1963
- [B15] G.H. BRYAN  
Proc. London Math. Soc., Vol. 22, p 54, 1891  
Cité dans Timoshenko et Gere [T5].

- [C1] Y.K. CHEUNG  
"Finite Strip Method Analysis of Elastic Solids"  
Jl of Eng. Mech. Div. (Proc. A.S.C.E.)  
Dec. 1968, pp 1365 - 1378
- [C2] Y.K. CHEUNG  
"Finite Strip Method in Structural Analysis"  
Pergamon Press, 1976
- [C3] R. COURANT et D. HILBERT  
"Methods of mathematical physics"  
Interscience Publishers, New York, English edition,  
Vol. 1, 1953
- [C4] E. CARNOY  
"Etude de l'approche statiquement admissible de la  
bifurcation de l'équilibre"  
Rapport LTAS SF-53, 1976
- [D1] J.F. DEBONGNIE  
"Application de la méthode des éléments finis en méca-  
nique des fluides"  
Rapport LTAS FF-1, Université de Liège
- [D2] J.F. DEBONGNIE et A. HUCK  
"Analyse dynamique des systèmes hydroélastiques de ré-  
volution par la méthode des éléments finis. Application  
à l'étude du phénomène "POGO" dans les lanceurs à ergols  
liquides"  
Coll.Pub.Fac.Sc.Appl. Univ.Liège, n° 50, 1974
- [D3] J.F. DEBONGNIE et A. HUCK  
"Application de la méthode des éléments finis à l'étude  
du comportement dynamique d'un fluide incompressible  
et non visqueux contenu dans une structure élastique  
de révolution"  
Rapport LTAS VF-26, Université de Liège

- [D4] J.F. DEBONGNIE  
"Préservation des modes rigides et conditions sur les déplacements au voisinage de l'axe dans les coques tronc-coniques de révolution"  
Rapport LTAS VF-27, Université de Liège
- [D5] G. DUPUIS et J.J. GOEL  
"A curved finite element for thin elastic shells"  
Int.Jl. Solids & Structures, Vol. 6, 1970, pp 1413 - 1428
- [D6] N.P. DARIO et W.A. BRADLEY  
"A comparison of first and second order axially symmetric finite elements"  
Int.Jl. Num.Meth.Eng., Vol. 5, pp 573 - 583 (1973)  
Wiley and Sons Ltd
- [D7] C. DELCOURT-BON  
"Elément de volume pour multicouches à géométrie axi-symétrique"  
Rapport LTAS VF-25
- [D8] J.F. DEBONGNIE  
"On the approximation of incompressible solids in the displacement method"  
Rapport LTAS SA-42
- [D9] J.F. DEBONGNIE  
"Etude des structures anisotropes pouvant être incompressibles et application à un élément fini de tore triangulaire"  
Rapport LTAS SF-32
- [D10] J.F. DEBONGNIE  
"Analyse dynamique des structures pouvant être incompressibles à l'aide d'un élément fini de tore triangulaire"  
Rapport LTAS VF-28

- [D11] J.F. DEBONGNIE  
"Sur la formulation de Herrmann pour l'étude des solides  
incompressibles"  
Rapport LTAS SF-58
- [D12] J.F. DEBONGNIE  
"Exercices de théorie des structures"  
Rapport LTAS SF-57
- [D13] R.A. DI TARANTO  
"Theory of vibratory bending for elastic and viscoelastic  
layered finite-length beams"  
Transactions ASME - Jl.Appl.Mech., Dec. 1965, pp 881 - 886
- [D14] R.A. DI TARANTO et W. BLASINGAME  
"Composite damping of vibrating sandwich beams"  
Transactions ASME - Jl.of Engineering for Industry,  
Nov. 1967, pp 633 - 638
- [D15] J.F. DEBONGNIE  
"L'intégration dans les éléments finis"  
Rapport LTAS SF-35, 1976
- [D16] M. DECUYPER  
"Compléments de mathématiques"  
Collection Dunod Université, Dunod, Paris, 1968
- [D17] J.F. DEBONGNIE  
"Elément de coque à géométrie de révolution"  
Rapport LTAS VF-24, 1974
- [D18] J.F. DEBONGNIE  
"Formulation de l'étude linéarisée des structures pré-  
contraintes"  
Rapport LTAS SF-43, 1976

- [D19] J.J. DORDAIN, D. LOURME et C. ESTOUEIG  
 "Etude de l'effet POGO sur les lanceurs EUROPA II et  
 DIAMANT B"  
 Acta Astronautica, Vol. 1, pp. 1357 - 1384.  
 Pergamon Press 1974
- [E1] D. ENGRAND et J. BORDAS  
 "Calcul des coques en matériaux multicouches et sandwiches  
 par la méthode des éléments finis"  
 La recherche Aérospatiale, 1973, n° 2 (Mars-Avril),  
 pp 109 - 118
- [F1] I. FREDHOLM  
 "Sur une nouvelle méthode pour la résolution du problème  
 de Dirichlet"  
 Kong.Vetenskaps.Akademiens Fröh. Stockholm (1900), 39 - 46
- [F2] B.M. FRAEIJIS de VEUBEKE  
 "Iteration in semi definite eigenvalue problems"  
 J.A.S., Vol. 22, n° 10, oct. 1955, pp 710 - 720
- [F3] B.M. FRAEIJIS de VEUBEKE  
 "A new variational principle for finite elastic  
 displacements"  
 Int.J.Engng.Sci., 1972, Vol. 13, pp 745 - 763  
 Pergamon Press
- [F4] B.M. FRAEIJIS de VEUBEKE  
 "Cours de théorie des structures-Elasticité"  
 Rapport LTAS SF-41
- [F5] B.M. FRAEIJIS de VEUBEKE  
 "Approximations par le calcul des variations"  
 dans "Quelques formes modernes des mathématiques utiles  
 à l'ingénieur"  
 Ed.OCDE, Colloque 1962, SRB 11, pp 581-615

- [F6] I. FRIED  
"Finite element analysis of incompressible material by residual energy balancing"  
Int.Jl. Solids & Structures, 1974, Vol. 10, pp 993 - 1002
- [F7] B.M. FRAEIJIS de VEUBEKE  
"Théorie des coques prismatiques minces renforcées par lisses ou diaphragmes"  
Académie Royale de Belgique, mémoire 8, n° 1729, 1961
- [F8] B.M. FRAEIJIS de VEUBEKE  
"The theoretical design laws of warping-free multicellu-  
lus box beams"  
Problems of Hydrodynamics and Continuum Mechanics,  
SEDOV Anniversary Volume, SIAM, 1969, pp 287 - 305
- [F9] Y.C. FUNG, E.E. SECHLER, A. KAPLAN  
"On the Vibration of Thin Cylindrical Shells Under  
Internal Pressure"  
Journal of the Aeronautical Sciences - sept. 1957,  
pp 650 - 660
- [G1] R.J. GUYAN, B.H. UJIHARA et P.W. WELCH  
"Hydroelastic of axisymmetric systems by a finite  
element method"  
AFFDL-TR-68-150, pp 1165 - 1203
- [G2] H.G. GARNIR  
"Fonctions de Variables réelles"  
Tome 1, Gauthier-Villars, Paris, 1963,  
Tome 2, Gauthier-Villars, Paris, 1965
- [G3] M. GERADIN  
"Analyse dynamique duale des structures par la méthode  
des éléments finis"  
Coll.Pub.Fac.Sc.Appl. Univ.Liège, n° 36, 1973

- [G4] R.J. GUYAN  
"Reduction of stiffness and mass matrices"  
A.I.A.A. Journal, Vol. 3, n° 2, Feb. 1965
- [G5] M. GERADIN  
"Notice d'utilisation du programme d'analyse dynamique  
DYNAMG"  
Rapport LTAS VF-9, Université de Liège, 1970
- [G6] M. GERADIN  
"Calcul des modes et fréquences propres d'une structure  
de satellite par la méthode des éléments finis"  
Coll.Pub.Fac.Sc.Appl. Univ.Liège, n° 26, 1971
- [G7] M. GERADIN  
"Error bounds for eigenvalue analysis by elimination  
of variables"  
Journal of Sound and Vibration, Vol. 19, n° 1, 1971
- [G8] P.L. GOULD et S.K. SEN  
"Refined mixed method finite elements for shells of  
revolution"  
Air Force Third Conference on Matrix Methods in  
Structural Mechanics Wright-Patterson AFB, Ohio, Oct. 1971
- [G9] P.E. GRAFTON et D.E. STROME  
"Analysis of axisymmetrical shells by the direct  
stiffness method"  
A.I.A.A. Journal, Vol. 1, n° 10, pp 2342 - 2347, Oct. 1963
- [G10] A.L. GOLD'ENVEIZER  
"Theory of elastics thin shells"  
International series of monographs in aeronautics and  
astronautics Pergamon Press, 1961
- [G11] F.R. GANTMACHER  
"Théorie des Matrices"  
Collection universitaire de Mathématiques, n° 19, Dunod,  
Paris, 1966, Tome 2

- [H1] D.A. HUNT  
"Discrete element idealization of an incompressible liquid for vibration analysis"  
A.I.A.A. Journal, Vol. 8, n° 6, June 1970, pp 1001 - 1004
- [H2] A. HUCK, A. MOL, S. IDELSOHN, J.F. BEBONGNIE  
"Vibrations asymétriques d'une coque de révolution autour d'un état d'équilibre thermoélastique"  
Rapport LTAS VF-22, Université de Liège, 1974
- [H3] A. HUCK  
Communication personnelle
- [H4] L.R. HERRMANN  
"Elastic equations for incompressible and nearly incompressible materials by a variational theorem"  
A.I.A.A. Journal, Vol. 3, n° 10, pp 1896 - 1900
- [H5] A. HUCK  
"Méthodes numériques en réponse dynamique avec amortissement structural"  
Rapport LTAS VF-30, 1976
- [H6] N. HRISAFOVIC, P. HAUGUEL, J.C. LEMOINE, J.P. LEBEL  
"Etude de l'effet POGO sur le lanceur ARIANE"  
International Astronautical Federation, XXVII<sup>e</sup> Congress, Anaheim, 10-16 october 1976.
- [H7] N. HRISAFOVIC  
"Ariane. Modes de respiration des réservoirs principaux. Influence de la pression"  
Rapport SNIAS S/DEA-1 n° 314158, 1974
- [I1] S. IDELSOHN  
"Analyses statique et dynamique des coques par la méthode des éléments finis".  
Thèse de doctorat. Rapport LTAS SF-25, Université de Liège

- [I2] B. IRONS  
"Structural eigenvalue problems : elimination of unwanted variables"  
A.I.A.A. Jl., Vol. 3 n° 5, 1965
- [I3] S. IDELSOHN  
"Analyse dynamique des coques minces au moyen d'un élément fini triangulaire plan de type mixte"  
Rapport LTAS VF-19, Université de Liège
- [J1] Ch. JAEGER  
"Hydraulique technique"  
Dunod, Paris, 1954
- [K1] G.R. KHABBAZ  
"Dynamic behavior of liquids in elastic tanks"  
A.I.A.A. Journal Vol. 9, n° 10, oct.1971, pp 1985 - 2004
- [K2] A. KALNINS  
"Static, free vibration, and stability analysis of thin, elastic shells of revolution"  
AFFDL-TR-68-144, March 1969
- [K3] A. KABAILA et B. FRAEIJIS de VEUBEKE  
"Stability analysis by finite elements"  
Rapport LTAS SA-15, Université de Liège
- [K4] A. KABAILA et B. FRAEIJIS de VEUBEKE  
"The analysis of equilibrium bifurcation problems by finite element methods"  
Rapport LTAS SA-19, Université de Liège
- [L1] L. LANDAU et E. LIFCHITZ  
"Mécanique des fluides"  
Editions MIR, Moscou, 1971

- [L2] J. LECLERC et P. SALAÜN  
"Problèmes non homogènes linéarisés relatifs aux petits mouvements de liquide incompressible dans des réservoirs déformables"  
La Recherche Aérospatiale, Année 1975, n° 4, pp 229 à 244
- [L3] L. LANDAU et E. LIFCHITZ  
"Théorie de l'élasticité"  
Editions MIR, Moscou, 1967
- [L4] J. LESTINGI et J. PADOVAN  
"Numerical analysis of anisotropic rotational shells subjected to nonsymmetric load"  
Computers and Structures, Vol. 3, pp 133 - 147  
Pergamon Press, 1973
- [L5] M. LINSMAN  
"Cours d'analyse numérique"  
Editions Derouaux, Liège
- [L6] L.T.A.S.  
"S.A.M.C.E.F." - Système d'Analyse des Milieux Continus par Eléments Finis. Manuel Théorique - Volume 1, rapport LTAS IF-17, Volume 2, rapport LTAS IF-18
- [L7] D. LEYNIAT  
"Analyse modale axisymétrique du L 17 par le programme DYNAM"  
Note CNES n° 265.10/74 DLA/EDIEG, Centre spatial de Bretigny, 1974
- [M1] R.H. MAC NEAL (Editor)  
"The NASTRAN theoretical manual" (Level 15)  
NASA SP-221 (01), 1972, chap. 16

- [M2] H. MORAND et R. OHAYON  
"Internal pressure effects on the vibration of partially filled elastic tanks"  
World Congress on finite element methods in structural mechanics, Bournemouth, Dorset, England, 12-17 oct. 1975
- [M3] K. MARGUERRE  
"Knick- und Beulvorgänge — Einführung in die Theorie der elastischen Stabilität". Chapitre VI de "Neuere Festigkeitsprobleme des Ingenieure"  
Herausgegeben von K. Marguerre, Springer Verlag, Berlin Göttingen, Heidelberg, 1950
- [M4] A.M. MOL  
"Eléments à symétrie axiale"  
Rapport LTAS SF-24
- [M5] A.M. MOL  
"Eléments à symétrie axiale pour l'analyse dynamique des structures"  
Rapport LTAS VF-23
- [M6] A. MILLARD et C. NYSSSEN  
"Elément isoparamétrique de coque axisymétrique d'épaisseur modérée pour l'analyse statique des structures. Première partie : linéaire"  
Rapport LTAS SF-54
- [M7] Ch. MASSONNET  
"Résistance des matériaux"  
Tome 1, Sciences et Lettres, Liège Tome 2, Dunod, Paris
- [M8] D.J. MEAD et S. MARKUS  
"The forced vibration of a three layer, damped sandwich beam with arbitrary boundary condition"  
J. Sound Vib. (1969) 10 (2), 163 - 175

- [M9] D.J. MEAD et S. MARKUS  
"Loss factors and resonant frequencies of encastré damped sandwich beams"  
J. Sound Vib. (1970) 12 (1), 99 - 112
- [M10] Ch. MASSONNET et G. FONDER  
"Cours de Structures tridimensionnelles"  
Université de Liège
- [M11] A. MOL  
"Formulation et programmation d'un élément fini de volume isoparamétrique spécialisé pour les coques épaisses et les multicouches"  
Rapport LTAS SF-29
- [N1] V.V. NOVOZHILOV  
"The theory in thin shells"  
P. Noordhof, Ltd, Groningen, 1959
- [N2] J. NEČAS  
"Les méthodes directes en théorie des équations elliptiques"  
Masson et Cie, 120 bd St Germain, Paris VI<sup>e</sup>, 1967
- [O1] M. OLSON et G. LINDBERG  
"Dynamic Analysis of Shallow Shells with a Doubly Curved Triangular Finite Element"  
Jl. Sound.Vib., 1971, 19 (3), 299 - 318
- [P1] L.D. PINSON et C.G. BROWN  
"A finite element method for nonaxisymmetric vibrations of pressurized shells of revolution partially filled with liquid"  
A.I.A.A./ASME/SAE 14th Structures, Structural Dynamics, and Material Conference, Williamsburg, Virginia, March 20-22, 1973

- [P2] J.H. PERCY, T.H.H. PIAN, S. KLEIN, D.R. NAVARATNA  
"Application of Matrix Displacement Method to linear  
elastic analysis of shells of revolution"  
A.I.A.A. Jl , Vol. 3, n° 11, 1965, pp 2138 - 2145
- [P3] J. PADOVAN  
"Quasi-analytical Finite Element Procedures for  
Axisymmetric Anisotropic Shells and Solids"  
Computers and Structures, Vol. 4, pp 467-483  
Pergamon Press, 1974
- [P4] J. PADOVAN et J. LESTINGI  
"Complex Numerical Integration Procedure for Static  
Loading of Anisotropic Shells of Revolution"  
Computers and Structures, Vol. 4, pp 1159 - 1172  
Pergamon Press, 1974
- [R1] RADON  
"Über die Randwertaufgaben beim logarithmischen Potential"  
Sitzber.Akad.Wiss. Wien, 122 (1913) Abt. II a, 1295 - 1438
- [R2] F. RIESZ et B.Sz. NAGY  
"Leçons d'Analyse Fonctionnelle"  
Gauthier-Villars, Paris, 6<sup>e</sup> édition, 1975
- [R3] J.J. RUMINER et I.K. Mc IVOR  
"Dynamic response of an elastic cylindrical shell-solid  
core composite subject to time-dependent loading"  
A.I.A.A. Jl, Vol. 9, n° 10, october 1971, pp 1991 - 1996
- [R4] S. RUBIN  
"Longitudinal Instability of Liquid Rockets due to  
Propulsion Feedback (POGO)"  
Jl. Spacecraft Rockets, 3, 8, pp 1186 - 1196 (1966)

- [R5] J.W.S. RAYLEIGH  
"The theory of Sound"  
Dover, New York, 1945
- [S1] G. SANDER  
"Application de la méthode des éléments finis à la flexion des plaques"  
Coll. Pub. Fac. Sc. Appl. Univ. Lg., n° 15, 1969
- [S2] H. SAUNDERS et P.R. PASLAY  
"Inextensional Vibrations of a Sphere-Cone Shell Combination"  
The Journal of the Acoustical Society of America,  
Vol. 31, n° 5, pp 579 - 583, May 1959
- [S3] J.L. SANDERS Jr.  
"An improved first-approximation theory for thin shells"  
NASA Rept. 24 (June 1959)
- [S4] J.A. STRICKLIN  
"Geometrical Nonlinear Static and Dynamic Analysis of Shells of Revolution"  
IUTAM Symposium on High Speed Computing of Elastic Structures, Liège, Belgium, Aug. 1970
- [S5] G. STRANG et G. FIX  
"An analysis of the finite element method"  
Prentice Hall, 1973
- [S6] A.H. STROUD  
"Approximate Calculation of Multiple Integrals"  
Prentice Hall, 1971
- [T1] P. TONG  
"Liquid Sloshing in an Elastic Container"  
AFOSR 66-0943 (June 1966)

- [T2] R. TAHRAOUI  
 "Calcul des modes et fréquences propres d'un réservoir rigide de forme quelconque partiellement rempli de liquide"  
 La Recherche Aérospatiale, année 1975, n° 2, pp 117 - 126
- [T3] P. TONG  
 "The finite element method for fluid flow"  
 in : Recent Advances in Matrix Methods of Structural Analysis and Design  
 Edited by R.N. GALLAGHER, Y. YAMADA, J.T. ODEN,  
 pp 787 - 808
- [T4] E.Y.W. TSUI  
 "Natural vibrations of cylindrical panels"  
 Journal of the Engineering Mechanics Division  
 (Proceedings of the ASCE)  
 December 1968, pp 1425 - 1445
- [T5] S. TIMOSHENKO et J. GERE  
 "Theory of elastic stability"  
 2<sup>e</sup> édition, Engineering Societies Monographs, Mac Graw Hill, New York, Toronto, London, 1961
- [T6] J. TRIOL  
 "Etude des modes fondamentaux de respiration des réservoirs de fluides cryogéniques"  
 Journal de Mécanique, Vol. 4, n° 2, Juin 1965
- [V1] R. VALID, R. OHAYON et H. BERGER  
 "Le calcul des réservoirs élastiques partiellement remplis de liquides, pour la prévision de l'effet POGO"  
 La Recherche Aérospatiale, 1974, n° 6, pp 367 - 379
- [V2] R. VALID, R. OHAYON  
 "Influence du ballottement dans les réservoirs des bouts d'ailes sur les modes propres de vibration d'un avion"  
 La Recherche Aérospatiale, 1974, n° 5, pp 319 - 325

- [W1] E.L. WILSON  
"Structural Analysis of axisymmetric solids"  
A.I.A.A. Jl., Vol. 3, n° 12, Dec. 1965
- [Y1] YI-YUAN YU  
"Vibrations of elastic sandwich cylindrical shells"  
Transactions ASME - Jl. of Appl. Mech., Dec. 1960  
pp 653 - 662
- [Z1] M.S. ZARGHAMEE et A.R. ROBINSON  
"A numerical method for analysis of free vibration of  
spherical shells"  
A.I.A.A. Jl, Vol. 5, n° 7, 1967, pp 1256 - 1261
- [Z2] O.C. ZIENKIEWICZ  
"The finite element method in Engineering Science"  
Mac Graw Hill, London, 1971
- [Z3] O.C. ZIENKIEWICZ  
"Isoparametric and allied numerically integrated  
elements - A review"  
Int. Simp. on Num. and Comp. Meth. in Struct. Mech.  
Chicago, 8-10 sept. 1971.

FIGURES

) (

)'

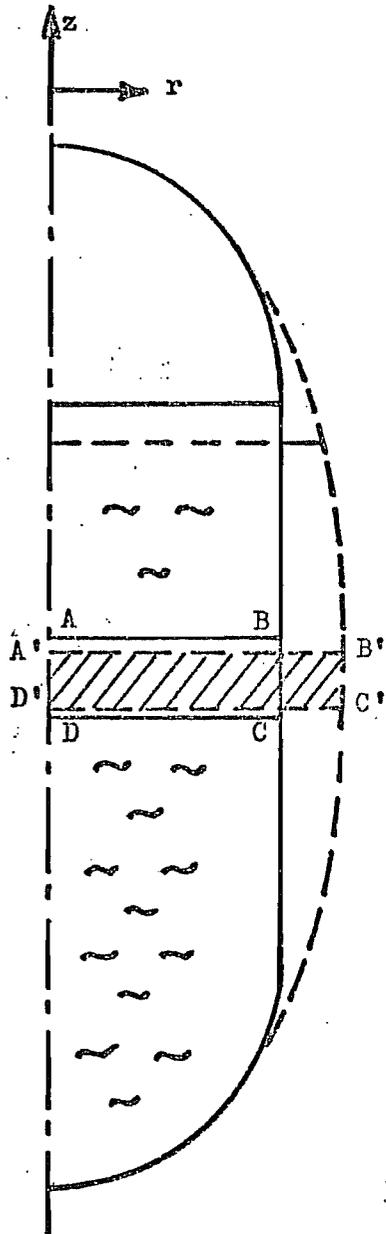
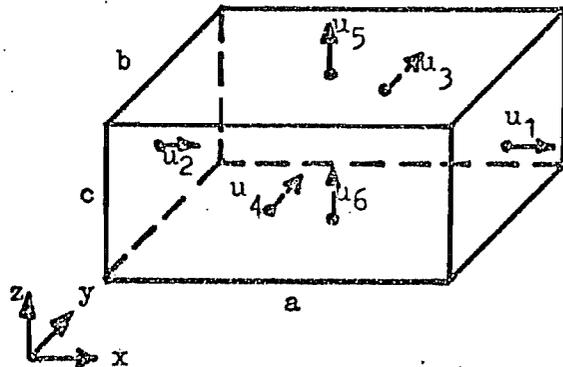


FIGURE 1.1

FIGURE 1.2



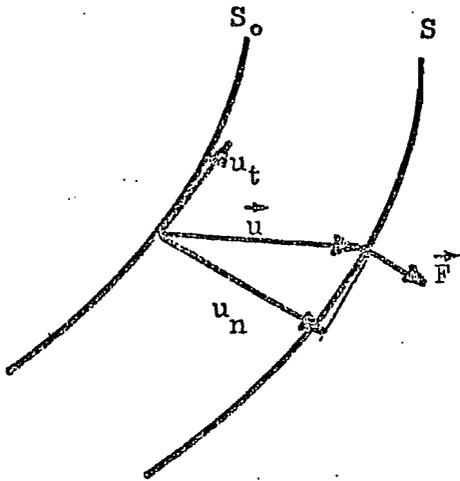
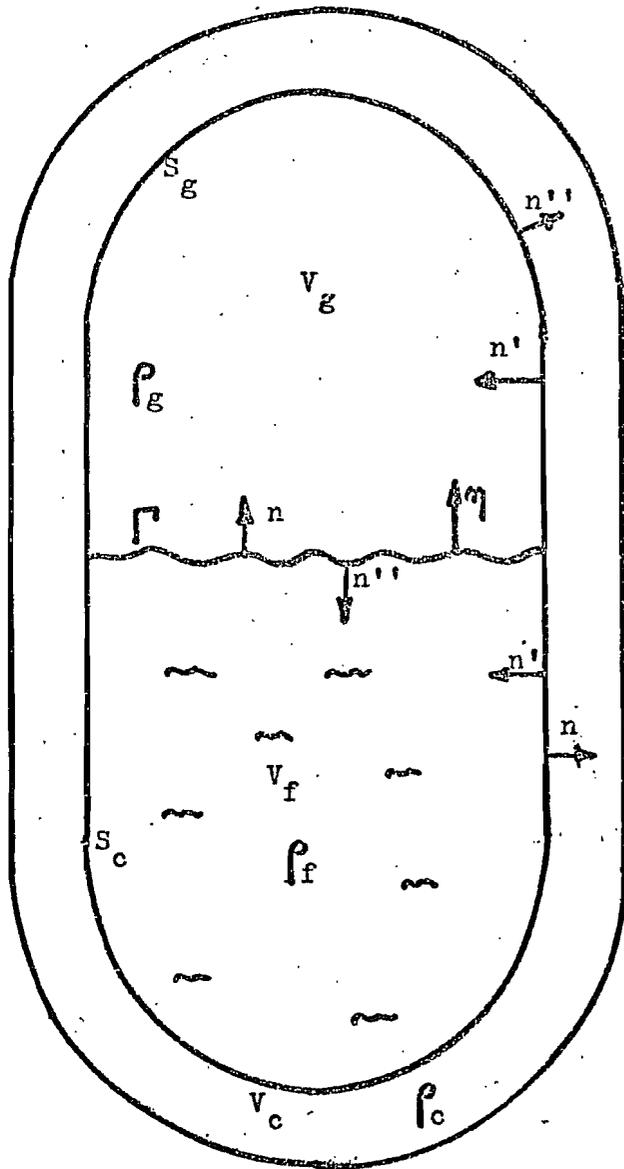


FIGURE 1.3

FIGURE 1.4



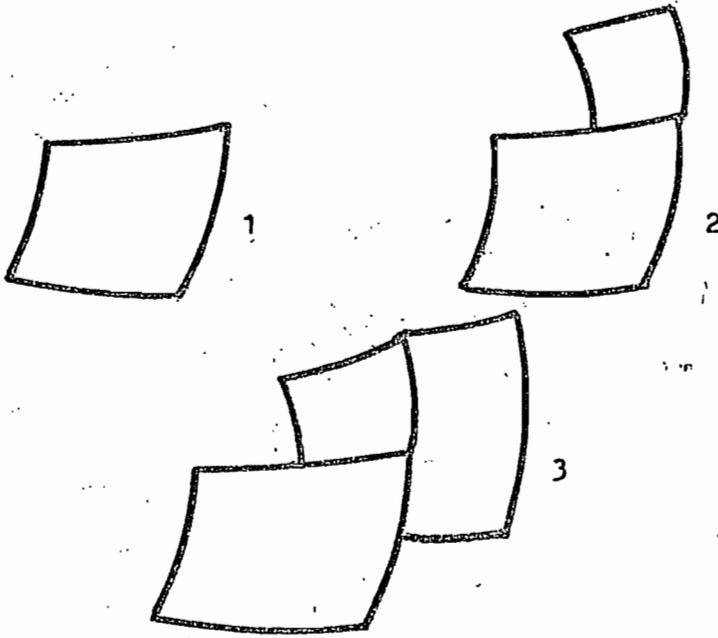


FIGURE 2.1  
SOUS-STRUCTURES  
EN SERIE

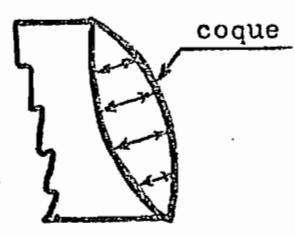
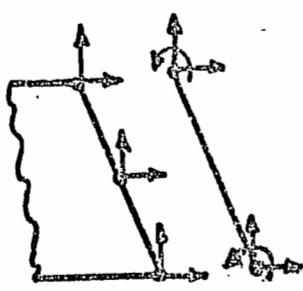


FIGURE 3.1 - BAILLEMENT D'UN ASSEMBLAGE FORME  
D'UN ELEMENT DE COQUE (KIRCHHOFF-LOVE)  
ET D'UN ELEMENT DE VOLUME

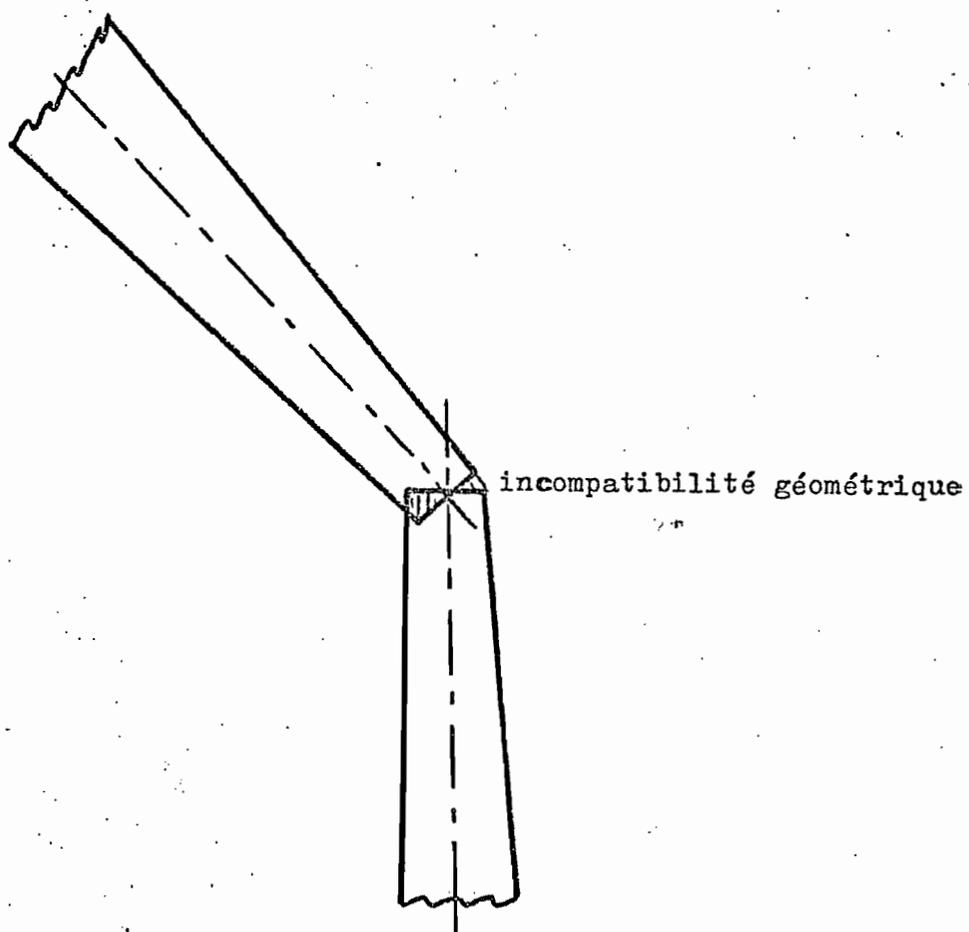


FIGURE 3.2

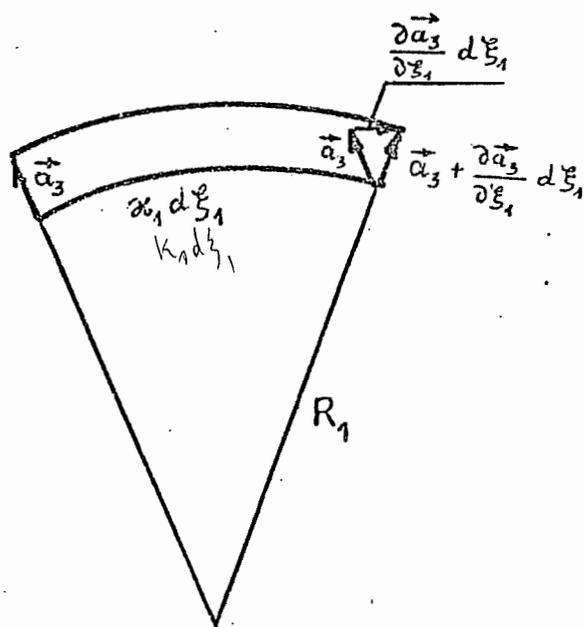


FIGURE 3.3

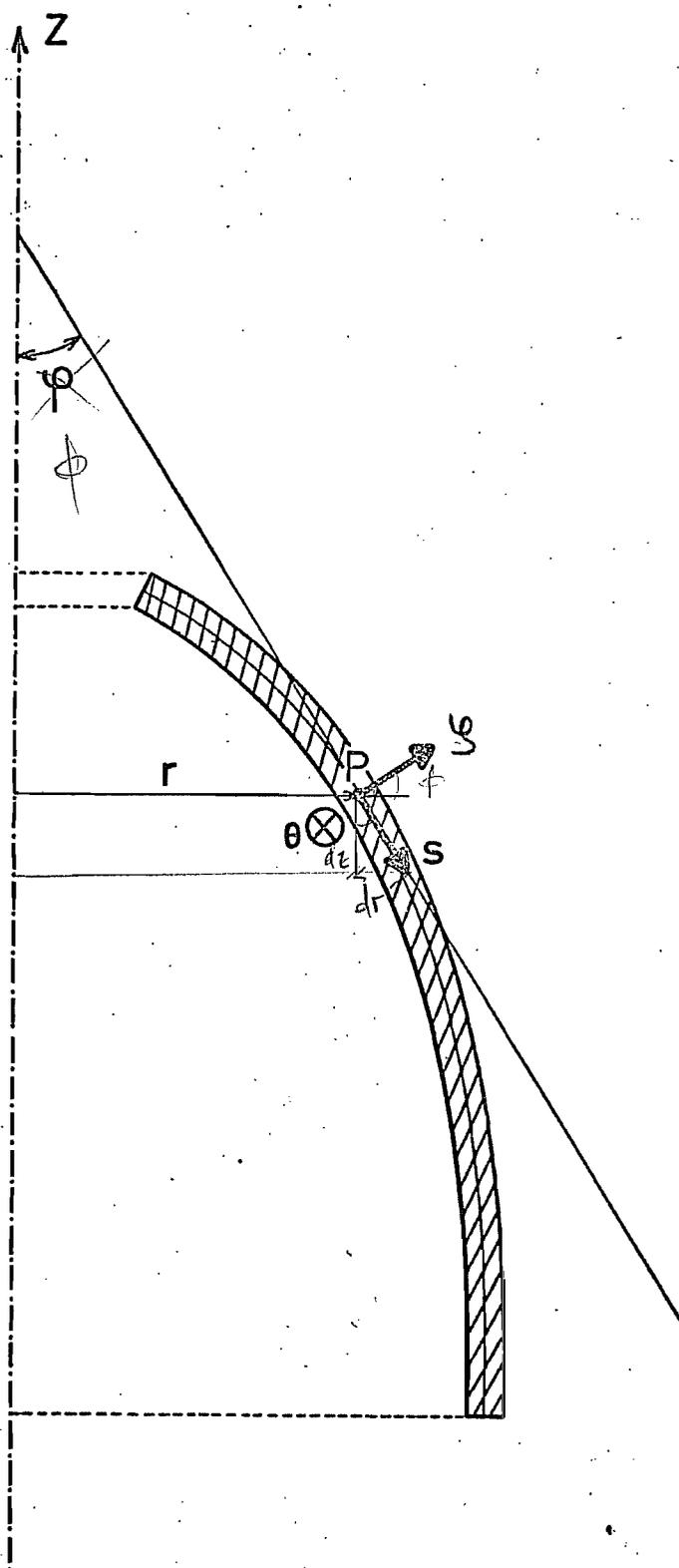


FIGURE 3.4

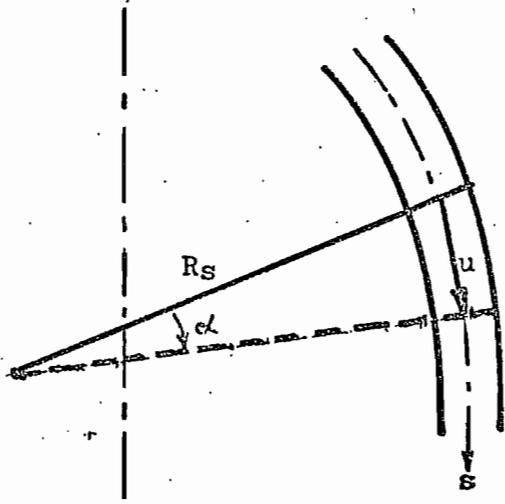


FIGURE 3.5

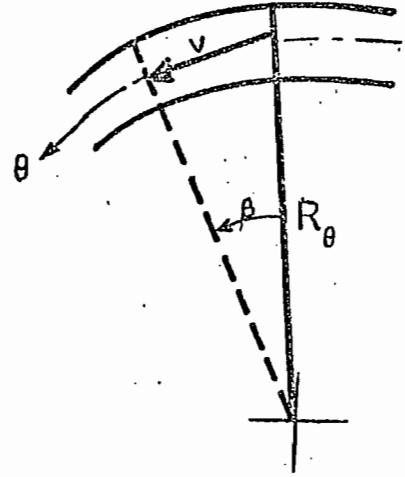


FIGURE 3.6

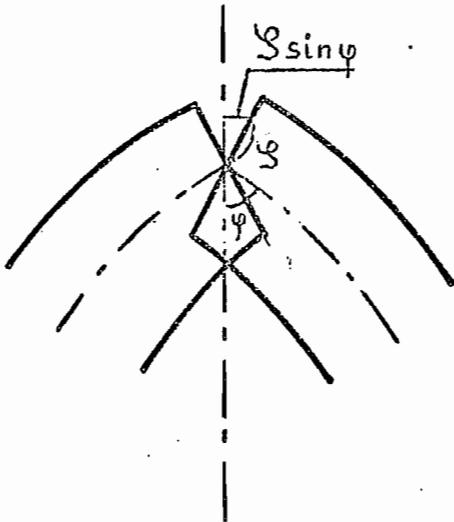


FIGURE 3.7

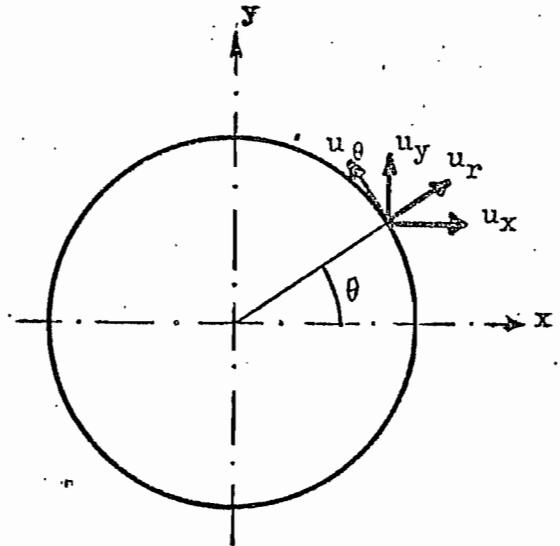


FIGURE 3.8

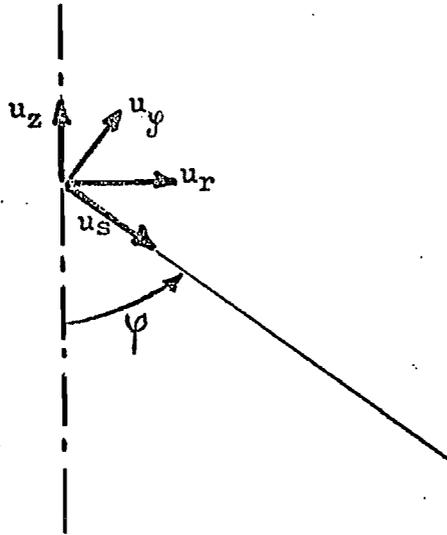


FIGURE 3.9

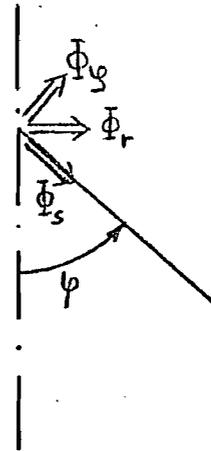


FIGURE 3.10

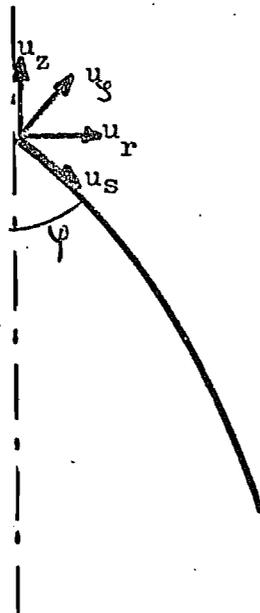


FIGURE 3.11

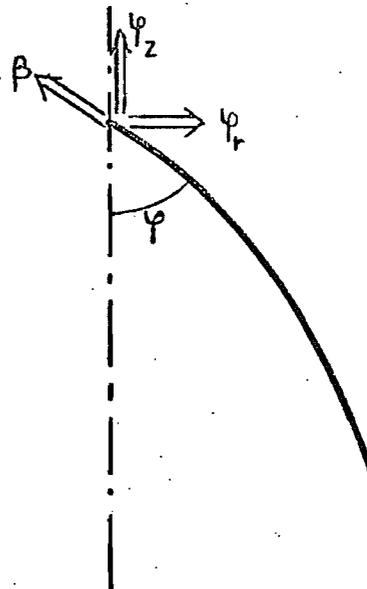


FIGURE 3.12

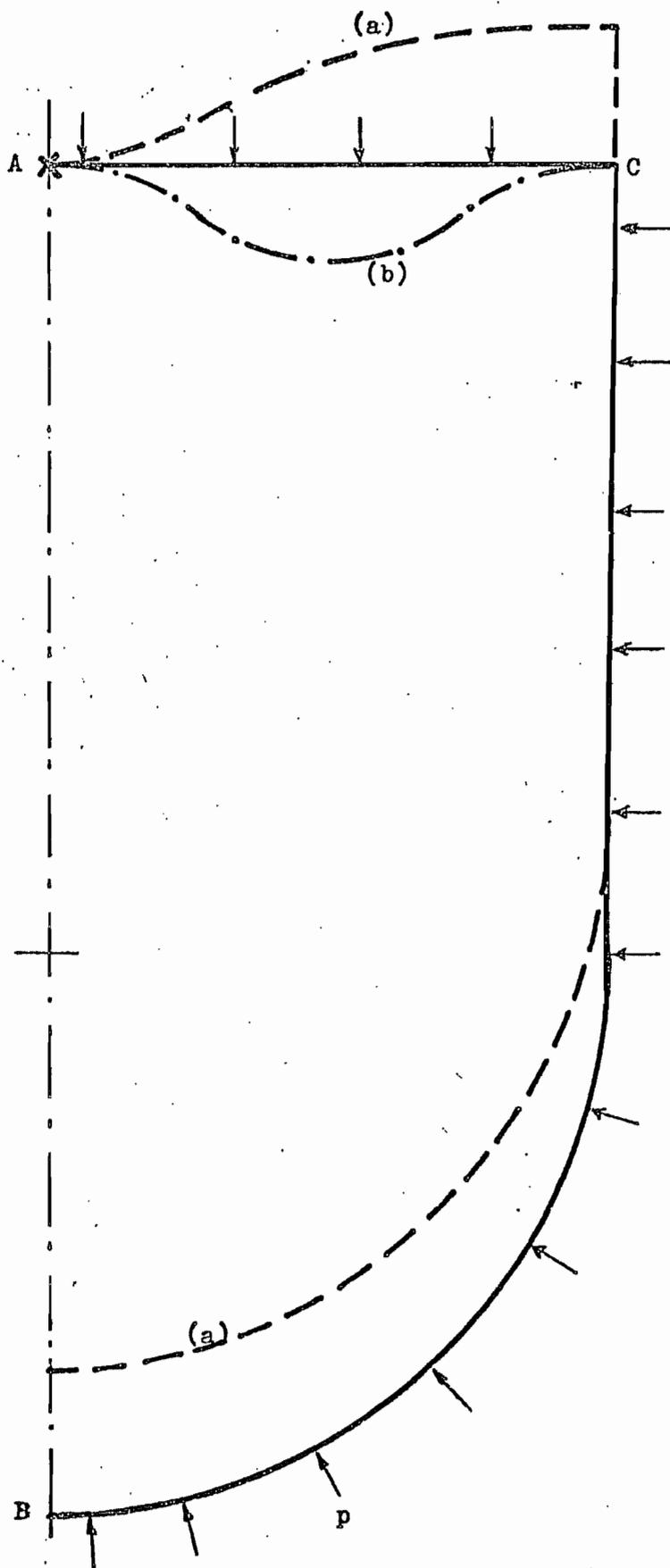


FIGURE 3.13

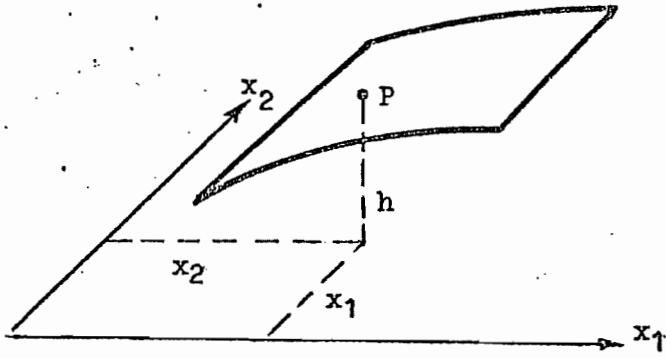


FIGURE 3.14

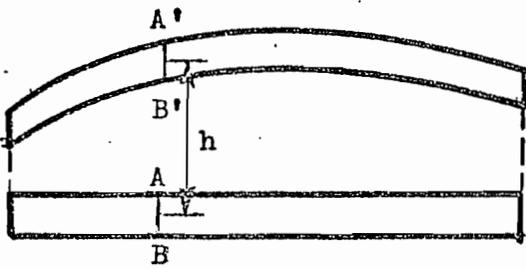
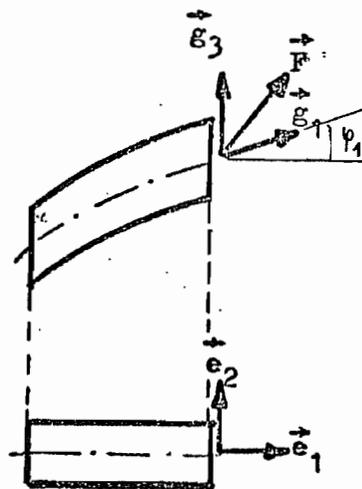


FIGURE 3.15

FIGURE 3.16



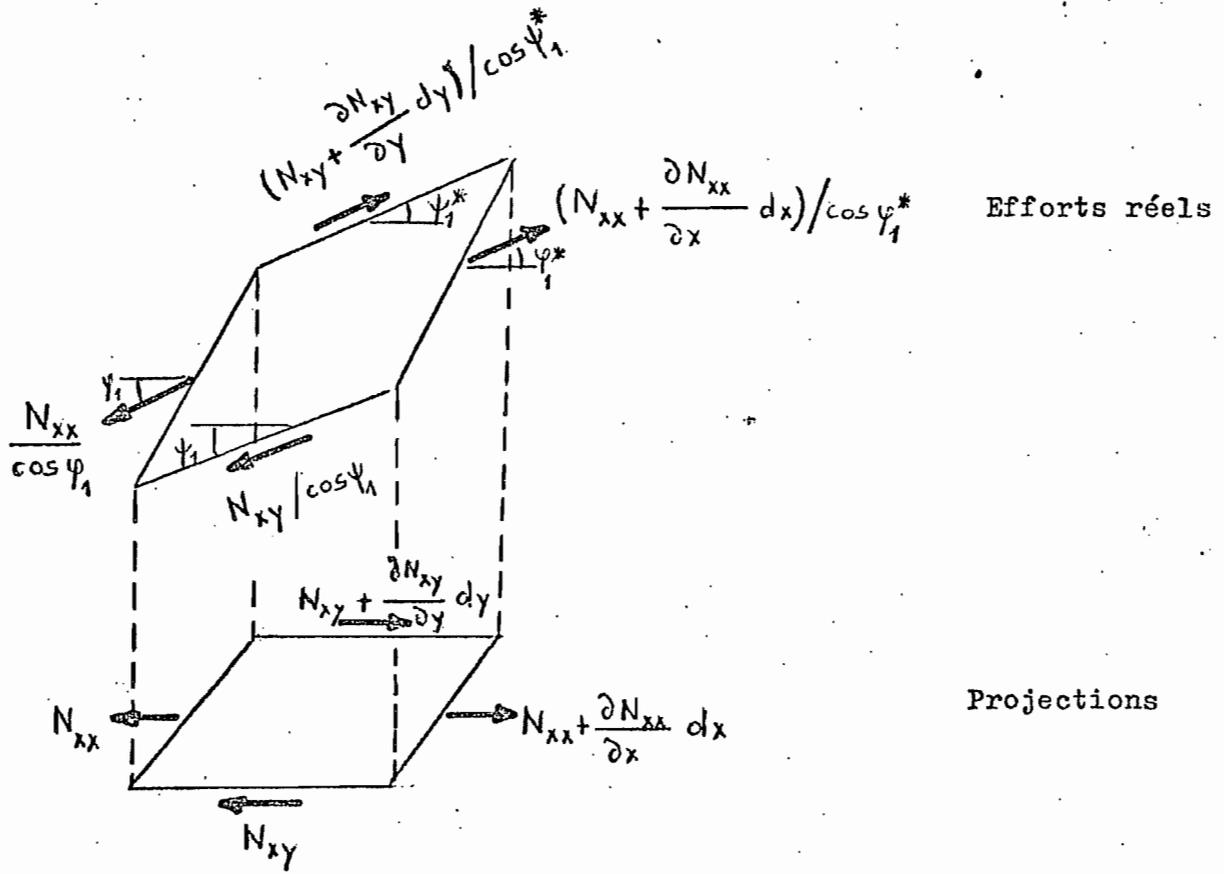


FIGURE 3.17

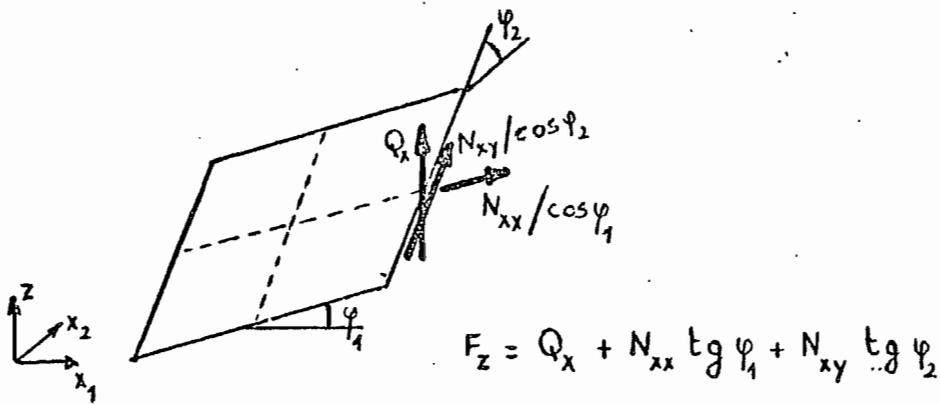


FIGURE 3.18

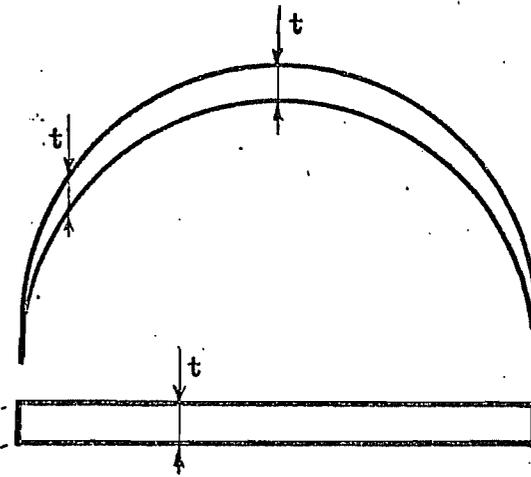


FIGURE 3.19

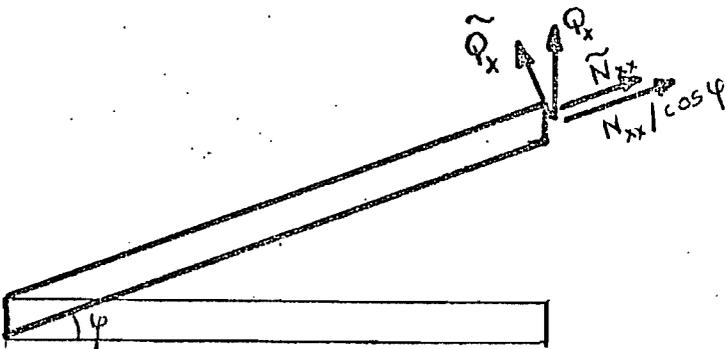
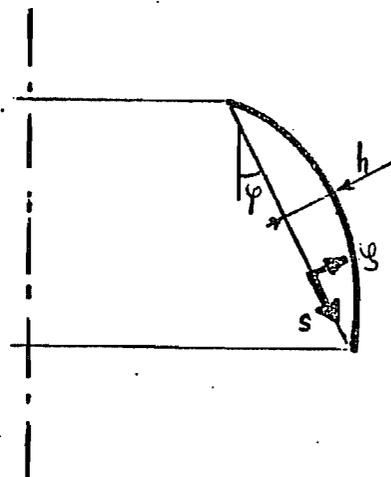


FIGURE 3.20

FIGURE 3.21



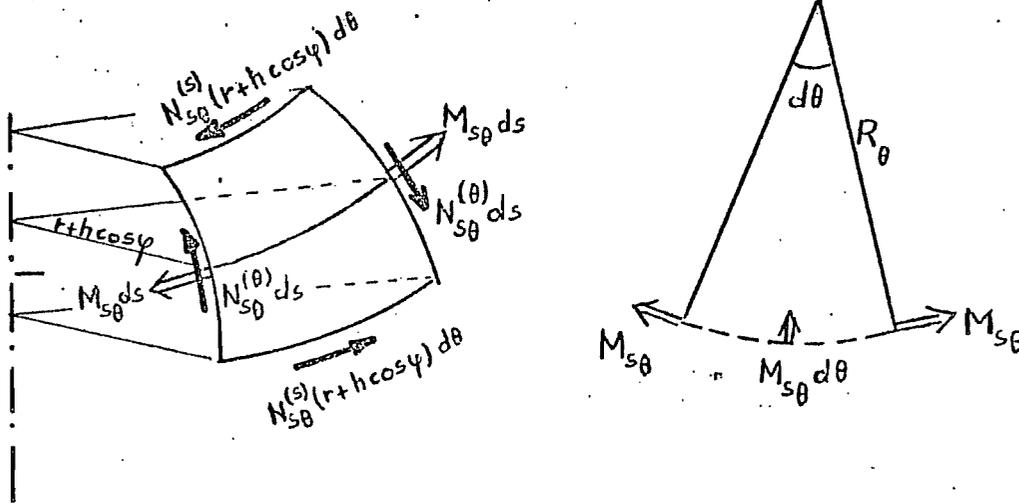


FIGURE 3.22

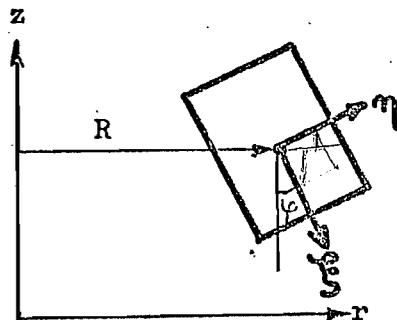


FIGURE 3.23

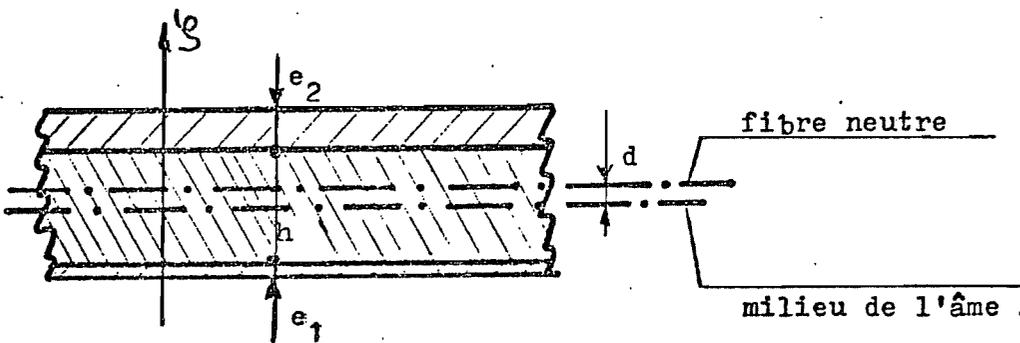


FIGURE 3.24

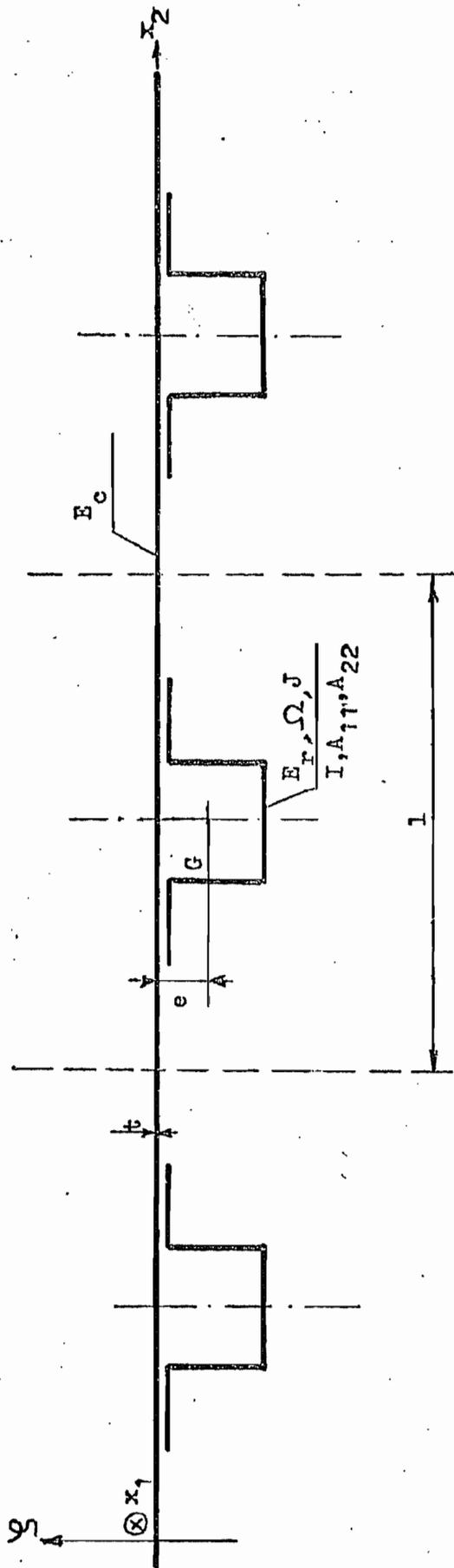


FIGURE 3.25

UNIVERSITÉ DE LIÈGE  
 Laboratoire d'Aéronautique  
 Rue du Val Benoît 75 - 4000 LIÈGE  
 BELGIQUE

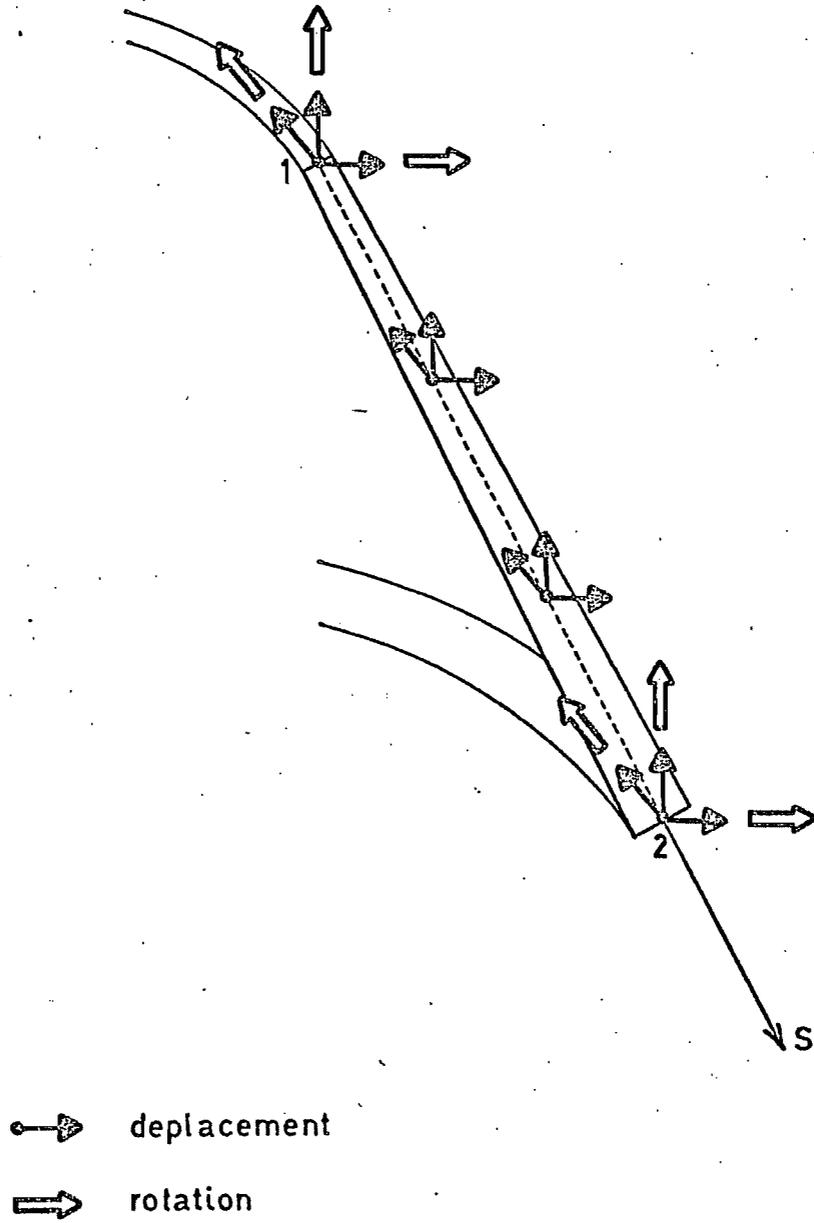


FIGURE 4.1

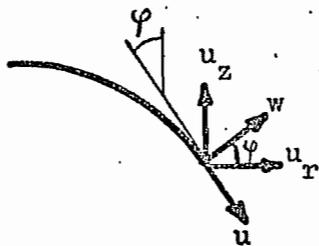


FIGURE 4.2



FIGURE 4.3

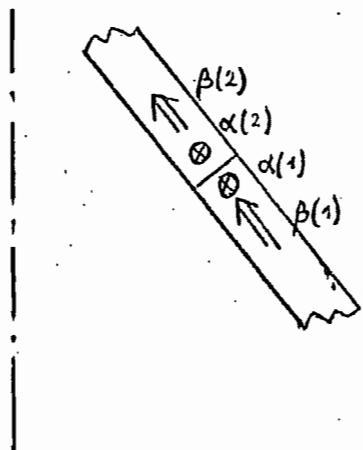


FIGURE 4.4

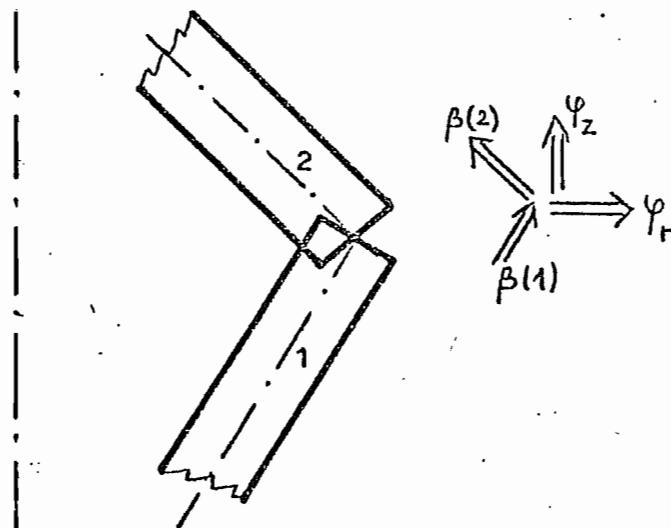


FIGURE 4.5

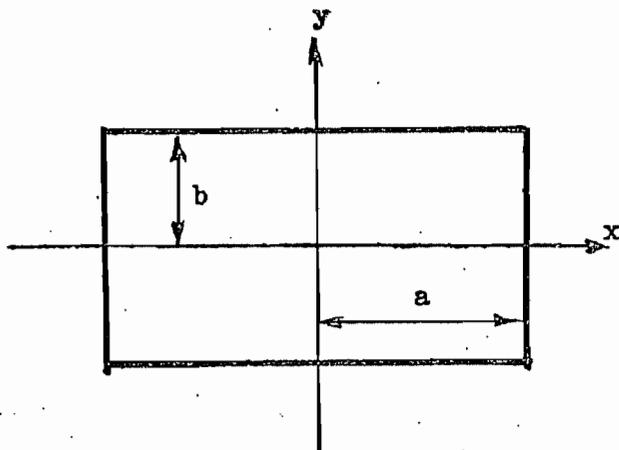


FIGURE 4.6

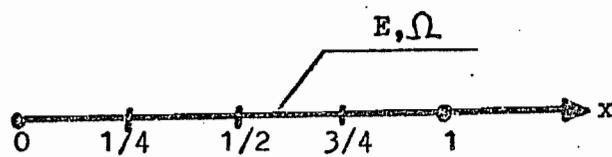
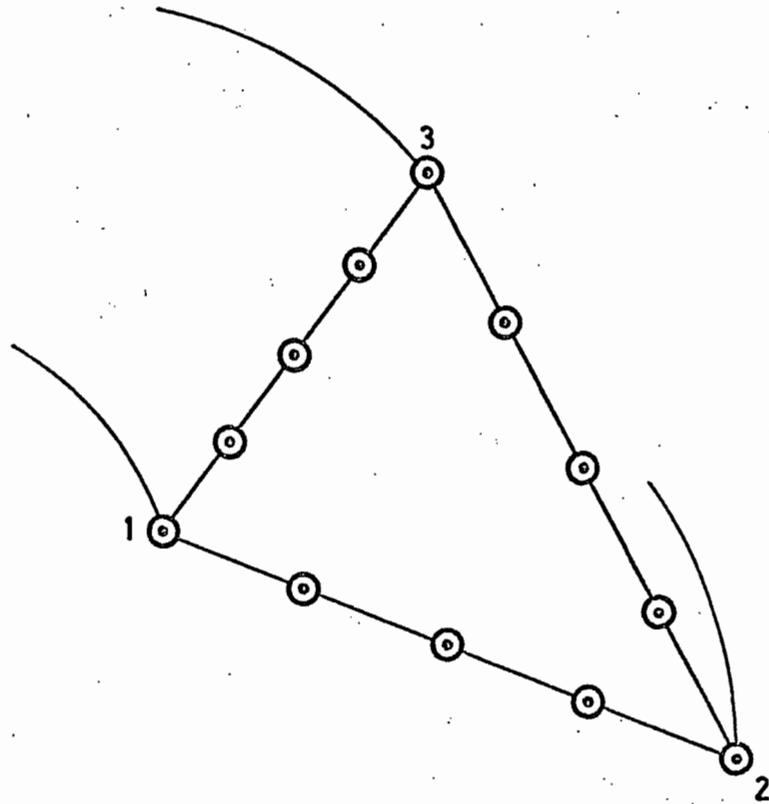


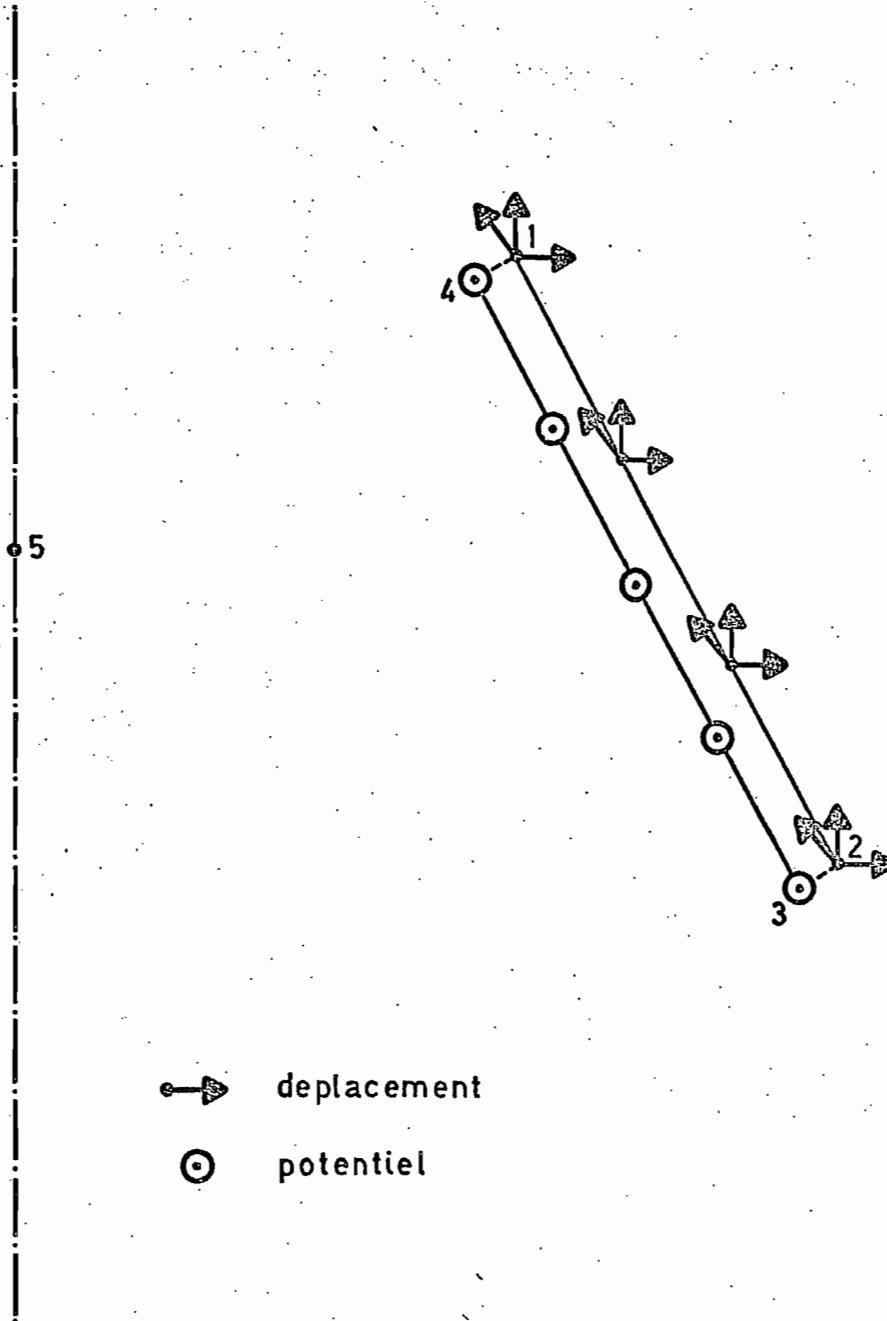
FIGURE 4.7



⊙ potentiel

ÉLÉMENT DE VOLUME DE FLUIDE  
(REPRÉSENTÉ AU DEGRÉ 4)

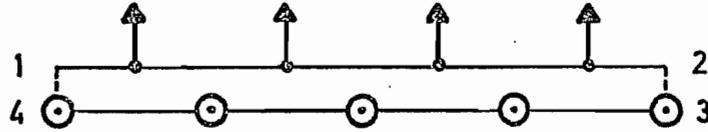
FIGURE 4.8



ELEMENT DE COUPLAGE FLUIDE-STRUCTURE  
( EFFECTIVEMENT SANS EPAISSEUR )

degré de fluide 4  
degré de structure 3

FIGURE 4.9



⊙ potentiel

↑ déplacement de surface libre

ELEMENT DE COUPLAGE FLUIDE - SURFACE LIBRE  
( EFFECTIVEMENT SANS EPAISSEUR )

fluide de degré 4  
surface libre de degré 3

FIGURE 4.10

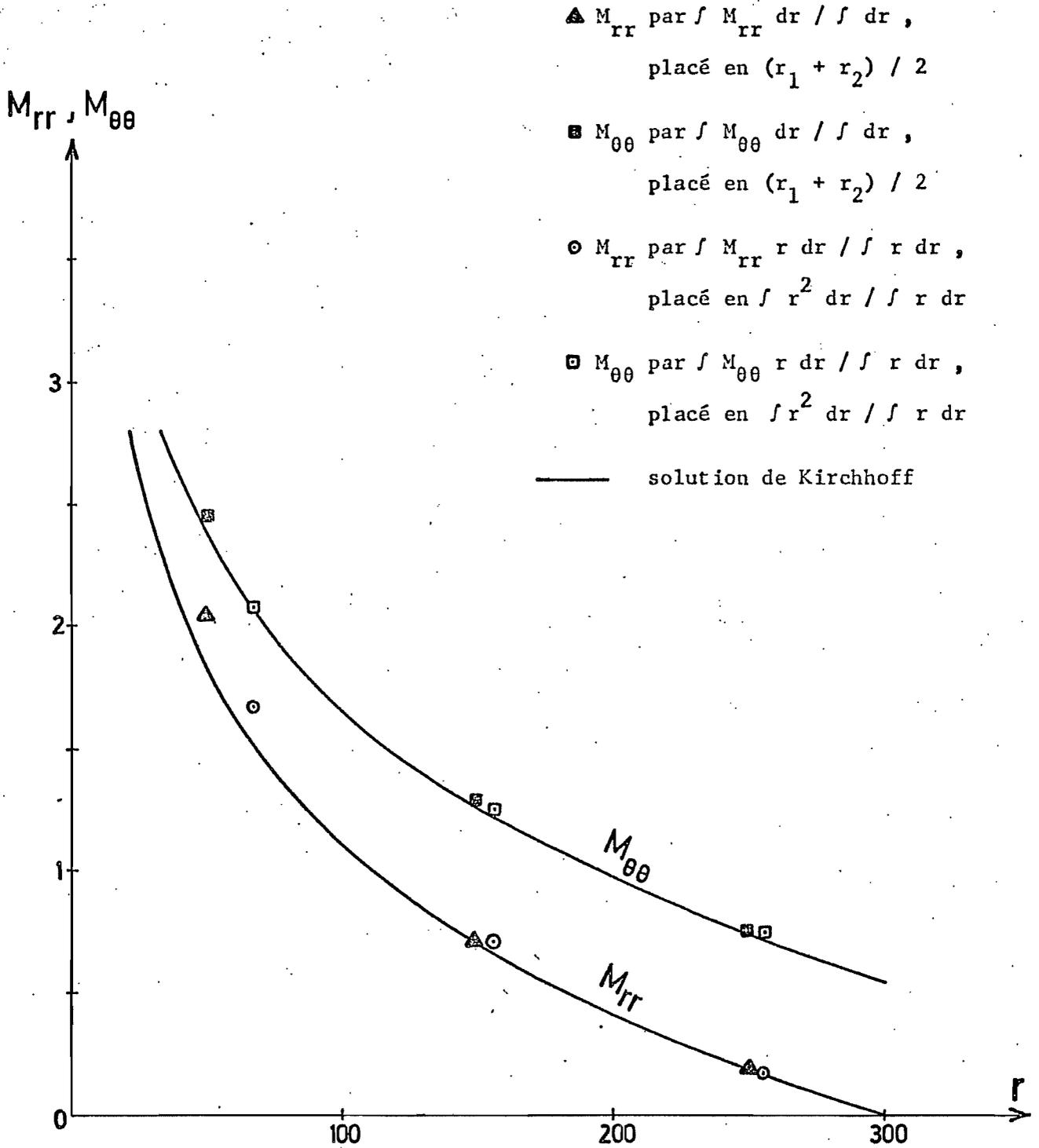


FIGURE 4.11

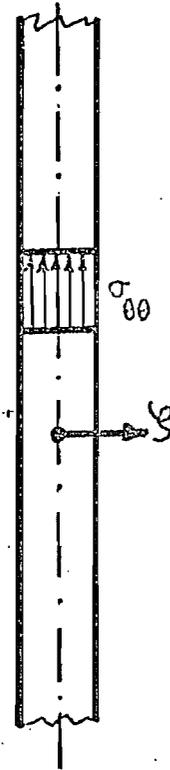


FIGURE 4.12

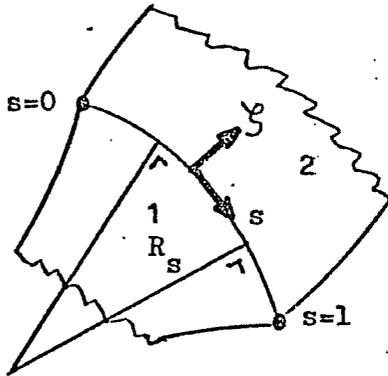


FIGURE 4.13

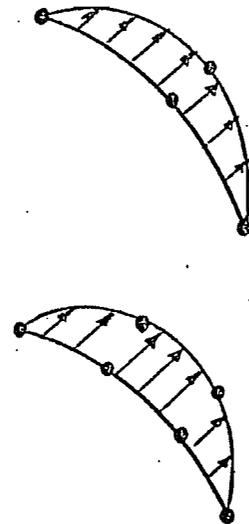


FIGURE 4.14

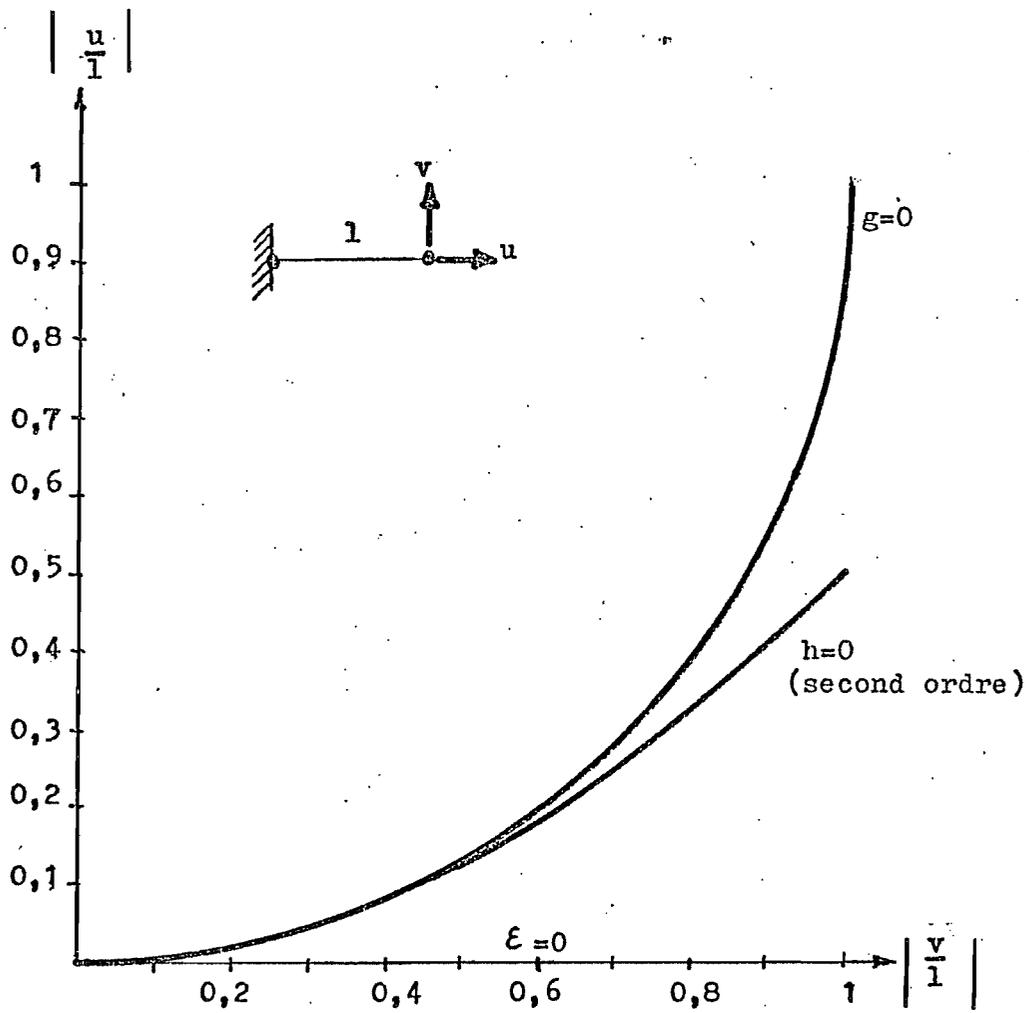


FIGURE 5.1

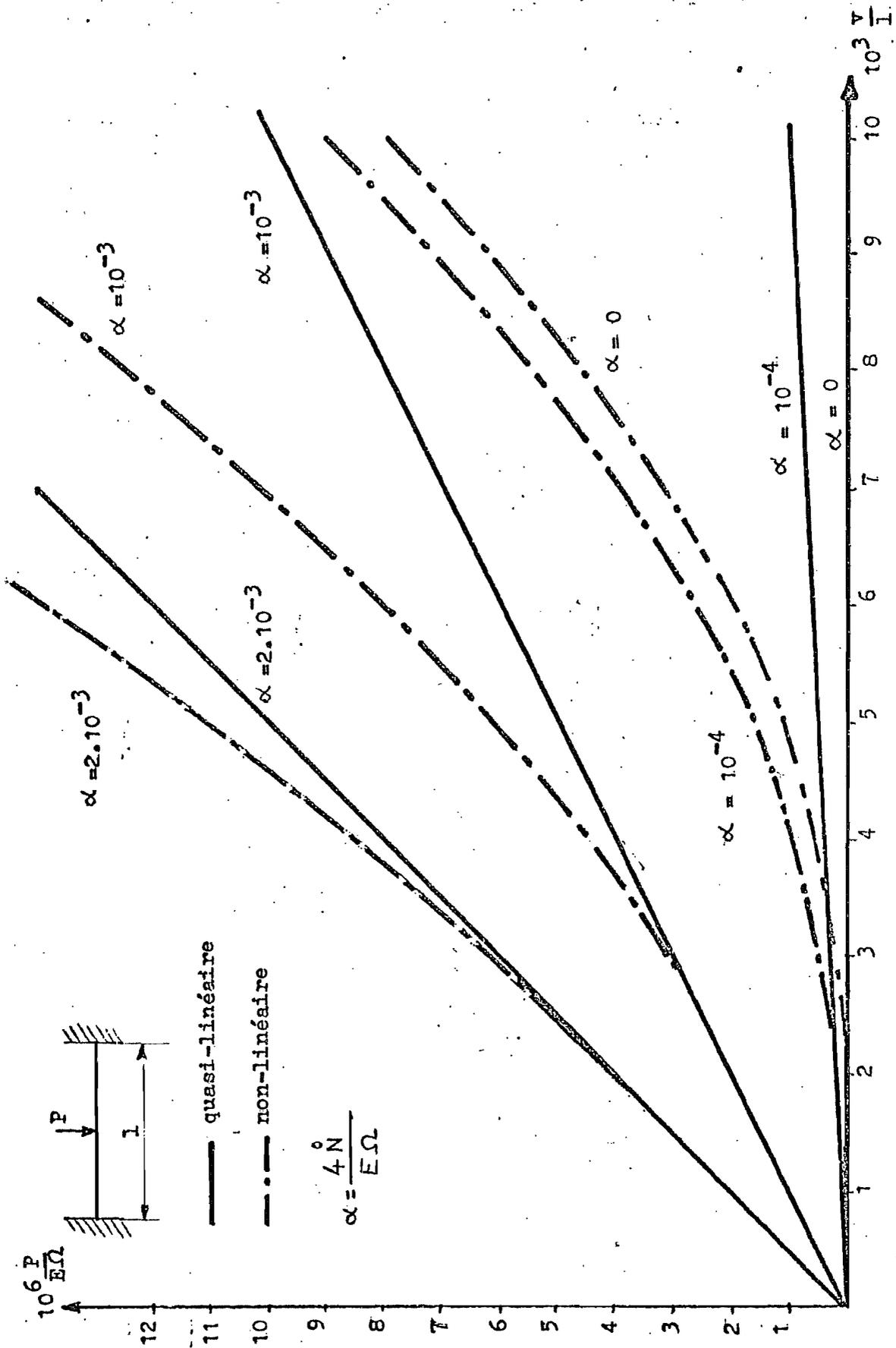
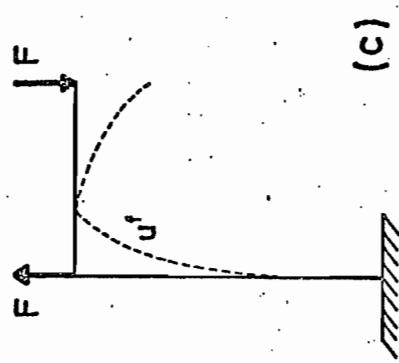
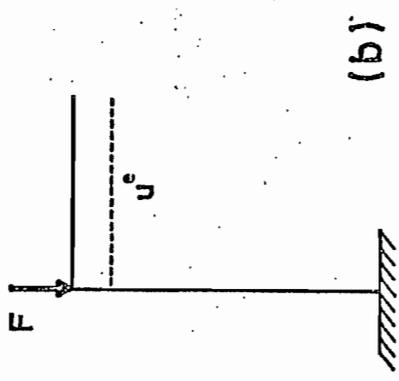


FIGURE 5.2



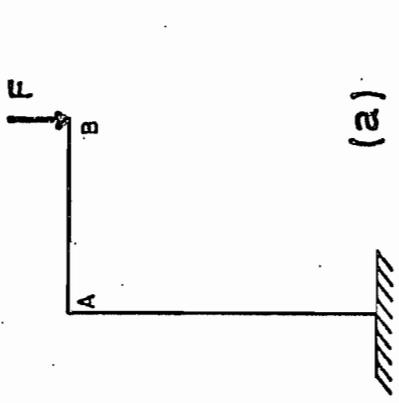
(a)

CHARGE TOTALE



(b)

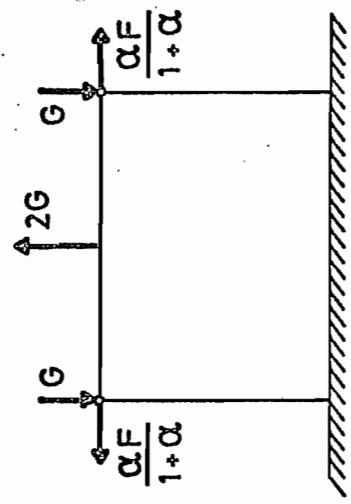
CHARGE D'EXTENSION



(c)

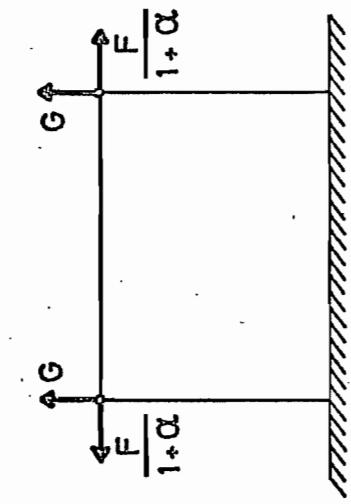
CHARGE DE FLEXION

FIGURE 5.3



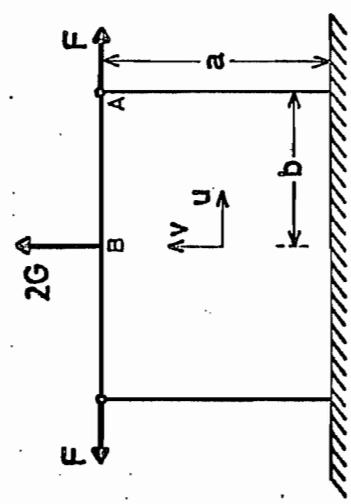
CHARGE TOTALE

(a)



CHARGE D'EXTENSION

(b)



CHARGE DE FLEXION

(c)

FIGURE 5.4

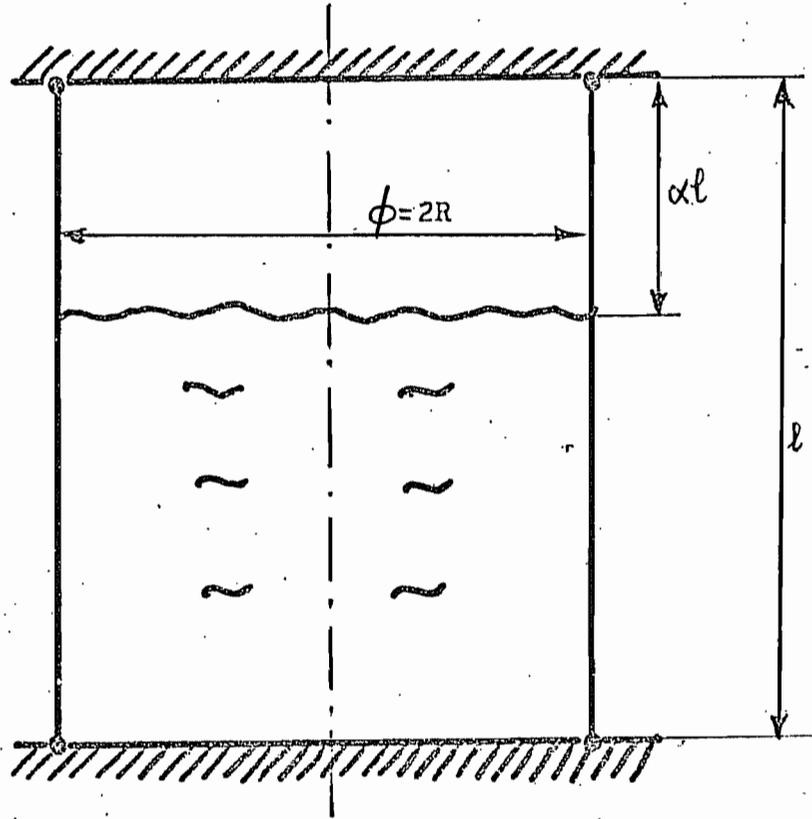


FIGURE 5.5

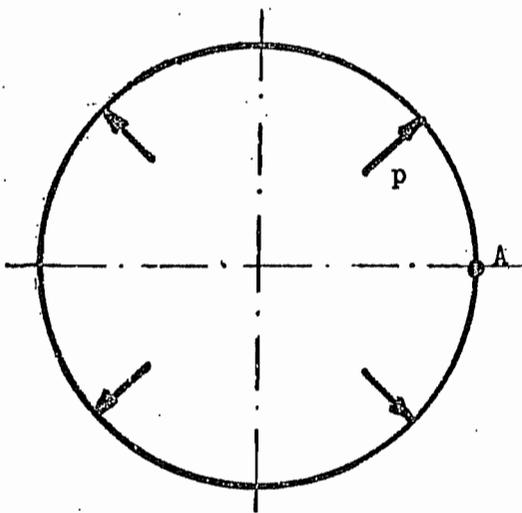


FIGURE 5.6

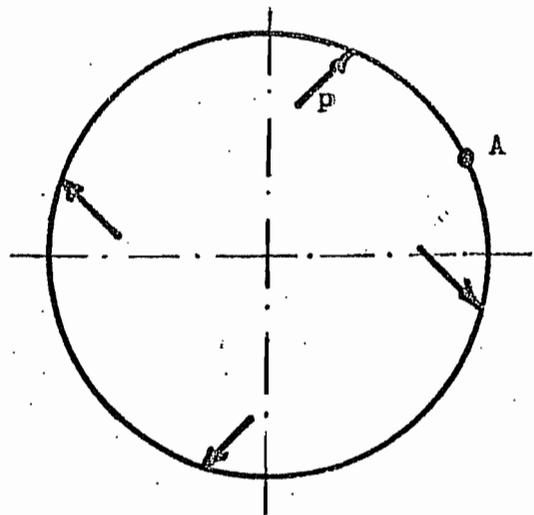


FIGURE 5.7

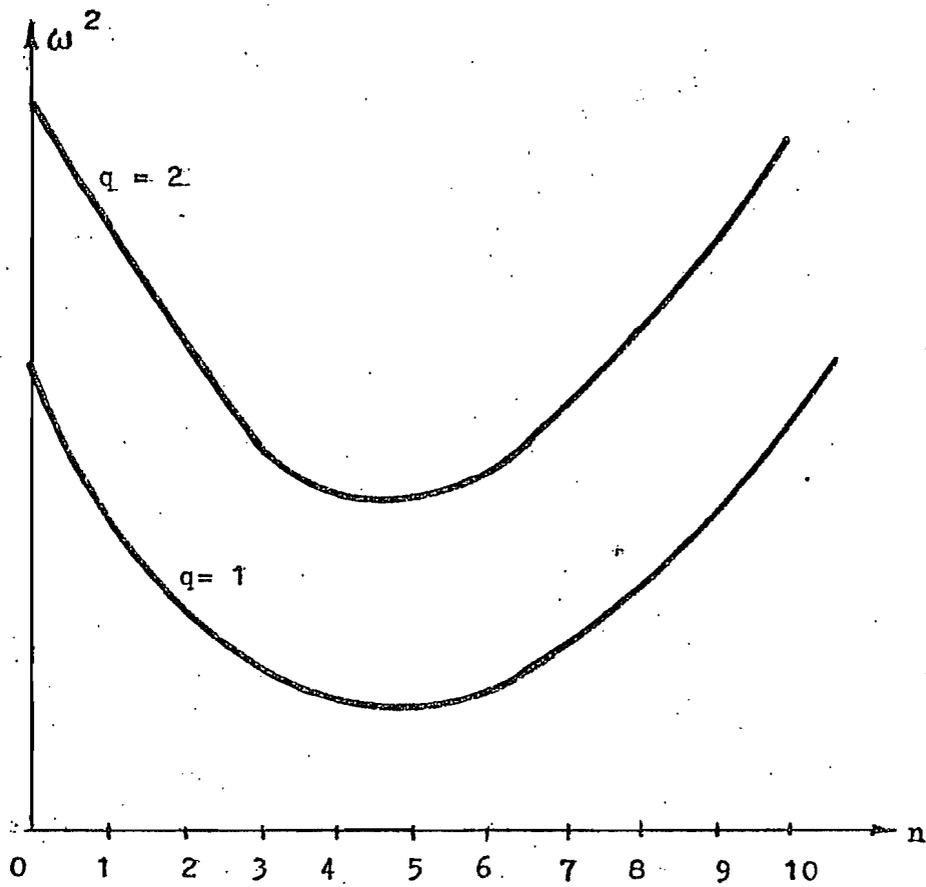


FIGURE 6.1.1

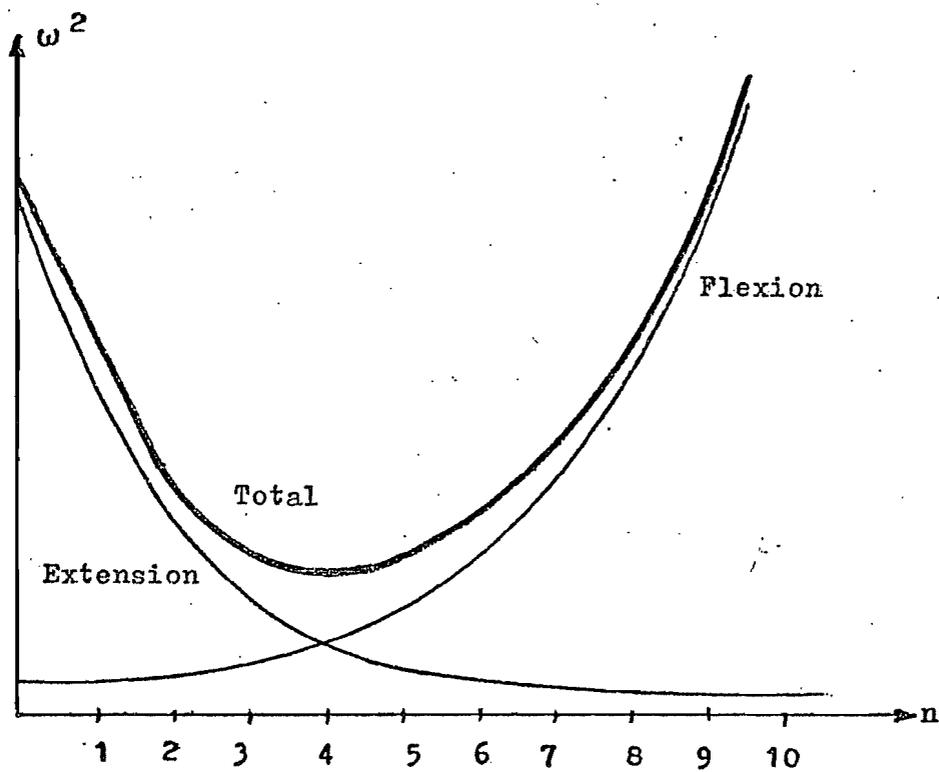
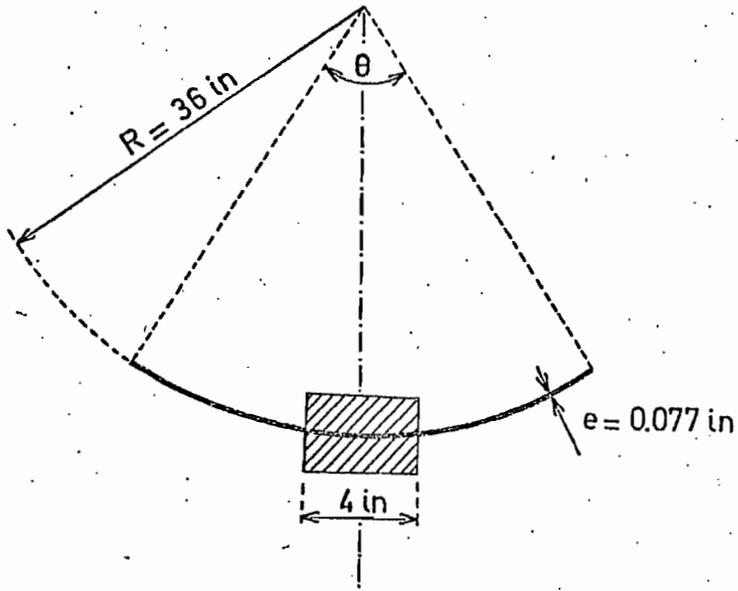


FIGURE 6.1.2



$E = 10^7 \text{ lb/in}^2$   
 $\nu = 0.3$   
 $P = 0.101 \text{ lb/in}^3$   
 $R \times \theta = 24 \text{ in}$

FIGURE 6.2.1

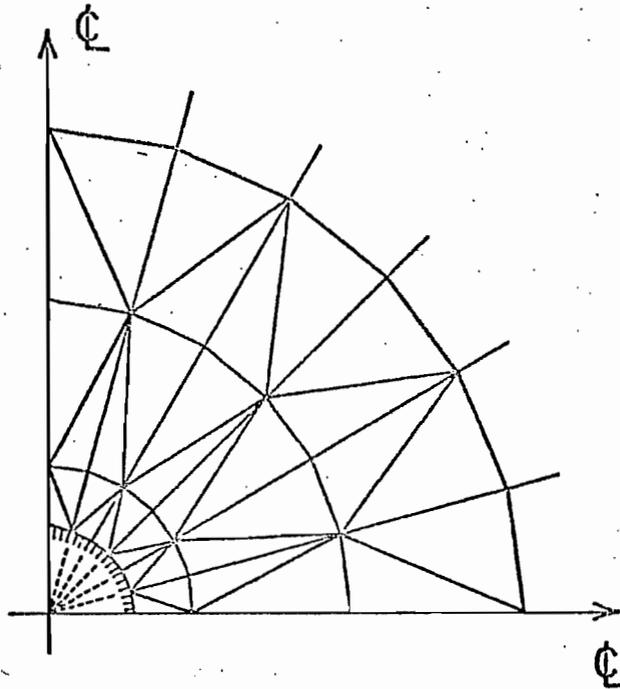
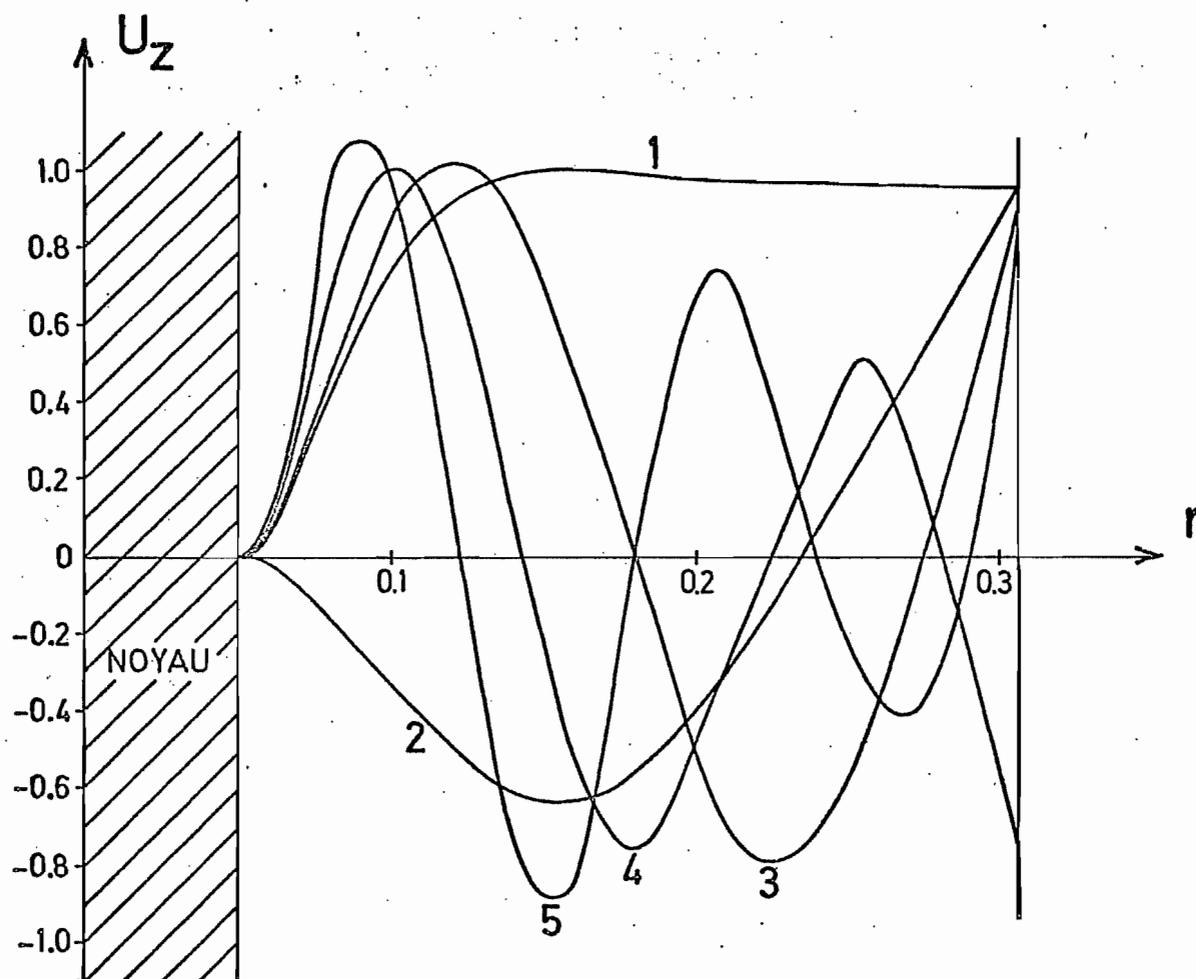


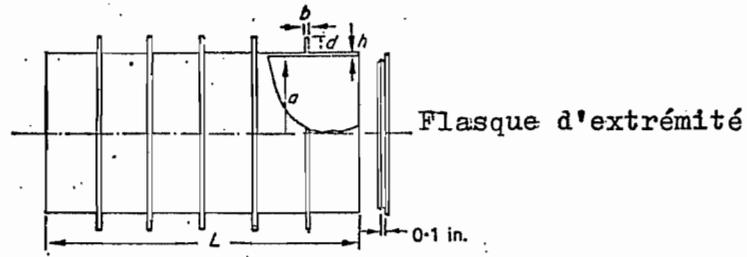
FIGURE 6.3



MODE N°	FREQUENCE PROPRE (Hz)
1	258.8
2	866.4
3	951.9
4	1187.4
5	1616.5

ANTENNE SPHERIQUE - MODES  $n=0$

FIGURE 6.2.2

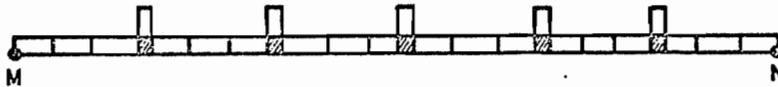


## CYLINDRE RAIDI

$$a = 4,25 \text{ in} , L = 18,2 \text{ in} , b = 0,25 \text{ in} , d = 0,25 \text{ in}$$

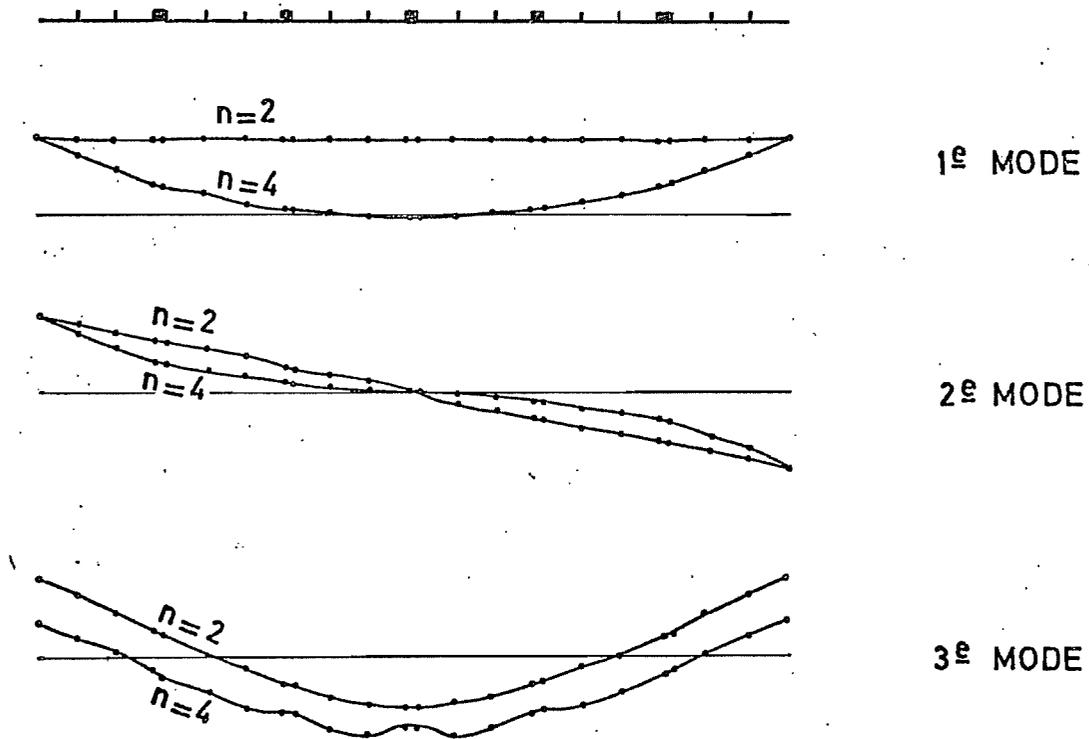
$$E = 2,96 \cdot 10^7 , \nu = 0,29 , \rho = 0,73299 \cdot 10^{-3}$$

FIGURE 6.4



## IDEALISATION DU CYLINDRE RAIDI

FIGURE 6.5



3 PREMIERS MODES DE VIBRATION DU CYLINDRE  
RAIDI DANS LES CAS  $n=2$  ET  $n=4$  ( $ND=2$ )

FIGURE 6.6

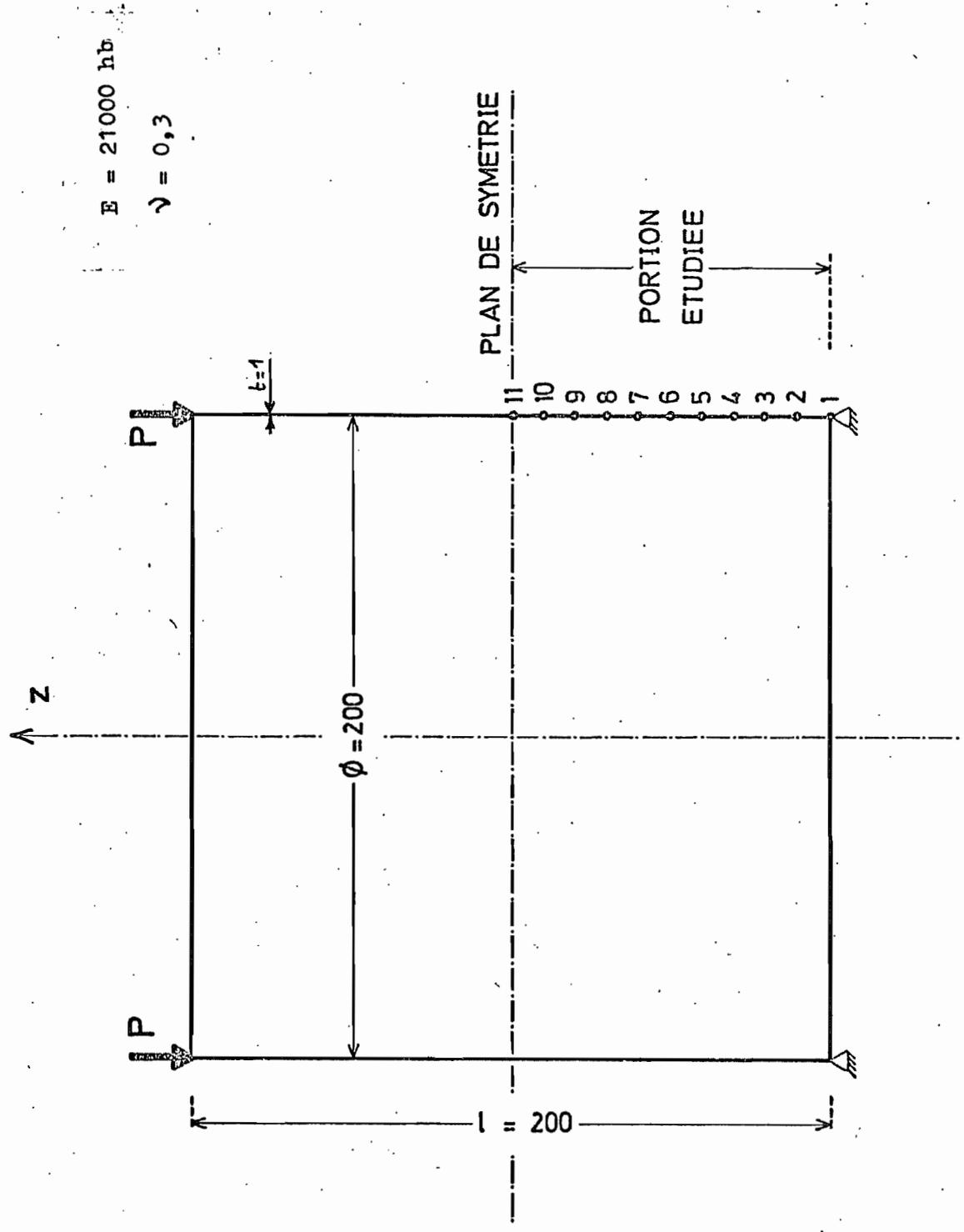
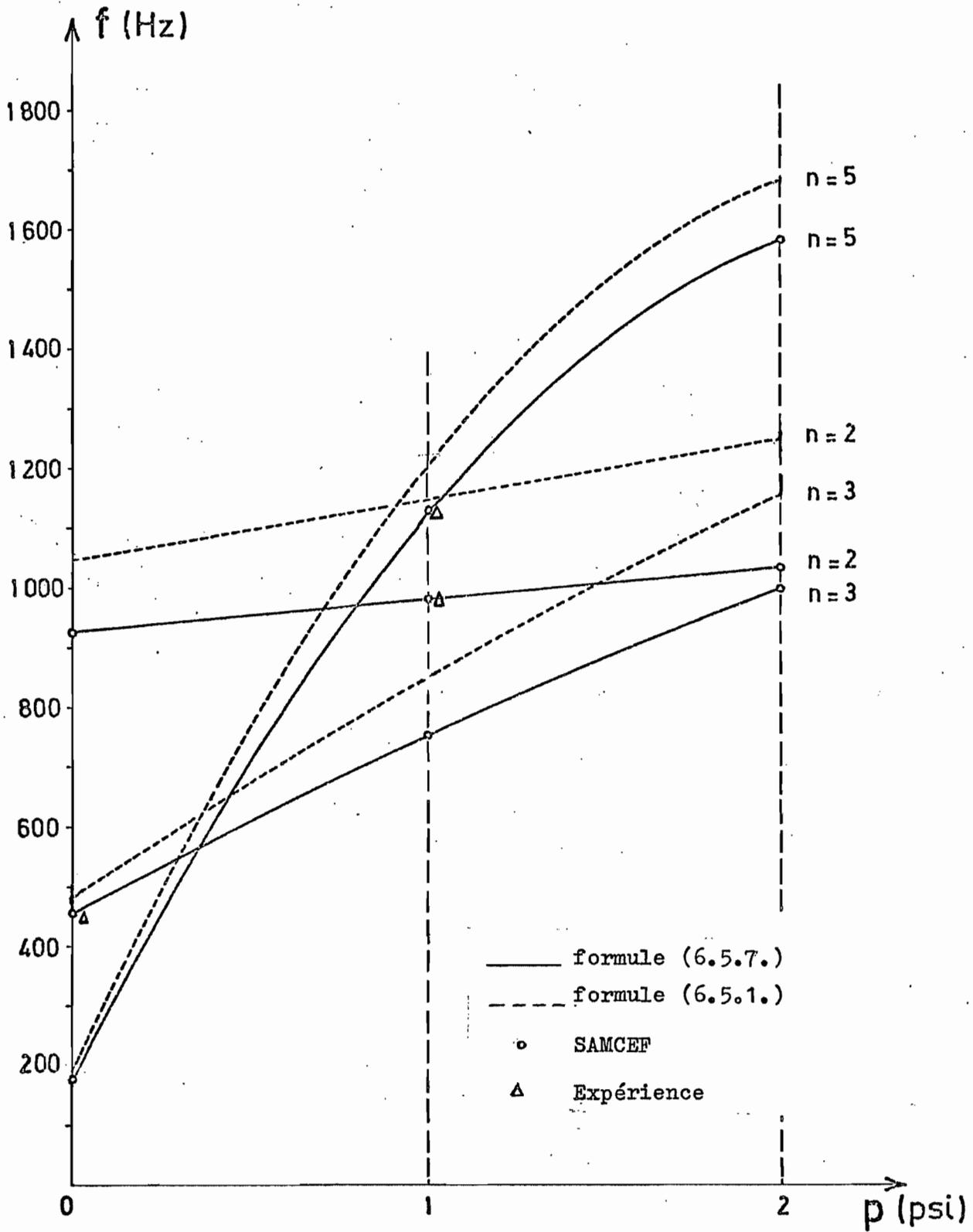


FIGURE 6.7



CYLINDRE SOUS PRESSION  $q = 1$

FIGURE 6.8.1

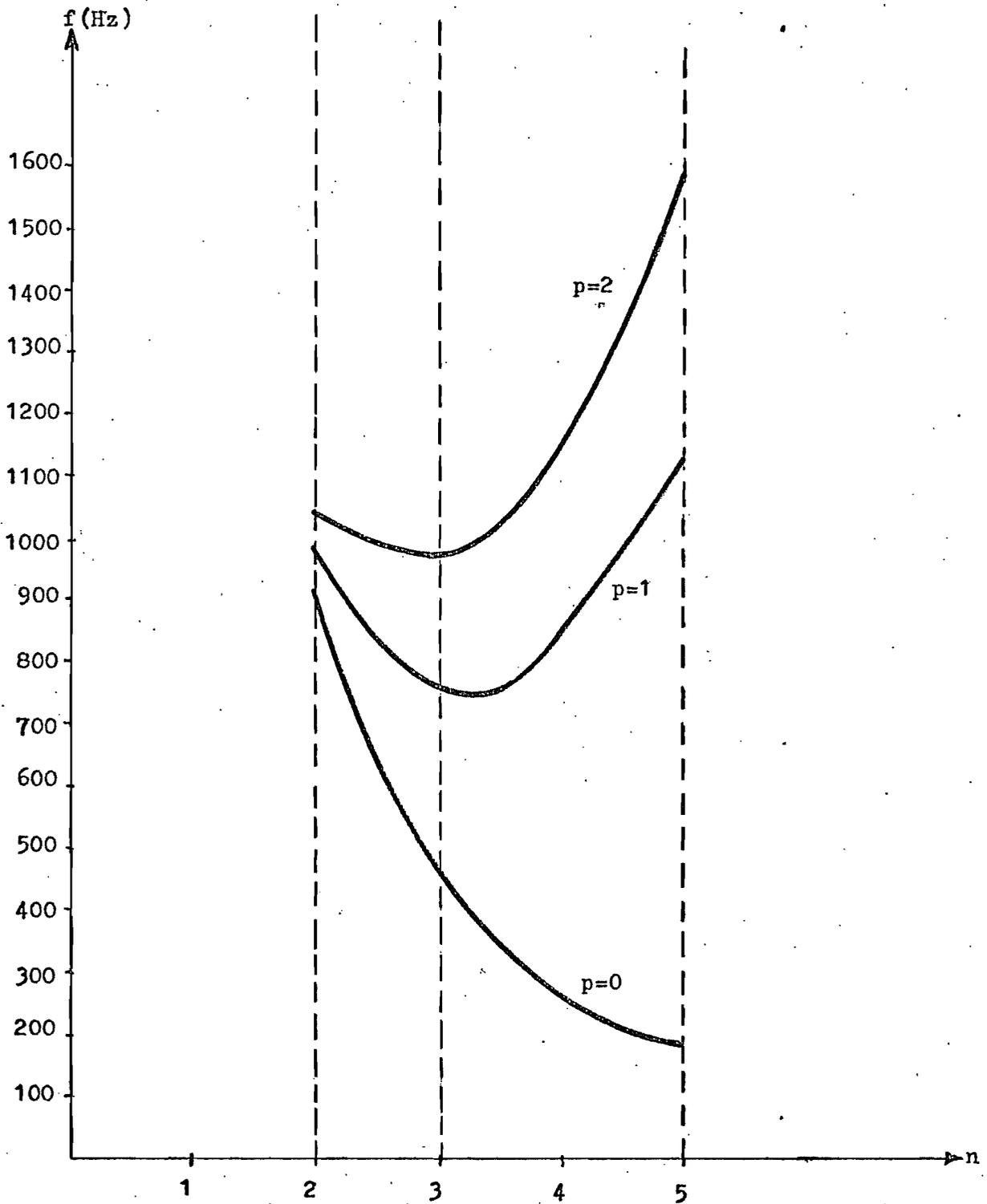


FIGURE 6.8.2

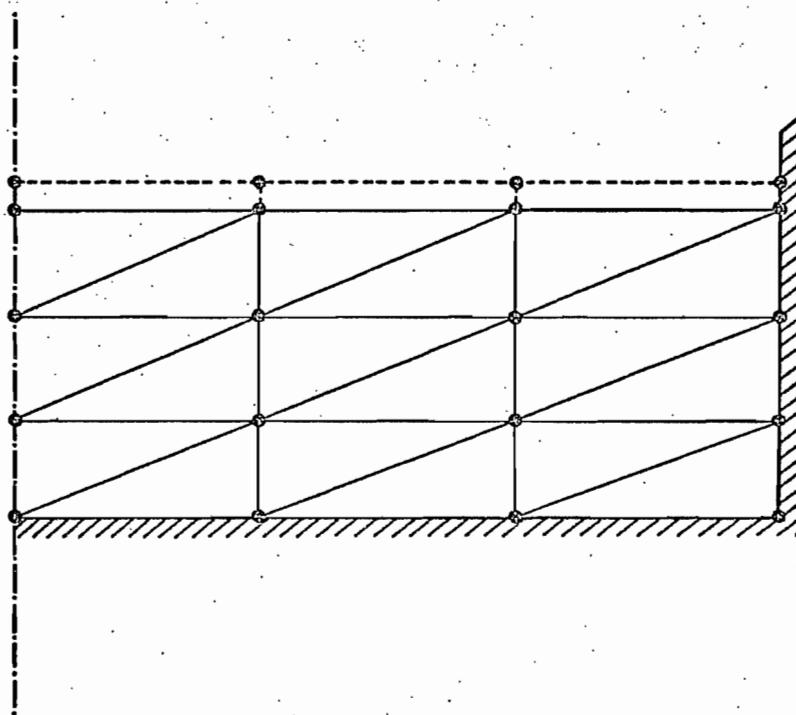


FIGURE 6.9

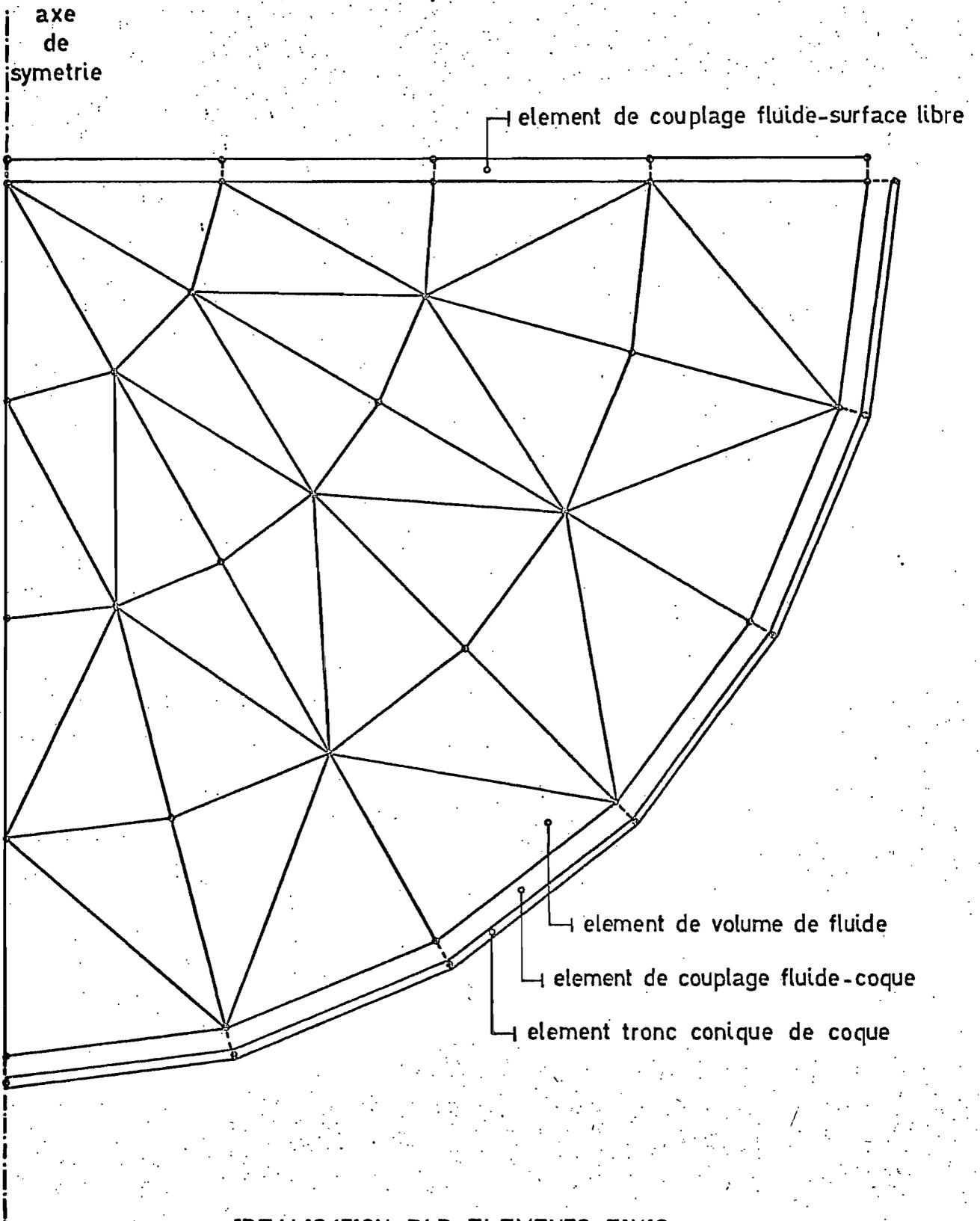
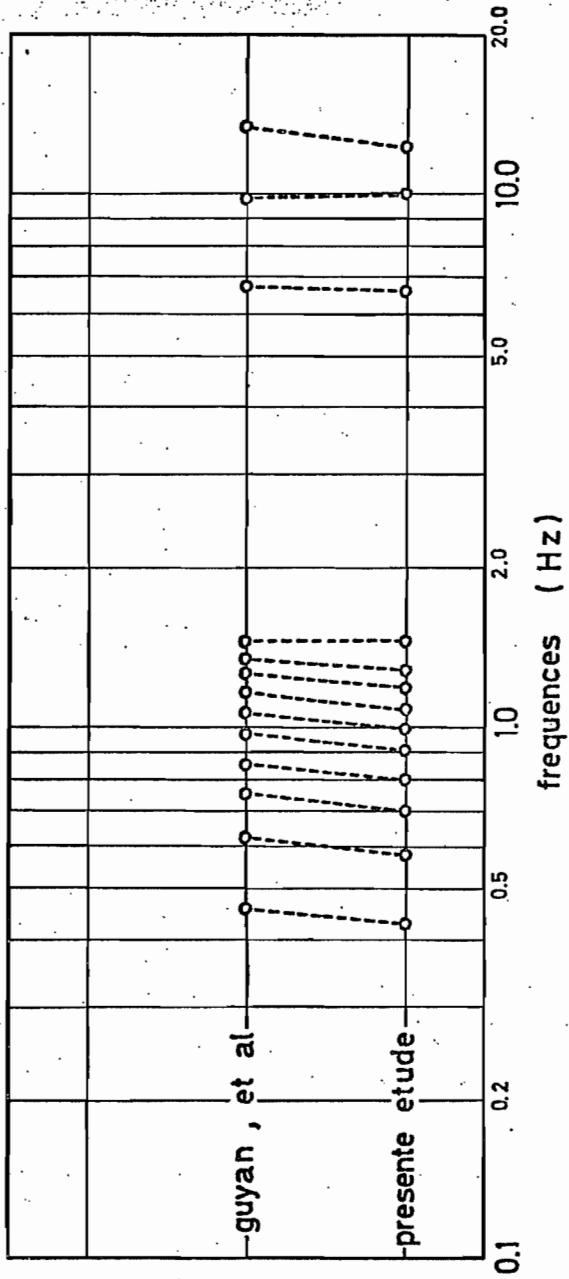
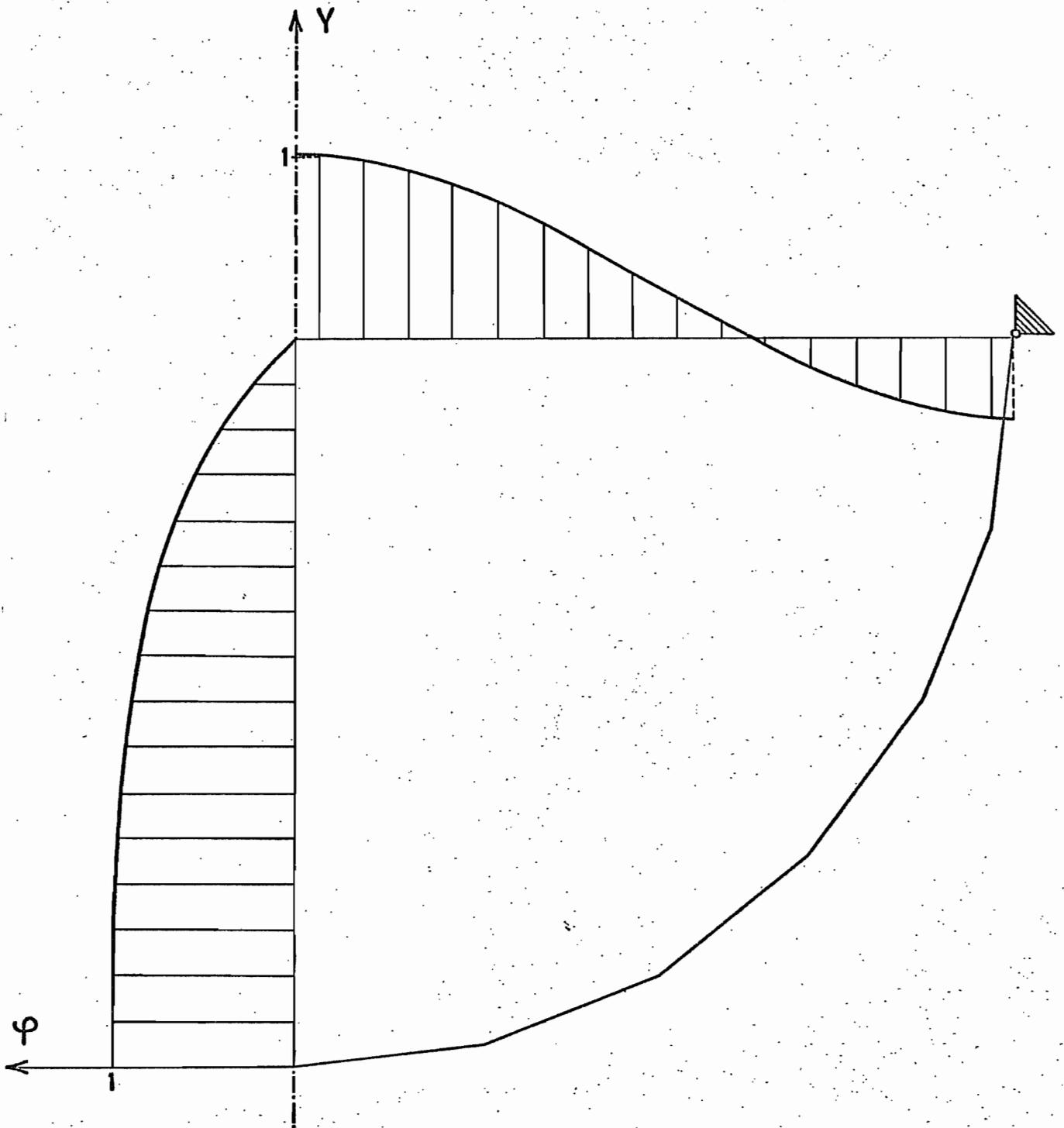


FIGURE 6.10



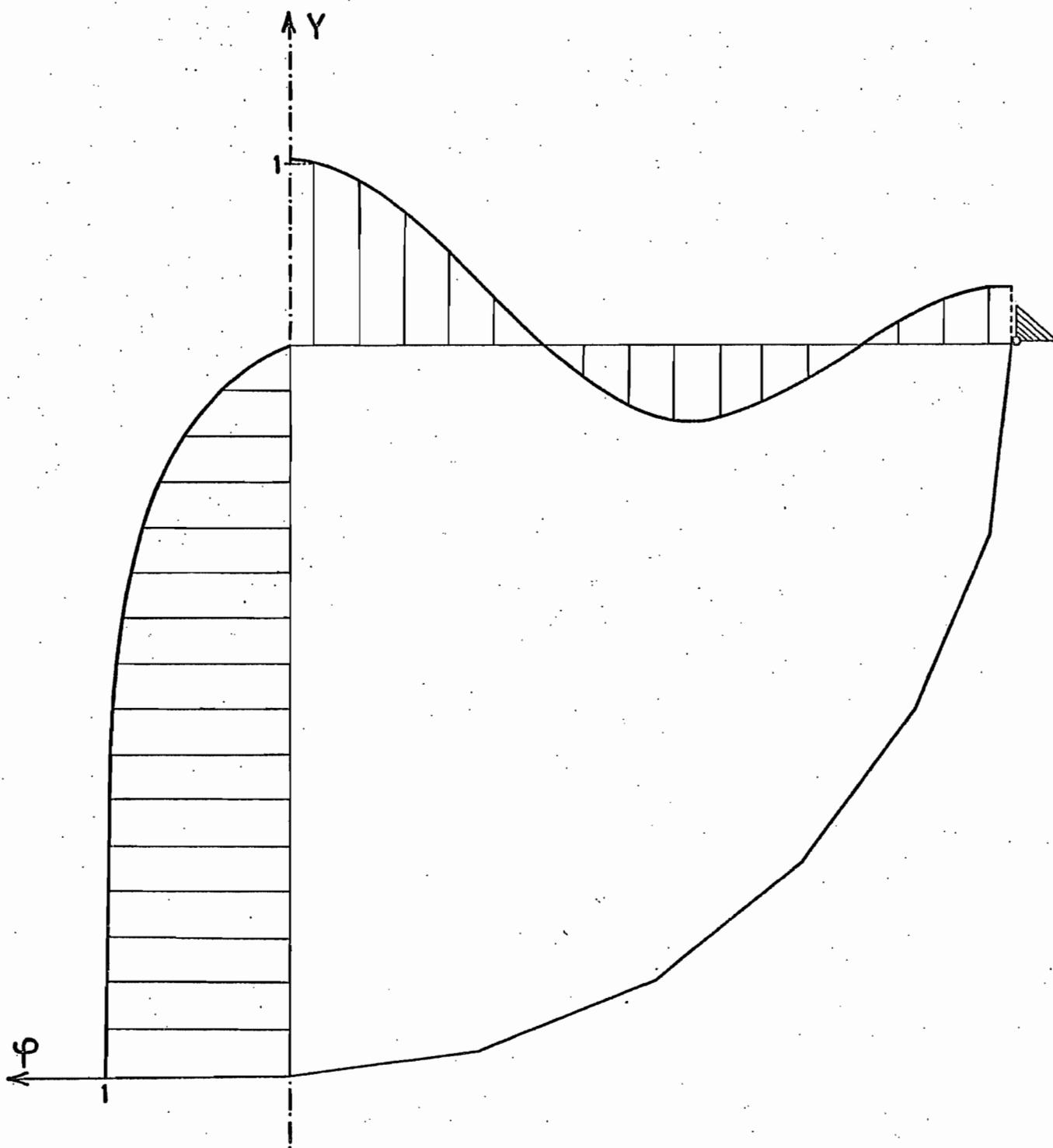
COMPARAISON DES RESULTATS

FIGURE 6.11



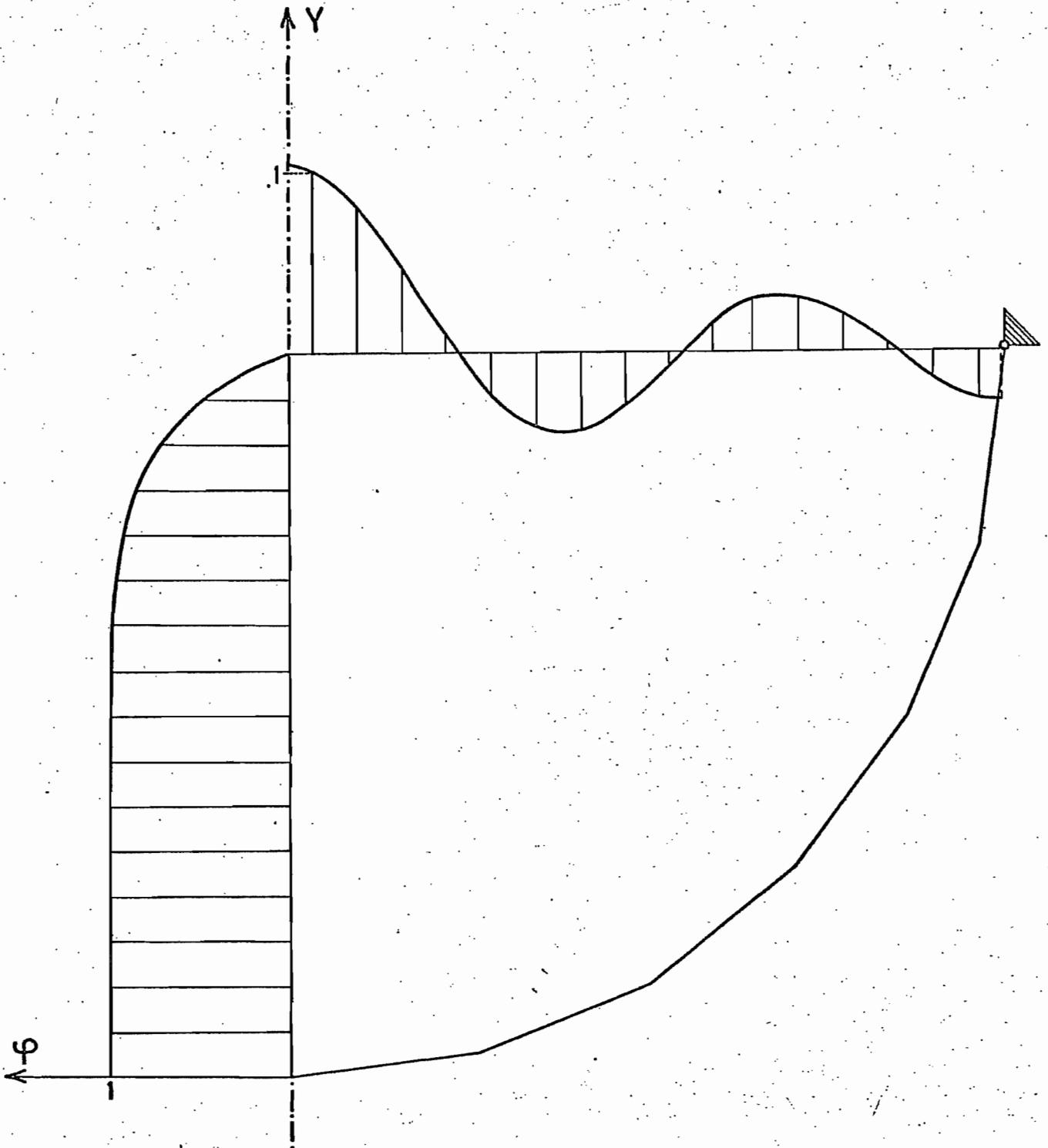
1<sup>er</sup> MODE DE SURFACE LIBRE  
fr. propre : 0.43 Hz

FIGURE 6.12



2<sup>eme</sup> MODE DE SURFACE LIBRE  
fr. propre : 0.58 Hz

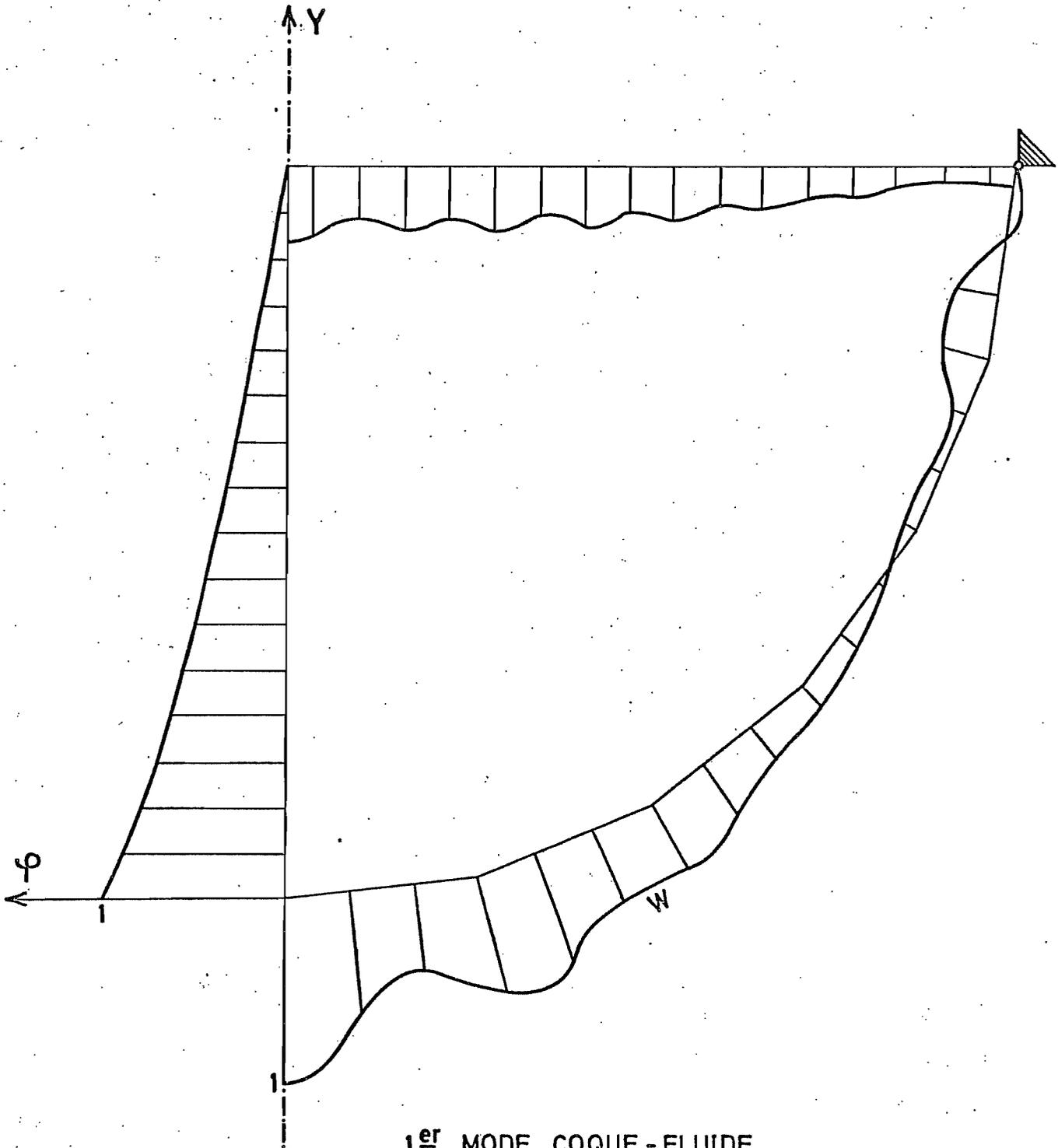
FIGURE 6.13



3<sup>eme</sup> MODE DE SURFACE LIBRE

fr. propre : 0.70 Hz

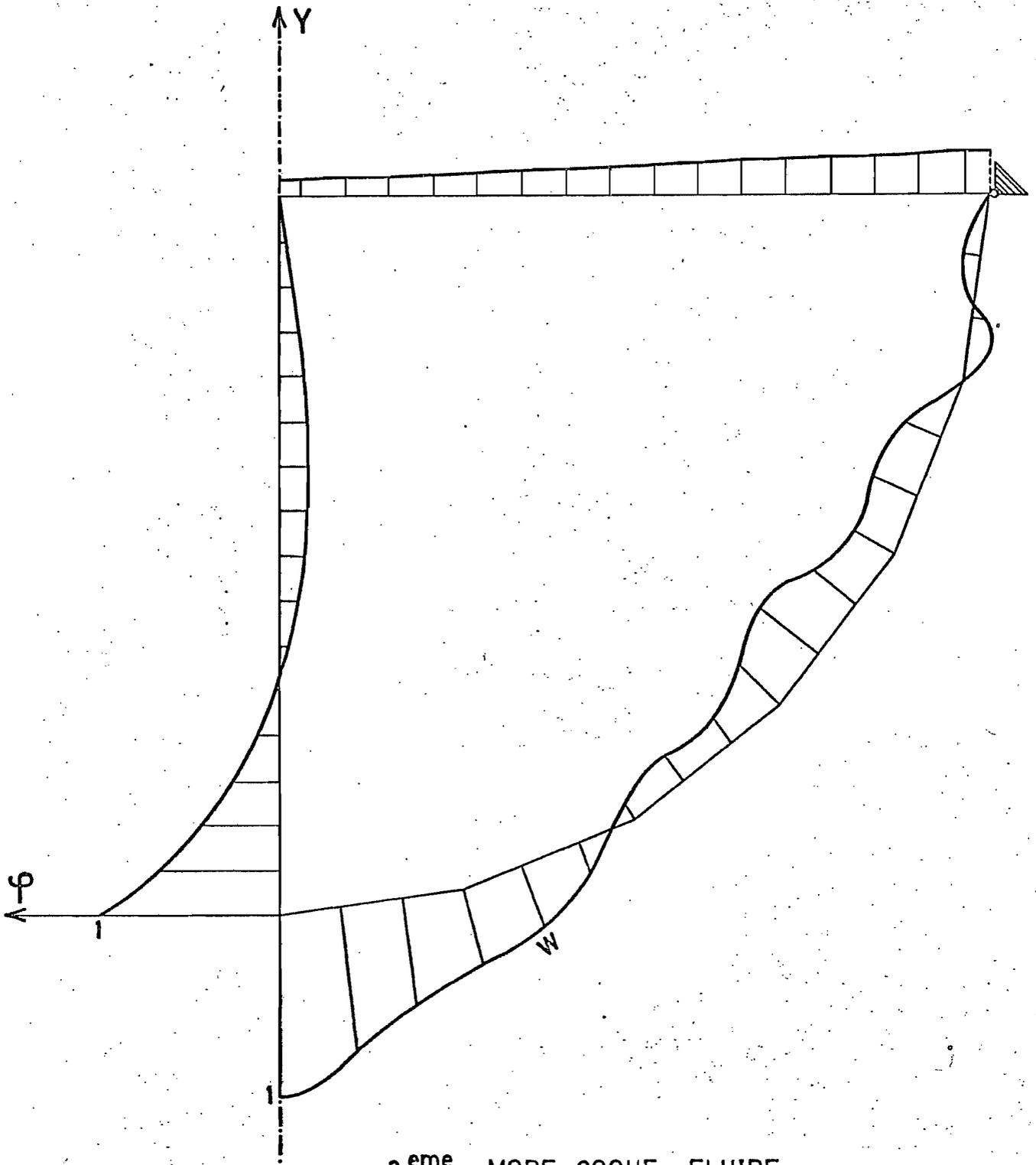
FIGURE 6.14



1<sup>er</sup> MODE COQUE - FLUIDE

fr. propre : 6.48 Hz

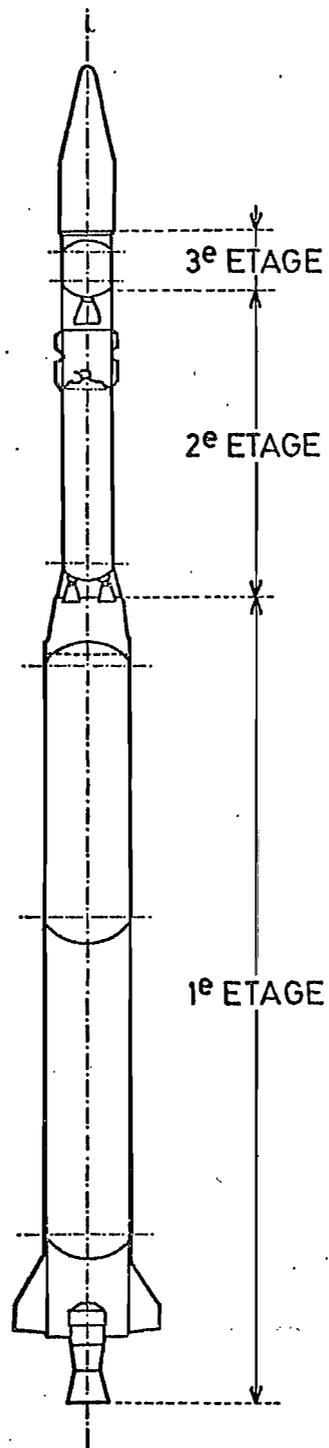
FIGURE 6.15



2<sup>eme</sup> MODE COQUE - FLUIDE

fr. propre : 9.97 Hz

FIGURE 6.16

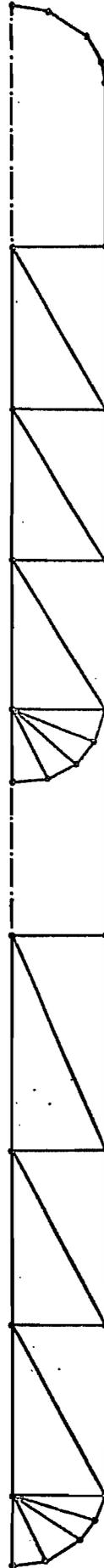


LANCEUR DIAMANT B

FIGURE 6.17



STRUCTURE L17



MODELE ELEMENTS FINIS

FIGURE 6.18

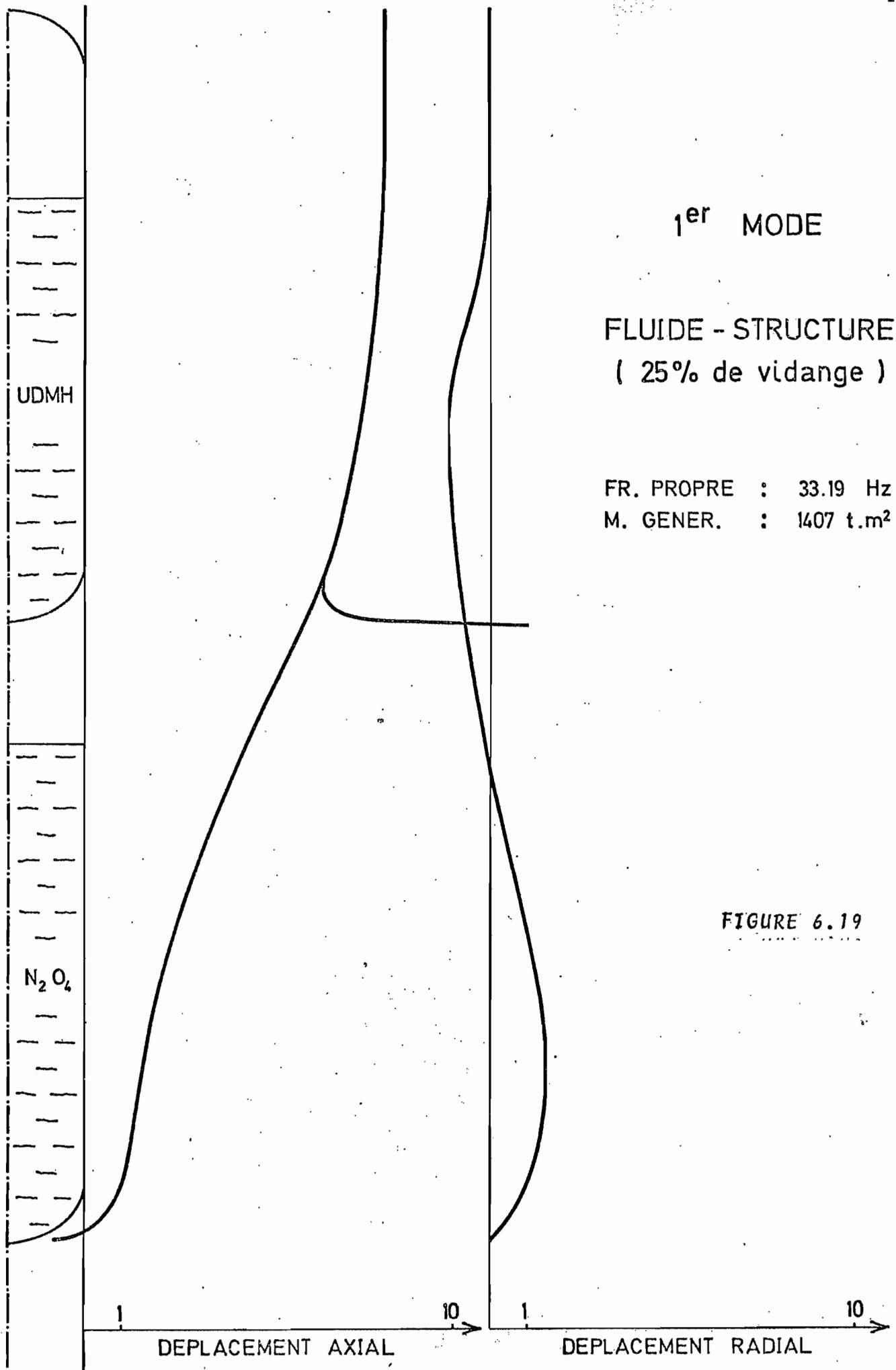
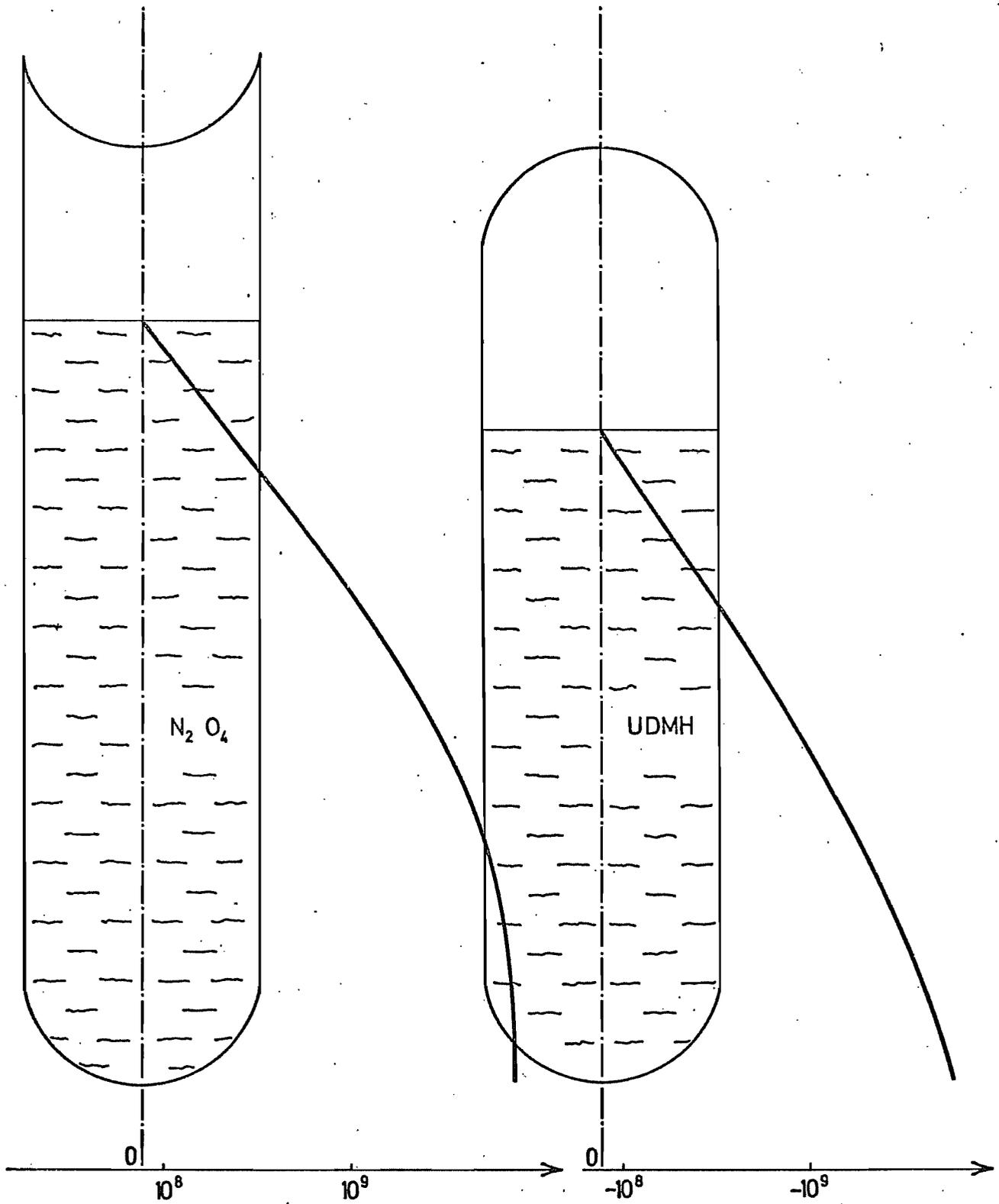


FIGURE 6.19



1<sup>e</sup> MODE FLUIDE - STRUCTURE  
( 25% de vidange )

PRESSIONS SUR L'AXE DANS LES RESERVOIRS

FIGURE 6.20

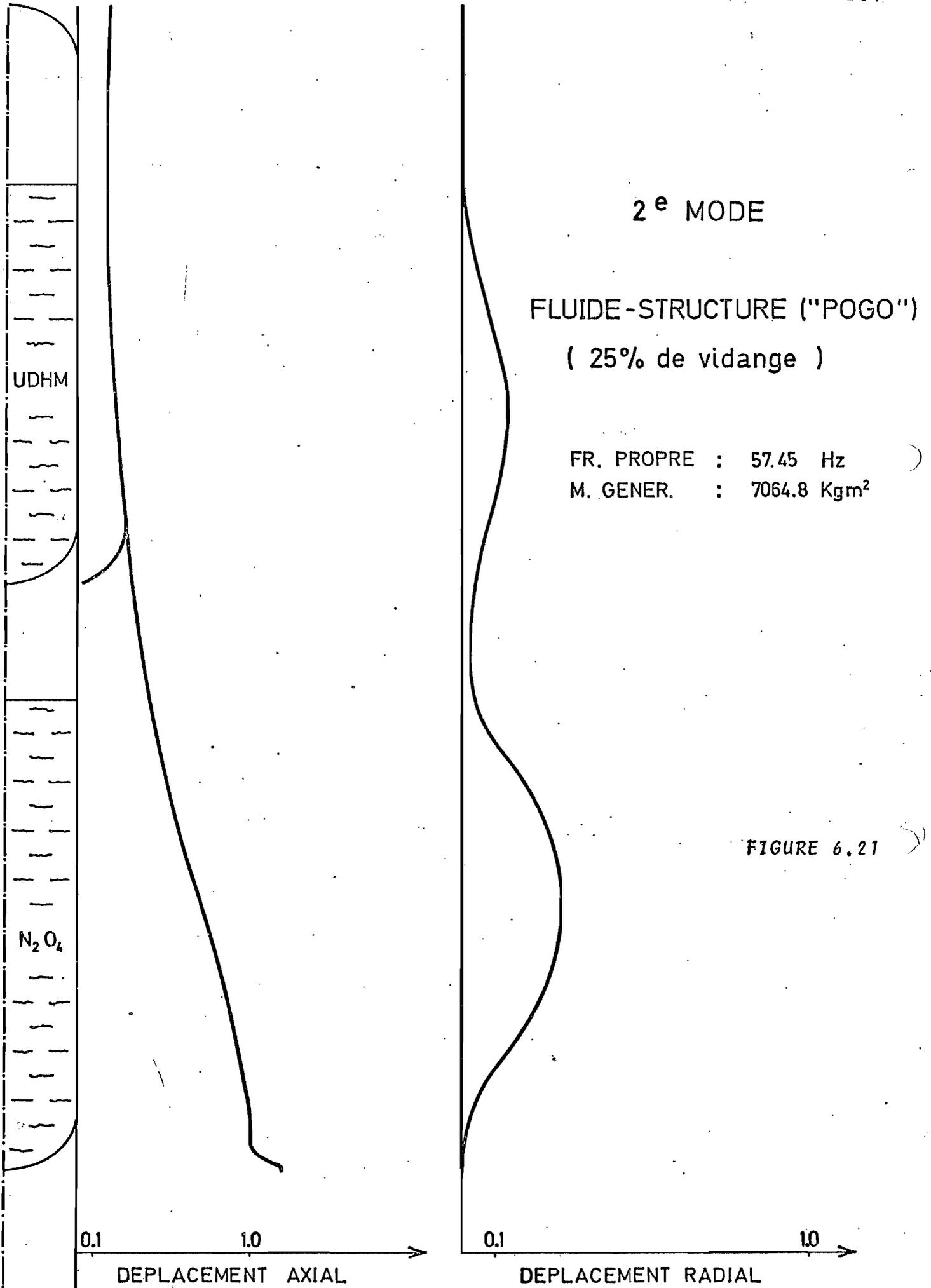
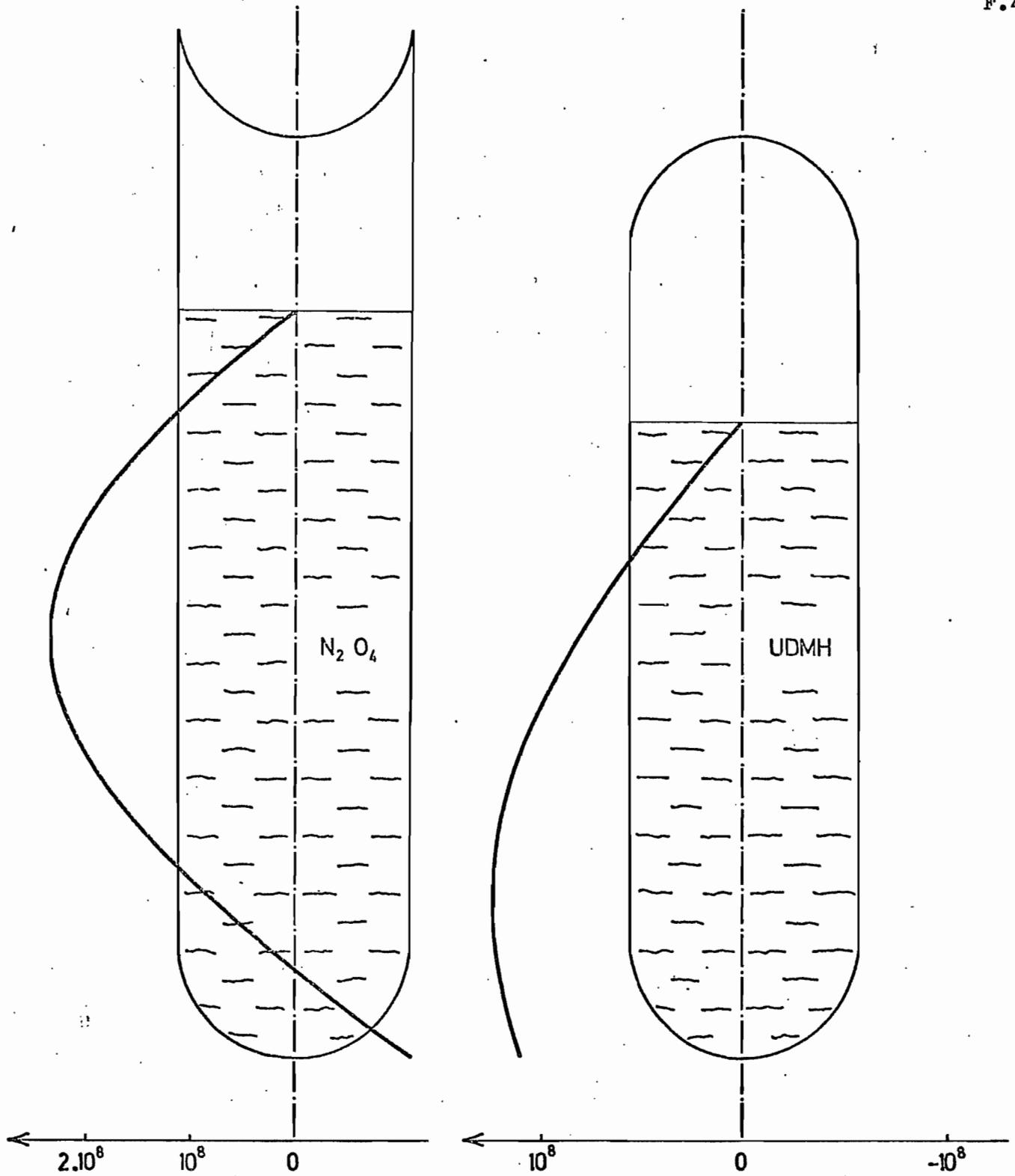


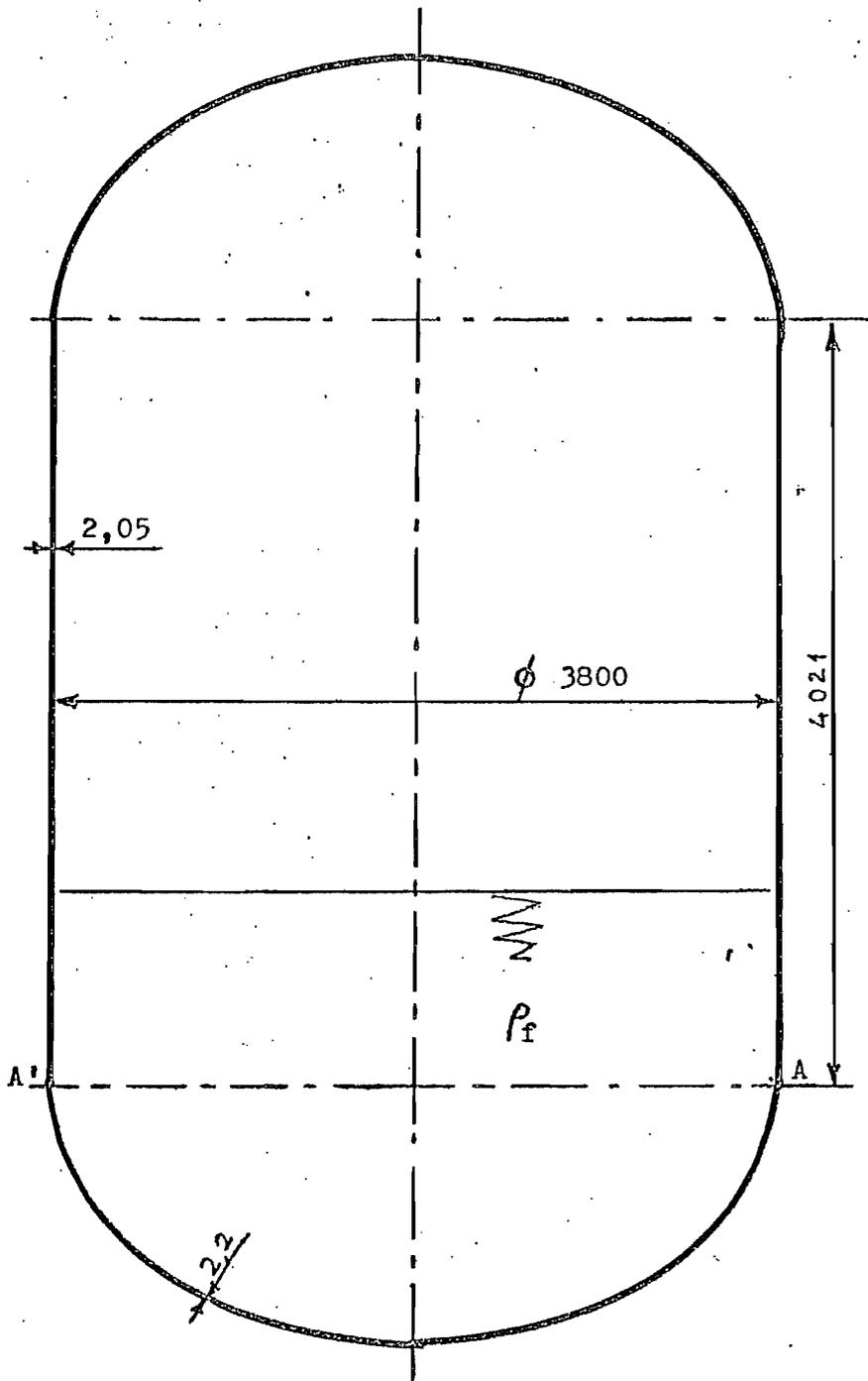
FIGURE 6.21



2<sup>e</sup> MODE FLUIDE - STRUCTURE ("POGO")  
( 25% de vidange )

PRESSIONS SUR L'AXE DANS LES RESERVOIRS

FIGURE 6.22



$$E = 1,97 \cdot 10^{11} \text{ N/m}^2$$

$$\nu = 0,3$$

$$\rho_c = 7800 \text{ kg/m}^3$$

$$\rho_f = 791 \text{ kg/m}^3$$

FIGURE 6.23

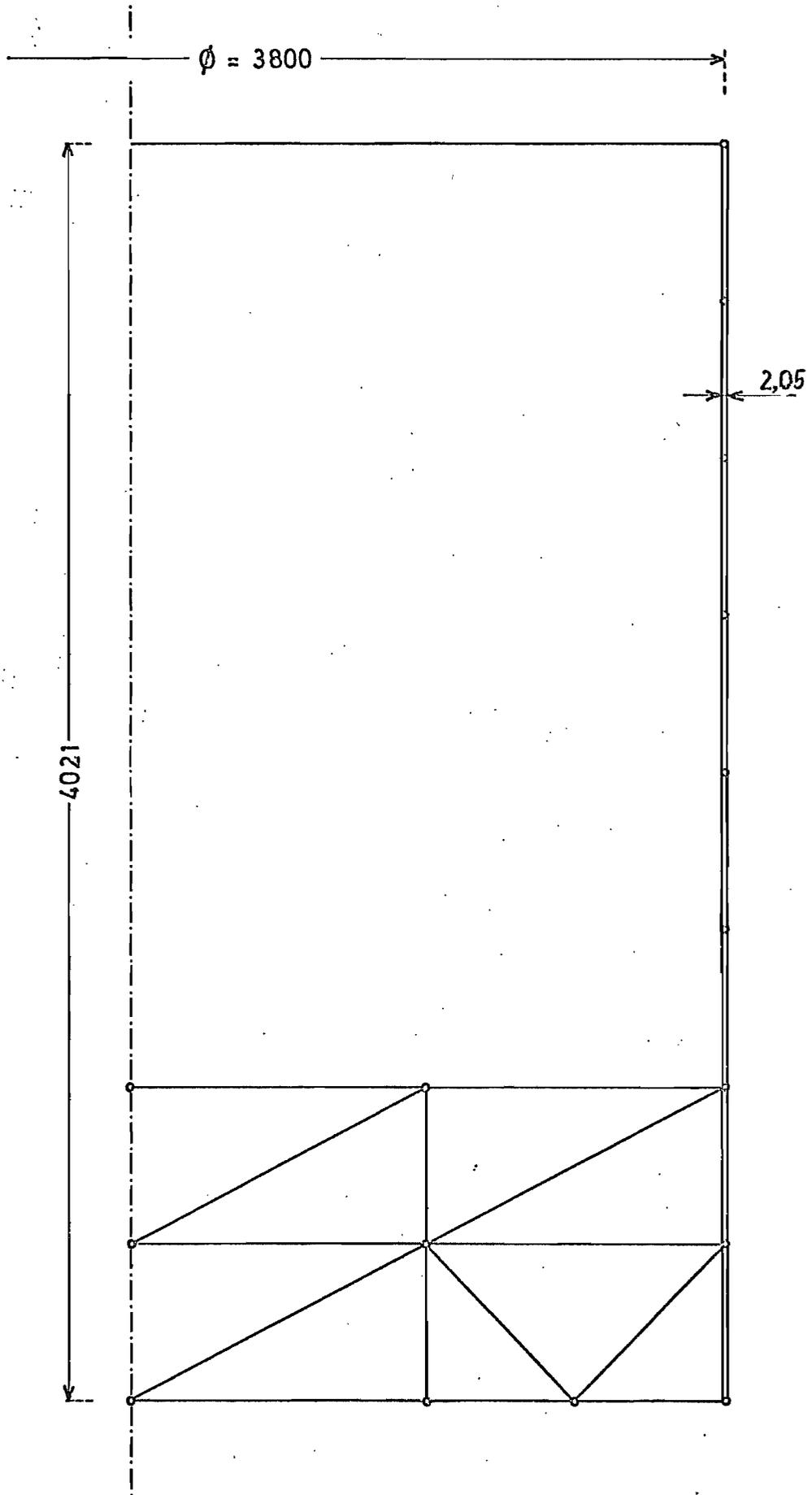


FIGURE 6.24

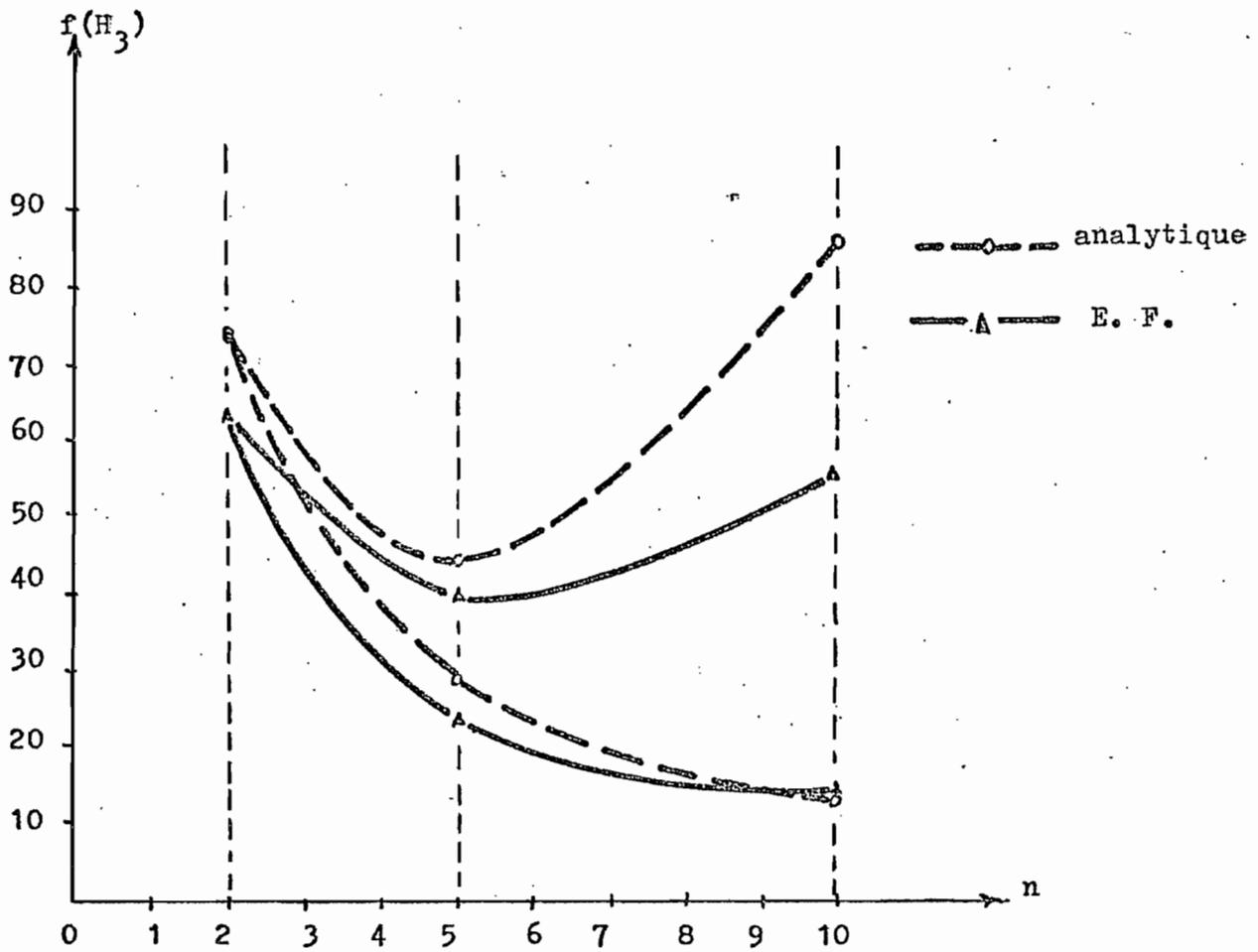


FIGURE 6.25

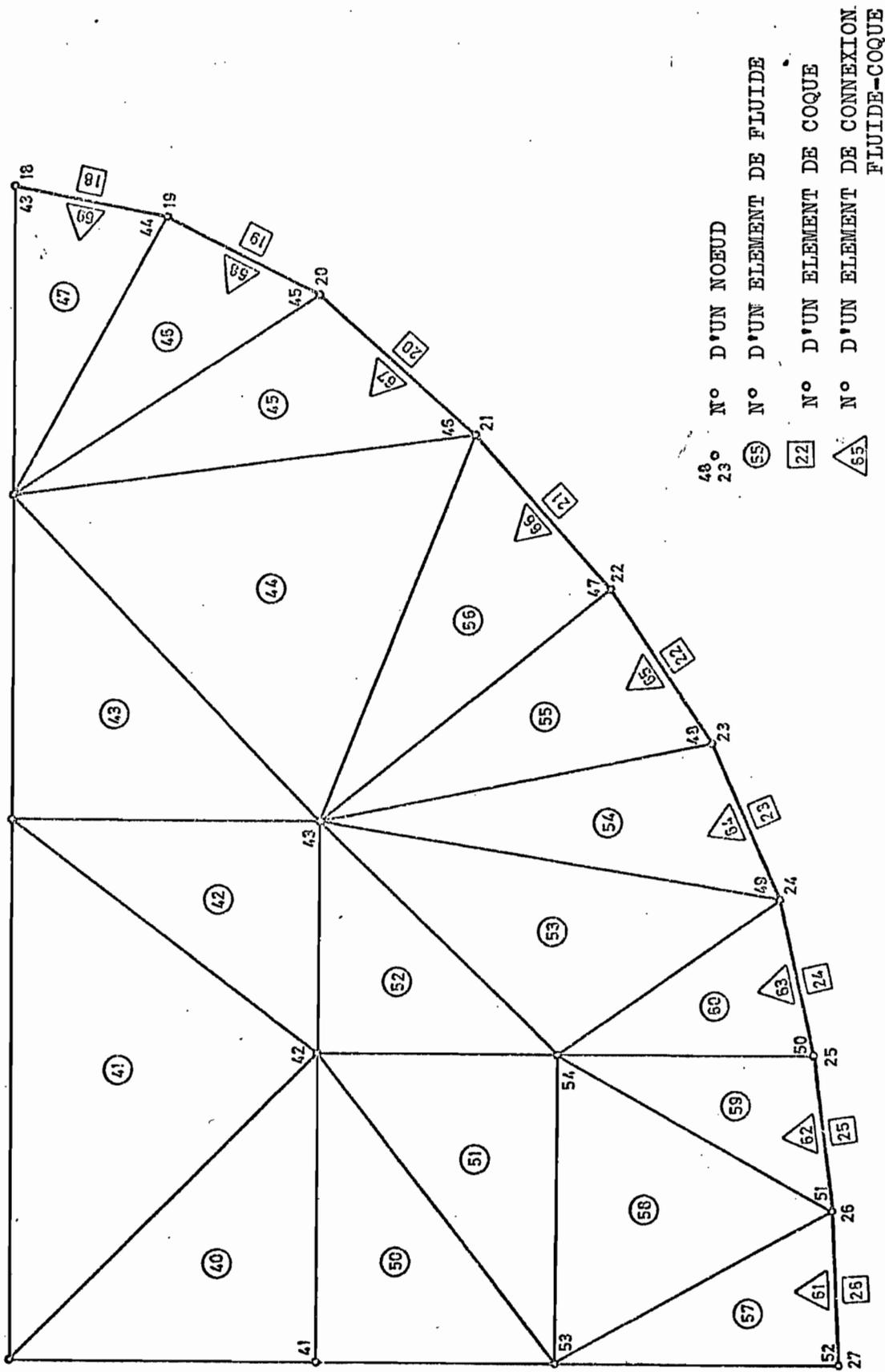


FIGURE 6.26 - FOND DU RESERVOIR

2

3