



Faculté des Sciences
Département de Mathématique

Sur la caractérisation
(Lie-)algébrique des fibrés
et des variétés différentielles

Décembre 2013

Dissertation présentée par
Élie ZIHINDULA MUSHENGEZI
en vue de l'obtention du grade de
Docteur en Sciences

Promoteur : Pierre LECOMTE

Mes remerciements vont en premier lieu à mon promoteur, Pierre LECOMTE, qui malgré ses multiples occupations a dirigé la recherche qui a abouti à cette thèse de doctorat. Monsieur Lecomte a tellement fait pour moi que si'il été SHI, je lui aurais dit « koko, oli n'ka larha. »

Je profite de cette occasion pour remercier, de manière particulière, Jacques Navez avec qui « tout » a commencé à Bukavu il y a une dizaine d'année.

Pour la réalisation de cette thèse, le concours de Fabian Radoux a été décisif, je lui en suis reconnaissant .

Pierre Mathonet m'a apporté son soutien au début, pendant et à la fin de mon parcours de doctorant à l'Université de Liège. Qu'il se sente remercié à travers ces mots.

Je remercie beaucoup Simone GUTT et Norbert PONCIN d'avoir accepté de faire partie du jury de mon doctorat.

J'ai pu compter sur les encouragements et la collaboration scientifique de Thomas Leuther ; je l'en remercie.

Mes remerciements vont aussi à mes collègues assistants ainsi qu'à mes amies du Secrétariat du département de mathématique.

Que KARANI Zihindula et MUSHENGEZI Cirume, et à travers eux tous mes proches, se sentent également remerciés pour leurs encouragements.

Un tout grand merci à ma « malkia » Wivine pour tout ce qu'elle fait pour moi.

À Armand, Amélie, Axel-Elie et Alvine

Introduction

Une algèbre associative $\mathcal{A}(M)$ caractérise un espace topologique M si, pour tout espace topologique N , les algèbres associatives $\mathcal{A}(M)$ et $\mathcal{A}(N)$ sont isomorphes si, et seulement si, les espaces topologiques M et N sont homéomorphes. La caractérisation algébrique des espaces topologiques remonte à la fin des années 30 du siècle passé avec les travaux de I. Gel'fand et A. Kolmogoroff [11]; où il est établi qu'un espace topologique compact M est caractérisé par l'algèbre associative $C(M)$ des fonctions continues sur M à valeurs dans \mathbb{R} ou \mathbb{C} . L'idée maîtresse de leurs travaux consiste à identifier chaque point p de l'espace topologique compact M avec l'idéal maximal p^* de $C(M)$ constitué des fonctions s'annulant en p . Les méthodes développées dans [11] peuvent s'appliquer au cas d'une variété différentielle M , supposée de Hausdorff et à base dénombrable, en considérant l'algèbre $\mathcal{A}(M) = C^\infty(M)$ des fonctions de classe C^∞ sur M . Grâce à un résultat dû à Milnor, on sait qu'un isomorphisme d'algèbres associatives $\Psi : \mathcal{A}(M) \rightarrow \mathcal{A}(N)$ est de la forme

$$\Psi : f \mapsto f \circ \psi,$$

avec $\psi : N \rightarrow M$, un difféomorphisme de variétés différentielles. La compacité des variétés différentielles n'est pas exigée ici; chaque point p de M donne lieu à un idéal p^* de $\mathcal{A}(M)$ de codimension 1, constitué des fonctions $f \in \mathcal{A}(M)$ telles que $f(p) = 0$.

La caractérisation Lie-algébrique des variétés différentielles apparaît quant à elle, pour la première fois, en 1954 dans les travaux de P.E. Pursell et M.E. Shanks. Ces deux auteurs démontrent dans l'article [41], que l'algèbre de Lie $Vect_c(M)$ des champs de vecteurs de M à support compact caractérise la variété différentielle (réelle) M . Ici encore, on s'inspire manifestement de l'idée de Gel'fand et Kolmogoroff car, à chaque point $p \in M$, on associe l'idéal maximal p^∞ de $Vect_c(M)$ défini par

$$p^\infty = \{X \in Vect_c(M) : X(p) = 0\}.$$

Des résultats analogues furent également obtenus pour les cas \mathbb{R} -analytique et holomorphe dans [2, 13], où la notion d'idéal maximal est remplacée par celle d'idéal de codimension finie.

Signalons qu'un résultat de type Pursell-Shanks de portée plus générale a été établi par S.M. Skryabin en 1987 dans [43]. Les méthodes développées par Skryabin, pour caractériser une algèbre associative commutative (une \mathbb{R} -algèbre) \mathcal{A} par $Der(\mathcal{A})$, l'algèbre de Lie des dérivations de \mathcal{A} muni du crochet des commutateurs, se basent sur la structure de \mathcal{A} -module de $Der(\mathcal{A})$ et non sur les idéaux de codimension fini.

D'autres sous-algèbres de Lie de $Vect(M)$, l'ensemble de champs de vecteurs d'une variété différentielle M , ont été étudiées pour obtenir des résultats de type Pursell-Shanks. A titre illustratif, nous pouvons citer les exemples suivants où la sous-algèbre de Lie considérée est précisée.

- [25] : champs de vecteurs préservant une sous-variété donnée
- [37] : champs de vecteurs préservant une forme symplectique ou de contact
- [14] : champs de vecteurs préservant un feuilletage
- [3] : champs de vecteurs Hamiltoniens sur une variété symplectique

Les supervariétés ont été récemment abordées pour des résultats de type Pursell-Shanks dans [20, 21].

Une façon de généraliser ces résultats est d'établir des caractérisations avec des algèbres de Lie plus vastes que celle des champs de vecteurs d'une variété différentielle. C'est ce qu'ont proposé J. Grabowski et N. Poncin dans [17, 18, 22]. Les résultats obtenus dans ces articles constituent la base de ce travail et nous en avons proposé un résumé dans le deuxième chapitre.

On peut aussi obtenir une généralisation du résultat de Pursell et Shanks en caractérisant les fibrés vectoriels par des algèbres de Lie. Dans cette voie, citons quelques exemples :

- [28] où il est établi que, sous certaines hypothèses, l'algèbre de Lie des automorphismes infinitésimaux d'un fibré vectoriel caractérise ce dernier.
- [46] où une caractérisation Lie-algébrique du fibré transverse est proposée.

Établir un résultat de type Gel'fand-Kolmogoroff pour un fibré vectoriel est également une façon de généraliser le théorème de Milnor qui donne une caractérisation des variétés différentielles par la \mathbb{R} -algèbre des fonctions de classe C^∞ .

La présente dissertation est subdivisée en six chapitres. Le premier contient le rappel de quelques notions de base dont nous servons dans la suite.

Le second est entièrement consacré aux résultats de J. Grabowski et N. Poncin. Ces derniers associent à une variété différentielle M , l'algèbre de Lie $\mathcal{D}(M)$ des opérateurs différentiels agissant sur les fonctions de classe C^∞ de M et démontrent que la structure de Lie de $\mathcal{D}(M)$, contenant l'algèbre de Lie de champs de vecteurs, caractérise M .

Dans [18], une définition de la notion d'algèbre de Poisson quantique est proposée de la manière suivante :

$$\mathcal{D} = \cup_{i=0}^{\infty} \mathcal{D}^i, \quad \mathcal{D}^i \subset \mathcal{D}^{i+1}, \quad \mathcal{D}^i \cdot \mathcal{D}^j \subset \mathcal{D}^{i+j},$$

sur un corps commutatif K de caractéristique nulle et où le crochet des commutateurs vérifie

$$(1) \quad [\mathcal{D}^i, \mathcal{D}^j] \subset \mathcal{D}^{i+j-1}.$$

Grabowski et Poncin démontrent que sous certaines hypothèses, celles d'être *non-singulière* et *distinguante* en l'occurrence, tout isomorphisme d'algèbres de Lie entre \mathcal{D}_1 et \mathcal{D}_2 est filtré et induit un isomorphisme entre les algèbres associatives commutatives \mathcal{D}_1^0 et \mathcal{D}_2^0 .

L'algèbre de Lie $\mathcal{D}(M)$ des opérateurs différentiels étant une algèbre de Poisson quantique non-singulière et distinguante, avec

$$\mathcal{D}^0(M) \cong C^\infty(M),$$

le théorème de Milnor permet de conclure.

Les méthodes développées pour $\mathcal{D}(M)$ sont valables pour la sous-algèbre de Lie $\mathcal{D}^1(M)$ constituée des opérateurs différentiels du premier ordre mais aussi pour $\mathcal{S}(M)$, l'algèbre de Lie des fonctions polynômes sur le fibré cotangent T^*M , canoniquement identifiée à l'espace des symboles des opérateurs différentiels dans $\mathcal{D}(M)$.

Un outil important utilisé dans ces travaux est la notion de centralisateur $\mathcal{C}(\mathcal{D})$ pour une algèbre de Poisson de quantique \mathcal{D} . Par définition, un élément $\psi \in \text{Hom}_K(\mathcal{D}, \mathcal{D})$ est dans $\mathcal{C}(\mathcal{D})$ si, pour tous $f \in \mathcal{D}^0$ et $T \in \mathcal{D}$, on a

$$\psi([T, f]) = [\psi(T), f].$$

Une propriété importante pour obtenir des résultats conduisant à la caractérisation d'une variété différentielle M par l'algèbre de Lie $\mathcal{D}(M)$, stipule que, de manière générale, si \mathcal{D} est une algèbre de Poisson quantique distinguante et non-singulière, tout $\psi \in \mathcal{C}(\mathcal{D})$ respecte la graduation de \mathcal{D} et est tel que

$$(2) \quad \psi(f) = f\psi(1), \quad \forall f \in \mathcal{D}^0.$$

Ce chapitre se termine par le résultat selon lequel si $E \rightarrow M$ est un fibré en droite, l'algèbre de Poisson quantique $\mathcal{D}(E, M)$ des opérateurs différentiels agissant sur les sections de E est isomorphes à $\mathcal{D}(M)$. Par conséquent, avec cette algèbre, une caractérisation Lie-algébrique de fibré vectoriel ne saurait être obtenue sauf dans le cas trivial, ce qui n'a pas beaucoup de pertinence.

Le Chapitre 3 est tiré de l'article [34]. Nous y généralisons les résultats de type Pursell-Shanks obtenus par Grabowski et Poncin dans [18, 17, 22] et Lecomte dans [28] en établissant que l'algèbre de Poisson quantique $\mathcal{D}_{\mathcal{E}}(E)$ des opérateurs homogènes du fibré vectoriel $E \rightarrow M$ caractérise cet dernier.

Un opérateur homogène est un opérateur différentiel agissant sur les fonctions de classe C^∞ de E qui se décompose comme une somme dont les termes sont des vecteurs propres de $L_{\mathcal{E}}$, la dérivée de Lie dans la direction du champ d'Euler \mathcal{E} . En particulier,

$$\mathcal{D}_{\mathcal{E}}^0(E) := \mathcal{A}(E)$$

est la sous-algèbre de la \mathbb{R} -algèbre $C^\infty(E)$ constituée des fonctions polynomiales en les fibres de E .

L'algèbre de Poisson quantique $\mathcal{D}_\varepsilon(E)$ est non-singulière mais n'est pas distinguante. Elle est également symplectique, ce qui signifie que son centre est réduit aux constantes ; et elle possède la propriété d'être *quasi-distinguante* ; en ce sens qu'elle vérifie les deux conditions suivantes

$$\begin{aligned} \forall T \in \mathcal{D}_\varepsilon(E), ([T, \mathcal{A}(E)] = 0) &\Rightarrow (T \in \mathcal{A}(E)) \\ \{T \in \mathcal{D}_\varepsilon(E) \mid [T, \mathcal{A}(E)] \subset \mathcal{D}_\varepsilon^k(E)\} &= \mathcal{D}_\varepsilon^{k+1}(E). \end{aligned}$$

Pour arriver à un résultat de type Pursell-Shanks pour les fibrés vectoriels, nous avons commencé par établir un résultat de type Gel'fand-Kolmogoroff selon lequel l'algèbre associative $\mathcal{A}(E)$ des fonctions polynomiales du fibré vectoriel $E \rightarrow M$ caractérise ce dernier. Cette caractérisation a été établie en utilisant un résultat tiré de [36] selon lequel tout isomorphisme Ψ de \mathbb{R} -algèbres entre $\mathcal{A}(E)$ et $\mathcal{A}(F)$, pour deux fibrés vectoriels $E \rightarrow M$ et $F \rightarrow N$, induit un isomorphisme de \mathbb{R} -algèbres $\bar{\Psi} : C^\infty(E) \rightarrow C^\infty(F)$, dont la restriction à $\mathcal{A}(E)$ coïncide avec Ψ . Nous verrons au premier chapitre que $C^\infty(E)$ est en fait ce qu'on appelle dans [36] une enveloppe lisse de $\mathcal{A}(E)$.

Nous avons pu conclure, en démontrant, bien que $\mathcal{D}_\varepsilon(E)$ ne soit pas distinguante, un résultat analogue à (2).

Signalons que pour arriver à leurs résultats de type Pursell-Shanks, Grabowski et Poncin avaient, dans un premier temps, utilisé le caractère symplectique des algèbres de Lie étudiées et que par après, ils avaient proposé une preuve se passant de cette propriété. La méthode que nous proposons pour arriver à des résultats analogues utilise la propriété d'être symplectique.

Nous complétons ce chapitre par un mot sur la sous-algèbre de Lie $\mathcal{D}_+(E)$ des opérateurs homogènes de poids positifs ; où nous faisons remarquer que pour cette dernière, les conclusions obtenues avec $\mathcal{D}_\varepsilon(E)$ restent valables.

Dans le quatrième chapitre, nous proposons une autre construction de l'algèbre des opérateurs homogènes d'un fibré vectoriel. Nous établissons, en passant par quelques considérations topologiques, que l'algèbre de Poisson quantique $\mathcal{D}_G(E)$ construite par la méthode de Grothendieck sur $\mathcal{A}(E)$ en posant

$$\mathcal{D}_G(E) = \cup_k \mathcal{D}_G^k(E)$$

avec $\mathcal{D}_G^0(E) = \mathcal{A}(E)$ et

$$\mathcal{D}_G^{k+1}(E) = \{T \in \text{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathcal{A}(E), \mathcal{A}(E)) : [T, \mathcal{A}(E)] \subset \mathcal{D}_G^k(E)\},$$

coïncide avec $\mathcal{D}_\varepsilon(E)$. Grâce à cette identification, nous avons obtenu que les dérivations de l'algèbre associative $\mathcal{A}(E)$ sont données par

$$\text{Der}(\mathcal{A}(E)) = \text{Vect}(E) \cap \mathcal{D}_\varepsilon^1(E).$$

Nous avons également déterminé les dérivations de $\mathcal{A}(E)$ de poids nul avec deux approches.

D'abord, ces dérivations s'obtiennent en termes d'automorphismes infinitésimaux du fibré $E \rightarrow M$. Plus précisément, on a la relation

$$Der^0(E) = Aut(E)|_{\mathcal{A}(E)},$$

avec $Aut(E)$ l'algèbre de Lie des automorphismes infinitésimaux de E . Ce qui permet de conclure que l'algèbre de Lie $Der^0(E)$ caractérise le fibré vectoriel $E \rightarrow M$, sous les hypothèses de [28].

Ensuite et enfin, nous avons obtenu l'identification

$$Der^0(\mathcal{A}(E)) \cong Vect(M) \oplus gl(E^*).$$

Ce chapitre se termine par une section consacrée à l'étude de l'algèbre de Lie $\mathcal{D}_0(E)$ des opérateurs homogènes de poids nul. Cette sous-algèbre de Poisson quantique de $\mathcal{D}_\varepsilon(E)$ est non-singulière mais n'est ni symplectique, ni quasi-distinguante (et donc, ni distinguante). Les méthodes dues à Grabowski et Poncin ne sont donc plus entièrement applicables ici. Nous avons néanmoins calculé le centre de $\mathcal{D}_0(E)$, dont les éléments sont polynômiaux en le champ d'Euler, avec des coefficients réels. Nous nous sommes en particulier intéressé à l'algèbre de Lie $\mathcal{D}_0^1(E)$ des opérateurs homogènes du premier ordre de poids nul. Nous avons établi que sous les hypothèses de [28], étant donnés deux fibrés vectoriels $E \rightarrow M$ et $F \rightarrow N$, tout isomorphisme d'algèbres de Lie entre $\mathcal{D}_1^0(E)$ et $\mathcal{D}_1^0(F)$, respectant l'unité, induit un isomorphisme entre les fibrés vectoriels E et F .

Dans l'avant dernier chapitre, nous nous intéressons aux opérateurs différentiels agissant sur les sections d'un fibré vectoriel de rang strictement plus grand que 1. Nous commençons par poser une base théorique abstraite en définissant ce que nous avons appelé *algèbre quasi de Poisson quantique*. Cela se justifie par le fait que pour le crochet des commutateurs de l'algèbre de Lie $\mathcal{D}(E, M)$ des opérateurs différentiels agissant sur les sections d'un fibré vectoriel $E \rightarrow M$ la relation (1) est remplacée par

$$[\mathcal{D}^i(E, M), \mathcal{D}^j(E, M)] \subset \mathcal{D}^{i+j}(E, M).$$

Nous avons obtenu le résultat suivant.

Pour deux algèbres quasi de Poisson quantiques, non-singulières et quasi-distinguantes, tout isomorphisme $\Phi : \mathcal{D}_1 \rightarrow \mathcal{D}_2$ d'algèbres de Lie tel que $\Phi(Z(\mathcal{A}_1)) = Z(\mathcal{A}_2)$ respecte la filtration.

Ce résultat, appliqué au cas de l'algèbre quasi de Poisson quantique $\mathcal{D}(E, M)$, nous a permis de conclure que vue comme $C^\infty(M)$ -module, l'algèbre de Lie $\mathcal{D}(E, M)$ caractérise le fibré $E \rightarrow M$, sous les hypothèses que le rang du fibré dépasse 1 et que $H^1(M, \mathbb{Z}/2) = 0$.

Nous avons ensuite proposé une autre filtration à $\mathcal{D}(E, M)$ de manière à en faire une algèbre de Poisson quantique. Nous avons noté cette algèbre par $\mathcal{P}(E, M)$. Seulement, cela entraîne la perte de la propriété d'être quasi-distinguante.

Pour l'algèbre de Lie $\mathcal{P}^1(E, M)$, nous avons pu obtenir un résultat de caractérisation Lie-algébrique des fibrés vectoriels sans considérer la structure de $C^\infty(M)$ -module de cette algèbre de Lie.

A la fin de ce chapitre, nous avons étudié l'algèbre de Poisson classique $\mathcal{S}(\mathcal{P}(E, M))$, limite classique de l'algèbre de Poisson quantique $\mathcal{P}(E, M)$, pour laquelle nous sommes arrivés à des conclusions analogues à celles obtenues avec $\mathcal{P}(E, M)$.

Le sixième et dernier chapitre est consacré à l'étude de la structure de \mathbb{R} -algèbre associative des différentes algèbres rencontrées dans les chapitres précédents. La question est de savoir si pour ces différentes algèbres (de Poisson quantiques ou classiques et quasi de Poisson quantiques), la structure associative permet les mêmes caractérisations que la structure de Lie.

Pour les algèbres de Poisson quantiques ou quasi de Poisson quantiques, la réponse est évidente car, le crochet de Lie étant celui des commutateurs, tout homomorphisme d'algèbres associatives est aussi un homomorphisme d'algèbres de Lie.

La notion d'enveloppe lisse d'une algèbre associative géométrique ; avec comme principal énoncé, le fait l'enveloppe lisse des fonctions polynômes d'un fibré vectoriel $E \rightarrow M$ est $\overline{\mathcal{A}(E)} = C^\infty(E)$ est d'une grande utilité pour les méthodes que nous avons développées dans cette partie. Nous en avons déduit que l'algèbre de Poisson classique $\mathcal{S}(M)$, utilisée par J. Grabowski et N. Poncin pour une caractérisation Lie-algébrique de la variété M , caractérise cette dernière par sa structure de \mathbb{R} -algèbre associative.

Utilisant l'enveloppe lisse de $\mathcal{S}_\varepsilon(E)$, limite classique de l'algèbre des opérateurs homogènes, nous avons également obtenu une caractérisation algébrique de la fibration différentielle $T^*E \rightarrow M$ avec $\mathcal{S}_\varepsilon(E)$. Pour $\mathcal{S}_0(E)$, limite classique de l'algèbre des opérateurs homogènes de poids nul, nous avons obtenu que pour deux fibrés vectoriels $E \rightarrow M$ et $F \rightarrow N$ tels que les algèbres associatives $\mathcal{S}_0(E)$ et $\mathcal{S}_0(F)$ soient isomorphes, alors les variétés différentielles M et N sont difféomorphes.

Un résultat similaire a été établi pour la \mathbb{R} -algèbre associative $\mathcal{S}(\mathcal{P}(E, M))$. Cela nous a permis de conclure que vue comme algèbre de Poisson, l'algèbre $\mathcal{S}(\mathcal{P}(E, M))$ caractérise le fibré $E \rightarrow M$, sans la condition d'être considérée comme $C^\infty(M)$ -module.

GÉNÉRALITÉS ET NOTIONS DE BASE

Dans cette partie nous commençons par rappeler quelques notions sur les fibrés vectoriels dont nous servons par la suite. Vient ensuite une section consacrée essentiellement à la notion d'enveloppe lisse d'une algèbre associative. Enfin, quelques notions de topologie sont présentées. Précisons une fois pour toutes que les variétés différentielles considérées dans cette thèse sont supposées séparées, à base dénombrable et connexes.

1. Fibrations différentielles et fibrés vectoriels

Pour une fibration différentielle $\pi_E : E \rightarrow M$, on dira simplement « une fibration E » si aucune confusion n'est à craindre.

1. Un isomorphisme de fibrations différentielles entre deux fibrations $\pi_E : E \rightarrow M$ et $\pi_F : F \rightarrow N$ est la donnée d'un couple (φ, ϕ) où $\varphi : E \rightarrow F$ et $\phi : M \rightarrow N$ sont des difféomorphismes de variétés différentielles tels que

$$\pi_F \circ \varphi = \phi \circ \pi_E.$$

Dans ce cas, on peut identifier les variétés différentielles M et N , et supposer alors que les fibrations E et F ont même base $M = N$ et que $\phi = id_{M=N}$. On dit alors que φ est un M -isomorphisme de la fibration E dans la fibration F et on a que, pour tout $x \in M$, l'application

$$\varphi^x : E_x \rightarrow F_x : e \mapsto \varphi(e)$$

est un difféomorphisme de variétés différentielles ; où $E_x = \pi_E^{-1}(x)$ (resp. $F_x = \pi_F^{-1}(x)$) désigne la fibre de E (resp. de F) au point $x \in M$.

Si $E \rightarrow M$ et $F \rightarrow M$ sont des fibrés vectoriels, un M -isomorphisme φ de fibrations différentielles est un isomorphisme de fibrés vectoriels si, pour tout $x \in M$, le difféomorphisme φ^x est linéaire.

2. Soient E et F deux fibrations de même base M , de fibres type respectives H et G et $\varphi : E \rightarrow F$ un M -isomorphisme de fibrations. Considérons un recouvrement ouvert (U_α) de M par des domaines de trivialisations de E et F à la fois. Notons, pour chaque indice α , par

$$\sigma_\alpha : U_\alpha \times H \rightarrow \pi_E^{-1}(U_\alpha) \text{ et } \rho_\alpha : U_\alpha \times G \rightarrow \pi_F^{-1}(U_\alpha)$$

les difféomorphismes de trivialisations locales des fibrations E et F respectivement.

On observe alors que

$$\varphi_\alpha = \rho_\alpha^{-1} \circ (\varphi|_{\pi_E^{-1}(U_\alpha)}) \circ \sigma_\alpha : U_\alpha \times H \rightarrow U_\alpha \times G$$

est de la forme

$$(x, y) \mapsto (x, \delta_\alpha(x, y))$$

où δ est une application de classe C^∞ telle que pour tout $x \in U_\alpha$, $\delta_\alpha(x, \cdot)$ soit un difféomorphisme de H_α sur G_α ; on dit alors que φ_α est l'expression locale de φ correspondant à σ_α et δ_α .

En notant les difféomorphismes de transition par

$$\theta_{\beta\alpha} = \sigma_{\alpha\beta}^{-1} \circ \sigma_{\beta\alpha} \text{ et } \vartheta_{\beta\alpha} = \rho_{\alpha\beta}^{-1} \circ \rho_{\beta\alpha}$$

on a que le diagramme suivant est commutatif

$$(*) \quad \begin{array}{ccc} U_{\alpha\beta} \times H & \xrightarrow{\varphi_{\beta\alpha}} & U_{\alpha\beta} \times G \\ \theta_{\beta\alpha} \downarrow & & \downarrow \vartheta_{\beta\alpha} \\ U_{\alpha\beta} \times H & \xrightarrow{\varphi_{\alpha\beta}} & U_{\alpha\beta} \times G \end{array}$$

où nous avons posé, pour tout couple d'indices (α, β) , $U_{\beta\alpha} = U_\alpha \cap U_\beta$ et $\varphi_{\beta\alpha} = \varphi_\alpha|_{(U_{\alpha\beta}) \times H}$.

3. Soient $E \rightarrow M$ une fibration de fibre type H et (U_α) un recouvrement ouvert de M par de domaines de trivialisations de E . Conservons les notations du paragraphe précédent et supposons données une seconde variété différentielle G , et, pour tout couple d'indices (α, β) , une application

$$\vartheta_{\beta\alpha} : U_{\beta\alpha} \times G \rightarrow U_{\beta\alpha} \times G$$

de la forme

$$(x, y) \mapsto (x, \delta_{\beta\alpha}(x, y))$$

où $\delta_{\beta\alpha}$ est une application de classe C^∞ de sorte que les conditions suivantes sont vérifiées

- (1) pour tout $x \in U_{\beta\alpha}$, $\delta_{\beta\alpha}(x, \cdot) : G \rightarrow G$ soit un difféomorphisme
- (2) la « relation de recollement »

$$\vartheta_{\gamma\alpha}^\beta = \vartheta_{\gamma\beta}^\alpha \circ \vartheta_{\beta\alpha}^\gamma$$

est vérifiée.

Notons par $F \rightarrow M$ la fibration ainsi définie (par recollement).

On suppose en outre donnée, pour tout indice α , une application

$$\delta_\alpha : U_\alpha \times F_\alpha \rightarrow G_\alpha$$

de classe C^∞ , avec $\delta_\alpha(x, \cdot)$ un difféomorphisme, et on considère l'application

$$\varphi_\alpha : U_\alpha \times F_\alpha \rightarrow U_\alpha \times G_\alpha : (x, y) \mapsto (x, \delta_\alpha(x, y))$$

telle que le diagramme (*) soit commutatif. Il existe alors un M -isomorphisme et un seul $\varphi : E \rightarrow F$ tel que

$$\varphi_\alpha = \rho_\alpha^{-1} \circ \varphi \circ \sigma_\alpha$$

2. Connexions

Il est question, ici, de rappeler quelques notions sur les connexions linéaires d'un fibré vectoriel. Ces notions sont utilisées dans la suite sans référence explicite à cette section.

2.1. Définition. Soit $\pi : E \rightarrow M$ un fibré vectoriel de type \mathbb{R}^n .

– Une dérivation covariante ∇ de E est une loi qui à tout champ de vecteurs $X \in Vect(M)$ associe une application linéaire

$$\nabla_X : \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(E) : (X, s) \mapsto \nabla_X s$$

telle que pour tous $X, Y \in Vect(M)$, $f, g \in C^\infty(M)$, $s \in \Gamma(E)$

$$(1) \nabla_X(fs) = (X.f)s + f\nabla_X s,$$

$$(2) \nabla_{fX+gY}s = f\nabla_X s + g\nabla_Y s.$$

Pour une trivialisation (U, φ) de E avec U le domaine de carte $(U, (x^1, \dots, x^m))$ de M , il existe une 1-forme Γ de classe C^∞ sur U à valeurs dans $gl(n, \mathbb{R})$ telle que localement on ait

$$\nabla_X s = \sum_{i=1}^m X^i \partial_i s + \Gamma(X)(s)$$

où $\sum_i X^i \partial_i$ est l'expression locale du champ de vecteurs X dans la carte $(U, (x^1, \dots, x^m))$.

– Si ∇ est associé à une connexion sur une réduction du fibré des repères linéaires de E à laquelle le fibré E est associé, alors la forme Γ est à valeurs dans l'algèbre de Lie du groupe de structure de cette réduction. Cette remarque sera utilisée ultérieurement avec le sous-groupe $O(n)$, la réduction étant alors définie par le choix d'un produit scalaire sur chaque fibre de E .

2.2. Relèvement horizontal. Relativement à une connexion linéaire sur $E \rightarrow M$, tout champ de vecteurs X de M se relève en un champ de vecteurs X^h de E tel que si localement, dans un domaine de trivialisatation U de E le champ X se décompose en $\sum_{i=1}^m X^i(x)\partial_i$, on ait pour son relèvement horizontal, dans E_U

$$X^h(x, \mathbf{y}) = \sum_{i=1}^m X^i(x)\partial_i - \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^m X^i(x)\Gamma_i^j(x, \mathbf{y}) \right) \bar{\partial}_j$$

Γ_i^j est de classe C^∞ en x, \mathbf{y} et à valeurs dans \mathbb{R} .

3. Automorphismes infinitésimaux d'un fibré vectoriel

Soit $E \rightarrow M$ un fibré vectoriel de type \mathbb{R}^n . Par définition, un champ de vecteurs $Z \in Vect(E)$ est un automorphisme infinitésimal de E si $[\mathcal{E}, Z] = 0$. Nous convenons de noter l'ensemble des automorphismes infinitésimaux de E par $Aut(E)$. C'est une sous-algèbre de Lie de l'algèbre de Lie $Vect(E)$ des champs de vecteurs de E .

4. Un peu d'algèbre

Dans cette partie, nous présentons quelques notions sur les \mathbb{R} -algèbres associatives commutatives dont nous nous servons dans la suite de ce travail. Elles sont pour l'essentiel tirées de [36].

Soit \mathcal{F} une \mathbb{R} -algèbre associative commutative avec unité. Dans les lignes qui suivent, on dira simplement que \mathcal{F} est une \mathbb{R} -algèbre.

On note par $|\mathcal{F}| := M$, l'ensemble de tous les homomorphismes de \mathbb{R} -algèbres de \mathcal{F} dans \mathbb{R}

$$M \ni x : \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R} : f \mapsto x(f).$$

Les éléments de M sont alors appelés \mathbb{R} -points de l'algèbre \mathcal{F} et l'ensemble $|\mathcal{F}|$, l'espace dual des \mathbb{R} -points.

Une \mathbb{R} -algèbre \mathcal{F} est dite *géométrique* si la partie

$$\mathcal{I}(\mathcal{F}) = \bigcap_{x \in |\mathcal{F}|} \text{Ker } x$$

est réduite à l'élément nul.

PROPOSITION 4.1. *Si \mathcal{F} est une \mathbb{R} -algèbre de fonctions sur un ensemble donné N , alors \mathcal{F} est géométrique.*

DÉMONSTRATION. Précisons que par fonction sur un ensemble N nous entendons une fonction $f : N \rightarrow \mathbb{R}$. Considérons l'application $\theta : N \rightarrow |\mathcal{F}|$ associant à tout point $a \in N$, l'homomorphisme de \mathbb{R} -algèbres $\mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R} : f \mapsto f(a)$. En d'autres termes,

$$\theta(a)(f) = f(a), \quad \forall a \in N, \forall f \in \mathcal{F},$$

et on a bien que $\theta(a)$ est un homomorphisme de \mathbb{R} -algèbres. Observons que par le biais de la définition

$$f(x) := x(f), \quad x \in |\mathcal{F}|, \quad f \in \mathcal{F},$$

tout élément de \mathcal{F} peut-être vu comme fonction sur l'espace dual $|\mathcal{F}|$. En particulier, on a

$$f(\theta(a)) = \theta(a)(f) = f(a).$$

Par suite, si un élément $f \in \mathcal{F}$ s'annule en $\theta(a)$, pour tout $a \in N$, alors f est l'élément nul de la \mathbb{R} -algèbre \mathcal{F} . De l'inclusion

$$\bigcap_{x \in |\mathcal{F}|} \text{Ker } x \subset \bigcap_{a \in N} \text{Ker } \theta(a)$$

on déduit alors que \mathcal{F} est géométrique. \square

Une \mathbb{R} -algèbre géométrique \mathcal{F} est dite C^∞ -fermée si pour toute collection finie d'éléments $f_1, \dots, f_k \in \mathcal{F}$ et toute fonction $g \in C^\infty(\mathbb{R}^k)$, il existe $f \in \mathcal{F}$ tel que

$$f(a) = g(f_1(a), \dots, f_k(a)), \quad \forall a \in |\mathcal{F}|.$$

Notons qu'un tel élément $f \in \mathcal{F}$ est déterminé par les f_i et g de manière unique car \mathcal{F} est géométrique. A titre d'exemple, pour tout $n \in \mathbb{N}_0$, la \mathbb{R} -algèbre $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ est C^∞ -fermée.

Soit \mathcal{F} une \mathbb{R} -algèbre géométrique que nous identifions avec une partie de l'algèbre des fonctions sur $|\mathcal{F}|$. Considérons l'ensemble $\overline{\mathcal{F}}$ défini comme l'ensemble de fonctions sur $|\mathcal{F}|$ pouvant être écrites sous la forme

$$g(f_1, \dots, f_k), \quad k \in \mathbb{N}, \quad f_i \in \mathcal{F}, \quad g \in C^\infty(\mathbb{R}^k).$$

L'ensemble $\overline{\mathcal{F}}$ a une structure évidente de \mathbb{R} -algèbre et \mathcal{F} en est bien une sous-algèbre. En vertu de la proposition 4.1 précédente, $\overline{\mathcal{F}}$ est géométrique. Cette algèbre est également C^∞ -fermée.

Par définition, la \mathbb{R} -algèbre $\overline{\mathcal{F}}$ ainsi associée à la \mathbb{R} -algèbre géométrique \mathcal{F} est appelée *enveloppe lisse* de \mathcal{F} . Elle jouit de la propriété importante suivante.

PROPOSITION 4.2. *Soient \mathcal{F} une \mathbb{R} -algèbre géométrique et $\overline{\mathcal{F}}$ son enveloppe lisse. Pour tout homomorphisme $\Psi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}'$ de \mathbb{R} -algèbres, avec \mathcal{F}' une \mathbb{R} -algèbre C^∞ -fermée, il existe un unique homomorphisme de \mathbb{R} -algèbres $\overline{\Psi} : \overline{\mathcal{F}} \rightarrow \mathcal{F}'$ tel que $\Psi = \overline{\Psi} \circ i$, avec $i : \mathcal{F} \rightarrow \overline{\mathcal{F}}$ l'inclusion canonique.*

DÉMONSTRATION. Considérons la correspondance suivante

$$\overline{\Psi}(g(f_1, \dots, f_k)) = g(\Psi(f_1), \dots, \Psi(f_k))$$

définie de $\overline{\mathcal{F}}$ dans \mathcal{F}' . Cette correspondance est une application. Cela vient directement en utilisant le fait que \mathcal{F}' est géométrique et en observant que pour tout $a' \in |\mathcal{F}'|$, on a bien $a' \circ \Psi \in |\mathcal{F}|$.

Pour l'unicité de cette application, supposons qu'il existe une application $\underline{\Psi} : \overline{\mathcal{F}} \rightarrow \mathcal{F}'$ telle que $\Psi = \underline{\Psi} \circ i$. Alors pour tout $a \in |\mathcal{F}'|$, on peut écrire

$$\begin{aligned} \underline{\Psi}(g(f_1, \dots, f_k)(a)) &= g(f_1, \dots, f_k)(a \circ \underline{\Psi}) \\ &= g(i(f_1), \dots, i(f_k))(a \circ \underline{\Psi}) \\ &= g(f_1, \dots, f_k)(a \circ \underline{\Psi} \circ i) \\ &= g(f_1, \dots, f_k)(a \circ \Psi) \\ &= g(\Psi(f_1), \dots, \Psi(f_k))(a) \end{aligned}$$

On en déduit l'égalité $\underline{\Psi} = \overline{\Psi}$, puisque \mathcal{F}' est géométrique.

L'application $\overline{\Psi}$ ainsi définie est bien un homomorphisme de \mathbb{R} -algèbres. En effet, si

$$g(f_1, \dots, f_j) \cdot g_2(f'_1, \dots, f'_k) = g''(f''_1, \dots, f''_r)$$

alors on a, pour tout $a \in |\widehat{\mathcal{F}}|$,

$$\begin{aligned} \overline{\Psi}(g''(f''_1, \dots, f''_r))(a) &= g''(\Psi(f''_1), \dots, \Psi(f''_r))(a) \\ &= g''(f''_1, \dots, f''_r)(a \circ \Psi) \\ &= (g(f_1, \dots, f_j) \cdot g_2(f'_1, \dots, f'_k))(a \circ \Psi) \\ &= (g(f_1, \dots, f_j)(a \circ \Psi)) \cdot (g_2(f'_1, \dots, f'_k)(a \circ \Psi)) \\ &= (\overline{\Psi}(g(f_1, \dots, f_j)) \cdot \overline{\Psi}(g_2(f'_1, \dots, f'_k)))(a); \end{aligned}$$

ce qui suffit, \mathcal{F}' étant géométrique. \square

On en tire alors le résultat suivant dont une preuve peut être trouvée dans [45].

PROPOSITION 4.3. *Soient \mathcal{F}_1 et \mathcal{F}_2 deux \mathbb{R} -algèbres géométriques. Si $\Psi : \mathcal{F}_1 \rightarrow \mathcal{F}_2$ est un isomorphisme de \mathbb{R} -algèbres, alors il existe un unique isomorphisme de \mathbb{R} -algèbres $\widehat{\Psi} : \overline{\mathcal{F}}_1 \rightarrow \overline{\mathcal{F}}_2$ tel que $\Psi = \widehat{\Psi} \circ i_1$, avec $i_1 : \mathcal{F}_1 \rightarrow \overline{\mathcal{F}}_1$ l'inclusion canonique.*

PROPOSITION 4.4. *Soient \mathcal{F} et \mathcal{G} deux \mathbb{R} -algèbres géométriques. On a alors l'implication suivante*

$$\mathcal{F} \subset \overline{\mathcal{G}} \implies \overline{\mathcal{F}} \subset \overline{\mathcal{G}}.$$

Et l'égalité

$$\overline{\mathcal{F}} = \overline{\overline{\mathcal{F}}}$$

en est un corollaire.

DÉMONSTRATION. Comme $\mathcal{F} \subset \overline{\mathcal{G}}$, notons $i : \mathcal{F} \rightarrow \overline{\mathcal{G}}$ l'injection canonique. D'après la Proposition 4.2, i s'étend en un homomorphisme de \mathbb{R} -algèbres $\bar{i} : \overline{\mathcal{F}} \rightarrow \overline{\mathcal{G}}$. La formule définissant \bar{i} donnée au début de la démonstration de la même Proposition 4.2 permet de voir que \bar{i} n'est rien d'autre que l'injection canonique de $\overline{\mathcal{F}}$ dans $\overline{\mathcal{G}}$.

De l'inclusion $\overline{\mathcal{F}} \subset \overline{\mathcal{F}}$, on tire alors que $\overline{\overline{\mathcal{F}}} \subset \overline{\mathcal{F}}$. D'où la conclusion. \square

Énonçons un dernier résultat dans cette section et dont la preuve peut être trouvée dans [36].

PROPOSITION 4.5. *Soit $E \rightarrow M$ un fibré vectoriel. L'enveloppe lisse de la \mathbb{R} -algèbre $\mathcal{A}(E)$ des fonctions polynomiales en les fibres de E est la \mathbb{R} -algèbre $C^\infty(E)$.*

5. Un peu de topologie

Ici nous regroupons des notions de topologie dont nous nous servons dans la suite. Elles seront, comme certaines autres notions rappelées dans ce chapitre, utilisées dans le reste de ce travail sans nécessairement mentionner un renvoi explicite à elles. Elles sont tirées de [8] et de [42].

5.1. Espaces de Baire. On appelle espace de Baire un espace topologique séparé E ayant la propriété suivante :

Si $F_1, F_2, \dots, F_n, \dots$ est une suite de fermés de E d'intérieur vide, leur union $F = \cup_n F_n$ est encore d'intérieur vide.

5.2. Espaces de Fréchet.

- On appelle *espace localement convexe* un espace vectoriel topologique E dont la topologie peut être définie par une famille de semi-normes. Concrètement, si $(p_\alpha)_{\alpha \in I}$ est une famille de semi-normes définissant la topologie d'un espace localement convexe E , on a un système fondamental de voisinages de 0 dans E en considérant les ensembles

$$W((\alpha_i); r) = \{x \in E : p_{\alpha_i}(x) < r \text{ pour } 1 \leq i \leq n\}$$

où $(\alpha_i)_{1 \leq i \leq n}$ parcourt l'ensemble des familles finies d'indices de I , et r l'ensemble des nombres réels strictement positifs.

- On appelle *espace de Fréchet* un espace localement convexe séparé E dont la topologie peut être définie par une famille dénombrable de semi-normes et qui est complet pour toute distance sur E invariante par translation.
- Les espaces de Fréchet sont métrisables et de Baire.

5.3. Partie absorbante et partie équilibrée.

- Dans un espace vectoriel topologique E sur \mathbb{R} , on dit qu'une partie A est *équilibrée* si pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $|\lambda| \leq 1$, on a

$$\lambda A \subset A.$$

- On dit que A est *absorbant* si, pour tout $x \in E$, il existe un réel $\alpha > 0$ tel que

$$|\lambda| \leq \alpha \Rightarrow \lambda x \in A$$

- Une partie absorbante de E engendre l'espace vectoriel E .
Tout voisinage de 0 est absorbant.

CHAPITRE 2

ALGÈBRES DE POISSON QUANTIQUES ET CLASSIQUES

Comme annoncé dans l'introduction, toutes les notions présentées dans ce chapitre sont tirées des articles de Grabowski et Poncin se trouvant dans notre bibliographie. Dans les chapitres suivants, nous nous servons à la fois des résultats présentés dans ces articles et des méthodes développées pour les obtenir.

1. Quelques définitions

Une *algèbre de Poisson quantique* est une algèbre associative filtrée avec unité,

$$\mathcal{D} = \bigcup_{i=0}^{\infty} \mathcal{D}^i, \quad \mathcal{D}^i \subset \mathcal{D}^{i+1}, \quad \mathcal{D}^i \cdot \mathcal{D}^j \subset \mathcal{D}^{i+j},$$

sur un corps commutatif K de caractéristique nulle telle que

$$[\mathcal{D}^i, \mathcal{D}^j] \subset \mathcal{D}^{i+j-1},$$

où ce crochet est celui des commutateurs. On étend la filtration sur \mathbb{Z} en posant

$$\mathcal{D}^i = 0, \forall i < 0.$$

On observe alors que $\mathcal{A} = \mathcal{D}^0$ est une sous-algèbre associative commutative de \mathcal{D} , appelée *algèbre de base* de \mathcal{D} et que \mathcal{D}^1 est une sous-algèbre de Lie de \mathcal{D} .

En identifiant $k \in K$ et $k1 \in \mathcal{D}$, les éléments de K sont appelés les *constantes* de \mathcal{D} .

Une *algèbre de Poisson classique* est une algèbre commutative associative graduée

$$\mathcal{S} = \bigoplus_{i=0}^{\infty} \mathcal{S}^i, \quad \mathcal{S}^i \mathcal{S}^j \subset \mathcal{S}^{i+j},$$

avec unité 1, sur un corps commutatif K de caractéristique nulle, et munie d'un crochet de Poisson $\{.,.\}$ tel que

$$\{\mathcal{S}^i, \mathcal{S}^j\} \subset \mathcal{S}^{i+j-1}.$$

On observe que $\mathcal{A} = \mathcal{S}^0$ est une sous-algèbre associative de \mathcal{S} et que \mathcal{S}^1 est une sous-algèbre de Lie de $(\mathcal{S}, \{.,.\})$.

Un opérateur $\psi \in \text{Hom}(V_1, V_2)$ entre deux espaces vectoriels \mathbb{Z} -filtrés (resp. gradués) *respecte la filtration* (resp. *respecte la graduation*) si

$$\psi(V_1^i) \subset V_2^i, \quad \forall i \in \mathbb{Z}.$$

REMARQUE 1.1. *Tout élément $D \in \mathcal{D}^1$ induit une dérivation $\widehat{D} \in \text{Der}(\mathcal{A})$ de \mathcal{A} définie par*

$$\widehat{D}(f) = [D, f].$$

PROPOSITION 1.2. *A toute algèbre de Poisson quantique est associée, de manière canonique, une algèbre de Poisson classique.*

DÉMONSTRATION. L'algèbre \mathcal{D} étant quantique, on pose

$$\mathcal{S}(\mathcal{D}) = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} \mathcal{S}^i(\mathcal{D}),$$

où $\mathcal{S}^i(\mathcal{D}) = \mathcal{D}^i / \mathcal{D}^{i-1}$.

Pour $D \in \mathcal{D}$, l'entier i tel que \mathcal{D}^i soit le filtre de moindre indice contenant D est appelé *ordre* de D et on note $i = \text{ord}(D)$. On définit alors le symbole principal de \mathcal{D} par

$$\sigma : \mathcal{D} - \{0\} \longrightarrow \mathcal{S}(\mathcal{D}) : \sigma(D) = D + \mathcal{D}^{i-1}$$

et le symbole $\sigma_i(D)$ d'ordre $i \geq \text{ord}(D)$ par

$$\sigma_i(D) = \begin{cases} 0, & \text{si } i > \text{ord}(D) \\ \sigma(D) & \text{si } i = \text{ord}(D) \end{cases}$$

On a $\sigma(\mathcal{A}) = \mathcal{A} = \mathcal{S}^0$.

On définit alors la multiplication commutative et associative et le crochet de Poisson dans $\mathcal{S}(\mathcal{D})$ par

$$\sigma(D_1) \cdot \sigma(D_2) = \sigma_{\text{ord}(D_1) + \text{ord}(D_2)}(D_1 \cdot D_2);$$

et

$$\{\sigma(D_1), \sigma(D_2)\} = \sigma_{\text{ord}(D_1) + \text{ord}(D_2) - 1}([D_1, D_2]).$$

□

L'algèbre de Poisson classique ainsi définie est appelée *limite classique de l'algèbre de Poisson quantique* considérée.

On a alors le théorème suivant.

THÉORÈME 1.3. *Pour toute algèbre de Poisson quantique \mathcal{D} , il existe une unique structure d'algèbre de Poisson classique sur l'espace gradué $\mathcal{S}(\mathcal{D})$ telle que*

$$\sigma(D_1) \cdot \sigma(D_2) = \sigma_{ord(D_1)+ord(D_2)}(D_1 \cdot D_2)$$

et

$$\{\sigma(D_1), \sigma(D_2)\} = \sigma_{ord(D_1)+ord(D_2)-1}([D_1, D_2]),$$

pour tous $D_1, D_2 \in \mathcal{D}$. En particulier,

$$\{\sigma(D_1), \sigma(D_2)\} = \begin{cases} \sigma([D_1, D_2]) \\ \text{ou} \\ 0. \end{cases}$$

COROLLAIRE 1.4. *Pour tous $D_1, D_2, \dots, D_n \in \mathcal{D}$, si*

$$[D_1, [D_2, \dots, [D_{n-1}, D_n]]] = 0,$$

alors

$$\{\sigma(D_1), \{\sigma(D_2), \dots, \{\sigma(D_{n-1}), \sigma(D_n)\}\}\} = 0.$$

Soit \mathcal{S} une algèbre de Poisson classique.

- (1) \mathcal{S} est *non-singulière* si $\{\mathcal{S}^1, \mathcal{A}\} = \mathcal{A}$
- (2) \mathcal{S} est *symplectique* si son centre est réduit aux constantes.
- (3) \mathcal{S} est *distinguante* si pour tout $P \in \mathcal{S}$, on a

$$\left(\forall f \in \mathcal{A}, \exists n \in \mathbb{N} : \underbrace{\{P, \{P, \dots \{P, f\}\}\}}_{n \text{ fois}} = 0 \right) \Rightarrow P \in \mathcal{A}.$$

- (4) Une algèbre de Poisson quantique est *non-singulière* (respectivement *symplectique* ou *distinguante*) si sa limite classique l'est.

PROPOSITION 1.5. *Soit \mathcal{D} une algèbre de Poisson quantique.*

- (a) *L'algèbre \mathcal{D} est non singulière si $[\mathcal{D}^1, \mathcal{A}] = \mathcal{A}$.*
- (b) *Si \mathcal{D} est symplectique alors son centre est réduit aux constantes.*
- (c) *Si \mathcal{D} est distinguante, alors pour tout $D \in \mathcal{D}$ on a*

$$\forall f \in \mathcal{A}, \exists n \in \mathbb{N} : \underbrace{[D, [D, \dots [D, f]]]}_{n \text{ fois}} = 0 \Rightarrow D \in \mathcal{A}.$$

DÉMONSTRATION. (a) Supposons que $[\mathcal{D}^1, \mathcal{A}] = \mathcal{A}$. Alors

$$\sigma([\mathcal{D}^1, \mathcal{A}]) = \sigma(\mathcal{A}) = \mathcal{A}.$$

D'où le résultat car $\sigma([\mathcal{D}^1, \mathcal{A}]) = \{\mathcal{S}^1(\mathcal{D}), \mathcal{A}\}$.

(b) Supposons que \mathcal{D} soit symplectique. Cela signifie que $\mathcal{S}(\mathcal{D})$ est symplectique; ce qui équivaut à dire que $Z(\mathcal{S}(\mathcal{D}))$, le centre de $\mathcal{S}(\mathcal{D})$, est réduit aux constantes.

Pour conclure, il suffit alors de démontrer que $\sigma(Z(\mathcal{D})) \subset Z(\mathcal{S}(\mathcal{D}))$.

Soit alors $D \in Z(\mathcal{D})$. On a $\sigma(D) \in \mathcal{S}(\mathcal{D})$ et pour tout $P = \sigma(D') \in \mathcal{S}(\mathcal{D})$ on obtient

$$\begin{aligned} \{\sigma(D), P\} &= \{\sigma(D), \sigma(D')\} \\ &= \sigma([D, D']) \\ &= \sigma([D', D]) = \{\sigma(D'), \sigma(D)\} = \{P, \sigma(D)\}. \end{aligned}$$

(c) Il suffit d'appliquer le corollaire du précédent théorème. \square

EXEMPLE 1.6. *L'ensemble $\mathcal{D}(M)$ des opérateurs différentiels linéaires D sur une variété différentielle M , avec*

$$D : C^\infty(M) \longrightarrow C^\infty(M),$$

est une algèbre de Poisson quantique dont la limite classique est

$$\mathcal{P}ol(T^*M) = \mathcal{S}(M),$$

*l'algèbre de Poisson classique des fonctions polynômes sur T^*M .*

Soit \mathcal{L} une algèbre de Lie. On note par $Nil(\mathcal{L})$ la partie définie par

$$Nil(\mathcal{L}) = \{D \in \mathcal{L} : \forall D' \in \mathcal{L}, \exists n \in \mathbb{N} : \underbrace{[D, [D, \dots, [D, D']]]}_{n \text{ fois}} = 0\}$$

2. Caractérisation Lie-algébrique des variétés

LEMME 2.1. *Soient V un ouvert de \mathbb{R}^m et $x_0 = (x_0^1, \dots, x_0^m) \in V$. Pour tout $i \in \{1, \dots, m\}$, il existe une fonction $h \in C^\infty(V)$ et une suite (v_n) à éléments dans V et convergeant vers x_0 telles que toutes les dérivées de h par rapport aux variables distinctes de x^i sont nulles et*

$$(\partial_{x^i}^k h)(v_n) \begin{cases} = 0, \text{ pour tout } k \in \{0, \dots, n-1\} \\ \text{et} \\ \neq 0 \text{ pour } k = n. \end{cases}$$

THÉORÈME 2.2. *Soit $\mathcal{D}(M)$ l'algèbre de Poisson quantique des opérateurs différentiels linéaires.*

(1) *Quel que soit $D \in \mathcal{D}(M)$,*

$$(\forall f \in \mathcal{A}(M), \exists n \in \mathbb{N} : (adD)^n(f) = 0) \Rightarrow D \in \mathcal{A}(M).$$

(2) *L'algèbre $\mathcal{D}(M)$ est non-singulière.*

(3) *Si de plus la variété M est connexe, l'algèbre $\mathcal{D}(M)$ est symplectique.*

Une manière de démontrer la relation (1) est proposée dans [18] et une autre dans [17]. Elles sont omises ici ; signalons que celle proposée dans [17] est basée sur le Lemme 2.1 précédent.

La relation (2) est établie dans [35].

PROPOSITION 2.3. *Si \mathcal{L} est une algèbre de Poisson quantique ou classique distinguante de base \mathcal{A} , alors*

$$(a) Nil(\mathcal{L}) = \mathcal{A};$$

$$(b) \{P \in \mathcal{S} : \{P, \mathcal{A}\} \subset \mathcal{S}^i\} = \mathcal{S}^{i+1} \oplus \mathcal{A}, (i \geq -1),$$

dans le cas où $\mathcal{L} = \mathcal{S}$ est classique. Et dans le cas où $\mathcal{L} = \mathcal{D}$ est quantique, on a

$$(c) \{D \in \mathcal{D} : [D, \mathcal{A}] \subset \mathcal{D}^i\} = \mathcal{D}^{i+1}.$$

DÉMONSTRATION. (a) Dans le cas quantique, en vertu de la Proposition 1.5, $Nil(\mathcal{L}) \subset \mathcal{A}$. Et l'inclusion réciproque est évidente. Ce résultat est direct dans le cas où \mathcal{L} est classique.

(b) L'inclusion

$$\{P \in \mathcal{S} : \{P, \mathcal{A}\} \subset \mathcal{S}_i\} \supset \mathcal{S}_{i+1} \oplus \mathcal{A}$$

étant immédiate, il reste à établir l'inclusion réciproque.

Soit $P \in \mathcal{S}$ tel que $\{P, \mathcal{A}\} \subset \mathcal{S}_i$.

Si $P \in \mathcal{S}_{i+1}$, le problème est résolu. Supposons donc pour terminer que

$$P \in \mathcal{S} \ominus \mathcal{S}_{i+1} := (\mathcal{S} - \mathcal{S}_{i+1}) \cup \{0\}.$$

On peut donc écrire P comme somme des $H_j \in \mathcal{S}_j$, ($j = 0, 1, \dots$) tel qu'au moins pour un $k \neq i + 1$ on ait $H_k \neq 0$.

Relativement à cette décomposition de P , $\{P, \mathcal{A}\}$ se décompose en une somme des $\{H_j, \mathcal{A}\}$ telle que

$$\{H_k, \mathcal{A}\} \subset \mathcal{S} \ominus \mathcal{S}_i.$$

(c) De manière analogue que dans (b), l'inclusion suivante est directe :

$$\{D \in \mathcal{D} : [D, \mathcal{A}] \subset \mathcal{D}^i\} \supset \mathcal{D}^{i+1}.$$

Pour l'inclusion réciproque, supposons par l'absurde que $D \in \mathcal{D} - \mathcal{D}^{i+1}$ et $[D, \mathcal{A}] \subset \mathcal{D}^i$.

Observons qu'alors

$$ord(D) - 1 > i$$

et que

$$\forall f \in \mathcal{A}, \mathcal{D}^{ord(D)+ord(f)-1} = \mathcal{D}^{ord(D)-1}.$$

Or le crochet $\{\sigma(D_1), \sigma(D_2)\}$ vaut $\sigma([D_1, D_2])$ dans le cas où

$$\mathcal{D}^{ord(D_1)+ord(D_2)-1}$$

est le plus petit filtre contenant $[D_1, D_2]$ et il est nul dans le cas contraire. Donc on a bien

$$\{\sigma(D), \mathcal{A}\} = \{0\} \text{ car } [D, \mathcal{A}] \subset \mathcal{D}^i.$$

La limite classique de \mathcal{D} étant distinguante par hypothèse, on conclut que $\sigma(D) \in \mathcal{A}$. Ce qui est absurde. \square

REMARQUE 2.4. On notera par $\mathcal{C}(\mathcal{D})$ le centralisateur de $ad_{\mathcal{A}}$ dans $Hom_K(\mathcal{D}, \mathcal{D})$:

$$\begin{aligned}\Psi \in \mathcal{C}(\mathcal{D}) &\Leftrightarrow [\Psi, ad_{\mathcal{A}}] = 0 \\ &\Leftrightarrow \Psi \circ ad_f - ad_f \circ \Psi = 0, \forall f \in \mathcal{A}.\end{aligned}$$

Cela se traduit par :

$$\forall D \in \mathcal{D}, \Psi(ad_f(D)) = ad_f(\Psi(D)), \forall f \in \mathcal{A},$$

ou de manière équivalente par

$$\Psi([D, f]) = [\Psi(D), f], \forall f \in \mathcal{A}.$$

Observons que la multiplication à gauche par un élément $f \in \mathcal{A}$, notée et définie par

$$\gamma_f : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D} : D \mapsto f \cdot D,$$

est un élément de $\mathcal{C}(\mathcal{D})$.

Dans les lignes qui suivent, on énonce un résultat démontré par J. Grabowski et N. Poncin mais dont la preuve est omise ici. Mais plus loin, à la Proposition 1.6 du chapitre suivant, nous présentons la preuve de Grabowski et Poncin avec des hypothèses moins fortes.

THÉORÈME 2.5. Soit \mathcal{D} est une algèbre de Poisson quantique distinguante et non-singulière. Alors tout $\Psi \in \mathcal{C}(\mathcal{D})$ respecte la filtration et pour tout $f \in \mathcal{A}$ on a

$$\Psi(f) = f\Psi(1).$$

THÉORÈME 2.6. Soient \mathcal{D}_1 et \mathcal{D}_2 deux algèbres de Poisson quantiques distinguantes et non-singulières. Alors tout isomorphisme $\Phi : \mathcal{D}_1 \rightarrow \mathcal{D}_2$ d'algèbres de Lie respecte la filtration et sa restriction $\Phi|_{\mathcal{A}_1}$ à \mathcal{A}_1 est de la forme

$$\Phi|_{\mathcal{A}_1} = k\Psi,$$

où k est un élément central de \mathcal{S}_2 et inversible dans l'algèbre associative \mathcal{A}_2 et $\Psi : \mathcal{A}_1 \rightarrow \mathcal{A}_2$ est un isomorphisme d'algèbres associatives. Le résultat reste valable si \mathcal{D}_1 et \mathcal{D}_2 sont remplacées par leurs sous-algèbres de Lie respectives \mathcal{D}_1^1 et \mathcal{D}_2^1 .

DÉMONSTRATION. Les ensembles $End_K(\mathcal{D}_1)$ et $End_K(\mathcal{D}_2)$ étant des algèbres de Lie, considérons l'isomorphisme d'algèbres de Lie

$$\Phi_* : End_K(\mathcal{D}_1) \rightarrow End_K(\mathcal{D}_2)$$

défini, pour $\Theta \in End_K(\mathcal{D}_1)$, par :

$$\Phi_*(\Theta) = \Phi \circ \Theta \circ \Phi^{-1}.$$

Démontrons maintenant que

$$\Phi_*(\mathcal{C}(\mathcal{D}_1)) = \mathcal{C}(\mathcal{D}_2).$$

Il suffira de démontrer l'inclusion dans un sens. Pour tout $\Theta \in \mathcal{C}(\mathcal{D}_1)$, on a pour tout $D \in \mathcal{D}_2$

$$\begin{aligned}\Phi_*(\Theta)([D, \mathcal{A}_2]) &= \Phi(\Theta([\Phi^{-1}(D), \mathcal{A}_1])) = \Phi([\Theta(\Phi^{-1}(D)), \mathcal{A}_1]) \\ &= [\Phi(\Theta(\Phi^{-1}(D))), \mathcal{A}_2] = [\Phi_*(\Theta)(D), \mathcal{A}_2].\end{aligned}$$

En particulier, on a

$$\Phi_*(\gamma_g) \in \mathcal{C}(\mathcal{D}_2), \forall g \in \mathcal{A}_1.$$

On en déduit que

$$\Phi_*(\gamma_g)(h) = \Phi_*(\gamma_g)(1).h, \quad \forall h \in \mathcal{A}_2,$$

c'est-à-dire quel que soit l'élément $h \in \mathcal{A}_2$,

$$\Phi(g.\Phi^{-1}(h)) = \Phi(g.\Phi^{-1}(1)).h, \quad (2)$$

Observons que, $\Phi^{-1}(1)$ est central dans \mathcal{D}_1 (pour la structure d'algèbre de Lie de \mathcal{D}_1). En substituant $\Phi(f)$, ($f \in \mathcal{A}_1$) à h dans (2), on obtient

$$\Phi(f.g) = \Phi(g.\Phi^{-1}(1)).\Phi(f),$$

quels que soient $f, g \in \mathcal{A}_1$.

Par suite, en posant $\zeta = \Phi^{-1}(1)$, on obtient

$$\begin{aligned}\Phi(f.g) &= \Phi(g.f) = \Phi(g.\zeta).\Phi(f) \\ &= \Phi(f).\Phi(g.\zeta) \\ &= \Phi(f).\Phi(g).\Phi(\zeta.\zeta)\end{aligned}$$

On écrit donc, quels que soient $f, g \in \mathcal{A}_1$,

$$\Phi(f.g) = \Phi(\zeta^2).\Phi(f).\Phi(g).$$

En particulier, pour $f = 1$ et $g = \zeta$, on a

$$\Phi(\zeta^2).\Phi(1) = 1,$$

ce qui traduit que l'élément $\Phi(\zeta^2)$, central dans \mathcal{D}_2 , est inversible dans l'algèbre associative \mathcal{A}_2 .

D'où, en posant $\Phi(\zeta^2) = k^{-1}$ et définissant Ψ par

$$\Psi(f) = k^{-1}.\Phi(f), \forall f \in \mathcal{A},$$

on a directement, quels que soient $f, g \in \mathcal{A}$,

$$\Psi(f.g) = k^{-1}.\Phi(f.g) = \Psi(f).\Psi(g).$$

Ce qui achève la démonstration du théorème. □

Les résultats précédents restent valables si on remplace les algèbres de Poisson quantiques \mathcal{D}_i , ($i = 1, 2$) par des algèbres de Poisson classiques \mathcal{S}_i , ($i = 1, 2$). (La démonstration est analogue)

On peut donc énoncer le résultat suivant.

THÉORÈME 2.7. *Soient \mathcal{S}_1 et \mathcal{S}_2 deux algèbres de Poisson classiques distinguantes et non-singulières. Alors tout isomorphisme $\Phi : \mathcal{S}_1 \rightarrow \mathcal{S}_2$ d'algèbres de Lie respecte la graduation et sa restriction $\Phi|_{\mathcal{A}_1}$ à \mathcal{A}_1 est de la forme*

$$\Phi|_{\mathcal{A}_1} = k\Psi,$$

où k est un élément central de \mathcal{S}_2 et inversible dans l'algèbre associative \mathcal{A}_2 et $\Psi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ est un isomorphisme d'algèbres associatives. Le résultat reste valable si \mathcal{S}_1 et \mathcal{S}_2 sont remplacées par leurs sous-algèbres de Lie respectives \mathcal{S}_1^1 et \mathcal{S}_2^1 .

COROLLAIRE 2.8. *Si deux algèbres de Poisson quantiques (respectivement classiques) distinguantes \mathcal{P}_1 et \mathcal{P}_2 et non-singulières sont des algèbres de Lie isomorphes, alors leurs algèbres de base respectives \mathcal{A}_1 et \mathcal{A}_2 sont des algèbres associatives isomorphes. Ce résultat reste valable si on remplace ces algèbres par leurs sous-algèbres de Lie \mathcal{P}_1^1 et \mathcal{P}_2^1 : si \mathcal{P}_1^1 et \mathcal{P}_2^1 sont isomorphes alors les algèbres de base \mathcal{A}_1 et \mathcal{A}_2 sont des algèbres associatives isomorphes.*

Considérons de nouveau l'algèbre de Poisson quantique $\mathcal{D} = \mathcal{D}(M)$ des opérateurs différentiels linéaires d'une variété différentielle M , supposée de Hausdorff, à base dénombrable et connexe.

On démontre le résultat suivant :

THÉORÈME 2.9. *Théorème de Milnor*
Soient M et N deux variétés différentielles. Une application

$$\Phi : C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(N)$$

est un isomorphisme d'algèbres associatives si et seulement si il existe un difféomorphisme $\phi : N \rightarrow M$ tel que

$$\Phi(f) = f \circ \phi, \forall f \in C^\infty(M) \quad (*).$$

On peut maintenant énoncer le résultat de type Pursell-Shanks suivant.

THÉORÈME 2.10. *Les algèbres de Lie $\mathcal{D}(M_1)$ et $\mathcal{D}(M_2)$ (respectivement $\mathcal{D}^1(M_1)$ et $\mathcal{D}^1(M_2)$ ou $\mathcal{S}(M_1)$ et $\mathcal{S}(M_2)$) des opérateurs différentiels (respectivement des opérateurs différentiels du premier ordre ou des tenseurs symétriques contravariants) sur deux variétés différentielles M_1 et M_2 sont isomorphes si et seulement si les variétés M_1 et M_2 sont difféomorphes.*

Terminons cette partie par le résultat suivant qui met en relation les algèbres de Poisson quantiques $\mathcal{D}(M)$ et $\mathcal{D}(L)$, cette dernière étant celle des opérateurs différentiels agissant sur les sections d'un fibré en droite $L \rightarrow M$.

THÉORÈME 2.11. *Il existe un isomorphisme $\Psi : \mathcal{D}(M) \rightarrow \mathcal{D}(L)$ d'algèbres de Lie tel que*

$$\Psi(\mathcal{D}^k(M)) = \mathcal{D}^k(L), \quad \forall k \in \mathbb{Z}.$$

CHAPITRE 3

ALGÈBRE DE LIE DES OPÉRATEURS DIFFÉRENTIELS HOMOGÈNES D'UN FIBRÉ VECTORIEL

Soit $E \rightarrow M$ un fibré vectoriel. L'algèbre de Lie des opérateurs différentiels agissant sur les fonctions de classe C^∞ de E est notée par $\mathcal{D}(E)$ et peut être définie par

$$\mathcal{D}(E) = \bigcup_{i \geq 0} \mathcal{D}^i(E),$$

avec $\mathcal{D}^0(E) = C^\infty(E)$, $\mathcal{D}^{i+1}(E) = \{T \in \text{Hom}_{\mathbb{R}}(C^\infty(E); C^\infty(E)) : [T, C^\infty(E)] \subset \mathcal{D}^i(E)\}$.

Observons déjà que l'algèbre de Poisson quantique $\mathcal{D}(E)$ caractérise Lie-algébriquement la variété E au sens « Grabowski-Poncin » comme nous l'avons vu dans le chapitre précédent. Et cela équivaut à dire que l'algèbre associative $C^\infty(E)$, caractérise la variété E . Ainsi, pour deux fibrés vectoriels $E \rightarrow M$ et $F \rightarrow N$, le fait que les algèbres de Lie $\mathcal{D}(E)$ et $\mathcal{D}(F)$ sont isomorphes signifie que les variétés E et F sont difféomorphes, et cela, indépendamment du fait que les variétés M et N sont difféomorphes ou pas.

Nous allons construire, dans ce chapitre, une sous-algèbre de Poisson quantique de $\mathcal{D}(E)$ contenant, à isomorphisme près, l'algèbre de Poisson quantique $\mathcal{D}(M)$ et ayant « suffisamment d'informations » sur la structure du fibré $E \rightarrow M$, de manière à avoir une caractérisation Lie-algébrique.

1. Opérateurs différentiels homogènes

Soit $E \rightarrow M$ un fibré vectoriel. Considérons $\mathcal{D}_{\mathcal{E}}(E, M)$ le \mathbb{R} -espace vectoriel défini par

$$\mathcal{D}_{\mathcal{E}}(E, M) = \bigcup_{k \geq 0} \mathcal{D}_{\mathcal{E}}^k(E, M),$$

avec $\mathcal{D}_{\mathcal{E}}^k(E, M)$ l'espace engendré par l'ensemble

$$\{T \in \mathcal{D}^k(E) \mid \exists s \in \mathbb{Z} : L_{\mathcal{E}}T = sT\}$$

et où $L_{\mathcal{E}}$ désigne la dérivée de Lie dans la direction du champ d'Euler \mathcal{E} du fibré vectoriel $E \rightarrow M$.

L'espace $\mathcal{D}_{\mathcal{E}}(E, M)$ est une sous-algèbre de Lie de $\mathcal{D}(E)$ satisfaisant aux conditions suivantes.

$$\mathcal{D}_{\mathcal{E}}^k(E, M) \subset \mathcal{D}_{\mathcal{E}}^{k+1}(E, M), \quad \mathcal{D}_{\mathcal{E}}^k(E, M) \cdot \mathcal{D}_{\mathcal{E}}^l(E, M) \subset \mathcal{D}_{\mathcal{E}}^{k+l}(E, M)$$

et

$$[\mathcal{D}_{\mathcal{E}}^k(E, M), \mathcal{D}_{\mathcal{E}}^l(E, M)] \subset \mathcal{D}_{\mathcal{E}}^{k+l-1}(E, M).$$

Les éléments de l'algèbre de Lie $\mathcal{D}_{\mathcal{E}}(E, M)$ seront appelés *opérateurs (différentiels) homogènes* du fibré vectoriel $E \rightarrow M$. Ainsi, l'algèbre de Lie $\mathcal{D}_{\mathcal{E}}(E, M)$ est une algèbre de Poisson quantique, admettant comme base l'algèbre associative commutative $\mathcal{A}(E, M) = \mathcal{D}_{\mathcal{E}}^0(E; M)$, l'algèbre des fonctions de classe C^∞ de E qui sont polynomiales en les fibres.

On a ainsi

$$\mathcal{A}(E, M) = \bigoplus_{s \geq 0} \mathcal{A}^s(E, M)$$

avec $\mathcal{A}^s(E, M) = \{u \in \mathcal{A}(E, M) : L_{\mathcal{E}}u = su\}$.

Dans la proposition suivantes, nous regroupons quelques propriétés élémentaires des opérateurs homogènes. Nous nous en servons souvent dans la suite sans préciser la référence à cette proposition.

PROPOSITION 1.1. *Soit $\mathcal{D}_{\mathcal{E}}(E, M)$ l'algèbre de Poisson quantique des opérateurs homogènes d'un fibré vectoriel $E \rightarrow M$. Alors on a*

$$\mathcal{D}_{\mathcal{E}}(E, M) = \bigoplus_{r \in \mathbb{Z}} \mathcal{D}_{\mathcal{E}, r}(E, M), \quad (*)$$

avec $\mathcal{D}_{\mathcal{E}, r}(E, M)$ le \mathbb{R} -espace propre associé à la valeur propre r de $L_{\mathcal{E}}$. De plus, on a

$$[\mathcal{D}_{\mathcal{E}, r}(E, M), \mathcal{D}_{\mathcal{E}, s}(E, M)] \subset \mathcal{D}_{\mathcal{E}, r+s}(E, M) \quad (**)$$

et pour $T \in \mathcal{D}_{\mathcal{E}, r}(E, M)$ et $u \in \mathcal{A}^r(E, M)$ on a

$$T(u) \in \mathcal{A}^{r+s}(E, M). \quad (***)$$

DÉMONSTRATION. La relation (*) est immédiate. Pour tous $T \in \mathcal{D}_{\mathcal{E}, r}(E, M)$ et $D \in \mathcal{D}_{\mathcal{E}, s}(E, M)$, on a par l'identité de Jacobi

$$\begin{aligned} L_{\mathcal{E}}([D, T]) &= [\mathcal{E}, [D, T]] = [[\mathcal{E}, D], T] + [D, [\mathcal{E}, T]] \\ &= r[D, T] + s[D, T] = (r + s)[D, T]. \end{aligned}$$

Si maintenant on considère $u \in \mathcal{A}^s(E, M)$, alors on a d'une part

$$(L_{\mathcal{E}}T)(u) = rT(u),$$

car $T \in \mathcal{D}_{\mathcal{E}, r}(E, M)$, et de l'autre

$$(L_{\mathcal{E}}T)(u) = \mathcal{E}(T(u)) - T(\mathcal{E}(u)).$$

Par suite,

$$\mathcal{E}(T(u)) = rT(u) + sT(u)$$

et la relation (***) est ainsi vérifiée. \square

REMARQUE 1.2. *Dans la suite, les éléments de $\mathcal{D}_{\mathcal{E}}(E; M)$ sont vus comme endomorphismes de l'espace vectoriel $\mathcal{A}(E, M)$.*

1.1. Une caractérisation locale de l'algèbre $\mathcal{D}_\varepsilon(E, M)$.

PROPOSITION 1.3. *Si $T \in \mathcal{D}_\varepsilon(E, M)$ a comme expression locale*

$$T = \sum_{|\alpha|+|\beta|\leq k} u_{\alpha,\beta} \partial^\alpha \bar{\partial}^\beta,$$

dans une trivialisatoin de E , avec $((x^i)_{1\leq i\leq m}, (y^j)_{1\leq j\leq n})$, comme coordonnées locales, alors $u_{\alpha,\beta}$ est polynômial en y .

DÉMONSTRATION. Plus précisément, nous allons montrer que pour tout $T \in \mathcal{D}_\varepsilon(E, M)$ dont l'expression locale est de la forme donnée dans l'énoncé et vérifiant

$$L_\varepsilon T = rT \quad (*)$$

on a que $u_{\alpha,\beta}$ est une fonction polynomiale en les fibres et homogène de poids $|\beta| + r$; avec la convention $\mathcal{A}^i(E) = \{0\}$, pour $i \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$. Observons que pour tout $f \in C^\infty(E)$, on a

$$\begin{aligned} (L_\varepsilon \bar{\partial}_i) f &= L_\varepsilon(\bar{\partial}_i f) - \bar{\partial}_i(L_\varepsilon f) \\ &= \sum_j (y^j \bar{\partial}_{ji} f) - \sum_j (\bar{\partial}_i(y^j \bar{\partial}_j f)) = -\bar{\partial}_i f. \end{aligned}$$

On en déduit l'égalité suivante

$$L_\varepsilon(\bar{\partial}^\beta) = -|\beta| \bar{\partial}^\beta.$$

Par suite, pour tout $u \in \mathcal{A}(E, M)$,

$$\begin{aligned} L_\varepsilon(u_{\alpha,\beta} \partial^\alpha \bar{\partial}^\beta)(u) &= L_\varepsilon(u_{\alpha,\beta} \partial^\alpha \bar{\partial}^\beta u) - u_{\alpha,\beta} \partial^\alpha \bar{\partial}^\beta(L_\varepsilon u) \\ &= (L_\varepsilon u_{\alpha,\beta}) \partial^\alpha \bar{\partial}^\beta u + u_{\alpha,\beta} L_\varepsilon(\partial^\alpha \bar{\partial}^\beta u) - u_{\alpha,\beta} \partial^\alpha \bar{\partial}^\beta(L_\varepsilon u) \\ &= (L_\varepsilon u_{\alpha,\beta}) \partial^\alpha \bar{\partial}^\beta u + u_{\alpha,\beta} \partial^\alpha L_\varepsilon(\bar{\partial}^\beta u) - u_{\alpha,\beta} \partial^\alpha \bar{\partial}^\beta(L_\varepsilon u) \\ &= (L_\varepsilon u_{\alpha,\beta}) \partial^\alpha \bar{\partial}^\beta u + u_{\alpha,\beta} \partial^\alpha \left((L_\varepsilon \bar{\partial}^\beta) u + \bar{\partial}^\beta(L_\varepsilon u) \right) \\ &\quad - u_{\alpha,\beta} \partial^\alpha \bar{\partial}^\beta(L_\varepsilon u) \\ &= (L_\varepsilon u_{\alpha,\beta}) \partial^\alpha \bar{\partial}^\beta u - |\beta| u_{\alpha,\beta} \partial^\alpha \bar{\partial}^\beta u. \end{aligned}$$

D'où, en appliquant la relation (*), on peut alors écrire

$$\sum_{|\alpha|+|\beta|\leq k} (L_\varepsilon u_{\alpha,\beta} - (|\beta| + r) u_{\alpha,\beta}) \partial^\alpha \bar{\partial}^\beta u = 0,$$

pour tout $u \in \mathcal{A}(E; M)$. Par suite, pour tous indices α, β tels que $|\alpha| + |\beta| \leq k$, on a

$$L_\varepsilon u_{\alpha,\beta} - (|\beta| + r) u_{\alpha,\beta} = 0$$

et donc $u_{\alpha,\beta}$ est homogène de poids $|\beta| + r$. \square

REMARQUE 1.4. Observons qu'en vertu de la Proposition 1.3, si $T \in \mathcal{D}(E, M)$ est tel que $L_{\mathcal{E}}T = rT$, on peut avoir $r \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$; bien que pour $f \in C^\infty(E)$ la relation $L_{\mathcal{E}}(f) = sf$ impose qu'on ait $s \in \mathbb{N}$.

Les éléments de $\mathcal{D}_{\mathcal{E}}(E, M)$ qui sont vecteurs propres de $L_{\mathcal{E}}$ associés à des valeurs propres appartenant à \mathbb{N} engendrent une sous-algèbre de Lie de $\mathcal{D}_{\mathcal{E}}(E, M)$, en vertu de la Proposition 1.1 de la section précédente. On note cette sous-algèbre par $\mathcal{D}_+(E, M)$ et on a directement

$$\mathcal{D}_+(E, M) = \bigoplus_{r \geq 0} \mathcal{D}_{\mathcal{E}, r}(E, M) = \bigcup_{i \geq 0} \mathcal{D}_+^i(E, M),$$

où, par définition, on a posé

$$\mathcal{D}_+^i(E, M) = \mathcal{D}_+(E, M) \cap \mathcal{D}_{\mathcal{E}}^i(E, M).$$

1.2. Caractérisation Lie-algébrique de l'algèbre des fonctions polynomiales. Dans cette partie, pour un fibré vectoriel $\pi : E \rightarrow M$, nous noterons plus simplement l'algèbre de Poisson quantique $\mathcal{D}_{\mathcal{E}}(E, M)$ par $\mathcal{D}_{\mathcal{E}}(E)$ et sa base par $\mathcal{A}(E)$.

DÉFINITION 1. Une algèbre de Poisson quantique \mathcal{D} de base l'algèbre associative commutative \mathcal{A} et de limite classique \mathcal{S} est dite *quasi-distinguante* si, pour tout $P \in \mathcal{S}$,

$$\{P, \mathcal{A}\} = 0 \implies P \in \mathcal{A}.$$

Notons par $\mathcal{S}_{\mathcal{E}}(E)$ l'espace $\{\sigma(T) : T \in \mathcal{D}_{\mathcal{E}}(E)\}$ où $\sigma(T)$ désigne le symbole principal de $T \in \mathcal{D}_{\mathcal{E}}(E)$. Cet ensemble $\mathcal{S}_{\mathcal{E}}(E)$ est une partie de l'algèbre de Poisson classique

$$\mathcal{S}(E) = \{\sigma(T) : T \in \mathcal{D}(E)\} \cong \text{Pol}(T^*E).$$

La restriction du crochet de Poisson de $\text{Pol}(T^*E)$ à $\mathcal{S}_{\mathcal{E}}(E)$ fait de ce dernier espace une algèbre de Poisson classique que nous identifions à la limite classique de l'algèbre de Poisson quantique $\mathcal{D}_{\mathcal{E}}(E)$.

L'algèbre $\mathcal{D}_{\mathcal{E}}(E)$ serait *distinguante* si pour tout $P \in \mathcal{S}_{\mathcal{E}}(E)$ on avait

$$\left(\forall u \in \mathcal{A}(E), \exists n \in \mathbb{N} : \underbrace{\{P, \{P, \dots \{P, u\}\}\}}_{n \text{ fois}} = 0 \right) \Rightarrow (P \in \mathcal{S}_{\mathcal{E}}^0(E) = \mathcal{A}(E)).$$

Ce n'est pas le cas. En effet, considérons $P \in \mathcal{S}_{\mathcal{E}}(E) \setminus \mathcal{S}_{\mathcal{E}}^0(E)$ dont le champ hamiltonien s'écrit localement dans une carte de $T^*(E)$ de coordonnées locales $(x^i, y^j, \xi_i, \eta_j)_{(1 \leq i \leq m; 1 \leq j \leq n)}$ associées aux coordonnées $(x^i, y^j)_{(1 \leq i \leq m; 1 \leq j \leq n)}$ de la carte correspondante de E

$$H_P = A \partial_{y^1}$$

avec $\partial_{y^1}(A) = 0$. On a alors pour tout $u \in \mathcal{A}(E)$,

$$H_P(u) = A \partial_{y^1}(u).$$

Et on tire donc que

$$(adP)^n(u) = (H_P)^n(u) = A^n \partial_{y^1}^n(u).$$

Puisque u est de degré fini en y^1 , il existe bien $n \in \mathbb{N}$ tel que

$$(adP)^n(u) = 0.$$

Les méthodes appliquées à $\mathcal{D}(M)$ au chapitre précédent pour caractériser l'algèbre de base $A(M) = C^\infty(M)$ ne sont plus entièrement valables pour l'algèbre $\mathcal{D}_{\mathcal{E}}(E)$.

Dans les lignes qui suivent, nous proposons une adaptation de ces méthodes pour obtenir des résultats similaires.

Précisons également que nous supposons fixée, pour un fibré vectoriel donné $E \rightarrow M$, une connexion linéaire, relativement à la quelle, pour tout champ de vecteurs X de M , nous notons par X^h le relèvement horizontal.

PROPOSITION 1.5. *Soit $\pi : E \rightarrow M$ un fibré vectoriel. L'algèbre de Poisson quantique $\mathcal{D}_{\mathcal{E}}(E)$ est non-singulière, symplectique et quasi-distinguante.*

DÉMONSTRATION. Montrons d'abord que $\mathcal{D}_{\mathcal{E}}(E)$ est non-singulière ; c'est-à-dire que l'égalité

$$[\mathcal{D}_{\mathcal{E}}^1(E), \mathcal{A}(E)] = \mathcal{A}(E)$$

est bien vérifiée. Notons que l'inclusion

$$[\mathcal{D}_{\mathcal{E}}^1(E), \mathcal{A}(E)] \subset \mathcal{A}(E)$$

est immédiate. Pour l'autre sens de l'inclusion, si $u \in \mathcal{A}^r(E)$ avec $r \neq 0$ on a l'égalité

$$u = (r^{-1}\mathcal{E}) \cdot u.$$

Et pour $r = 0$, on peut écrire

$$u = \sum_i X_i^h \cdot (\pi^* v_i),$$

avec $u = \pi^* v$, $v \in C^\infty(M)$, en utilisant la décomposition

$$v = \sum_i X_i \cdot v_i,$$

où $X_i \in Vect(M)$ et $v_i \in C^\infty(M)$; X_i^h étant le relèvement horizontal de X_i par rapport à une connexion sur E . Cette dernière décomposition découlant du fait que $\mathcal{D}(M)$ est non-singulière.

Montrons ensuite que $\mathcal{D}_{\mathcal{E}}(E)$ est quasi-distinguante. Soit $P \in \mathcal{S}_{\mathcal{E}}(E)$ tel que le champ hamiltonien associé soit localement décrit par

$$H_P = A_i \partial_{x^i} + B_j \partial_{y^j} - C_i \partial_{\xi_i} - D_j \partial_{\eta_j}.$$

Supposons que P commute avec $\mathcal{A}(E)$. Il commute alors en particulier avec $\mathcal{A}^0(E)$ et on a donc

$$A_i = \partial_{\xi_i}(P) = 0, \quad \forall i \in \{1, \dots, m\}.$$

La relation $A_i = 0$ combinée avec le choix des $u_j \in \mathcal{A}(E)$ convenables permettent de déduire de l'égalité $H_P(u_j) = 0$ que pour tout $j \in \{1, \dots, p\}$, on a bien

$$B_j = \partial_{\eta_j}(P) = 0.$$

En effet, il suffit de considérer des fonctions $v_j \in \mathcal{A}(E)$ tel que localement, dans une carte adaptée au fibré, on ait $v_j(x, y) = f_j(x)y^j$, avec $f \in C^\infty(M)$. On a ainsi obtenu le résultat cherché.

Démontrons maintenant que l'algèbre de Poisson quantique $\mathcal{D}_\mathcal{E}(E)$ est symplectique. Comme $\mathcal{D}_\mathcal{E}(E)$ est quasi-distinguante, le centre de $\mathcal{S}_\mathcal{E}(E)$ est donc une partie de $\mathcal{A}(E)$. De plus, si $u \in Z(\mathcal{S}_\mathcal{E}(E))$, on a $\{\sigma(T), u\} = 0$, pour tout $T \in \mathcal{D}_\mathcal{E}^1(E)$; on en déduit que u est localement constant, en passant aux coordonnées locales, et cela est suffisant puisque la variété E est supposée connexe. \square

PROPOSITION 1.6. *Soit \mathcal{D} une algèbre de Poisson quantique de base \mathcal{A} et de limite classique \mathcal{S} . Si l'algèbre \mathcal{D} est non-singulière et quasi-distinguante, alors*

- (1) *pour tout $i \in \mathbb{N}$, $\{D \in \mathcal{D} : [D, \mathcal{A}] \subset \mathcal{D}^i\} = \mathcal{D}^{i+1}$;*
- (2) *tout $\psi \in \mathcal{C}(\mathcal{D})$ préserve la filtration de \mathcal{D} ;*
- (3) *pour tout $\psi \in \mathcal{C}(\mathcal{D})$ et tout $u \in \mathcal{A}$, $\psi(u) = \psi(1)u$.*

DÉMONSTRATION. La preuve est similaire à celle proposée dans [18]. Nous proposons ici les grandes lignes de la démonstration de manière à montrer que le fait pour l'algèbre de Poisson quantique \mathcal{D} d'être quasi-distinguante est suffisant.

(1) Si $D \in \mathcal{D} \setminus \mathcal{D}^{i+1}$ et $[D, \mathcal{A}] \subset \mathcal{D}^i$, alors $\{\sigma(D), \mathcal{A}\} = 0$. Comme \mathcal{D} est quasi-distinguante, alors $\sigma(D) \in \mathcal{A}$. On en conclut que $D \in \mathcal{A}$; ce qui est absurde puisque $\mathcal{A} \subset \mathcal{D}^{i+1}$.

(2) Nous procédons par induction. Pour tout $D \in \mathcal{D}$, on a

$$\psi([D, \mathcal{A}]) = [\psi(D), \mathcal{A}].$$

En particulier, pour $D \in \mathcal{A} = \mathcal{D}^0$, cette égalité donne $[\psi(D), \mathcal{A}] = 0$ et donc $\psi(D) \in \mathcal{A}$, puisque \mathcal{D} est quasi-distinguante. Maintenant, si $\psi(\mathcal{D}^i) \subset \mathcal{D}^i$ pour $i \in \mathbb{N}$, alors pour tout $D \in \mathcal{D}^{i+1}$,

$$[\psi(D), \mathcal{A}] = \psi([D, \mathcal{A}]) \in \psi(\mathcal{D}^i) \subset \mathcal{D}^i.$$

En vertu du point (1) de cette Proposition, on en déduit que $\psi(D) \in \mathcal{D}^{i+1}$.

(3) Notons d'abord que pour tout $D \in \mathcal{D}^1$ et tout $u \in \mathcal{A}$, on a

$$[D, u^2] = 2u[D, u].$$

Appliquant ψ aux deux membres de cette égalité, se servant du point (2) de cette Proposition et en vertu de la définition de $\mathcal{C}(\mathcal{D})$, on obtient

$$\begin{aligned} 2\psi(u[D, u]) &= \psi([D, u^2]) \\ &= [\psi(D), u^2] \\ &= 2u[\psi(D), u] \\ &= 2u\psi([D, u]). \end{aligned}$$

En termes de la dérivation induite $\hat{D} \in \text{Der}(\mathcal{A})$, cela se traduit par

$$(3) \quad \psi(u\hat{D}(u)) = u\psi(\hat{D}(u)).$$

En particulier, pour tous $u, v, w \in \mathcal{A}$, on obtient

$$\psi((u+w)v\hat{D}(u+w)) = (u+w)\psi(v\hat{D}(u+w)).$$

Cette égalité se réduit en

$$\psi(uv\hat{D}(w)) + \psi(wv\hat{D}(u)) = u\psi(v\hat{D}(w)) + w\psi(v\hat{D}(u)).$$

Et pour $v = \hat{D}(w)$, il vient

$$\psi(u(\hat{D}(w))^2) + \psi(w\hat{D}(w)\hat{D}(u)) = u\psi((\hat{D}(w))^2) + w\psi(\hat{D}(w)\hat{D}(u)).$$

Comme $\psi(w\hat{D}(w)\hat{D}(u)) = w\psi(\hat{D}(w)\hat{D}(u))$ en vertu de (3) avec D remplacé par $\hat{D}(w)D$, nous obtenons finalement

$$\psi(u(\hat{D}(w))^2) = u\psi((\hat{D}(w))^2)$$

pour tous $u, w \in \mathcal{A}$. Cela montre que $[\mathcal{D}^1, \mathcal{A}]$ est une partie du radical $\text{Rad}(\mathcal{J})$ de l'idéal

$$\mathcal{J} = \{u \in \mathcal{A} : \psi(vu) = v\psi(u), \forall v \in \mathcal{A}\} \subset \mathcal{A}.$$

Puisque \mathcal{D} est non-singulière, on a $[\mathcal{D}^1, \mathcal{A}] = \mathcal{A}$ et donc

$$\text{Rad}(\mathcal{J}) = \mathcal{A}.$$

On en déduit l'égalité

$$\mathcal{J} = \mathcal{A},$$

puisqu'alors une puissance de l'unité de la \mathbb{R} -algèbre \mathcal{A} est un élément de \mathcal{J} . Le résultat s'ensuit immédiatement. \square

PROPOSITION 1.7. *Soient \mathcal{D}_1 et \mathcal{D}_2 deux algèbres de Poisson quantiques non-singulières, symplectiques et quasi-distinguantes. Tout isomorphisme d'algèbres de Lie $\Phi : \mathcal{D}_1 \rightarrow \mathcal{D}_2$ respecte la filtration et sa restriction $\Phi|_{\mathcal{A}_1} : \mathcal{A}_1 \rightarrow \mathcal{A}_2$ est de la forme*

$$\Phi|_{\mathcal{A}_1} = k\Psi,$$

où $k \in \mathcal{A}_2$ est un élément inversible, central dans \mathcal{D}_2 , et $\Psi : \mathcal{A}_1 \rightarrow \mathcal{A}_2$ un isomorphisme de \mathbb{R} -algèbres.

DÉMONSTRATION. Signalons que la preuve s'inspire des méthodes développées par Grabowski et Poncin dans [18] et dont l'essentiel est donné dans le second chapitre avec le Théorème 2.6. Pour tout $D \in \mathcal{D}_2$ et tous $u \in \mathcal{A}_1$, $w \in \mathcal{A}_2$, on a

$$\begin{aligned} (\Phi \circ \gamma_u \circ \Phi^{-1})([D, w]) &= \Phi[u\Phi^{-1}(D), \Phi^{-1}(w)] \\ &= [\Phi \circ \gamma_u \circ \Phi^{-1}(D), w] \end{aligned}$$

Comme $\Phi \circ \gamma_u \circ \Phi^{-1} \in \mathcal{C}(\mathcal{D}_2)$, en appliquant les points (2) et (3) de la Proposition 1.6, on a que

$$(4) \quad \Phi(u\Phi^{-1}(w)) = \Phi(u\Phi^{-1}(1))w \in \mathcal{A}_2$$

et par suite, $\Phi(u\Phi^{-1}(1)) \in \mathcal{A}_2$. Puisque $\Phi^{-1}(1)$ est central dans \mathcal{D}_1 , avec \mathcal{D}_1 symplectique, c'est donc une constante non nulle et par conséquent $\Phi(\mathcal{A}_1) \subset \mathcal{A}_2$.

Le même raisonnement avec Φ^{-1} donne $\Phi(\mathcal{A}_1) = \mathcal{A}_2$.

Supposons maintenant, par hypothèse de récurrence, que $\Phi(\mathcal{D}_1^i) \subset \mathcal{D}_2^i$ pour un $i \in \mathbb{N}$. Pour tout $D \in \mathcal{D}_1^{i+1}$, on écrit

$$[\Phi(D), \mathcal{A}_2] = \Phi([D, \mathcal{A}_1]) \subset \mathcal{D}_2^i.$$

En vertu du point (1) de la Proposition 1.6, on obtient $\Phi(D) \in \mathcal{D}_2^{i+1}$ et par suite Φ est filtré.

Enfin, en posant $v = \Phi^{-1}(w) \in \mathcal{A}_1$ et $\lambda = \Phi^{-1}(1)$, l'égalité (4) appliquée deux fois donne

$$\begin{aligned} \Phi(uv) &= \Phi(u\lambda)\Phi(v) \\ &= \Phi(\lambda u)\Phi(v) \\ &= \Phi(\lambda^2)\Phi(u)\Phi(v). \end{aligned}$$

En particulier, pour $u = 1$ et $v = \lambda$, la relation précédente montre que l'élément $\Phi(\lambda^2)$, central dans \mathcal{D}_2 , est également inversible dans \mathcal{A}_2 .

En posant $\kappa = \Phi(\lambda^2)^{-1}$, l'application

$$u \in \mathcal{A}_1 \mapsto \kappa^{-1}\Phi(u) \in \mathcal{A}_2,$$

définit donc un isomorphisme d'algèbres associatives et la proposition est ainsi entièrement démontrée. \square

REMARQUE 1.8. *La proposition reste vraie pour un isomorphisme entre les sous-algèbres de Lie \mathcal{D}_1^1 et \mathcal{D}_2^1 . La preuve est exactement la même.*

On peut maintenant énoncer le résultat suivant.

THÉORÈME 1.9. *Soient $\pi : E \rightarrow M$ et $\eta : F \rightarrow N$ deux fibrés vectoriels. Tout isomorphisme $\Phi : \mathcal{D}_{\mathcal{E}}(E) \rightarrow \mathcal{D}_{\mathcal{E}}(F)$ d'algèbres de Lie respecte la filtration et sa restriction $\Phi|_{\mathcal{A}(E)}$ à $\mathcal{A}(E)$ est de la forme*

$$\Phi|_{\mathcal{A}(E)} = k\Psi,$$

où $k \in \mathbb{R}$ est non nul et $\Psi : \mathcal{A}(E) \rightarrow \mathcal{A}(F)$ est un isomorphisme d'algèbres associatives.

Ce résultat reste vrai pour les sous-algèbres de Lie $\mathcal{D}_{\mathcal{E}}^1(E)$ et $\mathcal{D}_{\mathcal{E}}^1(F)$.

On peut respectivement remplacer $\mathcal{D}_{\mathcal{E}}(E)$ et $\mathcal{D}_{\mathcal{E}}(F)$ par $\mathcal{S}_{\mathcal{E}}(E)$ et $\mathcal{S}_{\mathcal{E}}(F)$, les algèbres des symboles des opérateurs différentiels dans $\mathcal{D}_{\mathcal{E}}(E)$ et $\mathcal{D}_{\mathcal{E}}(F)$, pour obtenir des résultats analogues.

2. Quelques caractérisations des fibrés vectoriels.

Pour $E \rightarrow M$ et $F \rightarrow N$ deux fibrés vectoriels, nous établissons dans les lignes qui suivent que tout isomorphisme entre les algèbres associatives $\mathcal{A}(E)$ et $\mathcal{A}(F)$ induit un isomorphisme de fibrés vectoriels.

2.1. Un résultat de type Gel'fand-Kolmogoroff.

LEMME 2.1. *Soient $\pi : E \rightarrow M$ et $\eta : F \rightarrow N$ deux fibrés vectoriels. Si $\Psi : \mathcal{A}(E) \rightarrow \mathcal{A}(F)$ est un isomorphisme d'algèbres associatives alors*

$$\Psi(\mathcal{A}^0(E)) = \mathcal{A}^0(F)$$

DÉMONSTRATION. Pour tout élément $u \in \mathcal{A}^0(E)$ n'ayant pas de zéro, la fonction $u^{-1} : e \mapsto \frac{1}{u(e)}$ est également un élément de $\mathcal{A}^0(E)$. Puisque Ψ est un homomorphisme,

$$\mathcal{A}^0(F) \ni 1_F = \Psi(1_E) = \Psi(u \cdot u^{-1}) = \Psi(u) \cdot \Psi(u^{-1})$$

Cela implique que $\Psi(u)$ et $\Psi(u^{-1})$ sont deux fonctions sans zéro, polynomiales de degré zéro en les fibres puisque leur produit est polynômial de degré zéro en les fibres.

En outre, pour tout élément $u \in \mathcal{A}^0(E)$, la fonction $u^2 + 1_E : e \mapsto u(e)^2 + 1$ est sans zéro et appartient à $\mathcal{A}^0(E)$. Il en résulte que

$$\mathcal{A}^0(F) \ni \Psi(u^2 + 1_E) = \Psi(u) \cdot \Psi(u) + 1_F,$$

ce qui montre que $\Psi(u)$ est polynômial en les fibres et de degré zéro. Nous venons de prouver l'inclusion $\Psi(\mathcal{A}^0(E)) \subset \mathcal{A}^0(F)$. La conclusion en découle en appliquant le même raisonnement à l'homomorphisme inverse Ψ^{-1} . \square

LEMME 2.2. *Tout difféomorphisme $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ tel que*

$$Pol(\mathbb{R}^n) = \{P \circ \varphi : P \in Pol(\mathbb{R}^n)\}$$

*est polynômial et sa « partie linéaire » coïncide avec l'automorphisme φ_{*0} du \mathbb{R} -espace vectoriel de \mathbb{R}^n .*

DÉMONSTRATION. Observons d'abord que φ est forcément polynômial ; en ce sens qu'on peut écrire

$$\varphi(y_1, \dots, y_n) = (\varphi_1(y_1, \dots, y_n), \varphi_2(y_1, \dots, y_n), \dots, \varphi_n(y_1, \dots, y_n))$$

avec, pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$,

$$\varphi_j(y_1, \dots, y_n) = \lambda_0^j + \lambda_1^j y_1 + \dots + \lambda_n^j y_n + \varphi_{\geq 2}^j(y_1, \dots, y_n)$$

où l'expression $\varphi_{\geq 2}^j(y_1, \dots, y_n)$ est polynomiale en y_1, \dots, y_n de degré supérieur ou égal à 2. En effet, cela vient du fait que pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$, l'application

$$(y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n \mapsto y_j \in \mathbb{R}$$

est un élément de $Pol(\mathbb{R}^n)$. On a que pour tout $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$,

$$\varphi_{*\mathbf{y}} = \begin{pmatrix} \lambda_1^1 + \partial_1 \varphi_{\geq 2}^1(\mathbf{y}) & \cdots & \lambda_n^1 + \partial_n \varphi_{\geq 2}^1(\mathbf{y}) \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^n + \partial_1 \varphi_{\geq 2}^n(\mathbf{y}) & \cdots & \lambda_n^n + \partial_n \varphi_{\geq 2}^n(\mathbf{y}) \end{pmatrix}$$

est un automorphisme linéaire de \mathbb{R}^n . En particulier, pour $\mathbf{y} = 0$, on a que la matrice

$$A_\varphi = \begin{pmatrix} \lambda_1^1 & \cdots & \lambda_n^1 \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^n & \cdots & \lambda_n^n \end{pmatrix}$$

est régulière. Ce qui achève la démonstration du lemme. \square

THÉORÈME 2.3. *Soient $E \rightarrow M$ et $F \rightarrow N$ deux fibrés vectoriels de rangs respectifs n et n' . Les \mathbb{R} -algèbres $\mathcal{A}(E)$ et $\mathcal{A}(F)$, des fonctions polynomiales en les fibres, sont isomorphes si et seulement si les fibrés vectoriels E et F sont isomorphes.*

DÉMONSTRATION. Soit $\Psi : \mathcal{A}(F) \rightarrow \mathcal{A}(E)$ un isomorphisme de \mathbb{R} -algèbres. Alors, d'après la Proposition 4.3 et la Proposition 4.5 du premier chapitre, Ψ s'étend en un isomorphisme de \mathbb{R} -algèbres $\bar{\Psi} : C^\infty(F) \rightarrow C^\infty(E)$. Par suite, d'après Milnor, il existe un difféomorphisme $\varphi : E \rightarrow F$ tel que,

$$\bar{\Psi}(h) = h \circ \varphi, \quad \forall h \in C^\infty(F).$$

En particulier, puisque $\bar{\Psi}$ prolonge Ψ , on peut écrire

$$\mathcal{A}(E) = \{u \circ \varphi : u \in \mathcal{A}(F)\} \quad (*)$$

En vertu du Lemme 2.1, on a

$$\Psi \circ \pi_F^*(C^\infty(N)) = \pi_E^*(C^\infty(M)).$$

On en déduit l'existence d'un difféomorphisme $\phi : M \rightarrow N$ avec

$$\Psi \circ \pi_F^*(g) = \pi_E^*(g \circ \phi), \quad \forall g \in C^\infty(N)$$

Par suite, comme $\pi_F^*(g) \circ \varphi = \Psi(\pi_F^*(g))$, on a, pour tout $e \in E$,

$$g(\pi_F(\varphi(e))) = g(\phi(\pi_E(e))).$$

Cela se traduit en

$$\pi_F \circ \varphi = \phi \circ \pi_E \quad (**)$$

On vient ainsi de démontrer que (ϕ, φ) est un isomorphisme de $E \rightarrow M$ sur $F \rightarrow N$, vues comme fibrations différentielles, les difféomorphismes de trivialisations locales étant les mêmes que ceux qui en font des fibrés vectoriels. On va donc supposer que les variétés M et N coïncident et considérer φ comme un M -isomorphisme de fibrations entre $E \rightarrow M$ et $F \rightarrow M$.

Considérons maintenant un recouvrement ouvert (U_α) de M par des domaines de trivialisations de E et F à la fois, en conservant les mêmes notations qu'au chapitre 1, où σ_α et ρ_α sont les difféomorphismes de trivialisations locales relatifs à E et F respectivement. On a alors, pour tout couple d'indices (α, β) , la relation

$$\vartheta_{\beta\alpha} \circ \varphi_{\beta\alpha} = \varphi_{\alpha\beta} \circ \theta_{\beta\alpha} \quad (***)$$

où $\vartheta_{\beta\alpha}$ et $\theta_{\alpha\beta}$ sont des difféomorphismes de transition associés respectivement à E et F , et,

$$\varphi_{\beta\alpha} : U_{\alpha\beta} \times \mathbb{R}^n \rightarrow U_{\alpha\beta} \times \mathbb{R}^n : (x, y) \mapsto (x, \delta_{\beta\alpha}(x, y))$$

la restriction de $\varphi_\alpha = \rho_\alpha^{-1} \circ (\varphi|_{\pi_E^{-1}(U_\alpha)}) \circ \sigma_\alpha$.

Observons en outre que

$$\varphi_\alpha^x : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n : y \mapsto \delta_\alpha(x, y)$$

est un difféomorphisme, polynomial en y , tel que

$$P \in \text{Pol}(\mathbb{R}^n) \mapsto P \circ \varphi_\alpha^x \in \text{Pol}(\mathbb{R}^n)$$

soit un isomorphisme de \mathbb{R} -algèbres. Écrivons alors $\varphi_\alpha^x(y)$ sous la forme

$$(\lambda_{\alpha,1}^0(x) + \sum_{i=1}^n \lambda_{\alpha,1}^i(x) y^i + \varphi_{\alpha,1}^{\geq 2}(x, y), \dots, \lambda_{\alpha,n}^0(x) + \sum_{i=1}^n \lambda_{\alpha,n}^i(x) y^i + \varphi_{\alpha,n}^{\geq 2}(x, y))$$

où pour tout $i \in [1, n] \cap \mathbb{N}$, $\varphi_{\alpha,i}^{\geq 2}(x, y)$ est un polynôme en y et dont chacun de termes est de degré supérieur ou égale à 2.

En vertu du Lemme 2.2 précédent, on observe que $(\lambda_{\alpha,j}^i(x))$ est alors une matrice régulière. Ainsi, pour tout indice α , on a un difféomorphisme

$$\psi_\alpha : U_\alpha \times \mathbb{R}^n \rightarrow U_\alpha \times \mathbb{R}^n : (x, y) \mapsto (x, (\lambda_{\alpha,j}^i(x))(y))$$

tel que

$$\psi_\alpha^x : y \mapsto \left(\sum_{i=1}^n \lambda_{\alpha,1}^i(x) y^i, \sum_{i=1}^n \lambda_{\alpha,2}^i(x) y^i, \dots, \sum_{i=1}^n \lambda_{\alpha,n}^i(x) y^i \right)$$

soit un automorphisme de \mathbb{R} -espace de \mathbb{R}^n . On tire de la relation (***) que

$$\vartheta_{\beta\alpha} \circ \psi_{\beta\alpha} = \psi_{\alpha\beta} \circ \theta_{\beta\alpha},$$

en posant pour tout couple d'indices (α, β) ,

$$\psi_{\beta\alpha} = \psi_\alpha|_{U_{\beta\alpha} \times \mathbb{R}^n}.$$

On déduit de ce qui précède qu'il existe un M -isomorphisme de fibré vectoriel et un seul $\psi : E \rightarrow F$ tel que pour tout indice α

$$\psi_\alpha = \rho_\alpha^{-1} \circ \psi \circ \sigma_\alpha.$$

□

REMARQUE 2.4. *Observons que l'isomorphisme de fibrés vectoriels ψ , construit dans la démonstration du Théorème 2.3 précédent, induit, par la relation $h \in C^\infty(F) \mapsto h \circ \psi \in C^\infty(E)$, un isomorphisme de \mathbb{R} -algèbres dont la restriction aux fonctions polynomiales est un isomorphisme de \mathbb{R} -algèbres entre $\mathcal{A}(F)$ et $\mathcal{A}(E)$ respectant la graduation.*

2.2. Une caractérisation Lie-algébrique de fibrés vectoriels.

Nous pouvons maintenant énoncer un résultat de type Pursell-Shanks pour les fibrés vectoriels avec l'algèbre de Lie des opérateurs homogènes. Ce résultat est une conséquence immédiate du Théorème 1.9 et du Théorème 2.3 de la section précédente.

THÉORÈME 2.5. *Soient deux fibrés vectoriels $\pi : E \rightarrow M$ et $\eta : F \rightarrow N$. Les algèbres de Lie $\mathcal{D}_\varepsilon(E)$ et $\mathcal{D}_\varepsilon(F)$ (resp. $\mathcal{D}_\varepsilon^1(E)$ et $\mathcal{D}_\varepsilon^1(F)$) sont isomorphes si, et seulement si, les fibrés vectoriels E et F le sont.*

De manière analogue, on a le résultat suivant.

THÉORÈME 2.6. *Deux fibrés vectoriels $\pi : E \rightarrow M$ et $\eta : F \rightarrow N$ sont isomorphes si et seulement si les algèbres de Lie $\mathcal{S}_\varepsilon(E)$ et $\mathcal{S}_\varepsilon(F)$ (resp. $\mathcal{S}_\varepsilon^1(E)$ et $\mathcal{S}_\varepsilon^1(F)$) sont isomorphes.*

3. La sous-algèbre de Lie $\mathcal{D}_+(E)$

A la section 1.3, nous avons défini la sous-algèbre de Lie $\mathcal{D}_+(E)$ de $\mathcal{D}_\varepsilon(E)$ comme étant celle engendrée par les opérateurs homogènes de valeurs propres positives; nous dirons plus simplement, de poids positif dans la suite. L'algèbre de Lie $\mathcal{D}_+(E)$ est bien une algèbre de Poisson quantique, avec comme base la \mathbb{R} -algèbre $\mathcal{A}(E)$ des fonctions polynomiales en les fibres.

Nous noterons par $\mathcal{S}_+(E)$ la limite classique de l'algèbre de Poisson quantique $\mathcal{D}_+(E)$.

Nous avons, exactement comme pour l'algèbre de Poisson quantique $\mathcal{D}_\varepsilon(E)$ et sa limite classique $\mathcal{S}_\varepsilon(E)$, le résultat suivant.

PROPOSITION 3.1. *Soient $E \rightarrow M$ et $F \rightarrow N$ deux fibrés vectoriels. Les algèbres de Lie $\mathcal{D}_+(E)$ et $\mathcal{D}_+(F)$ sont isomorphes si, et seulement si, les fibrés vectoriels E et F le sont. Ce résultat reste vrai si ces algèbres de Poisson quantiques sont remplacées par leurs limites classiques respectives ou par leurs sous-algèbres de Lie des opérateurs différentiels du premier ordre.*

CHAPITRE 4

UNE AUTRE CONSTRUCTION DE L'ALGÈBRE DES OPÉRATEURS DIFFÉRENTIELS HOMOGÈNES

1. Introduction

Soit $\pi : E \rightarrow M$ un fibré vectoriel. Au chapitre précédent, nous avons défini l'algèbre des opérateurs différentiels homogènes par

$$\mathcal{D}_{\mathcal{E}}(E) = \bigcup_{k \geq 0} \mathcal{D}_{\mathcal{E}}^k(E)$$

où $\mathcal{D}_{\mathcal{E}}^k(E)$ est le \mathbb{R} -espace vectoriel engendré par

$$\{T \in \mathcal{D}^k(E) \mid \exists \lambda \in \mathbb{Z} : L_{\mathcal{E}}T = \lambda T\}.$$

L'algèbre associative commutative $\mathcal{A}(E)$ des fonctions polynomiales en les fibres coïncide avec $\mathcal{D}_{\mathcal{E}}^0(E)$ et on a

$$\mathcal{A}(E) = \bigoplus_{\lambda \in \mathbb{N}} \mathcal{A}^{\lambda}(E).$$

Considérons maintenant $\mathcal{D}_G(E)$ l'algèbre Lie obtenue par la construction de Grothendieck sur l'algèbre associative commutative $\mathcal{A}(E)$ de la manière suivante. On pose

$$\mathcal{D}_G(E) = \bigcup_{k \geq 0} \mathcal{D}_G^k(E),$$

avec $\mathcal{D}_G^0(E) = \mathcal{A}(E)$ et, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\mathcal{D}_G^{k+1}(E) = \{T \in \text{End}(\mathcal{A}(E)) : \forall f \in \mathcal{A}(E), [T, f] \in \mathcal{D}_G^k(E)\}.$$

Notre but est d'établir l'égalité $\mathcal{D}_{\mathcal{E}}(E) = \mathcal{D}_G(E)$, à isomorphisme près. Cette égalité, nous permettra de déterminer les dérivations de la \mathbb{R} -algèbre associative $\mathcal{A}(E)$. C'est aussi une occasion d'introduire d'autres sous-algèbres de Lie de $\mathcal{D}_{\mathcal{E}}(E)$.

2. L'espace topologique $\mathcal{A}(E)$

Le texte qui suit est une adaptation des résultats tirés de [7]. L'objectif est de munir la \mathbb{R} -algèbre $\mathcal{A}(E)$ de la topologie induite de celle qui fait de $C^{\infty}(E)$ un espace de Fréchet.

Tout ouvert $V \subset \mathbb{R}^p$ admet une suite fondamentale de compacts, c'est-à-dire, une suite croissante (K_m) des parties compactes de V telle que $\cup_m K_m = V$ et $K_m \subset \text{int}(K_{m+1})$; où pour une partie quelconque X de \mathbb{R}^p , $\text{int}(X)$ désigne l'intérieur de X .

Soit $\pi : E \rightarrow M$ un fibré vectoriel et considérons l'algèbre associative $C^\infty(E)$ de toutes les fonctions de classe C^∞ de E . Soit un atlas au plus dénombrable $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ de M tel que E soit trivialisable au-dessus de chaque U_α . Considérons maintenant pour chaque α , la carte $(V_\alpha = \pi^{-1}(U_\alpha), \psi_\alpha)$ de E adaptée au fibré.

Soit $(K_{m,\alpha})$ une suite fondamentale de parties compactes de $\psi_\alpha(V_\alpha)$.

Pour tout $(s, m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}_0$ et $f \in C^\infty(E)$, posons

$$p_{s,m,\alpha}(f) = \sup_{x \in K_{m,\alpha}, |\lambda| \leq s} |\partial^\lambda (f \circ \psi_\alpha^{-1})(x)|,$$

avec λ un multi-indice. Les $p_{s,m,\alpha}$ ainsi définis sont des semi-normes sur $C^\infty(E)$. Elles munissent l'espace $C^\infty(E)$ d'une structure d'espace topologique séparé, localement convexe et complet, c'est-à-dire, d'une structure d'espace de Fréchet. Cette topologie est indépendante du choix de la suite fondamentale considérée.

Puisque la topologie considérée sur $C^\infty(E)$ est définie par une famille dénombrable de semi-normes, l'espace topologique $C^\infty(E)$ est métrisable ([8] p.63).

Dans les lignes qui suivent, l'espace $\mathcal{A}(E)$ est muni de la topologie induite par celle de $C^\infty(E)$. Ainsi, une fonction $\Phi : \mathcal{A}(E) \rightarrow \mathcal{A}(E)$ est continue si, pour toute suite (P_n) de $\mathcal{A}(E)$, sa convergence vers P implique celle de la suite $(\Phi(P_n))$ vers $\Phi(P)$.

De manière générale, si un espace vectoriel topologique W est somme directe des espaces vectoriels W_1 et W_2 , cela ne permet pas de dire que W est également leur somme topologique.

Soit $\pi : E \rightarrow M$ un fibré vectoriel.

PROPOSITION 2.1. *Pour tout $r \in \mathbb{N}$, l'application linéaire*

$$pr_r : \mathcal{A}(E) \rightarrow \mathcal{A}^r(E) : u = u_0 + u_1 + \dots + u_s \mapsto u_r$$

est continue.

DÉMONSTRATION. Soit (P_n) une suite qui converge vers zéro dans $\mathcal{A}(E)$. Soit (V, ψ) une carte adaptée au fibré vectoriel E . Considérons une suite fondamentale (K_m) de compacts dans $\psi(V)$ telle que $0 \in K_m$, pour tout entier m . Localement, on peut écrire

$$P_n = \sum_{i=0}^{d_n} P_n^i,$$

avec $(P_n^i \circ \psi^{-1})(x, \xi) = \sum_{|\alpha|=i} A_n^\alpha(x) \xi^\alpha$ et $d_n \in \mathbb{N}$. Nous allons montrer que la suite (P_n^r) converge également vers zéro, pour tout $r \in \mathbb{N}$.

Soit $\varepsilon > 0$. Pour tout $(m, s) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}_0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geq N, \quad \sup_{(x, \xi) \in K_m, |\lambda| + |\mu| \leq s} |\partial^\lambda \bar{\partial}^\mu (P_n \circ \psi^{-1})(x, \xi)| < \varepsilon \quad (*)$$

Cette inégalité étant en particulier vraie pour $\xi = 0$, on obtient

$$\forall n \geq N, \quad \sup_{(x, \xi) \in K_m, |\lambda| + |\mu| \leq s} |\partial^\lambda \bar{\partial}^\mu (P_n^0 \circ \psi^{-1})(x, \xi)| < \varepsilon$$

Cela signifie que la suite (P_n^0) converge vers zéro dans $\mathcal{A}(E)$. Observons que pour tout $r \in \mathbb{N}_0$, on a

$$\begin{aligned} p_{s, m, \lambda, \mu}(P_n^r) &= \sup_{(x, \xi) \in K_m, |\lambda| + |\mu| \leq s} |\partial^\lambda \bar{\partial}^\mu (P_n^r \circ \psi^{-1})(x, \xi)| \\ &= \sup_{(x, \xi) \in K_m, |\lambda| + |\mu| \leq s} \left| \sum_{|\alpha| = r} \partial^\lambda (A_n^\alpha)(x) \bar{\partial}^\mu \xi^\alpha \right| \\ &\leq \sup_{(x, \xi) \in K_m, |\lambda| + |\mu| \leq s} \sum_{|\alpha| = r} |\partial^\lambda (A_n^\alpha)(x)| |C_{\alpha, \mu}| \end{aligned}$$

avec $C_{\mu, \alpha}$ la borne supérieure de la fonction $(x, \xi) \mapsto \bar{\partial}^\mu \xi^\alpha$ dans K_m .

Il nous reste donc à montrer que pour un multi-indice quelconque donné β tel que $|\beta| = r$, la suite (A_n^β) converge vers zéro. De la relation (*), on tire qu'à partir d'un certain rang, on peut écrire

$$\begin{aligned} \varepsilon \beta! &> \sup_{(x, \xi) \in K_m, |\lambda| + |\mu| \leq s+r} |\partial^\lambda \bar{\partial}^\mu (P_n \circ \psi^{-1})(x, \xi)| \\ &= \sup_{(x, \xi) \in K_m, |\lambda| + |\mu| \leq s+r} \left| \sum_{|\alpha| \leq d_n} \partial^\lambda A_n^\alpha(x) \bar{\partial}^\mu \xi^\alpha \right| \\ &\geq \sup_{(x, \xi) \in K_m, \xi=0, |\lambda| + |\mu| \leq s+r, \mu=\beta} \left| \sum_{|\alpha| \leq d_n} \partial^\lambda A_n^\alpha(x) \bar{\partial}^\mu \xi^\alpha \right| \\ &= \beta! \sup_{(x, \xi) \in K_m, |\lambda| \leq s} |\partial^\lambda A_n^\beta(x)| \end{aligned}$$

D'où le résultat. \square

3. Identification d'algèbres : $\mathcal{D}_\varepsilon(E) \cong \mathcal{D}_G(E)$

Nous commençons d'abord par montrer qu'étant donné un fibré vectoriel $\pi : E \rightarrow M$, un opérateur différentiel de $\mathcal{D}(E)$ est entièrement déterminé par ses valeurs sur les fonctions polynomiales en les fibres.

Énonçons le résultat préalable suivant qui peut se justifier comme dans [32] p.7 ; l'ingrédient principal de la démonstration étant le développement de Taylor.

LEMME 3.1. *Si $u \in \mathcal{A}(E)$ est tel que $j_a^l u = 0$, alors on peut écrire, au voisinage de a ,*

$$u = \sum_{i=1}^N u_{i_0} \cdots u_{i_i} \quad (i)$$

avec $u_{i_j} \in \mathcal{A}(E)$ et $u_{i_j}(a) = 0, \forall (i, j) \in [1, N] \times [0, l]$.

La proposition suivante nous permettra de prolonger chaque élément de $\mathcal{D}_G(E)$ en un opérateur différentiel de $\mathcal{D}(E)$.

PROPOSITION 3.2. *Pour tout endomorphisme $D : \mathcal{A}(E) \rightarrow \mathcal{A}(E)$ de \mathbb{R} -espace tel que*

$$j_a^l(u) = 0 \Rightarrow D(u)(a) = 0, \quad \forall u \in \mathcal{A}(E),$$

il existe $\widehat{D} \in \mathcal{D}(E)$ tel que

$$\widehat{D}(v) = D(v), \quad \forall v \in \mathcal{A}(E).$$

DÉMONSTRATION. Cet énoncé résulte du fait que pour tous $f \in C^\infty(E)$, $a \in E$ et tout entier $k \in \mathbb{N}$, il existe $u \in \mathcal{A}(E)$ tel que

$$j_a^k(f) = j_a^k(u).$$

Soit alors $D \in \mathcal{D}_G^k(E)$. On peut donc poser, pour tout $f \in C^\infty(E)$,

$$\widehat{D}(f)_a = D(u)_a,$$

la fonction polynomiale u ayant même jet d'ordre k que f en $a \in E$. \square

COROLLAIRE 3.3. *Pour tout $D \in \mathcal{D}_G^l(E)$, ($l \geq 0$), il existe un unique opérateur différentiel $\widehat{D} \in \mathcal{D}^l(E, M)$ tel que*

$$\widehat{D}(u) = D(u), \quad \forall u \in \mathcal{A}(E).$$

DÉMONSTRATION. Soit $D \in \mathcal{D}_G^l(E)$. Considérons une fonction $u \in \mathcal{A}(E)$ tel que $j_a^l(u) = 0$. Montrons qu'on a bien $D(u)_a = 0$. Nous procédons par récurrence sur l . En effet, cette affirmation étant vraie pour $l = 0$, supposons, par hypothèse de récurrence qu'elle l'est pour $k < l$. Ainsi, lorsque $k = l$, avec les notations du Lemme 3.1 précédent, on a que

$$D(u) = \sum_{i=1}^N u_{i_0} D(u_{i_1} \dots u_{i_l}) + \sum_{i=1}^N \underbrace{[D, u_{i_0}]}_{\in \mathcal{D}_G^{l-1}(E)}(u_{i_1} \dots u_{i_l})$$

s'annule en a et, le résultat cherché en découle. \square

À ce stade, nous avons déjà établi que les éléments de $\mathcal{D}_G(E)$, à l'instar de ceux de $\mathcal{D}_{\mathcal{E}}(E)$, peuvent être vus comme des restrictions des opérateurs différentiels de $\mathcal{D}(E)$ sur la \mathbb{R} -algèbre $\mathcal{A}(E)$. Ainsi, les éléments de $\mathcal{D}_G(E)$ se décomposent localement en des expressions comportant des fonctions polynomiales en les fibres de E . Mais rien ne nous dit que ces polynômes sont de degré borné indépendamment des cartes ; comme cela s'est avéré être le cas avec les éléments de $\mathcal{D}_{\mathcal{E}}(E)$. Le lemme qui suit nous permettra d'énoncer un résultat stipulant que cela est également vrai pour les éléments de $\mathcal{D}_G(E)$.

LEMME 3.4. Soit $D \in \mathcal{D}_G^l(E)$. Il existe $N_s \in \mathbb{N}$ tel que

$$\mathcal{A}^s(E) = \mathcal{F}_{N_s}(E),$$

où pour $N \in \mathbb{N}$, on a par définition,

$$\mathcal{F}_N(E) = \{u \in \mathcal{A}^s(E) : r \geq N \Rightarrow pr_r \widehat{D}(u) = 0\}.$$

DÉMONSTRATION. Notons que

$$\mathcal{A}^s(E) = \{u \in C^\infty(E) : L_\varepsilon u = su\}$$

est fermé dans $C^\infty(E)$; il s'agit donc d'un espace de Baire. Pour $N \in \mathbb{N}$, il en est de même de

$$\mathcal{A}_N^s(E) = \{u \in \mathcal{A}^s(E) : r \geq N \Rightarrow pr_r \widehat{D}(u) = 0\}.$$

Ce dernier ensemble est une intersection des fermés du fait de la continuité des opérateurs différentiels et celle de pr_r , en vertu de la Proposition 3.3 précédente. (Relativement à la topologie pour laquelle $C^\infty(E)$ est un Fréchet). Observons qu'on a

$$\mathcal{A}^s(E) = \bigcup_{N \in \mathbb{N}} \mathcal{A}_N^s(E).$$

Il existe donc $N_s \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{A}_{N_s}^s(E)$ soit d'intérieur non vide. Or tout ouvert d'un espace vectoriel topologique contenant l'origine est absorbant. Donc on peut écrire

$$\mathcal{A}^s(E) = \mathcal{A}_{N_s}^s(E).$$

En effet, soit $v \in \text{Int}(\mathcal{A}_{N_s}^s(E))$. Alors il existe un ouvert \mathcal{U} de l'origine tel que

$$v + \mathcal{U} \subset \text{Int}(\mathcal{A}_{N_s}^s(E)) \subset \mathcal{A}^s(E).$$

Considérons maintenant un élément quelconque $u \in \mathcal{A}^s(E)$. Comme \mathcal{U} est absorbant, il existe $\kappa > 0$ tel que $\kappa u \in \mathcal{U}$. Par suite,

$$\kappa u + v \in \mathcal{A}^s(E)$$

et donc $u \in \mathcal{A}^s(E)$. □

PROPOSITION 3.5. L'unique opérateur différentiel $\widehat{D} \in \mathcal{D}(E)$ associé à $D \in \mathcal{D}_G^l(E)$ s'écrit localement

$$\widehat{D} = \sum_{|\alpha|+|\beta| \leq l} u^{\alpha,\beta} \partial_\alpha \bar{\partial}_\beta \quad (*)$$

où les $u^{\alpha,\beta}$ sont polynômiaux en (y^1, \dots, y^n) d'un degré maximal borné indépendamment des cartes.

DÉMONSTRATION. Rappelons au préalable que

$$\partial_\alpha \bar{\partial}_\beta (x^\gamma y^\delta) = \begin{cases} \frac{\gamma!}{(\gamma-\alpha)!} \frac{\delta!}{(\delta-\beta)!} x^{\gamma-\alpha} y^{\delta-\beta} & \text{si } \alpha \leq \gamma \text{ et } \beta \leq \delta \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Pour $|\alpha| + |\beta| = 0$,

$$u^{00} = \widehat{D}(1) \in \mathcal{A}^0 \oplus \cdots \oplus \mathcal{A}^{N_0}(E),$$

pour un certain $N_0 \in \mathbb{N}$, en vertu du Lemme 3.4 précédent.

Supposons par hypothèse de récurrence que la proposition est vraie pour $|\alpha| + |\beta| < t$. Soit U un domaine de trivialisatation au-dessus duquel \widehat{D} est de la forme (*). Considérons une fonction $\rho \in \mathcal{A}^0(E)$ telle que $\rho = \pi_E^*(f)$, f étant un fonction à support compact dans U , nulle en dehors de U et valant 1 dans un ouvert V de U . Pour $|\gamma| + |\delta| = t$, on a

$$\widehat{D}(\rho x^\gamma y^\delta) \stackrel{V}{=} \sum_{\substack{|\alpha|+|\beta|\leq t \\ \alpha < \gamma \text{ ou } \beta < \delta}} u^{\alpha,\beta} \frac{\gamma!}{(\gamma-\alpha)!} \frac{\delta!}{(\delta-\beta)!} x^{\gamma-\alpha} y^{\delta-\beta} + \gamma! \delta! u^{\gamma,\delta}$$

Observons qu'il existe $N_{|\delta|}$ tel que

$$\widehat{D}(\rho x^\gamma y^\delta) \in \mathcal{A}^0(E) \oplus \cdots \oplus \mathcal{A}^{N_{|\delta|}}(E).$$

Cela vient du Lemme 3.4 précédent, et on a que pour $\alpha < \gamma$ ou $\beta < \delta$, l'hypothèse de récurrence peut être appliquée à $u^{\alpha,\beta}$.

On en déduit que $u^{\gamma,\delta}$ est polynomial de degré borné ne dépendant pas de carte; ce qui achève la démonstration de la proposition. \square

De la précédente proposition et de la caractérisation locale de l'algèbre $\mathcal{D}_\mathcal{E}(E)$ au chapitre précédent on déduit le résultat suivant.

THÉORÈME 3.6. *Soit $E \rightarrow M$ un fibré vectoriel. Les algèbres de Poisson quantiques $\mathcal{D}_G(E)$ et $\mathcal{D}_\mathcal{E}(E)$ définies par*

$$\mathcal{D}_\mathcal{E}(E) = \bigcup_{k \geq 0} \mathcal{D}_\mathcal{E}^k(E)$$

et

$$\mathcal{D}_G(E) = \bigcup_{k \geq 0} \mathcal{D}_G^k(E),$$

où on a posé

$$\mathcal{D}_G^0(E) = \mathcal{A}(E), \mathcal{D}_G^{k+1}(E) = \{T \in \text{End}(\mathcal{A}(E)) : [T, \mathcal{A}(E)] \subset \mathcal{D}_G^k(E)\}$$

et

$$\mathcal{D}_\mathcal{E}^0(E) = \mathcal{A}(E), \mathcal{D}_\mathcal{E}^k(E) = \{T \in \mathcal{D}^k(E, M) \mid \exists r \in \mathbb{Z} : L_\mathcal{E}(T) = rT\},$$

coïncident (à isomorphisme près).

4. Les dérivations de l'algèbre associative $\mathcal{A}(E)$

Soit $E \rightarrow M$ un fibré vectoriel. Dans les lignes qui suivent, $\mathcal{A}(E)$ désigne encore l'algèbre associative des fonctions polynomiales en les fibres du fibré $E \rightarrow M$. Nous nous servons de l'égalité $\mathcal{D}_\mathcal{E}(E) = \mathcal{D}_G(E)$ pour déterminer toutes les dérivations de l'algèbre $\mathcal{A}(E)$.

PROPOSITION 4.1. *Une application linéaire $D : \mathcal{A}(E) \rightarrow \mathcal{A}(E)$ est une dérivation de $\mathcal{A}(E)$ si et seulement si D est la restriction à $\mathcal{A}(E)$ d'un élément de $\mathcal{D}_{\mathcal{E}}^1(E) \cap Vect(E)$.*

Autrement dit,

$$Der(\mathcal{A}(E)) = \mathcal{D}_{\mathcal{E}}^1(E) \cap Vect(E)|_{\mathcal{A}(E)}.$$

DÉMONSTRATION. L'inclusion $Der(\mathcal{A}(E)) \supset \mathcal{D}_{\mathcal{E}}^1(E) \cap Vect(E)$ est évidente. Soit maintenant $D \in Der(\mathcal{A}(E))$. On a, pour tout $u \in \mathcal{A}(E)$, l'égalité suivante

$$[D, \gamma_u] = \gamma_{D(u)}.$$

En effet, pour tous $u, v \in \mathcal{A}(E)$, on peut écrire

$$\begin{aligned} [D, \gamma_u](v) &= D(uv) - uD(v) \\ &= D(u)v = \gamma_{D(u)}(v). \end{aligned}$$

Par suite, $D \in \mathcal{D}_G^1(E) = \mathcal{D}_{\mathcal{E}}^1(E)$. Observons que comme \mathbb{R} -espace vectoriel, on a l'égalité

$$\mathcal{D}_{\mathcal{E}}^1(E) = (\mathcal{D}_{\mathcal{E}}^1(E) \cap Vect(E)) \oplus \mathcal{A}(E).$$

Posons alors $D = D_c + w$ avec $D_c \in \mathcal{D}_{\mathcal{E}}^1(E) \cap Vect(E)$ et $w \in \mathcal{A}(E)$. Comme $D(1) = D_c(1) = 0$, on peut conclure que $w = 0$. Par suite, on a l'inclusion

$$Der(\mathcal{A}(E)) \subset \mathcal{D}_{\mathcal{E}}^1(E) \cap Vect(E);$$

ce qui achève la démonstration. \square

Nous proposons dans les lignes qui suivent un résultat qui met en relation l'algèbre de Lie des automorphismes infinitésimaux $Aut(E)$ du fibré vectoriel E et celle des dérivations de poids nul de la \mathbb{R} -algèbre $\mathcal{A}(E)$.

PROPOSITION 4.2. *L'algèbre des dérivations de poids zéro de $\mathcal{A}(E)$ est donnée par*

$$Der^0(\mathcal{A}(E)) = Aut(E)|_{\mathcal{A}(E)}.$$

DÉMONSTRATION. L'inclusion

$$Der^0(\mathcal{A}(E)) \supset Aut(E)|_{\mathcal{A}(E)}$$

est immédiate. Pour $D \in Der^0(\mathcal{A}(E))$, en adoptant les notations du Corollaire 3.3, on obtient un élément $\widehat{D} \in Vect(E)$ tel que $D = \widehat{D}|_{\mathcal{A}(E)}$. Comme $[\mathcal{E}_E, \widehat{D}]|_{\mathcal{A}(E)} = 0$, alors on a

$$[\mathcal{E}_E, \widehat{D}] = 0,$$

et le résultat est établi. \square

On va déduire de la proposition précédente un résultat de type Pursell-Shanks, en vertu du résultat suivant tiré de [28].

PROPOSITION 4.3. *Soient $E \rightarrow M$ et $F \rightarrow N$ deux fibrés vectoriels de rangs respectifs $n, n' > 1$ avec $H^1(M, \mathbb{Z}/2) = 0$. Les algèbres de Lie $\text{Aut}(E)$ et $\text{Aut}(F)$ sont isomorphes si et seulement si les fibrés vectoriels le sont.*

Voici maintenant le résultat de caractérisation Lie-algébrique des fibrés vectoriels annoncé.

COROLLAIRE 4.4. *Soient $E \rightarrow M$ et $F \rightarrow N$ deux fibrés vectoriels de rangs supérieurs à 1. Si $H^1(M, \mathbb{Z}/2) = 0$, alors les fibrés vectoriels $E \rightarrow M$ et $F \rightarrow N$ sont isomorphes si, et seulement si, les algèbres de Lie des dérivations de poids nul $\text{Der}^0(\mathcal{A}(E))$ et $\text{Der}^0(\mathcal{A}(F))$ le sont.*

Nous savons aussi qu'étant donnés deux fibrés vectoriels $E \rightarrow M$ et $F \rightarrow N$, tout isomorphisme $\Psi : \mathcal{A}(E) \rightarrow \mathcal{A}(F)$ d'algèbres associatives induit un isomorphisme d'algèbres de Lie par

$$\widehat{\Psi} : \text{Der}(\mathcal{A}(E)) \rightarrow \text{Der}(\mathcal{A}(F)) : D \mapsto \Psi \circ D \circ \Psi^{-1}.$$

De plus, si Ψ est gradué, l'isomorphisme induit respecte les sous-algèbres de Lie $\text{Der}^0(\mathcal{A}(E))$ et $\text{Der}^0(\mathcal{A}(F))$ des dérivations de poids nul de $\text{Der}(\mathcal{A}(E))$ et $\text{Der}(\mathcal{A}(F))$ respectivement.

Nous allons proposer dans cette section une autre façon de déterminer les dérivations de poids zéro de $\mathcal{A}(E)$ et ce faisant, nous allons montrer qu'un tel isomorphisme $\widehat{\Psi} : \text{Der}(\mathcal{A}(E)) \rightarrow \text{Der}(\mathcal{A}(F))$ préserve le champ d'Euler.

THÉORÈME 4.5. *Soit $\pi : E \rightarrow M$ un fibré vectoriel de rang n .*

(a) *L'algèbre de Lie des dérivations homogènes de poids 0 de l'algèbre associative $\mathcal{A}(E)$ est donnée par*

$$\text{Der}^0(\mathcal{A}(E)) \cong \text{Vect}(M) \oplus \text{gl}(E^*).$$

où nous avons posé $\text{gl}(E^) = \Gamma(\text{Hom}(E^*, E^*))$.*

(b) *Le centre $Z(\text{Der}^0(\mathcal{A}(E)))$ de cette algèbre de Lie est formé des multiples réels de la dérivée de Lie dans la direction du champ d'Euler.*

DÉMONSTRATION. Soit $D \in \text{Der}^0(\mathcal{A}(E))$. Comme D respecte la graduation de $\mathcal{A}(E)$, sa restriction à $\mathcal{A}^0(E) = \{f \circ \pi : f \in C^\infty(M)\}$ se ramène à l'action d'un champ de vecteurs $X \in \text{Vect}(M)$ par

$$\pi^* f \mapsto \pi^* L_X f.$$

Considérons la restriction de D à $\mathcal{A}^1(E)$, ce dernier espace étant identifié à $\Gamma(E^*)$. En fait à $u \in \Gamma(E^*)$ on associe $\widehat{u} \in \mathcal{A}^1(E)$ défini par

$$\widehat{u}(a) = u_x(a),$$

pour $a \in E_x$.

Ainsi, l'application linéaire $D : \Gamma(E^*) \rightarrow \Gamma(E^*)$ est un opérateur différentiel, et il est d'ordre un.

En effet, pour tout $u \in \Gamma(E^*)$, tel que $j_x^1 u = 0$ dans un ouvert U de M contenant x , on peut considérer une décomposition

$$u = \sum_i f_i u_i, \quad f_i \in \mathcal{A}^0(E), u_i \in \Gamma(E^*)$$

où les f_i et les u_i s'annulent en x . Par suite, l'opérateur différentiel D agissant sur les sections du fibré E^* s'écrit localement

$$D(u) = A(u) + \sum_i A^i(\partial_i u)$$

avec $A^i, A \in C^\infty(U, gl(n, \mathbb{R}))$.

Observons que $\Gamma(E^*)$ est un $\mathcal{A}^0(E)$ -module; on définit alors pour tout $f \in \mathcal{A}^0(E)$, un opérateur différentiel d'ordre zéro agissant sur les sections du fibré E^* par

$$\gamma_f : \Gamma(E^*) \rightarrow \Gamma(E^*) : u \mapsto fu.$$

On a alors d'une part,

$$\begin{aligned} D(fu) &= fD(u) + D(f)u \\ &= fA(u) + f \sum_i A^i(\partial_i u) + D(f)u, \end{aligned}$$

pour tous $f \in \mathcal{A}^0(E)$ et $u \in \Gamma(E^*) \cong \mathcal{A}^1(E)$.

Et d'autre part,

$$\begin{aligned} D(fu) &= A(fu) + \sum_i A^i(\partial_i(fu)) \\ &= A(fu) + \sum_i A^i(f\partial_i u) + \sum_i A^i(u\partial_i f). \end{aligned}$$

Par ailleurs, on a

$$D(f)u = (X.f)u,$$

pour un champs de vecteurs $X \in Vect(M)$. Et de plus, pour tous $f \in \mathcal{A}^0(E)$ et $A \in gl(E^*)$, on a bien que $[A, \gamma_f] = 0$, ce dernier crochet étant celui des commutateurs dans l'algèbre des endomorphismes du \mathbb{R} -espace vectoriel $\Gamma(E^*)$.

On en tire que $A^i = X^i id$ et on peut donc écrire

$$D(u) = \nabla_X u + B(u),$$

avec $X \in Vect(M)$ et $B \in gl(E^*)$. On a supposé donnée, dans ce qui précède, une connexion sur le fibré vectoriel $E \rightarrow M$, et c'est encore le cas dans les lignes qui suivent.

Observons que la dérivation $L_{\mathcal{E}} \in Der^0(\mathcal{A}(E))$ est nulle sur $\mathcal{A}^0(E)$ et qu'elle coïncide avec l'identité sur $\Gamma(E^*)$; ce qui correspond donc au cas $X = 0, A = id$.

Comme $\mathcal{A}^0(E)$ et $\mathcal{A}^1(E)$ engendrent toute la \mathbb{R} -algèbre $\mathcal{A}(E)$, la partie (a) du théorème est ainsi établie.

Soient $D_{X,A} \in Z(\text{Der}^0(\mathcal{A}(E)))$, $D_{Y,B} \in \text{Der}^0(\mathcal{A}(E))$ et $u \in \Gamma(E^*)$.
On doit donc avoir

$$\begin{aligned} 0 &= [D_{X,A}, D_{Y,B}](u) \\ &= D_{X,A}(D_{Y,B}(u)) - D_{Y,B}(D_{X,A}(u)) \\ &= \nabla_X(\nabla_Y u + B(u)) + A(\nabla_Y u + B(u)) - \nabla_Y(\nabla_X u + A(u)) - B(\nabla_X u + A(u)) \\ &= (R(X, Y) + \nabla_{[X,Y]}u + (\nabla_X B)(u) - (\nabla_Y A)(u) + [A, B](u) \end{aligned}$$

Cette relation étant vraie pour tous Y, B ; en posant $Y = 0$, on obtient

$$[A, B] = 0 \text{ et } \nabla_X B = 0,$$

quel que soit B . La première égalité donne $A = \kappa \text{id}$. La deuxième donne, en posant $B = f \text{id}$, $f \in \mathcal{A}^0(E)$, $X.f \text{id} = 0$ et donc $X = 0$. (Puisque M est supposée connexe.)

□

COROLLAIRE 4.6. *Soient $E \rightarrow M$ et $F \rightarrow N$ deux fibrés vectoriels. Tout isomorphisme d'algèbres associatives $\Phi : \mathcal{A}(E) \rightarrow \mathcal{A}(F)$ induit un isomorphisme d'algèbres de Lie $\widehat{\Psi} : \text{Der}(\mathcal{A}(E)) \rightarrow \text{Der}(\mathcal{A}(F))$ tel que*

$$\widehat{\Psi}(\mathcal{E}_E) = \mathcal{E}_F \quad \text{et} \quad \widehat{\Psi}(\text{Der}^r(\mathcal{A}(E))) = \text{Der}^r(\mathcal{A}(F))$$

avec $\text{Der}^r(\mathcal{A}(E))$ (resp. $\text{Der}^r(\mathcal{A}(F))$) désignant le \mathbb{R} -espace vectoriel des dérivations de $\mathcal{A}(E)$ (resp. $\mathcal{A}(F)$) de poids r .

DÉMONSTRATION. Comme Ψ induit un isomorphisme gradué entre $\mathcal{A}(E)$ et $\mathcal{A}(F)$, voir la Remarque 2.4 du chapitre précédent, nous allons noter les deux par Ψ . Ainsi, par définition, pour tout $D \in \text{Der}(\mathcal{A}(E))$, on a $\widehat{\Psi}(D) = \Psi \circ D \circ \Psi^{-1}$; et donc, Ψ respectant les graduations, il vient, pour tout $D \in \text{Der}^r(\mathcal{A}(E))$ et tout $u \in \mathcal{A}^s(F)$,

$$(\widehat{\Psi}(D))(u) = \Psi(D(\Psi^{-1}(u))) \in \mathcal{A}^{r+s}(F),$$

car $\Psi^{-1}(u) \in \mathcal{A}^s(E)$. D'où l'inclusion

$$\widehat{\Psi}(\text{Der}^r(\mathcal{A}(E))) \subset \text{Der}^r(\mathcal{A}(F)).$$

En outre, de

$$\widehat{\Psi}(Z(\text{Der}^0(\mathcal{A}(E)))) = Z(\text{Der}^0(\mathcal{A}(F))),$$

vu le théorème 4.5 précédent, on conclut qu'il existe $\kappa \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ tel que

$$\widehat{\Psi}(\mathcal{E}_E) = \kappa \mathcal{E}_F.$$

Par suite, pour tout $u \in \mathcal{A}^1(F)$, on a d'une part

$$\begin{aligned} (\widehat{\Psi}(\mathcal{E}_E))(u) &= \Psi \circ \mathcal{E}_E \circ \Psi^{-1}(u) \\ &= \Psi(\Psi^{-1}(u)) \quad \text{car } \Psi^{-1}(u) \in \mathcal{A}^1(E) \end{aligned}$$

Et de l'autre,

$$\begin{aligned} (\widehat{\Psi}(\mathcal{E}_E))(u) &= (\kappa \mathcal{E}_F)(u) \\ &= \kappa u \end{aligned}$$

Par suite, $\kappa = 1$; et on a bien que $\widehat{\Psi}$ préserve le champs d'Euler. \square

5. Algèbre de Lie des opérateurs homogènes de poids zéro

Soit $\pi : E \rightarrow M$ un fibré vectoriel. Soit maintenant

$$\mathcal{D}_0(E) = \{D \in \mathcal{D}_{\mathcal{E}}(E) : [\mathcal{E}, D] = 0\}$$

la sous-algèbre de Lie de $\mathcal{D}_{\mathcal{E}}(E)$ des opérateurs différentiels homogènes de poids zéro.

On a alors que $\mathcal{D}^0(E)$ est une sous-algèbre de Poisson quantique de $\mathcal{D}_{\mathcal{E}}(E)$. En effet, posons

$$\mathcal{D}_0^i(E) = \mathcal{D}_0(E) \cap \mathcal{D}_{\mathcal{E}}^i(E) \quad \forall i \in \mathbb{Z}.$$

On a alors

$$\mathcal{D}_0(E) = \bigcup_{i \in \mathbb{Z}} \mathcal{D}_0^i(E)$$

On a aussitôt les inclusions suivantes

$$\mathcal{D}_0^i(E) \subset \mathcal{D}_0^{i+1}, \mathcal{D}_0^i(E) \cdot \mathcal{D}_0^j(E) \subset \mathcal{D}_0^{i+j}(E)$$

et

$$[\mathcal{D}_0^i(E), \mathcal{D}_0^j(E)] \subset \mathcal{D}_0^{i+j-1}(E),$$

si bien que $\mathcal{D}_0(E)$ est une sous-algèbre de Poisson quantique de $\mathcal{D}_{\mathcal{E}}(E)$ dont la base est l'algèbre associative commutative $\mathcal{A}^0(E)$.

Il se pose alors la question de savoir si cette algèbre de Lie caractérise le fibré $E \rightarrow M$ ou à défaut, la variété différentielle M .

Observons déjà que si $T \in \mathcal{D}_0^k(E)$, alors localement, dans une carte adaptée au fibré $(\pi^{-1}(U), \psi)$ avec (U, φ) une carte de M telle que $E \rightarrow M$ soit trivialisable au-dessus de U et $\psi = (\varphi \times id) \circ \phi^{-1}$ où $\phi : U \times \mathbb{R}^n \rightarrow \pi^{-1}(U)$ est une trivialisatation du fibré, on peut alors écrire

$$T = \sum_{|\alpha|+|\beta|=k} u_{\alpha\beta} \partial^\alpha \bar{\partial}^\beta$$

avec $u_{\alpha\beta} \in \mathcal{A}^{|\beta|}(E_U)$; en vertu de la caractérisation locale de $\mathcal{D}_{\mathcal{E}}(E)$ donnée à la section 1.3 du Chapitre 3.

On peut énoncer le résultat suivant, où nous regroupons les premières propriétés de l'algèbre de Poissons quantique $\mathcal{D}_0(E)$.

PROPOSITION 5.1. *Soit $\mathcal{D}_0(E)$ l'algèbre de Poisson quantique des opérateurs homogènes de poids zéro d'un fibré vectoriel $E \rightarrow M$. Alors $\mathcal{D}_0(E)$ est non-singulière, n'est ni quasi-distinguante ni symplectique.*

DÉMONSTRATION. D'après la proposition 1.5 du chapitre 3, on peut écrire pour tout $u \in \mathcal{A}^0(E)$,

$$u = \sum_{i=0}^p X_i^h \cdot (\pi^*(f_i)),$$

avec $p \in \mathbb{N}$, $f_i \in C^\infty(M)$, $X_i \in Vect(M)$ et X_i^h le relèvement horizontal du champ de vecteur X_i relativement à une connexion linéaire du fibré vectoriel $E \rightarrow M$.

Observons que de la relation

$$[\mathcal{E}, X^h] = 0, \quad \forall X \in Vect(M)$$

on déduit que l'algèbre de Poisson quantique $\mathcal{D}_0(E)$ est non-singulière. L'algèbre $\mathcal{D}_0(E)$ n'est ni symplectique ni quasi-distinguante car

$$[\mathcal{E}, T] = 0, \quad \forall T \in \mathcal{D}_0(E).$$

En effet, d'une part, cette égalité signifie que le champ d'Euler \mathcal{E} appartient au centre de l'algèbre de Lie $\mathcal{D}_0(E)$ et de l'autre, on déduit de la relation $[\mathcal{E}, \mathcal{A}^0(E)] = 0$ l'égalité

$$\{\sigma(\mathcal{E}), \mathcal{A}^0(E)\} = 0$$

qui traduit que $\mathcal{D}_0(E)$ n'est pas quasi-distinguante. \square

Ainsi, les méthodes développées jusqu'à présent ne nous permettent pas de conclure à une quelconque caractérisation Lie-algébrique, que ce soit en termes, ni de fibré vectoriel, ni de variété différentielle. On a le résultat suivant.

LEMME 5.2. *Soit $E \rightarrow M$ un fibré vectoriel. Dans une carte adaptée au fibré, les puissances du champs d'Euler \mathcal{E} sont données par*

$$\mathcal{E}^1 := \Delta_1; \quad \mathcal{E}^2 = \mathcal{E} + \Delta_2, \quad \text{avec } \Delta_2 := \sum_{i,j} y_i y_j \bar{\partial}_i \bar{\partial}_j$$

$$\mathcal{E}^k = \Delta_1 + a_2 \Delta_2 + \dots + a_{k-1} \Delta_{k-1} + \Delta_k, \quad \text{avec } \Delta_k = \sum_{i_1, \dots, i_k} y_{i_1} \dots y_{i_k} \bar{\partial}_{i_1} \dots \bar{\partial}_{i_k},$$

où $a_1, \dots, a_{k_1} \in \mathbb{R}$ et on a la relation

$$\mathcal{E} \circ \Delta_k = k \Delta_k + \Delta_{k+1}.$$

DÉMONSTRATION. La dernière égalité s'obtient directement par

$$\begin{aligned}
\mathcal{E} \circ \Delta_k &= \left(\sum_{i_{k+1}=1}^n y_{i_{k+1}} \bar{\partial}_{i_{k+1}} \right) \circ \left(\sum_{i_1, \dots, i_k} y_{i_1} \cdots y_{i_k} \bar{\partial}_{i_1} \cdots \bar{\partial}_{i_k} \right) \\
&= \sum_{j=1}^k \left(\sum_{i_1, \dots, i_k} y_{i_1} \cdots \mathcal{E}(y_{i_j}) \cdots y_{i_k} \right) \bar{\partial}_{i_1} \cdots \bar{\partial}_{i_k} \\
&\quad + \sum_{i_1, \dots, i_{k+1}} y_{i_1} \cdots y_{i_{k+1}} \bar{\partial}_{i_1} \cdots \bar{\partial}_{i_{k+1}} \\
&= k\Delta_k + \Delta_{k+1}.
\end{aligned}$$

La suite de la preuve se fait par récurrence. Supposons que la puissance \mathcal{E}^k est donnée par la formule de l'énoncé. Alors on a

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}^{k+1} &= \mathcal{E} \circ \mathcal{E}^k = \mathcal{E} \circ \Delta_1 + a_2 \mathcal{E} \circ \Delta_2 + \cdots + a_{k-1} \mathcal{E} \circ \Delta_{k-1} + \mathcal{E} \circ \Delta_k \\
&= \mathcal{E} + \Delta_2 + a_i \sum_{i=2}^{k-1} (i\Delta_i + \Delta_{i+1}) + k\Delta_k + \Delta_{k+1} \\
&= \mathcal{E} + (1 + 2a_2)\Delta_2 + \sum_{j=3}^{k-1} (a_{j-1} + ja_j)\Delta_j + (k + a_{k-1})\Delta_k + \Delta_{k+1}
\end{aligned}$$

□

Le précédent lemme donne lieu à la remarque suivante.

REMARQUE 5.3. *En premier lieu, on peut écrire*

$$\Delta_k = \sum_{\alpha_1 + \dots + \alpha_n = k} \frac{k!}{\alpha_1! \cdots \alpha_n!} y_1^{\alpha_1} \cdots y_n^{\alpha_n} \bar{\partial}_1^{\alpha_1} \cdots \bar{\partial}_n^{\alpha_n}$$

Mais aussi,

$$\Delta_k = p(\mathcal{E}),$$

où $p \in \mathbb{R}[X]$ est de degré k .

En effet, si $\Delta_k = p(\mathcal{E})$, alors

$$\Delta_{k+1} = \mathcal{E} \circ \Delta_k - k\Delta_k = \mathcal{E} \circ p(\mathcal{E}) - kp(\mathcal{E}).$$

On peut maintenant énoncer le résultat suivant ; dans lequel $\mathbb{R}[\mathcal{E}]$ désigne l'ensemble des opérateurs différentiels homogènes qui, dans toute carte adaptée au fibré, sont polynômiaux en \mathcal{E} , avec des coefficients réels et de degré borné, indépendamment de la trivialisaton.

PROPOSITION 5.4. *Soit $E \rightarrow M$ un fibré vectoriel. Alors le centre de l'algèbre de Lie $\mathcal{D}_0(E)$ est donné par*

$$Z(\mathcal{D}_0(E)) = \mathbb{R}[\mathcal{E}].$$

DÉMONSTRATION. La preuve se fait en deux étapes. D'abord, nous montrons que les seuls éléments du centre $Z(\mathcal{D}_0(E))$ ayant une expression locale de la forme

$$\sum_{|\alpha| \leq k} u_\alpha \partial^\alpha, \quad u_\alpha \in \mathcal{A}^0(E_U)$$

sont dans $\mathcal{A}^0(E)$; et par conséquent sont constants. En suite et enfin, nous nous intéressons aux éléments centraux ayant une expression locale de la forme

$$\sum_{|\alpha|+|\beta| \leq k} u_{\alpha\beta} \partial^\alpha \bar{\partial}^\beta, \quad u_{\alpha\beta} \in \mathcal{A}^{|\beta|}(E_U) \quad |\beta| \neq 0.$$

Nous établissons alors qu'un tel élément central T est tel que son symbole est un multiple réel de celui d'une puissance du champ d'Euler, et comme nous allons le voir, cela est suffisant pour achever la démonstration de notre proposition.

Passons à la première étape. Soit $T \in Z(\mathcal{D}_0(E))$. Alors on a

$$\{\sigma(T), u\} = 0,$$

pour tout $u \in \mathcal{A}^0(E)$. Par suite, si $P = \sigma(T)$, en passant en coordonnées locales, on a

$$\partial_{\xi_i} P = 0, \quad \forall i \in \{1, \dots, m\}$$

avec (x, y, ξ, η) les coordonnées locales dans T^*E associées à des coordonnées locales (x, y) dans une carte adaptée au fibré E . De plus, pour tout $D \in \mathcal{D}_0^1(E)$ avec $\sigma(D) = Q$, on a $\{P, Q\} = 0$. Localement, cela se traduit par

$$-\sum_{i=1}^m (\partial_{x^i} P \cdot \partial_{\xi_i} Q) + \sum_{j=1}^n (\partial_{\eta_j} P \cdot \partial_{y^j} Q - \partial_{y^j} P \cdot \partial_{\eta_j} Q) = 0 \quad (1)$$

Par suite, de la relation (1) ci-dessus, on tire

$$\partial_{x^i} P = 0, \quad \forall i \in \{1, \dots, m\},$$

car il est possible de choisir Q de sorte que $\partial_{\xi_i} Q \neq 0$ et $\partial_{\xi_k} Q = 0$, pour tout indice k distinct de i et, $\partial_{y^j} Q = \partial_{\eta_j} Q = 0$, pour tout indice j .

Supposons, dans un premier temps, qu'il existe un indice k_0 tel que $\partial_{\eta_{k_0}} P = 0$. Considérons alors Q tel que localement on ait $Q = f(x)y^{k_0}\eta_{k_0}$ avec $f \in C^\infty(M)$. La relation (1) donne dans ce cas

$$\partial_{y^{k_0}} P = 0.$$

Par ailleurs, pour $Q = f(x)y^{k_0}\eta_{j_0}$, $j_0 \neq k_0$, on peut écrire $\partial_{y^k} Q = 0$, si $k \neq k_0$; et on a donc localement

$$\{P, Q\} = -\sum_k \partial_{y^k} P \cdot \partial_{\eta_k} Q.$$

Mais pour $k \neq j_0$, on a bien $\partial_{\eta_k} Q = 0$; on en déduit alors que

$$\partial_{y^{j_0}} P = 0, \quad \forall j_0 \neq k_0.$$

Cela n'est possible que si $P \in \mathcal{A}^0(E)$. Et dans ce cas, $P \in \mathcal{A}^0(E)$ est central dans $\mathcal{D}_0(E)$ si c'est une constante car P doit alors commuter avec tous les X^h , pour $X \in Vect(M)$.

Pour la dernière étape, nous supposons donc dans la suite, que pour tout j , $\partial_{\eta_j} P \neq 0$. Nous allons montrer que

$$\sigma(T) = a \sigma(\mathcal{E}^k),$$

pour tout $T \in \mathcal{D}_0^k(E) \setminus \mathcal{D}_0^{k-1}(E)$ appartenant à $Z(\mathcal{D}_0(E))$ avec $a \in \mathbb{R}$. Observons que cela est suffisant pour achever la démonstration de notre proposition. En effet, si on décompose localement T en $T = T_{k-1} + T_k$, le dernier terme de cette somme étant la partie d'ordre exactement k dans T , le fait que T soit dans le centre entraîne

$$[T_{k-1}, D] = 0, \forall D \in Z(\mathcal{D}_0(E_U)),$$

au-dessus de $U \subset M$, l'ouvert donnant lieu à la trivialisaton du fibré dans laquelle nous travaillons. Nous avons ainsi utilisé une sorte de « récurrence descendante » sur l'ordre de l'opérateur différentiel.

Posons, au dessus de U ,

$$P = \sigma(T) = \sum_{|\alpha|=|\beta|=k} a_{\alpha\beta} y^\alpha \eta^\beta,$$

avec $a_{\alpha\beta} \in \mathbb{R}$. La relation

$$\{P, f(x)y_r \eta_r\} = 0, \forall r \in \{1, \dots, n\}, f \in C^\infty(U)$$

donne

$$\sum \beta_r a_{\alpha\beta} y^\alpha \eta^\beta = \sum \alpha_r a_{\alpha\beta} y^\alpha \eta^\beta.$$

On en déduit que $\alpha = \beta$. Nous notons dans la suite, $P = \sum_{|\alpha|=k} a_\alpha y^\alpha \eta^\alpha$. Pour tous indices distincts $r, s \in \{1, \dots, n\}$, on a

$$\{P, f(x)y_r \eta_s\} = 0 \Leftrightarrow \partial_{\eta_r} P \cdot \partial_{y_r} (y_r \eta_s) = \partial_{y_s} P \cdot \partial_{\eta_s} (y_r \eta_s)$$

Ce qui équivaut à

$$\begin{aligned} & \sum_{|\alpha|=k} \alpha_r a_\alpha y^\alpha \eta_1^{\alpha_1} \dots \eta_r^{\alpha_r-1} \dots \eta_s^{\alpha_s+1} \dots \eta_n^{\alpha_n} \\ &= \sum_{|\beta|=k} \beta_s a_\beta y_1^{\beta_1} \dots y_r^{\beta_r+1} \dots y_s^{\beta_s-1} \dots y_n^{\beta_n} \eta^\beta \end{aligned}$$

On en déduit que pour chaque α de longueur k , il existe β de même longueur tel que

$$\begin{cases} \alpha_j = \beta_j, \forall j \notin \{r, s\} \\ \alpha_r = \beta_r + 1 \\ \alpha_s = \beta_s - 1 \end{cases}$$

Par suite, on peut écrire

$$a_{\alpha_1 \dots \alpha_n} = \frac{\alpha_s + 1}{\alpha_r} a_{\alpha_1 \dots (\alpha_r-1) \dots (\alpha_s+1) \dots \alpha_n},$$

en considérant un indice r tel que $\alpha_r \neq 0$.

On en déduit donc que

$$\begin{aligned}
a_\alpha &= \frac{(\alpha_s + 1) \cdots (\alpha_s + \alpha_r)}{\alpha_r(\alpha_r - 1) \cdots 1} a_{\alpha_1 \cdots 0 \cdots (\alpha_s + \alpha_r) \cdots \alpha_n} \\
&= \frac{(\alpha_s + \alpha_r)!}{\alpha_r!(\alpha_s)!} a_{\alpha_1 \cdots 0 \cdots (\alpha_s + \alpha_r) \cdots \alpha_n} \\
&= \frac{(\alpha_1 + \cdots + \alpha_n)!}{\alpha_1! \cdots (\alpha_n)!} a_{0 \cdots 0 \cdots (\alpha_1 + \cdots + \alpha_n) \cdots 0}
\end{aligned}$$

On écrit alors

$$P = a_{0 \cdots s \cdots 0} \sum_{|\alpha|=k} \frac{k!}{\alpha_1! \cdots \alpha_n!} y^\alpha \eta^\alpha = a_{0 \cdots s \cdots 0} \Delta_k$$

En effet, cela vient du fait que pour un multi-indice quelconque λ tel que $|\lambda| = k$, s'il existe r tel que $0 \leq \lambda_r < \alpha_r$, alors on a

$$a_\alpha = \frac{(\alpha_s + 1) \cdots (\alpha_s + (\alpha_r - \lambda_r))}{\alpha_r(\alpha_r - 1) \cdots (\lambda_r + 1)} a_{\alpha_1 \cdots \lambda_r \cdots (\alpha_s + (\alpha_r - \lambda_r)) \cdots \alpha_n}$$

□

DÉFINITION 2. Soit L une algèbre de Lie. Le Casimir d'une partie V de L est défini et noté par

$$Cas(V) = \{a \in V \mid [a, V] = 0.\}$$

Dans les lignes qui suivent, $\mathcal{A}^0(E)_{\leq 1}[\mathcal{E}]$ désigne l'ensemble des opérateurs différentiels homogènes qui s'écrivent localement comme polynômes de degré inférieur ou égale à 1 en \mathcal{E} , à coefficients dans $\mathcal{A}^0(E)$.

PROPOSITION 5.5. Soit $E \rightarrow M$ un fibré vectoriel. Alors les inclusions suivantes sont vérifiées

$$\mathcal{A}^0(E) \subset Nil(\mathcal{D}_0^1(E)) \subset \{T \in \mathcal{D}_0^1(E) \mid [T, \mathcal{A}^0(E)] = 0\}$$

Et on a l'égalité suivante

$$Cas(Nil(\mathcal{D}_0^1(E))) = \mathcal{A}^0(E)_{\leq 1}[\mathcal{E}].$$

DÉMONSTRATION. La première inclusion étant immédiate, vérifions la seconde. Soit $T \in Nil(\mathcal{D}_0^1(E))$ tel que, dans une carte adaptée au fibré, on puisse noter

$$T = h + \sum_i f_i \partial_i + \sum_j v_j \bar{\partial}_j,$$

avec $h, f_i \in \mathcal{A}^0(E_U)$ et $v_j \in \mathcal{A}^1(E_U)$.

Nous allons montrer que les f_i sont nulles. Pour cela, nous adaptons les méthodes développées Grabowski et Poncin dans [17] pour montrer que l'algèbre $\mathcal{D}(M)$ est distinguante.

Enfin, nous construisons un élément particulier de $Nil(\mathcal{D}_0^1(E))$ nous permettant de conclure que les éléments du Casimir de ce dernier ensemble sont de la forme annoncée dans notre proposition.

Supposons par l'absurde qu'il existe $i \in \{1, \dots, m\}$ tel que $f_i \neq 0$; et soit alors $e \in E_U$ tel que $f_i(e) \neq 0$. Il existe donc un domaine $W \subset \pi^{-1}(U)$ de carte adaptée au fibré, contenant e , tel que $f_i|_W \neq 0$. En considérant les coordonnées (x^0, y^0) de e dans une telle carte, on a bien que la fonction $x \mapsto f_i(x, y^0)$ est non nulle dans un voisinage V de $x^0 = \pi(e)$.

On peut maintenant appliquer le Lemme 2.1 du second chapitre pour obtenir une fonction $h \in C^\infty(V)$ et une suite u_n dans $V \subset M$ ayant les propriétés énoncées dans ce lemme.

En multipliant h par une fonction valant 1 au voisinage des u_n et à support compact dans V , on obtient une fonction $g \in C^\infty(M)$ telle qu'en posant $f = \pi^*(g) \in \mathcal{A}^0(E)$, on ait

$$(adT)^n(f)(u_n, y^0) = (f_i)^n(\partial_{x^i})^n(f)(u_n, y^0) \neq 0.$$

En effet, dans le membre à gauche de l'égalité ci-dessus, la fonction appliquée à (u_n, y^0) se développe en une somme de dérivées de f d'ordres supérieurs ou égales à n . On a alors que toutes les dérivées par rapport aux x^k ($k \neq i$) sont nulles et pour $s < n$,

$$(\partial_{x^i}^s f)(u_n) = 0.$$

Par conséquent, tous les termes d'ordre inférieur à n s'annulent et il en est de même de ceux d'ordre maximum sauf

$$(f_i)^n \partial_{x^i}^n f$$

qui est non nul en (u_n, y^0) .

Il existe donc $D' \in \mathcal{D}_0^1(E)$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on ait

$$(adT)^n(D') \neq 0,$$

ce qui est absurde puisque $T \in Nil(\mathcal{D}_0^1(E))$.

Par suite, pour tout $T \in Nil(\mathcal{D}_0^1(E))$, on peut écrire localement

$$T = g + \sum_j v_j \bar{\partial}_j$$

avec $v_j \in \mathcal{A}^1(E)$ et $g \in \mathcal{A}^0(E)$. Et on a donc bien la relation

$$[T, \mathcal{A}^0(E)] = 0.$$

Calculons maintenant le Casimir de $Nil(\mathcal{D}_0^1(E))$. Observons que pour $r \neq s$, on peut écrire

$$R := fS \in Nil(\mathcal{D}_0^1(E)),$$

où nous nous plaçons dans une carte adaptée au fibré de domaine $\pi^{-1}(U)$, avec

$$S = y^r \bar{\partial}_s \in \mathcal{D}_0^1(E_U)$$

et en posant $f = \pi^*(h)$, où h est une fonction à support compact dans U et y valant 1.

En effet, soit un élément quelconque $T \in \mathcal{D}_0^1(E)$ dont l'expression locale est

$$T = g + \sum_i g_i \partial_i + \sum_j v_j \bar{\partial}_j.$$

On a bien

$$\begin{aligned} (adR)^2(T) &= (adR) \left(- \sum_i \partial_i(f) g_i y^r \bar{\partial}_s + \sum_j f y^r \bar{\partial}_s(v_j) \bar{\partial}_j - f v_r \bar{\partial}_s \right) \\ &= f y^r \bar{\partial}_s \left(\sum_i \partial_i(f) g_i y^r \right) \bar{\partial}_s + (f \cdot 0) \bar{\partial}_s + \sum_k f y^r \bar{\partial}_s \left(\sum_j f y^r \bar{\partial}_s(v_j) \right) \\ &\quad - f f y^r \bar{\partial}_s(v_r) \bar{\partial}_s - f y^r \bar{\partial}_s(f v_r) \bar{\partial}_s + (f \cdot 0) \bar{\partial}_s \\ &= -2f^2 y^r \bar{\partial}_s(v_r) \bar{\partial}_s. \end{aligned}$$

Par suite, on a

$$(adR)^3(T) = 0, \quad \forall T \in \mathcal{D}_0^1(E);$$

en d'autres termes, on vient de construire un élément particulier de $Nil(\mathcal{D}_0^1(E))$. Ainsi, si $T \in Cas(Nil(\mathcal{D}_0^1(E)))$, on a bien, en particulier,

$$[T, R] = 0;$$

ce qui, localement, se traduit par

$$f v_r \bar{\partial}_s - f y^r \sum_j \bar{\partial}_s(v_j) \bar{\partial}_j = 0,$$

où nous avons noté $T = g + \sum_j v_j \bar{\partial}_j$. On en déduit que

$$\begin{cases} \bar{\partial}_s(v_j) = 0, \forall j \neq s \\ v_r = y^r \bar{\partial}_s(v_s) \end{cases}$$

On tire de la première égalité que pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$, v_j est de la forme $v_j = f_j(x) y^j$ et de la deuxième, que pour tous r et s , $f_r = f_s$. Cette deuxième égalité signifie aussi que si $v_r = 0$, alors pour tout $r \neq s$, on a aussi $v_s = 0$. On en déduit que

$$Cas(Nil(\mathcal{D}_0^1(E))) \subset \mathcal{A}^0(E)_{\leq 1}[\mathcal{E}].$$

Cela achève la démonstration de notre proposition car l'inclusion inverse est immédiate. \square

Notons encore par $\mathcal{C}(\mathcal{D}_0^1(E))$ le sous-ensemble de $Hom_{\mathbb{R}}(\mathcal{D}_0^1(E), \mathcal{D}_0^1(E))$ défini par

$$\psi \in \mathcal{C}(\mathcal{D}_0^1(E)) \Leftrightarrow \psi([T, P]) = [\psi(T), P], \forall T \in \mathcal{D}_0^1(E), \forall P \in \mathcal{A}^0(E)_{\leq 1}[\mathcal{E}].$$

LEMME 5.6. *Pour tout $\psi \in \mathcal{C}(\mathcal{D}_0^1(E))$, on a*

$$\psi(f\mathcal{E}) = \psi(f)\mathcal{E} \text{ et } \psi(f) = f\psi(1) \quad \forall f \in \mathcal{A}^0(E).$$

Et aussi $\psi(\mathcal{A}^0(E)) \subset \mathcal{A}^0(E)$.

DÉMONSTRATION. Notons d'abord que la deuxième partie de ce lemme est une conséquence de la première partie. En effet, notons dans une carte adaptée au fibré, pour $f \in \mathcal{A}^0(E)$,

$$\psi(f) = h + \sum_i h_i \partial_i + \sum_j v_j \bar{\partial}_j$$

avec $h, h_i \in C^\infty(M)$ et $v_j \in \mathcal{A}^1(E)$.

On a alors

$$\psi(f) \circ \mathcal{E} = h\mathcal{E} + \sum_{i,j} h_i y^j \partial_i \bar{\partial}_j + \sum_j v_j \bar{\partial}_j + \sum_{j,k} v_j y^k \bar{\partial}_j \bar{\partial}_k.$$

Et comme, $\psi(f) \circ \mathcal{E} \in \mathcal{D}_0^1(E)$, on doit avoir, pour tous i, j ,

$$h_i = 0 = v_j.$$

Pour tout $T \in \mathcal{D}_0^1(E)$, on peut écrire

$$\begin{aligned} [T, f^2 \mathcal{E}] &= [T, f^2] \mathcal{E} \\ &= 2f[T, f] \mathcal{E}. \end{aligned}$$

En outre,

$$\begin{aligned} \psi([T, f^2 \mathcal{E}]) &= [\psi(T), f^2 \mathcal{E}] \\ &= [\psi(T), f^2] \mathcal{E} = 2f[\psi(T), f] \mathcal{E} \\ &= 2f\psi(\widehat{T}(f)) \mathcal{E} \end{aligned}$$

On obtient donc

$$\psi(f\widehat{T}(f)\mathcal{E}) = f\psi(\widehat{T}(f))\mathcal{E} \quad (*)$$

En remplaçant f par $f + h$ et T par gT dans (*), puis en remplaçant g par $\widehat{T}(h)$, il vient

$$\psi(f\widehat{T}(h)\widehat{T}(h)\mathcal{E}) + \psi(h\widehat{T}(h)\widehat{T}(f)\mathcal{E}) = f\psi(\widehat{T}(h)\widehat{T}(h))\mathcal{E} + h\psi(\widehat{T}(h)\widehat{T}(f))\mathcal{E}.$$

En effet, cela vient du fait qu'on a

$$\widehat{\widehat{T}(h)T}|_{\mathcal{A}^0(E)} = \widehat{T}(h)\widehat{T}|_{\mathcal{A}^0(E)}, \forall h \in \mathcal{A}^0(E)$$

et en appliquant la relation (*) ci-dessus.

D'où, en commutant $\widehat{T}(h)$ et $\widehat{T}(f)$, on peut encore appliquer (*) et obtenir la relation

$$\psi(f\widehat{T}(h)^2\mathcal{E}) = f\psi(\widehat{T}(h)^2)\mathcal{E} \quad (**)$$

Considérons l'idéal de $\mathcal{A}^0(E)$ défini et noté par

$$\mathcal{J} = \{g \in \mathcal{A}^0(E) : \forall f \in \mathcal{A}^0(E), \psi(fg\mathcal{E}) = f\psi(g)\mathcal{E}\}.$$

Comme $\mathcal{D}_0^1(E)$ est non-singulière, la relation (**) permet de conclure, comme dans les chapitres précédents, que

$$Rad(\mathcal{J}) = \mathcal{A}^0(E) = \mathcal{J}.$$

Par suite, pour tous $f, g \in \mathcal{A}^0(E)$, on a

$$\psi(fg\mathcal{E}) = f\psi(g)\mathcal{E} = g\psi(f)\mathcal{E}.$$

D'où le résultat, puisqu'on peut reprendre le raisonnement précédent en omettant le champ d'Euler. \square

PROPOSITION 5.7. *Soient $E \rightarrow M$ et $F \rightarrow N$ deux fibrés vectoriels. Tout isomorphisme $\Phi : \mathcal{D}_0^1(E) \rightarrow \mathcal{D}_0^1(F)$ d'algèbres de Lie tel que $\Phi(1) \in \mathbb{R}$ respecte les algèbres de base et sa restriction à $\mathcal{A}^0(E)$ est de la forme*

$$\Phi|_{\mathcal{A}^0(E)} = k\Psi,$$

avec $k \in \mathbb{R}_0 \subset \mathcal{A}^0(F)$ et $\Psi : \mathcal{A}^0(E) \rightarrow \mathcal{A}^0(F)$ un isomorphisme de \mathbb{R} -algèbres.

DÉMONSTRATION. On a, pour tout $f \in \mathcal{A}^0(E)$,

$$\Psi \circ \gamma_f \circ \Psi^{-1} \in \mathcal{C}(\mathcal{D}_0^1(F)).$$

Par conséquent, pour tout $g \in \mathcal{A}^0(F)$, il vient

$$\Phi(f\Phi^{-1}(g)) = \Phi(f\Phi^{-1}(1))g \in \mathcal{A}^0(F).$$

D'où, l'inclusion

$$\Phi(\mathcal{A}^0(E)) \subset \mathcal{A}^0(F).$$

On en déduit, en posant $g = \Phi^{-1}(h)$ que

$$\Phi(fg) = \Phi^{-1}(1)(\Phi(f)\Phi(g)).$$

D'où l'application

$$\Psi : \mathcal{A}^0(E) \rightarrow \mathcal{A}^0(F) : f \mapsto k\Phi(f),$$

en posant $k = \Phi^{-1}(1)$, est bien un isomorphisme d'algèbres associatives. \square

Les méthodes développées dans les lignes précédentes, permettent d'énoncer le résultat de caractérisation Lie-algébrique de fibrés vectoriels suivant.

PROPOSITION 5.8. *Soient $E \rightarrow M$ et $F \rightarrow N$ deux fibrés vectoriels de rangs respectifs $n, n' > 1$ avec $H^1(M, \mathbb{Z}/2) = 0$. S'il existe un isomorphisme d'algèbres de Lie $\Phi : \mathcal{D}_0^1(E) \rightarrow \mathcal{D}_0^1(F)$ tel que $\Phi(1) \in \mathbb{R}$, alors les fibrés vectoriels $E \rightarrow M$ et $F \rightarrow N$ sont isomorphes.*

DÉMONSTRATION. Soit $\Phi : \mathcal{D}_0^1(E) \rightarrow \mathcal{D}_0^1(F)$ un isomorphisme d'algèbres de Lie. D'après les calculs faits dans la démonstration de la Proposition 5.7 précédente, on a

$$\Phi(\mathcal{A}^0(E)) = \mathcal{A}^0(F).$$

Observons qu'on a la décomposition

$$\mathcal{D}_0^1(E) = \mathcal{A}^0(E) \oplus \text{Aut}(E),$$

d'espaces vectoriels.

Et qu'une égalité analogue est vraie pour le fibré $F \rightarrow N$. Considérons maintenant les espaces quotients

$$\mathcal{D}_0^1(E)/\mathcal{A}^0(E) \cong \text{Aut}(E) \text{ et } \mathcal{D}_0^1(F)/\mathcal{A}^0(F) \cong \text{Aut}(F),$$

ces identifications étant entendues entre algèbres de Lie car $\mathcal{A}^0(E)$ et $\mathcal{A}^0(F)$ sont respectivement des idéaux des algèbres de Lie $\mathcal{D}_0^1(E)$ et $\mathcal{D}_0^1(F)$. On en déduit que les algèbres de Lie $\text{Aut}(E)$ et $\text{Aut}(F)$ sont isomorphes et la Proposition 4.3 précédente permet de conclure. \square

ALGÈBRE DE LIE DES OPÉRATEURS DIFFÉRENTIELS AGISSANT SUR LES SECTIONS D'UN FIBRÉ VECTORIEL

1. Cadre général

Soit $\mathcal{D} = \bigcup_{i \geq 0} \mathcal{D}^i$ une algèbre associative filtrée avec unité sur un corps commutatif K de caractéristique nulle. On pose $\mathcal{D}^0 = \mathcal{A}$ et on étend la filtration sur \mathbb{Z} , en posant $\mathcal{D}^i = \{0\}$, pour $i < 0$.

- (1) On dit que l'algèbre de Lie \mathcal{D} muni du crochet des commutateurs est une algèbre *quasi de Poisson quantique* si

$$\mathcal{D}^i \subset \mathcal{D}^{i+1}, \mathcal{D}^i \mathcal{D}^j = \mathcal{D}^{i+j}, [\mathcal{D}^i, \mathcal{D}^j] \subset \mathcal{D}^{i+j}.$$

Dans ce cas, \mathcal{A} est une sous-algèbre associative de \mathcal{D} , mais aussi une sous-algèbre de Lie de \mathcal{D} . La \mathbb{R} -algèbre associative \mathcal{A} est appelée *l'algèbre de base* ou simplement *la base* de l'algèbre quasi de Poisson quantique \mathcal{D} .

- (2) L'algèbre \mathcal{D} est dite non-singulière s'il existe une sous-algèbre de Lie $\mathcal{D}_{\mathcal{A}}^1$ de \mathcal{D}^1 telle que $Z(\mathcal{A}) = [\mathcal{D}_{\mathcal{A}}^1, Z(\mathcal{A})]$.
- (3) \mathcal{D} est symplectique si $Z(\mathcal{D})$, le centre de \mathcal{D} , est réduit aux constantes. L'espace des constantes étant identifié à K par $k \in K \mapsto k \cdot 1 \in \mathcal{D}$, où 1 désigne l'unité de la \mathbb{R} -algèbre \mathcal{D} .
- (4) Le centralisateur de $ad(Z(\mathcal{A}))$ dans $Hom_K(\mathcal{D}, \mathcal{D})$, noté $\mathcal{C}(\mathcal{D})$, est défini par

$$\Psi \in \mathcal{C}(\mathcal{D}) \Leftrightarrow \Psi([T, u]) = [\Psi(T), u], \forall u \in Z(\mathcal{A}), \forall T \in \mathcal{D}$$

- (5) \mathcal{D} est quasi-distinguante si

$$[T, u] = 0, \forall u \in Z(\mathcal{A}) \Rightarrow T \in \mathcal{A}$$

et si pour tout entier naturel i ,

$$\{T \in \mathcal{D} : [T, Z(\mathcal{A})] \subset \mathcal{D}^i\} = \mathcal{D}^{i+1}.$$

PROPOSITION 1.1. *Soit \mathcal{D} une algèbre quasi de Poisson quantique, non-singulière et quasi-distinguante. Alors tout $\Psi \in \mathcal{C}(\mathcal{D})$ respecte la filtration et est tel que*

$$\Psi(u) = \Psi(1)u$$

pour tout $u \in Z(\mathcal{A})$.

DÉMONSTRATION. Soit $\Psi \in \mathcal{C}(\mathcal{D})$. Alors pour tout $A \in \mathcal{D}^0$ et tout $u \in Z(\mathcal{A})$, on a

$$[\Psi(A), u] = \Psi([A, u]) = 0$$

puisque $[A, u] = 0$. Comme \mathcal{D} est quasi-distinguante, il en résulte que $\Psi(A) \in \mathcal{A}$. Supposons maintenant que $\Psi(\mathcal{D}^i) \subset \mathcal{D}^i$. Alors, pour tous $T \in \mathcal{D}^{i+1}$, $u \in Z(\mathcal{A})$, on a

$$[\Psi(T), u] = \Psi([T, u]) \in \Psi(\mathcal{D}^i) \subset \mathcal{D}^i.$$

Par suite, \mathcal{D} étant quasi-distinguante, $\Psi(T) \in \mathcal{D}^{i+1}$.

Observons d'abord que pour $T \in \mathcal{D}^1$, l'application $A \mapsto \widehat{T}(A) = [T, A]$ n'est pas toujours une dérivation de \mathcal{D}^0 , mais elle vérifie la relation

$$\widehat{T}(AB) = \widehat{T}(A)B + A\widehat{T}(B) \quad (*)$$

puisque en général, $ad\Delta$ est une dérivation de la structure associative de l'algèbre quasi de Poisson quantique \mathcal{D} , quel que soit $\Delta \in \mathcal{D}$. D'où pour tous $\Psi \in \mathcal{C}(\mathcal{D})$, $T \in \mathcal{D}^1$, $u \in Z(\mathcal{A})$, on a d'une part

$$\begin{aligned} \Psi([T, u^2]) &= \Psi(\widehat{T}(u^2)) \\ &= \psi(\widehat{T}(u)u + u\widehat{T}(u)) \\ &= 2\Psi(u\widehat{T}(u)), \end{aligned}$$

puisque $T \in \mathcal{D}^1$ entraîne $\widehat{T}(u) \in \mathcal{D}^0$; et d'autre part, en utilisant le fait que $\Psi(T) \in \mathcal{D}^1$, on a

$$\begin{aligned} \Psi([T, u^2]) &= [\Psi(T), u^2] \\ &= 2u\Psi(\widehat{T}(u)). \end{aligned}$$

Par suite,

$$\Psi(u\widehat{T}(u)) = u\Psi(\widehat{T}(u)) \quad (**),$$

pour tous $T \in \mathcal{D}^1$, $u \in Z(\mathcal{A})$.

Observons ensuite que pour tout $v \in Z(\mathcal{A})$, les restrictions de $\widehat{\widehat{T}(v)T}$ et $\widehat{T}(v)\widehat{T}$ sur $Z(\mathcal{A})$ coïncident. En effet, pour tout $w \in Z(\mathcal{A})$,

$$\begin{aligned} \widehat{\widehat{T}(v)T}(w) &= [\widehat{T}(v)T, w] = \widehat{T}(v)Tw - w\widehat{T}(v)T \\ &= \widehat{T}(v)Tw - \widehat{T}(v)wT \\ &= \widehat{T}(v)\widehat{T}(w). \end{aligned}$$

En général, pour un élément quelconque A de \mathcal{D}^0 , $A\widehat{T}$ ne vérifie pas la relation (*) précédente mais $A\widehat{T}$ et \widehat{AT} coïncident sur $Z(\mathcal{A})$.

D'où, en remplaçant T par AT , $A \in \mathcal{D}^0$ et u par $u + w$, $w \in Z(\mathcal{A})$, la relation (**) devient

$$\Psi((u + w)\widehat{AT}(u + w)) = (u + w)\Psi(\widehat{AT}(u + w)).$$

Ce qui équivaut à

$$\Psi(u\widehat{AT}(w)) + \Psi(w\widehat{AT}(u)) = u\Psi(\widehat{AT}(w)) + w\Psi(\widehat{AT}(u)).$$

Pour $A = \widehat{T}(w)$ cette dernière égalité devient

$$\Psi(u(\widehat{T}(w))^2) + \Psi(w\widehat{T}(w)\widehat{T}(u)) = u\Psi((\widehat{T}(w))^2) + w\Psi(\widehat{T}(w)\widehat{T}(u))$$

Cette équation devient pour $T \in \mathcal{D}_{\mathcal{A}}^1$,

$$\Psi(u(\widehat{T}(w))^2) = u\Psi((\widehat{T}(w))^2) \quad (***)$$

En effet, si $T \in \mathcal{D}_{\mathcal{A}}^1$ alors

$$\begin{aligned} \Psi(w\widehat{T}(w)\widehat{T}(u)) &= \Psi(w\widehat{T}(u)\widehat{T}(w)) \\ &= \Psi(\widehat{w\widehat{T}(u)T(w)}) \\ &= w\Psi(\widehat{T}(u)T(w)) = w\Psi(\widehat{T}(w)\widehat{T}(u)), \end{aligned}$$

l'avant dernière égalité découlant de (**). Considérons l'ensemble

$$\mathcal{J} = \{v \in Z(\mathcal{A}) : \Psi(vu) = u\Psi(v), \forall u \in Z(\mathcal{A})\}.$$

Le sous-espace vectoriel \mathcal{J} est un idéal de $Z(\mathcal{A})$. En effet, pour tous $u \in Z(\mathcal{A}), v \in \mathcal{J}$ on a bien $uv \in \mathcal{J}$ car pour tout $w \in Z(\mathcal{A})$,

$$w\Psi(uv) = (uw)\Psi(v) = \Psi((uw)v) = \Psi((uv)w).$$

La relation (***) précédente montre que $\text{Rad}(\mathcal{J}) \supset [\mathcal{D}_{\mathcal{A}}^1, Z(\mathcal{A})]$.

L'algèbre \mathcal{D} étant non-singulière, on en conclut que $\text{Rad}(\mathcal{J}) = Z(\mathcal{A})$ et par suite $\mathcal{J} = Z(\mathcal{A})$. D'où la relation

$$\Psi(u) = u\Psi(1),$$

pour tous $\Psi \in \mathcal{C}(\mathcal{D}), u \in Z(\mathcal{D}^0)$. □

PROPOSITION 1.2. *Soient \mathcal{D}_1 et \mathcal{D}_2 deux algèbres quasi de Poisson quantiques, non-singulières et quasi-distinguantes. Alors tout isomorphisme $\Phi : \mathcal{D}_1 \rightarrow \mathcal{D}_2$ d'algèbres de Lie tel que $\Phi(Z(\mathcal{A}_1)) = Z(\mathcal{A}_2)$ respecte la filtration, sa restriction à \mathcal{A}_1 est un isomorphisme d'algèbres de Lie et celle à $Z(\mathcal{A}_1)$ est de la forme*

$$\Phi|_{Z(\mathcal{A}_1)} = \kappa\Psi,$$

où $\Psi : Z(\mathcal{A}_1) \rightarrow Z(\mathcal{A}_2)$ est un isomorphisme d'algèbres associatives.

DÉMONSTRATION. Observons d'abord que pour tout $A \in \mathcal{A}_1$, les endomorphismes d'espace vectoriel $\gamma_A : T \mapsto AT$ et $\Phi \circ \gamma_A \circ \Phi^{-1}$, de \mathcal{D}_1 et \mathcal{D}_2 respectivement, appartiennent à $\mathcal{C}(\mathcal{D}_1)$ et $\mathcal{C}(\mathcal{D}_2)$ selon le cas. En effet, pour tous $A \in \mathcal{A}_1, T \in \mathcal{D}_1$ et $u \in Z(\mathcal{A}_1)$

$$\gamma_A([T, u]) = ATu - AuT = [\gamma_A(T), u];$$

et pour tout $v \in Z(\mathcal{A}_2)$, comme $\Phi^{-1}(v) \in Z(\mathcal{A}_1)$, on a pour tout $D \in \mathcal{D}_2$,

$$\Phi \circ \gamma_A \circ \Phi^{-1}([D, u]) = [\Phi \circ \gamma_A \circ \Phi^{-1}(D), u].$$

Par suite, pour tout $w \in Z(\mathcal{A}_2)$, en vertu de la Proposition 1.1 précédente, on obtient

$$\Phi \circ \gamma_A \circ \Phi^{-1}(w) = \Phi(A\Phi^{-1}(1))w \in \mathcal{A}_2 \quad (*)$$

On en déduit que pour tout $A \in \mathcal{A}_1$,

$$\Phi(A\Phi^{-1}(1)) \in \mathcal{A}_2 \quad (\text{v})$$

En posant $v = \Phi^{-1}(w)$, $A = u$ et $\lambda = \Phi^{-1}(1)$ dans la relation (*) précédente, on obtient

$$\begin{aligned} \Phi(uv) &= \Phi(u\lambda)\Phi(v) \\ &= \Phi(\lambda u)\Phi(v) = \Phi(\lambda^2)\Phi(u)\Phi(v). \quad (**) \end{aligned}$$

En particulier, pour $u = 1$ et $v = \lambda$, la relation (**) précédente montre que l'élément $\Phi(\lambda^2)$, appartenant au centre de \mathcal{D}_2 , est inversible dans \mathcal{A}_2 . Par suite, en posant $\kappa^{-1} = \Phi(\lambda^2)$, on a que $\Psi : Z(\mathcal{A}_1) \rightarrow Z(\mathcal{A}_2) : u \mapsto \kappa^{-1}\Phi(u)$, est bien un isomorphisme d'algèbres associatives.

Observons que

$$\begin{aligned} \Psi(\lambda\Psi^{-1}(\kappa)) &= \Psi(\lambda)\kappa \\ &= \kappa^{-1}\Phi(\lambda)\kappa = 1. \end{aligned}$$

Ainsi $\lambda = \Phi^{-1}(1)$ est inversible dans \mathcal{A}_1 et on peut donc déduire de la relation (v) que $\Phi(\mathcal{A}_1) \subset \mathcal{A}_2$.

Supposons maintenant que $\Phi(\mathcal{D}_1^i) \subset \mathcal{D}_2^i$ pour $i \in \mathbb{N}$. Soit $T \in \mathcal{D}_1^{i+1}$.

On a

$$[\Phi(T), Z(\mathcal{A}_2)] = \Phi([T, Z(\mathcal{A}_1)]) \subset \mathcal{D}_2^i$$

D'où $\Phi(T) \in \mathcal{D}_2^{i+1}$ et donc Φ respecte la filtration. \square

2. Opérateurs différentiels d'un fibré vectoriel

Dans les chapitres précédents, nous avons étudié des algèbres de Lie formées d'opérateurs différentiels agissant sur les fonctions appartenant à $C^\infty(E)$, pour un fibré vectoriel donné $E \rightarrow M$. Dans les lignes qui suivent, nous nous intéressons aux opérateurs différentiels agissant sur les sections d'un fibré vectoriel.

Soit $E \rightarrow M$ un fibré vectoriel et notons par $\Gamma(E)$ l'espace de sections du fibré E . L'espace $\Gamma(E)$ étant un $C^\infty(M)$ -module, posons

$$\gamma_u : \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(E) : s \mapsto us, \forall u \in C^\infty(M).$$

On a bien que γ_u est un endomorphisme de l'espace $\Gamma(E)$.

Posons alors

$$\mathcal{A}(E, M) := \mathcal{D}^0(E, M) = \{T \in \text{End}(\Gamma(E)) : [T, \gamma_u] = 0, \forall u \in C^\infty(M)\}$$

et pour tout entier $k \geq 1$,

$$\mathcal{D}^k(E, M) = \{T \in \text{End}(\Gamma(E)) \mid \forall u \in C^\infty(M) : [T, \gamma_u] \in \mathcal{D}^{k-1}(E, M)\};$$

où $[\cdot, \cdot]$ est le crochet des commutateurs de $\text{End}(\Gamma(E))$.

On a alors l'énoncé suivant

PROPOSITION 2.1. *Les éléments du \mathbb{R} -espace $\mathcal{D}^k(E, M)$, $k \in \mathbb{N}$, sont les opérateurs différentiels d'ordre $\leq k$ sur $\Gamma(E)$.*

DÉMONSTRATION. La preuve se fait par récurrence sur k et s'obtient exactement comme au Corollaire 3.3 du chapitre 4.

En effet, la condition initiale est bien vérifiée pour $k = 0$ et supposons par hypothèse de récurrence que le résultat est vrai pour les éléments de $\mathcal{D}^i(E, M)$, $i \leq k - 1$. Soient $T \in \mathcal{D}^k(E, M)$ et une section $s \in \Gamma(E)$ tel que $j_x^l(s) = 0$. Comme dans le corollaire cité précédemment, on a bien

$$T(s)(x) = 0,$$

en utilisant le fait que la section s peut alors se décomposer en

$$s = \sum_{i \leq r} f_{i_1} \cdots f_{i_{k+1}} s_i, \quad f_{i_j} \in C^\infty(M), s_i \in \Gamma(E),$$

où les fonctions f_{i_j} s'annulent en x .

Ce qui achève la démonstration. \square

On peut maintenant énoncer le résultat suivant où nous regroupons les premières propriétés des espaces que nous venons de définir. Précisons avant quelques notations. Dans la suite, l'algèbre des champs des endomorphismes de E , se note par $gl(E)$. On a ainsi

$$\Gamma(\text{Hom}(E, E)) = gl(E).$$

La sous-algèbre de $gl(E)$ des endomorphismes de E ayant une trace nulle se note par $sl(E)$, c'est l'idéal dérivée de l'algèbre de Lie $gl(E)$. On démontre alors que le centre de $gl(E)$ est donné par

$$Z(gl(E)) = C^\infty(M) id$$

PROPOSITION 2.2. *Les relations suivantes sont vérifiées*

- (1) $\mathcal{A}(E, M) = \mathcal{D}^0(E, M) = gl(E)$
- (2) $\mathcal{D}^i(E, M) \subset \mathcal{D}^{i+1}(E, M)$, $\mathcal{D}^i(E, M) \cdot \mathcal{D}^j(E, M) \subset \mathcal{D}^{i+j}(E, M)$
- (3) $[\mathcal{D}^i(E, M), \mathcal{D}^j(E, M)] \subset \mathcal{D}^{i+j}(E, M)$.

DÉMONSTRATION. La relation (1) vient de la définition de l'espace $\mathcal{D}^0(E, M)$ et de la Proposition 2.1 précédente.

Les deux inclusions de (2) se démontrent par récurrence. Pour la première, on a bien que la condition initiale est directe pour $i = 0$. Supposons par hypothèse de récurrence que cette inclusion est vraie pour $i = k \in \mathbb{N}$ et considérons $T \in \mathcal{D}^{k+1}(E, M)$. On a alors, pour toute fonction $u \in C^\infty(M)$,

$$[T, \gamma_u] \in \mathcal{D}^{k+1}(E, M),$$

en vertu de l'hypothèse de récurrence. Cela traduit que $T \in \mathcal{D}^{k+2}(E, M)$ et la première inclusion est bien établie.

Pour la seconde inclusion de (2), la récurrence se fait sur la somme $k = i + j$.

Rappelons qu'on a bien l'égalité

$$(*) \quad [T \circ T', T''] = T \circ [T', T''] + [T, T''] \circ T'$$

pour tous $T \in \mathcal{D}^p(E, M)$, $T' \in \mathcal{D}^q(E, M)$ et $T'' \in \mathcal{D}^r(E, M)$ avec $p, q, r \in \mathbb{N}$. En particulier, pour $T, T' \in \mathcal{D}^0(E, M)$ et $T'' = \gamma_u$, où $u \in C^\infty(M)$, la relation (*) permet d'obtenir la condition initiale pour $k = 0$.

Supposons par hypothèse de récurrence que l'inclusion est vraie pour $i + j < k$ et considérons $T \in \mathcal{D}^p(E, M)$ et $T' \in \mathcal{D}^q(E, M)$ avec $p + q = k$. On a alors, en appliquant l'hypothèse de récurrence, que

$$T \circ [T', \gamma_u], [T, \gamma_u] \circ T' \in \mathcal{D}^{p+q-1}(E, M),$$

pour tout $u \in C^\infty(M)$. D'où, en vertu de la relation (*) précédente

$$T \circ T' \in \mathcal{D}^{p+q}(E, M).$$

La relation (3) est une conséquence de la deuxième inclusion de (2). \square

Considérons l'algèbre de Lie définie par

$$\mathcal{D}(E, M) = \bigcup_{k \geq 0} \mathcal{D}^k(E, M).$$

C'est donc une algèbre quasi de Poisson quantique dont les éléments seront appelés opérateurs différentiels du fibré vectoriel $E \rightarrow M$.

Faisons remarquer que le cas de fibré de rang $n = 1$ ne nous intéresse pas dans la mesure où l'algèbre de Lie $\mathcal{D}(E, M)$ ne saurait caractériser le fibré vectoriel $E \rightarrow M$, en général, car, en vertu du Théorème 2.11 du chapitre 2, on a l'identification

$$\mathcal{D}(E, M) \cong \mathcal{D}(M).$$

PROPOSITION 2.3. *Soit $E \rightarrow M$ un fibré vectoriel de rang $n > 1$. L'algèbre quasi de Poisson quantique $\mathcal{D}(E, M)$ est non-singulière, quasi distinguante et symplectique.*

DÉMONSTRATION. Pour la non-singularité, observons que pour une dérivation covariante ∇ du fibré E et un champ de vecteurs X sur M , on a, pour tout $u \in C^\infty(M)$,

$$[\nabla_X, \gamma_u] = \gamma_{X(u)} = \gamma_{[X, u]},$$

ce dernier crochet étant celui défini dans $\mathcal{D}(M)$, l'algèbre de Lie des opérateurs différentiels de M . La non-singularité de $\mathcal{D}(E, M)$ vient alors de celle de $\mathcal{D}(M)$, en posant

$$\mathcal{D}_{\mathcal{A}}^1(E, M) = \{T \in \mathcal{D}^1(E, M) : [T, Z(\mathcal{A}(E, M))] \subset Z(\mathcal{A}(E, M))\}.$$

En effet, ainsi défini, l'espace $\mathcal{D}_{\mathcal{A}}^1(E, M)$ est bien une sous-algèbre de Lie de $\mathcal{D}^1(E, M)$ par l'identité de Jacobi.

Si dans une trivialisaton de domaine $U \in M$, $T \in \mathcal{D}^k(E, M)$ s'écrit

$$T = \sum_{|\beta| < k} B_\beta \partial^\beta + \sum_{|\alpha|=k} A_\alpha \partial^\alpha,$$

avec $T_\alpha, T_\beta \in C^\infty(U, gl(n, \mathbb{R}))$, alors la relation $[T, \gamma_u] = 0$ donne

$$\sum_{|\alpha|=k} [A_\alpha \partial^\alpha, \gamma_u] = 0.$$

Par suite, en considérant les termes d'ordre maximal, on obtient pour tout $u \in C^\infty(M)$,

$$\sum_{|\alpha|=k} A_\alpha \circ \gamma_{\partial_i(u)} \partial^{\alpha_i} = 0,$$

avec pour $i \in [1, m]$, $\alpha_i = \alpha - e_i$. On en déduit que $A_\alpha \circ \gamma_{\partial_i(u)} = 0$, et donc que $A_\alpha = 0$. D'où l'implication suivante

$$([T, \gamma_u] = 0, \forall u \in Z(\mathcal{A}(E, M))) \Rightarrow T \in \mathcal{A}(E, M);$$

ce qui permet de conclure que $\mathcal{D}(E, M)$ est quasi distinguante.

On a aussi l'inclusion

$$Z(\mathcal{D}(E, M)) \subset \{T \in \mathcal{D}(E, M) : [T, Z(\mathcal{A}(E, M))] = 0\}.$$

D'où, $\mathcal{D}(E, M)$ étant quasi-distinguante, on a

$$Z(\mathcal{D}(E, M)) \subset Z(\mathcal{A}(E, M)).$$

De plus, pour $u \in C^\infty(M)$, $[\mathcal{D}_{\mathcal{A}}^1(E, M), \gamma_u] = 0$ implique que u est constant. \square

Nous allons maintenant énoncer des résultats de caractérisation Lie-algébrique des fibrés vectoriels. Le théorème qui suit est tiré de [31].

THÉORÈME 2.4. *Soient $E \mapsto M$ et $F \mapsto M$ deux fibrés vectoriels de rangs respectifs $n, n' > 1$ avec $H^1(M, \mathbb{Z}/2) = 0$. Les algèbres de Lie $gl(E)$ et $gl(F)$ (resp. $sl(E)$ et $sl(F)$) sont isomorphes si et seulement si les fibrés vectoriels E et F sont isomorphes.*

THÉORÈME 2.5. *Soient $E \mapsto M$ et $F \mapsto M$ deux fibrés vectoriels de rangs respectifs $n, n' > 1$ avec $H^1(M, \mathbb{Z}/2) = 0$. Les algèbres de Lie $\mathcal{D}(E, M)$ et $\mathcal{D}(F, M)$, vues comme $C^\infty(M)$ -modules, sont isomorphes si et seulement si les fibrés vectoriels E et F sont isomorphes.*

DÉMONSTRATION. Soit $\Phi : \mathcal{D}(E, M) \rightarrow \mathcal{D}(F, N)$ un isomorphisme d'algèbres de Lie et de $C^\infty(M)$ -modules. Puisque ces algèbres quasi de Poisson quantiques sont symplectiques, on a

$$\Phi(C^\infty(M)) = C^\infty(N),$$

en identifiant $u \in C^\infty(X)$ avec γ_u pour $X = M$ ou $X = N$. En effet, pour tout $u \in C^\infty(M)$, on a

$$\begin{aligned} \Phi(\gamma_u) &= \Phi(u\gamma_1) \\ &= u\Phi(\gamma_1). \end{aligned}$$

Les algèbres dont il est question ici étant non-singulières et quasi-distinguantes, on peut donc appliquer la Proposition 1.2 précédente pour obtenir l'égalité

$$\Phi(\mathfrak{gl}(E)) = \mathfrak{gl}(F).$$

Le Théorème 2.4 précédent permet alors de conclure. \square

3. L'algèbre de Poisson quantique $\mathcal{P}(E, M)$

Soit $E \rightarrow M$ un fibré vectoriel de rang $n > 1$. Dans cette section, nous proposons une autre filtration pour l'algèbre quasi de Poisson quantique $\mathcal{D}(E, M)$, de manière à la rendre de Poisson quantique.

On pose

$$\mathcal{P}(E, M) = \bigcup_{k \geq 0} \mathcal{P}^k(E, M),$$

avec, par définition,

$$\mathcal{P}^0(E, M) = \{\gamma_u : u \in C^\infty(M)\}$$

et

$$\mathcal{P}^{k+1}(E, M) = \{T \in \text{End}(\Gamma(E)) \mid \forall u \in C^\infty(M) : [T, \gamma_u] \in \mathcal{P}^k(E, M)\}.$$

Dans l'énoncé qui suit, nous donnons certaines propriétés de l'algèbre $\mathcal{P}(E, M)$. Et on verra que, contrairement à $\mathcal{D}(E, M)$, la filtration de $\mathcal{P}(E, M)$ confère à l'algèbre des opérateurs différentiels de E une structure d'algèbre de Poisson quantique.

PROPOSITION 3.1. *Pour tous entiers $j, k \in \mathbb{N}$, on a*

- (1) $\mathcal{P}^k(E, M) \subset \mathcal{P}^{k+1}(E, M)$ et $\mathcal{P}^j(E, M) \cdot \mathcal{P}^k(E, M) \subset \mathcal{P}^{j+k}(E, M)$
- (2) $[\mathcal{P}^j(E, M), \mathcal{P}^k(E, M)] \subset \mathcal{P}^{j+k-1}(E, M)$

DÉMONSTRATION. La relation (1) se démontre exactement comme pour $\mathcal{D}(E, M)$. Démontrons la dernière inclusion. Posons pour commencer $\mathcal{P}^i(E, M) = \{0\}$ pour $i < 0$ et faisons une récurrence sur $j + k$. Le résultat étant vrai pour $j + k = 0$, supposons qu'il en est de même pour $j + k < p$. Soient alors $D \in \mathcal{P}^j(E, M), T \in \mathcal{P}^k(E, M)$ avec $j + k = p$. On a pour tout $u \in C^\infty(M)$,

$$[[D, \gamma_u], T] + [D, [T, \gamma_u]] \in \mathcal{P}^{j+k-2}(E, M),$$

par hypothèse de récurrence, puisque $[D, \gamma_u] \in \mathcal{P}^{j-1}(E, M)$ et $[T, \gamma_u] \in \mathcal{P}^{k-1}(E, M)$, par définition. Par conséquent, on a bien

$$[[D, T], \gamma_u] \in \mathcal{P}^{j+k-2}(E, M).$$

Et cela achève le démonstration de la proposition. \square

Le lien entre les algèbres de Lie $\mathcal{D}(E, M)$ et $\mathcal{P}(E, M)$ est donné dans l'énoncé suivant.

PROPOSITION 3.2. *Soit $E \rightarrow M$ un fibré vectoriel de fibre type \mathbb{R}^n . On a, pour tout $k \in \mathbb{N}$,*

- (1) $\mathcal{P}^k(E, M) \subset \mathcal{D}^k(E, M) \subset \mathcal{P}^{k+1}(E, M)$.
- (2) $\mathcal{P}(E, M) = \mathcal{D}(E, M)$

DÉMONSTRATION. Observons que la relation (2) est un corollaire de la relation (1). Nous démontrons donc (1), dans les lignes qui suivent et cela est suffisant. La première inclusion étant évidente, établissons la seconde par récurrence. On a pour tout $A \in \mathcal{D}^0(E, M)$ et toute fonction $u \in C^\infty(M)$,

$$[A, \gamma_u] \in \mathcal{P}^0(E, M);$$

et l'inclusion est établie pour $k = 0$. Supposons qu'elle est également établie pour $k \in \mathbb{N}$. Soit $T \in \mathcal{D}^{k+1}(E, M)$. On a alors

$$[T, \gamma_u] \in \mathcal{D}^k(E, M) \subset \mathcal{P}^{k+1}(E, M)$$

pour tout $u \in C^\infty(M)$, cette dernière inclusion étant vraie par hypothèse de récurrence. On en déduit l'inclusion

$$\mathcal{D}^{k+1}(E, M) \subset \mathcal{P}^{k+2}(E, M).$$

Ce qui achève la démonstration de la proposition. \square

PROPOSITION 3.3. *L'algèbre de Poisson quantique $\mathcal{P}(E, M)$ est non-singulière et symplectique et n'est pas quasi-distinguante. On a les résultats suivants*

$$[T, \gamma_u] = 0, \forall u \in C^\infty(M) \Rightarrow T \in \mathfrak{gl}(E) \subset \mathcal{P}^1(E, M) \quad (*)$$

$$\{T \in \mathcal{P}(E, M) \mid [T, \mathcal{P}^0(E, M)] \subset \mathcal{P}^i(E, M)\} = \mathcal{P}^{i+1}(E, M). \quad (**)$$

DÉMONSTRATION. La non-singularité de $\mathcal{P}(E, M)$ vient de celle de $\mathcal{D}(E, M)$, puisque, $\mathcal{D}_A^1(E, M) = \mathcal{P}^1(E, M)$.

En outre, $\mathcal{D}(E, M)$ étant quasi-distinguante, les relations (*) et (**) viennent directement car $\mathcal{P}^k(E, M) \subset \mathcal{D}^k(E, M)$, pour tout $k \in \mathbb{N}$.

L'algèbre $\mathcal{P}(E, M)$ est symplectique puisque $\mathcal{P}(E, M) = \mathcal{D}(E, M)$.

\square

PROPOSITION 3.4. *Soit $E \rightarrow M$ un fibré vectoriel de rang $n > 1$. Alors pour tout $\Psi \in \mathcal{C}(\mathcal{P}(E, M))$, on a*

$$\Psi(\mathcal{P}^0(E, M)) \subset \mathfrak{gl}(E) \quad \text{et} \quad \Psi(\gamma_u) = \Psi(1)\gamma_u,$$

pour tout $u \in C^\infty(M)$.

DÉMONSTRATION. Pour tous $u, v \in C^\infty(M)$, on a

$$[\Psi(\gamma_u), \gamma_v] = 0,$$

et donc, en vertu de la relation (*) de la Proposition 3.3 précédente, $\Psi(\gamma_u) \in gl(E)$. De la même manière que pour la Proposition 1.1 précédente, on a bien, pour tout $u \in C^\infty(M)$,

$$\Psi(\gamma_u) = \Psi(1)\gamma_u,$$

car on peut se ramener à un étape où le fait que l'algèbre de Poisson quantique $\mathcal{P}(E, M)$ soit non-singulière nous permette de conclure. En effet, on a bien la relation

$$\Psi(\gamma_u \widehat{T}(\gamma_u)) = \gamma_u \Psi(\widehat{T}(\gamma_u)),$$

pour tous $T \in \mathcal{P}^1(E, M)$, $\gamma_u \in \mathcal{P}^0(E, M)$, exactement comme dans le cas général à la Proposition 1.1, citée précédemment.

En remplaçant T par $\gamma_v T$ et γ_u par $\gamma_u + \gamma_w$, cette égalité donne

$$\Psi((\gamma_u + \gamma_w)\gamma_v \widehat{T}(\gamma_u + \gamma_w)) = (\gamma_u + \gamma_w)\Psi(\gamma_v \widehat{T}(\gamma_u + \gamma_w)).$$

Par suite, en remplaçant γ_v par $\widehat{T}(\gamma_w)$, un développement analogue à celui du cas abstrait de la Proposition 1.1 permet d'aboutir à

$$\Psi(\gamma_u (\widehat{T}(\gamma_w))^2) = \gamma_u \Psi((\widehat{T}(\gamma_w))^2),$$

pour tous $u, w \in C^\infty(M)$; ce qui, $\mathcal{P}(E, M)$ étant non-singulière, donne le résultat cherché en appliquant le même raisonnement qu'à la proposition citée précédemment. \square

Pour la sous-algèbre de Lie $\mathcal{P}^1(M)$, qui n'est rien d'autre que la sous-algèbre des automorphismes infinitésimaux de E , un résultat de caractérisation Lie-algébrique des fibrés vectoriels existe. Nous proposons dans les lignes qui suivent une démonstration adaptant les méthodes développées par Grabowski et Poncin et se basant également sur un résultat de Lecomte en appliquant le résultat d'algèbre linéaire selon lequel l'enveloppe linéaire des matrices nilpotentes est toute l'algèbre des matrices de trace nulle.

THÉORÈME 3.5. *Soient $E \rightarrow M, F \rightarrow N$ deux fibrés vectoriels de rangs respectifs $n, n' > 1$ avec $H^1(M, \mathbb{Z}/2) = 0$. Si $\Phi : \mathcal{P}^1(E, M) \rightarrow \mathcal{P}^1(F, N)$ est un isomorphisme d'algèbres de Lie, alors*

$$\Phi(\mathcal{P}^0(E, M)) = \Phi(\mathcal{P}^0(F, N)).$$

DÉMONSTRATION. La démarche consiste à démontrer que $\mathcal{P}^0(E, M)$ est le Casimir de la partie $Nil(\mathcal{P}^1(E, M))$ de $\mathcal{P}^1(E, M)$. Pour y arriver, nous démontrons que tout élément de ce Casimir permute avec $sl(E)$ et donc avec $gl(E)$ tout entier. Observons d'abord que

$$Nil(\mathcal{P}^1(E, M)) \subset gl(E)$$

Cela vient du fait que localement, $T \in \mathcal{P}^1(E, M)$ s'écrit $T = A + \gamma_{u_i} \partial_i$ et $\mathcal{D}(M)$ est distinguante.

En effet, cette écriture permet de voir que pour tout $T \in \mathcal{P}^1(E, M)$, relativement à une connexion sur E , il existe $X \in Vect(M)$ tel que

$$(adT)(\gamma_v) = L_X(v)id = \gamma_{X \cdot v},$$

pour tout $v \in C^\infty(M)$. On en déduit donc que

$$(adT)^p(\gamma_v) = (L_X)^p(v)id,$$

pour tout $v \in C^\infty(M)$ et tout $p \in \mathbb{N}$.

Le résultat annoncé en découle puisque $\mathcal{D}(M)$ est distinguante.

Calculons maintenant le Casimir de $Nil(\mathcal{P}^1(E, M))$. Rappelons qu'on a, par définition,

$$\begin{aligned} Cas(Nil(\mathcal{P}^1(E, M))) \\ = \{T \in Nil(\mathcal{P}^1(E, M)) \mid \forall D \in Nil(\mathcal{P}^1(E, M)) : [T, D] = 0\} \end{aligned}$$

Et montrons que

$$Cas(Nil(\mathcal{P}^1(E, M))) = C^\infty(M)id.$$

Il suffit pour cela de montrer que pour tous $A \in Cas(Nil(\mathcal{P}^1(E, M)))$ et $B \in sl(E)$, on a

$$[A_x, B_x] = 0 \quad \forall x \in M.$$

Soient $x_0 \in M$ et (U, ψ) une trivialisaton du fibré $Hom(E, E) \rightarrow M$, dont le domaine contient x_0 , associée à une trivialisaton (U, φ) de $E \rightarrow M$. Rappelons que pour tout $x \in U$, $\varphi_x : E_x \rightarrow \mathbb{R}^n$ est une bijection linéaire et qu'il en est de même pour

$$\psi_x : gl(E_x) \rightarrow gl(n, \mathbb{R}) : A \mapsto \varphi_x \circ A \circ \varphi_x^{-1}.$$

Pour $\beta \in gl(E_{x_0})$, soit $B \in gl(E)$ tel que

$$(*) \quad \begin{cases} B_x = 0 \text{ pour } x \in M \setminus U \\ B_x = u(x)\psi_x^{-1} \circ \psi_{x_0}(\beta) \text{ pour } x \in U, \end{cases}$$

où $u \in C^\infty(M)$ est une fonction à support compact dans U et qui vaut 1 en x_0 . On a bien que $B_{x_0} = \beta$.

De plus, on observe que s'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $\beta^k = 0$, alors $B^k = 0$, et on peut donc conclure dans ce cas que $B \in Nil(\mathcal{P}^1(E, M))$. En effet, cela vient du fait que pour tous $A, B \in gl(E)$, on a que $(adB)^k(A)$ se décompose en une somme dont les termes sont de la forme

$$c_{\alpha, \beta} B^\alpha \circ A \circ B^\beta, \quad c_{\alpha, \beta} \in \mathbb{R}, \alpha + \beta = k.$$

Soit maintenant $A \in Cas(Nil(\mathcal{P}^1(E, M)))$ et considérons un élément nilpotent $\beta \in gl(E_{x_0})$. Pour un élément $B \in gl(E) \cap Nil(\mathcal{P}^1(E, M))$ construit comme en (*) ci-dessus, on a alors

$$0 = [A_{x_0}, B_{x_0}] = [A_{x_0}, \beta].$$

Ce qui traduit que A_{x_0} commute avec toutes les matrices nilpotentes de $gl(E_{x_0})$, et donc avec leur enveloppe linéaire qui est $sl(E_{x_0})$.¹ Cela étant vrai pour tout $x_0 \in M$, on a le résultat cherché. \square

Contrairement à ce qui se passe avec l'algèbre de Lie $\mathcal{D}(E, M)$ tout entière, et cela même si on considère la filtration proposée précédemment et qui en fait une algèbre de Poisson quantique, il est possible, en vertu de la Proposition 3.5 précédente, d'obtenir par les méthodes de Grabowski et Poncin, une caractérisation Lie-algébrique des fibrés vectoriels sans considérer la structure de $C^\infty(M)$ -module de $\mathcal{P}^1(E, M)$.

Voici un énoncé qui nous permettra d'appliquer le Théorème 2.4 précédent pour obtenir un résultat de type Pursell et Shanks pour les fibrés vectoriels avec $\mathcal{P}^1(E, M)$.

THÉORÈME 3.6. *Soient $E \rightarrow M, F \rightarrow N$ deux fibrés vectoriels de rangs respectifs $n, n' > 1$. Alors tout isomorphisme $\Phi : \mathcal{P}^1(E, M) \rightarrow \mathcal{P}^1(F, N)$ d'algèbres de Lie est tel que sa restriction à $\mathcal{P}^0(E, M)$ est de la forme*

$$\Phi|_{\mathcal{P}^0(E, M)} = \kappa\Psi,$$

où $\Psi : \mathcal{P}^0(E, M) \rightarrow \mathcal{P}^0(E, N)$ est un isomorphisme d'algèbres associatives. On a aussi

$$\Phi(gl(E)) = gl(F).$$

DÉMONSTRATION. En vertu de la Proposition 3.5 précédente, on a

$$\Phi(\mathcal{P}^0(E, M)) = \mathcal{P}^0(F, N).$$

On a aussi, pour tout élément $A \in gl(E)$, que

$$\Phi \circ \gamma_A \circ \Phi^{-1} \in \mathcal{C}(\mathcal{P}^1(F, N)),$$

les notations étant celles précisées dans démonstration de la Proposition 1.2 précédente. Et donc pour tout $\gamma_w \in \mathcal{P}^0(F, N)$, l'égalité suivante est vraie

$$\Phi \circ \gamma_A \circ \Phi^{-1}(\gamma_w) = \Phi(A\Phi^{-1}(1))\gamma_w \quad (*)$$

La Proposition 3.4 précédente donne alors

$$\Phi(A\Phi^{-1}(1)) \in gl(F)$$

pour tout $A \in gl(E)$. Par suite, $\mathcal{P}^1(E, M)$ étant symplectique, on en déduit que

$$\Phi(gl(E)) = gl(F),$$

car alors, la constante $\Phi^{-1}(1)$ est non nulle.

La suite de la démonstration est une adaptation du raisonnement développé à la Proposition 1.2 précédente. En effet, pour $A = \gamma_u$, $u \in C^\infty(M)$ et $\lambda := \Phi^{-1}(1)$, la relation (*) précédente donne en particulier

$$\Phi(\gamma_u\Phi^{-1}(\gamma_w)) = \Phi(\lambda\gamma_u)\gamma_w.$$

1. En fait, on démontre que $sl(n, \mathbb{R})$ admet une base dont les éléments sont nilpotents. Voir par exemple, sur Internet le lien : <http://www.iecn.u-nancy.fr/eguether/zARTICLE/DP.pdf>

En posant, $\Phi^{-1}(\gamma_w) = \gamma_v$ et on obtient

$$\Phi(\gamma_u \cdot \gamma_v) = \lambda \Phi(\gamma_u) \Phi(\gamma_v).$$

Par suite, la correspondance

$$\gamma_u \mapsto \Phi^{-1}(1) \Phi(\gamma_u)$$

est bien un isomorphisme de \mathbb{R} -algèbres de $\mathcal{P}^0(E, M)$ sur $\mathcal{P}^0(F, N)$. \square

On peut maintenant énoncer le résultat suivant.

THÉORÈME 3.7. *Soient $E \rightarrow M, F \rightarrow M$ deux fibrés vectoriels de rangs respectifs $n, n' > 1$ avec $H^1(M, \mathbb{Z}/2) = 0$. Les algèbres de Lie $\mathcal{P}^1(E, M)$ et $\mathcal{P}^1(F, M)$, , sont isomorphes si et seulement si les fibrés vectoriels E et F le sont.*

4. L'algèbre de Poisson classique $\mathcal{S}(\mathcal{P}(E, M))$

Dans cette partie, nous étudions la limite classique de l'algèbre de Poisson quantique $\mathcal{P}(E, M)$ abordée dans la précédente section.

Commençons par rappeler que

$$\mathcal{S}(\mathcal{P}(E, M)) = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} \mathcal{S}^i(\mathcal{P}(E, M));$$

avec $\mathcal{S}^i(\mathcal{P}(E, M)) = \mathcal{P}^i(E, M) / \mathcal{P}^{i-1}(E, M)$ et que pour $T \in \mathcal{P}^i(E, M)$, $ord(T) = i$, si $T \notin \mathcal{P}^{i-1}(E, M)$.

Pour $i \geq ord(T)$, le symbole de degré i de T est défini par

$$\sigma_i(T) = \begin{cases} 0 & \text{si } i > ord(T) \\ T + \mathcal{P}^{i-1}(E, M) & \text{si } i = ord(T) \end{cases}$$

et le symbole lié à la structure de Poisson quantique de $\mathcal{P}(E, M)$ par

$$\sigma_{pson} : \mathcal{P}(E, M) \rightarrow \mathcal{S}(\mathcal{P}(E, M)) : T \mapsto \sigma_{ord}(T).$$

Pour $P \in \mathcal{S}^i(\mathcal{P}(E, M))$ et $Q \in \mathcal{S}^j(\mathcal{P}(E, M))$ tels que $P = \sigma_i(T)$ et $Q = \sigma_j(D)$, on pose par définition

$$P \cdot Q = \sigma_{i+j}(T \circ D) \text{ et } \{P, Q\} = \sigma_{i+j-1}([T, D]).$$

4.1. Cas particulier de l'algèbre de Lie $gl(E) \subset \mathcal{P}^1(E, M)$. Ainsi, par définition,

$$\sigma_{pson}(\gamma_u) = \gamma_u + \{0\}, \quad \forall u \in C^\infty(M)$$

et on notera simplement $\sigma_{pson}(\gamma_u) = \gamma_u$.

De même, pour $A \in gl(E) \setminus \mathcal{P}^0(E, M)$, on a

$$\sigma_{pson}(A) = A + \mathcal{P}^0(E, M),$$

avec $A' = A - \frac{\text{tr}(A)}{n}id$, $\text{tr}(A)$ étant la trace de A . Ainsi, pour $A, B \in gl(E)$, on a

$$\begin{aligned}\sigma_{pson}([A, B]) &= [A, B] + \mathcal{P}^0(E, M) \\ &= [A', B'] + \mathcal{P}^0(E, M).\end{aligned}$$

Et pour le produit, si $A, B \notin \mathcal{P}^0(E, M)$, on a bien

$$\sigma_{pson}(A) \cdot \sigma_{pson}(B) = 0,$$

et si $\gamma_u \in \mathcal{P}^0(E, M)$, on a alors

$$\sigma_{pson}(\gamma_u) \cdot \sigma_{pson}(A) = \gamma_u \circ A' + \mathcal{P}^0(E, M).$$

On a donc l'identification suivante d'algèbres de Lie

$$\sigma(gl(E)) \cong sl(E) \oplus C^\infty(M)id,$$

où la multiplication est commutative et est définie par

$$(A + \gamma_u) \cdot (B + \gamma_v) = \gamma_v \circ A + \gamma_u \circ B + \gamma_{uv};$$

et le crochet est donné par

$$\{A + \gamma_u, B + \gamma_v\} = [A, B].$$

4.2. Cas général. Énonçons le résultat suivant qui donne l'expression locale des éléments de $\mathcal{P}(E, M)$ dans une trivialisaton de E .

Il nous arrivera, par commodité d'écriture, de noter simplement γ_u par $u \in C^\infty(M)$.

PROPOSITION 4.1. *Les éléments de $\mathcal{P}^k(E, M)$, $k \geq 1$, sont caractérisés par le fait qu'ils s'écrivent localement, dans une trivialisaton de domaine $U \subset M$, sous la forme*

$$\sum_{|\alpha| < k} T_\alpha \partial^\alpha + \sum_{|\beta|=k} u_\beta \partial^\beta \quad (*)$$

avec $T_\alpha \in C^\infty(U, gl(n, \mathbb{R}))$ et $u_\beta \in C^\infty(U)$.

DÉMONSTRATION. La preuve se fait par récurrence sur k . Soit $T \in \mathcal{P}^1(E, M)$ et supposons que dans une trivialisaton de domaine U de E on ait

$$T = A + \sum_i^m T_i \partial_i, \quad A, T_i \in C^\infty(U, gl(n, \mathbb{R}))$$

La relation $[T, \gamma_u] \in \mathcal{P}^0(E, M)$ donne

$$\sum_{i=1}^m T_i \circ \partial_i(u) \in C^\infty(U), \quad \forall u \in C^\infty(M).$$

Par suite, pour tout $i \in [1, m] \cap \mathbb{N}$, on a bien $T_i \in C^\infty(U)$.

Supposons par hypothèse de récurrence que le résultat est vrai pour tout élément de $\mathcal{P}^r(E, M)$ avec $r < k$. Soit $T \in \mathcal{P}^k(E, M)$ tel que localement on ait

$$T = \sum_{|\alpha| < k} T_\alpha \partial^\alpha + \sum_{|\beta| = k} T_\beta \partial^\beta.$$

On a, en appliquant l'hypothèse de récurrence à $[T, \gamma_u]$, que son terme de plus haut ordre de dérivation est de la forme

$$\sum_{|\lambda| = k} u_\lambda \partial^\lambda.$$

Or dans $[T_\beta \partial^\beta, \gamma_u]$, les termes de plus haut ordre de dérivation sont de la forme $\partial_i u T_\beta \partial^{\beta_i}$, avec $\beta_i = \beta - e_i$, où $(e_i)_{1 \leq i \leq m}$ désigne la base canonique du \mathbb{R} -espace vectoriel \mathbb{R}^m . Donc $\partial_i u T_\beta \in C^\infty(U)$, pour tout u , et par conséquent $T_\beta \in C^\infty(U)$.

Inversement si $T \in D(E, M)$ s'écrit localement sous la forme (*), on obtient que $T \in \mathcal{P}^k(E, M)$, pour tout $k \geq 1$, en faisant une récurrence sur k . \square

Ainsi, dans une trivialisatoin de domaine $U \subset M$, la partie d'ordre strictement égal à k de l'expression locale de T , est de la forme

$$\sum_{|\alpha| = k-1} A_\alpha \partial^\alpha + \sum_{|\beta| = k} u_\beta \partial^\beta, \quad (**)$$

avec $A_\alpha \in C^\infty(U, sl(n, \mathbb{R}))$ et $u_\beta \in C^\infty(U)$.

Pour $D \in \mathcal{P}^l(E, M)$, ayant

$$\sum_{|\lambda| = l-1} B_\lambda \partial^\lambda + \sum_{|\mu| = l} v_\mu \partial^\mu$$

comme terme d'ordre l , celui d'ordre $k+l$ de $T \circ D$ (mais aussi celui de $D \circ T$) est

$$(5) \quad \sum_{|\alpha| = k-1} \sum_{|\mu| = l} A_\alpha v_\mu \partial^\alpha \partial^\mu + \sum_{|\lambda| = l-1} \sum_{|\beta| = k} B_\lambda u_\beta \partial^\beta \partial^\lambda + \sum_{|\beta| = k} \sum_{|\mu| = l} u_\beta v_\mu \partial^\beta \partial^\mu$$

et pour le crochet $[T, D]$, le terme d'ordre $k+l-1$ est

$$(6) \quad \begin{aligned} & \sum_{|\alpha| = k-1} \sum_{|\lambda| = l-1} [A_\alpha, B_\lambda] \partial^\alpha \partial^\lambda \\ & + \sum_{|\alpha| = k-1} \sum_{|\mu| = l} \sum_{1 \leq i \leq m} (A_\alpha \partial_i v_\mu \partial^{\alpha_i} \partial^\mu - \partial_i A_\alpha v_\mu \partial^\alpha \partial^{\mu_i}) \\ & + \sum_{|\beta| = k} \sum_{|\lambda| = l-1} \sum_{1 \leq i \leq m} (u_\beta \partial_i B_\lambda \partial^\lambda \partial^{\beta_i} - \partial_i u_\beta B_\lambda \partial^\beta \partial^{\lambda_i}) \\ & + \sum_{|\beta| = k} \sum_{|\lambda| = l-1} \sum_{1 \leq i \leq m} (u_\beta \partial_i v_\mu \partial^{\beta_i} \partial^\mu - v_\mu \partial_j u_\beta \partial^{\mu_j} \partial^\beta) \end{aligned}$$

On remarque que la décomposition locale (**) donnée ci-dessus n'est pas intrinsèque. En fait, si dans la somme de droite on reconnaît bien le symbole principal de l'opérateur différentiel au sens usuel, la somme à gauche, quant à elle, ne résiste pas à un changement de coordonnées et n'est donc pas globalement définie.

Dans les lignes qui suivent nous construisons une décomposition globale permettant de trouver un sens global à l'expression donnée en (**) précédemment.

Soit maintenant $T \in \mathcal{S}^{k-1}(M) \otimes sl(E)$ et supposons donnée une partition de l'unité (U_i, ρ_i) de M dont les domaines U_i sont des domaines de trivialisations de E . Dans chaque U_i , si T s'exprime sous la forme

$$T = \sum_{|\alpha|=k-1} A_{\alpha,i} \xi^\alpha,$$

alors on pose

$$\bar{T}_i = \sum_{|\alpha|=k-1} A_{\alpha,i} \partial^\alpha \in \mathcal{D}^{k-1}(E|_{U_i}, U_i)$$

avec $A_{\alpha,i} \in C^\infty(U_i, sl(n, \mathbb{R}))$. L'opérateur différentiel

$$\bar{T} = \sum_i \rho_i \bar{T}_i \in \mathcal{D}^{k-1}(E, M) \subset \mathcal{P}^k(E, M),$$

lié à la partition de l'unité choisie au départ est alors tel que

$$\sigma_{pson}(\bar{T}) = \sigma_{ppal}(\bar{T}) = T,$$

mais n'est évidemment pas le seul à vérifier cette relation. Néanmoins, on a l'énoncé suivant.

PROPOSITION 4.2. *L'espace $\mathcal{S}^k(\mathcal{P}(E, M)) = \mathcal{P}^k(E, M)/\mathcal{P}^{k-1}(E, M)$ des symboles au sens « algèbre de Poisson quantique » des opérateurs différentiels dans $\mathcal{P}^k(E, M)$ est déterminé par la courte suite exacte de \mathbb{R} -espaces vectoriels suivante*

$$0 \longrightarrow \mathcal{S}^{k-1}(M) \otimes sl(E) \xrightarrow{\theta} \mathcal{P}^k(E, M)/\mathcal{P}^{k-1}(E, M) \xrightarrow{\delta} \mathcal{S}^k(M) \longrightarrow 0,$$

avec $\theta : T \mapsto \bar{T} + \mathcal{P}^{k-1}(E, M)$ et

$$\delta : D + \mathcal{P}^{k-1}(E, M) \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } D \in \mathcal{D}^{k-1}(E, M) \\ \sigma_{ppal}(D) & \text{sinon.} \end{cases}$$

DÉMONSTRATION. L'application θ est bien définie. En effet, si des opérateurs différentiels $D_1, D_2 \in \mathcal{D}^{k-1}(E, M) \subset \mathcal{P}^k(E, M)$ sont tels que $\sigma_{pson}(D_1) = \sigma_{pson}(D_2)$, alors on a bien $D_1 - D_2 \in \mathcal{P}^{k-1}(E, M)$; ce qui signifie que l'image de T ne dépend pas du choix de l'opérateur \bar{T} tel que $\sigma_{pson}(\bar{T}) = T$.

En outre, θ est évidemment une application linéaire et elle est injective. En effet, soit $T \in \mathcal{S}^{k-1}(M) \otimes sl(E)$ est tel que $\theta(T) = 0$.

On a alors $\bar{T} \in \mathcal{P}^{k-1}(E, M)$. Or par construction $\bar{T} \notin \mathcal{D}^{k-2}(E, M)$. Donc, on a bien

$$\sigma_{ppal}(\bar{T}) \in S^{k-1}(M)id$$

On en déduit, comme $\sigma_{pson}(\bar{T}) = \sigma_{ppal}(\bar{T}) = T$, que $T = 0$.

L'application δ étant linéaire et directement surjective, montrons pour terminer que

$$ker(\delta) = Im(\theta).$$

L'inclusion $ker(\delta) \supset Im(\theta)$ est évidente. Démontrons l'autre sens de l'inclusion. Si $D + \mathcal{P}^{k-1}(E, M) \in ker(\delta)$, alors, par définition de δ , on a

$$D \in \mathcal{D}^{k-1}(E, M) \cap \mathcal{P}^k(E, M).$$

Par suite, d'une part,

$$\sigma_{ppal}(D) \in \mathcal{S}^{k-1}(M) \otimes gl(E),$$

puisque $D \in \mathcal{D}^{k-1}(E, M)$ et de l'autre, comme $D \in \mathcal{P}^k(E, M)$, on a plutôt,

$$\sigma_{ppal}(D) \in \mathcal{S}^{k-1}(M) \otimes sl(E).$$

L'inclusion cherchée en découle directement. \square

Ainsi, comme \mathbb{R} -espaces vectoriels, on a la décomposition

$$\mathcal{P}^k(E, M) = Pol^{k-1}(T^*M, sl(E)) \oplus Pol^k(T^*M, \mathbb{R})$$

pour tout entier $k \in \mathbb{N}$.

La question qui se pose est celle de savoir si la suite exacte d'algèbres de Lie mais aussi d'algèbres associatives suivante, dont l'exactitude vient de celle donnée dans l'énoncé précédent et des opérations effectuées en (5) et en (6) précédemment est scindée.

$$(*) \quad 0 \longrightarrow \mathcal{S}(M) \otimes sl(E) \longrightarrow \mathcal{S}(\mathcal{P}(E, M)) \longrightarrow \mathcal{S}(M) \longrightarrow 0$$

Notons que la scission de cette suite entraînerait en particulier celle de la suite exacte d'algèbres de Lie suivante

$$0 \longrightarrow sl(E) \longrightarrow \mathcal{S}^1(\mathcal{P}(E, M)) \longrightarrow Vect(M) \longrightarrow 0$$

Pour y répondre, nous nous servons du résultat suivant où une suite d'algèbres de Lie scindée est donnée.

PROPOSITION 4.3. *Soit $E \rightarrow M$ un fibré vectoriel de rang n . Relativement à une connexion sur E , la courte suite exacte d'algèbres de Lie suivante est scindée.*

$$0 \longrightarrow \mathcal{P}^0(E, M) \xrightarrow{i} \mathcal{P}^1(E, M) \xrightarrow{\sigma_{pson}} \mathcal{P}^1(E, M)/\mathcal{P}^0(E, M) \longrightarrow 0$$

où i est l'injection canonique et σ_{pson} défini précédemment.

DÉMONSTRATION. Via une dérivation covariante ∇ de E , on a l'identification de \mathbb{R} -espaces vectoriels

$$\mathcal{P}^1(E, M) \cong Vect(M) \oplus gl(E).$$

En effet, pour $T \in \mathcal{P}^1(E, M) \subset \mathcal{D}^1(E, M)$, on a

$$\sigma_{ppal}(T) = X \in Vect(M)$$

et par suite, comme $\nabla_X \in \mathcal{P}^1(E, M)$, la différence $T - \nabla_X$ est bien un champ d'endomorphismes.

On note par $\lambda : \mathcal{P}^1(E, M) \rightarrow Vect(M) \oplus gl(E)$ la bijection linéaire ainsi définie. Si on a $T = \nabla_X + A$ et $D = \nabla_Y + B$, alors on obtient dans $\mathcal{P}^1(E, M)$

$$[T, D] = \nabla_{[X, Y]} + R^\nabla(X, Y) + \nabla_X B - \nabla_Y A + [A, B],$$

ce qui se traduit par

$$(**) \quad [(X, A), (Y, B)] = ([X, Y], R^\nabla(X, Y) + \nabla_X B - \nabla_Y A + [A, B])$$

dans l'espace $Vect(M) \oplus gl(E)$.

Par ailleurs, considérons la courte suite exacte suivante

$$0 \longrightarrow sl(E) \longrightarrow \mathcal{P}^1(E, M)/\mathcal{P}^0(E, M) \longrightarrow Vect(M) \longrightarrow 0$$

correspondant au cas particulier $k = 1$ de celle caractérisant l'espace des symboles, au sens « Poisson quantique, » des opérateurs différentiels d'ordre k , que nous avons donnée au début de cette section. Ainsi, comme dans le cas général au début de cette section, on a l'application linéaire

$$\delta : T + \mathcal{P}^0(E) \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } T \in gl(E) \\ \sigma_{ppal}(T) & \text{sinon} \end{cases}$$

qui est surjective et l'injection $\theta : A \in sl(E) \mapsto A + \mathcal{P}^0(E, M)$.

Comme \mathbb{R} -espaces vectoriels, on a donc l'identification suivante

$$\mathcal{P}^1(E, M)/\mathcal{P}^0(E, M) \cong Vect(M) \oplus sl(E).$$

Considérons le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccc} (X, A) \in Vect(M) \oplus sl(E) & \xrightarrow{\mu} & \mathcal{P}^1(E, M)/\mathcal{P}^0(E, M) \\ \downarrow \lambda^{-1} & \nearrow \sigma_{pson} & \\ \nabla_X + A \in \mathcal{P}^1(E, M) & & \end{array}$$

L'application linéaire $\mu = \sigma_{pson} \circ \lambda^{-1}$ est injective car $\mu(X, A) = 0$ donne $\nabla_X + A \in \mathcal{P}^0(E)$; et on déduit que

$$X = 0 \quad \text{et} \quad A \in sl(E) \cap \mathcal{P}^0(E, M).$$

De même, μ est surjective.

Le crochet dans $\mathcal{P}^1(E, M)/\mathcal{P}^0(E, M)$ est donc donné par

$$[[T], [D]] = \nabla_{[X, Y]} + R^\nabla(X, Y) + \nabla_X B - \nabla_Y A + [A, B] + \mathcal{P}^0(E, M)$$

avec $[T] = \nabla_X + A + \mathcal{P}^0(E, M)$ et $[D] = \nabla_Y + B + \mathcal{P}^0(E, M)$.

Et donc, l'opération correspondante dans $Vect(M) \oplus sl(E)$, obtenue par transport de structure via μ , n'est pas nécessairement un crochet de Lie puisque le terme $R^\nabla(X, Y)$ n'est pas toujours de trace nulle. Pour remédier à cela, supposons que ∇ soit associée à une forme de connexion d'une réduction du fibré principal des repères $L^1(E)$ de E au sous-groupe de Lie $O(n)$ de $GL(n, \mathbb{R})$. Pour une telle dérivation, R^∇ est à valeurs dans $sl(E)$. On a alors un isomorphisme d'algèbres de Lie

$$\mu : Vect(M) \oplus sl(E) \rightarrow \mathcal{P}^1(E, M)/\mathcal{P}^0(E, M),$$

l'espace $Vect(M) \oplus sl(E)$ étant muni du crochet suivant

$$(***)[(X, A), (Y, A)] = ([X, Y], R^\nabla(X, Y) + \nabla_X B - \nabla_Y A + [A, B]).$$

Vu les relations $(**)$ et $(***)$, on conclut que l'injection canonique

$$\beta : Vect(M) \oplus sl(E) \rightarrow Vect(M) \oplus gl(E)$$

est un homomorphisme d'algèbres de Lie. Par suite,

$$\lambda^{-1} \circ \beta \circ \mu^{-1} : \mathcal{P}^1(E, M)/\mathcal{P}^0(E, M) \rightarrow \mathcal{P}^1(E, M)$$

est un homomorphisme d'algèbres de Lie permettant d'identifier l'algèbre de Lie $\mathcal{P}^1(E, M)/\mathcal{P}^0(E, M)$ à une sous-algèbre de Lie de $\mathcal{P}^1(E, M)$, pour les structures précisées dans les lignes précédentes, et on voit bien que c'est une section de σ_{pson} .

On vient ainsi de montrer que la courte suite exacte de l'énoncé est scindée. \square

On remarque que si ∇ est une dérivation covariante de E associée à la réduction dont il est question dans la démonstration précédente, alors pour $T = \nabla_X + A$, la déposition

$$T = (\nabla_X + A - \frac{1}{n}tr(A) id) + \frac{1}{n}tr(A) id$$

ne dépend que de la réduction et non du choix de la connexion. En effet, si relativement à une autre dérivation covariante ∇' , associée à la même réduction, on se donne une décomposition analogue de T , alors on a

$$\begin{aligned} T = \nabla'_X + A' &= \nabla_X + (A' + (\nabla'_X - \nabla_X)) \\ &= \nabla_X + S + A' \end{aligned}$$

avec $S = \nabla_X - \nabla'_X$, et donc S est de trace nulle, et $A' = A - S$. Par suite, $tr(A) = tr(A')$ et on a

$$\nabla'_X + A' - \frac{1}{n}tr(A') id = \nabla_X + S + A - S - \frac{1}{n}tr(A) id.$$

Considérons maintenant le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & gl(E) & & sl(E) & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 0 & \longrightarrow & \mathcal{P}^0(E, M) & \longrightarrow & \mathcal{P}^1(E, M) & \longrightarrow & \mathcal{P}^1(E, M)/\mathcal{P}^0(E, M) \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & Vect(M) & & Vect(M) & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & 0 & &
 \end{array}$$

Nous avons établi que la suite horizontale est scindée. Et on en déduit que la scission de la suite verticale de droite entraînerait celle de la suite verticale située à gauche. Or selon [33], la scission de cette suite exige essentiellement la naturalité du fibré vectoriel E ; le fibré est forcément naturel si la base M est simplement connexe.

Donc la réponse à la question de savoir si la suite exacte d'algèbres de Lie $(*)$ est toujours scindée est non.

4.3. Caractérisation Lie-algébrique des fibrés vectoriels. De la même manière que pour le Théorème 3.7 précédent, on peut énoncer le résultat suivant.

THÉORÈME 4.4. *Soient $E \rightarrow M, F \rightarrow M$ deux fibrés vectoriels de rangs respectifs $n, n' > 1$ avec $H^1(M, \mathbb{Z}/2) = 0$. Les algèbres de Lie $\mathcal{S}(\mathcal{P}(E, M))$ et $\mathcal{S}(\mathcal{P}(F, M))$, vues comme $C^\infty(M)$ -modules, sont isomorphes si, et seulement si, les fibrés vectoriels E et F le sont.*

Pour les sous-algèbres de Lie $\mathcal{S}^1(\mathcal{P}(E, M))$ et $\mathcal{S}^1(\mathcal{P}(F, N))$, ce résultat peut s'améliorer. Pour le démontrer, nous nous servons de la courte suite exacte présentée dans l'énoncé suivant.

On peut maintenant énoncer le résultat suivant de caractérisation Lie-algébrique de fibrés vectoriels.

THÉORÈME 4.5. *Soient $E \rightarrow M, F \rightarrow N$ deux fibrés vectoriels de rangs respectifs $n, n' > 1$ avec $H^1(M, \mathbb{Z}/2) = 0$. Les algèbres de Lie $\mathcal{S}^1(\mathcal{P}(E, M))$ et $\mathcal{S}^1(\mathcal{P}(F, N))$ sont isomorphes si et seulement si les fibrés vectoriels E et F le sont.*

DÉMONSTRATION. On observe, partant de la décomposition

$$\mathcal{S}^1(\mathcal{P}(E, M)) = sl(E) \oplus Vect(M)$$

obtenue précédemment via une connexion sur E , pour tout $T = (\nabla_X, A)$ si pour tout $B \in sl(E)$, il existe $r \in \mathbb{N}$ tel que

$$(ad(T))^r(B) = 0.$$

On a alors bien

$$\nabla_X(\nabla_X \cdots (\nabla_X(B))) = 0,$$

où ∇_X est appliqué r fois. Dans une trivialisaton de E de domaine $U \subset M$, en considérant B dont l'expression locale est de la forme $(\alpha_{ij}) = (\delta_{12}u)$, $u \in C^\infty(U)$, i.e ayant tous ses termes nuls sauf celui de la position $(1, 2)$, le Lemme 2.1 du second chapitre nous permet de choisir u de sorte qu'on ait nécessairement $X = 0$. On en déduit que

$$\text{Nil}(\mathcal{S}^1(\mathcal{P}(E))) \subset \text{sl}(E).$$

Par ailleurs, on sait que si $A \in \text{sl}(E)$ est tel que $A^p = 0$, alors on a $A \in \text{Nil}(\mathcal{S}^1(\mathcal{P}(E, M)))$. En effet, on observe que

$$\begin{aligned} (adA)^k(\nabla_X + B) &= (adA)^k(\nabla_X) + (adA)^k(B) \\ &= -(adA)^{k-1}(X \cdot A) + (adA)^k(B) \end{aligned}$$

où, en vertu du cas particulier étudiée à la section 4.1 précédente, pour tous $C, D \in \text{sl}(E)$, on a

$$(adC)(D) = \{C, D\} = [C, D],$$

ce qui permet de conclure, puisque $(adC)^k(D)$ est alors une somme des termes de la forme $a_k C^k \circ D \circ C^{k-1}$, $a_k \in \mathbb{R}$.

Dans les lignes qui suivent, le but est d'établir que l'enveloppe linéaire des champs d'endomorphismes nilpotents est $\text{sl}(E)$ tout entier. Soit $A \in \text{sl}(E)$. Au-dessus d'un domaine de trivialisaton $U \subset M$, on peut donc écrire

$$A|_U = \sum_i N_i^U$$

avec $N_i^U \in \text{sl}(E|_U)$, $(1 \leq i \leq n^2 - 1)$, des champs d'endomorphismes nilpotents puisque $\text{sl}(n, \mathbb{R})$ admet une base formée de matrices nilpotentes. Considérons maintenant un recouvrement de Palais de M ,

$$\mathcal{O} = \mathcal{O}_1 \cup \cdots \cup \mathcal{O}_r, r \in \mathbb{N},$$

localement fini, les éléments $U_{\alpha,j}$ de chaque \mathcal{O}_j étant des domaines de trivialisaton de E 2 à 2 disjoints, et une partition de l'unité $(\rho_{\alpha,j})$, localement finie, subordonnée à ce recouvrement. On a alors

$$\rho_{\alpha,j}A = \sum_{i=1}^{n^2-1} N_{i,\alpha,j}$$

avec $N_{i,\alpha,j} \in \text{sl}(E|_{U_{\alpha,j}})$ nilpotent et de support compact dans $U_{\alpha,j}$. Posons $\cup \mathcal{O}_j = \cup_\alpha U_{\alpha,j} = U_j$ et considérons N_{ji} défini par

$$N_{ji}(x) = \begin{cases} N_{i,\alpha,j}(x) & \text{si } x \in U_j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On a alors que N_{ji} est de classe C^∞ . En effet, pour $x \notin U_j$, considérons un voisinage ouvert $V \ni x$ d'adhérence compacte. On sait que V n'est rencontré que par un nombre fini de supports des $N_{\alpha,j}$, dont la réunion est le compact que nous convenons de noter par K .

Alors $V \setminus K$ est un voisinage ouvert de x dans lequel N_{ji} est identiquement nul. Et on a ainsi établi notre affirmation puisque pour $x \in U_j$ le caractère C^∞ de N_{ji} est évident. On en conclut que

$$\sum_{\alpha} \rho_{\alpha,j} A = \sum_{i=1}^{n^2-1} N_{ji},$$

et par suite,

$$A = \sum_{i=1}^{n^2-1} \sum_{j=1}^r N_{ji}.$$

On vient donc de démontrer que

$$\rangle Nil(\mathcal{S}^1(\mathcal{P}(E, M))) \langle = sl(E),$$

où la notation usuelle $\rangle H \langle$ désigne l'enveloppe linéaire d'une partie H d'un espace vectoriel.

On en déduit que tout isomorphisme

$$\Phi : \mathcal{S}(\mathcal{P}^1(E, M)) \rightarrow \mathcal{S}(\mathcal{P}^1(F, N))$$

d'algèbres de Lie est forcément tel que

$$\Phi(sl(E)) = sl(F).$$

Par suite, en vertu du Théorème 2.4 précédent, on a le résultat cherché. \square

CHAPITRE 6

CARACTÉRISATION ALGÈBRIQUE DES VARIÉTÉS DIFFÉRENTIELLES ET DES FIBRÉS VECTORIELS

Les algèbres de Poisson quantiques ou classiques sont des algèbres de Lie mais aussi des algèbres associatives. Jusque-là, nous avons obtenu des caractérisations des variétés différentielles et des fibrés vectoriels par la seule structure de Lie. La question posée dans ce chapitre est celle de savoir si pour ces algèbres, la structure d'algèbre associative permet les mêmes caractérisations.

1. Caractérisation algébrique des variétés différentielles

Soit M une variété différentielle. Nous savons que les algèbres $\mathcal{D}(M)$ et $\mathcal{S}(M)$ caractérisent la variété M par leurs structures respectives d'algèbres de Lie. Pour leurs structures de \mathbb{R} -algèbres (associatives), le résultat suivant apporte une réponse à la question.

THÉORÈME 1.1. *Soient M et N deux variétés différentielles.*

(a) *Les \mathbb{R} -algèbres associatives $\mathcal{D}(M)$ et $\mathcal{D}(N)$ sont isomorphes si, et seulement si, les variétés différentielles M et N sont difféomorphes.*

(b.1) *Tout isomorphisme $\Phi : \mathcal{S}(M) \rightarrow \mathcal{S}(N)$ de \mathbb{R} -algèbres associatives induit un isomorphisme de \mathbb{R} -algèbres respectant les graduations.*

(b.2) *Les \mathbb{R} -algèbres associatives $\mathcal{S}(M)$ et $\mathcal{S}(N)$ sont isomorphes si et seulement si les variétés différentielles M et N sont difféomorphes.*

DÉMONSTRATION. L'assertion (a) vient du fait que tout isomorphisme d'algèbres associatives entre $\mathcal{D}(M)$ et $\mathcal{D}(N)$ est également un isomorphisme d'algèbres de Lie.

Pour (b), rappelons que $\mathcal{S}(M) = \text{Pol}(T^*M)$ et que $\text{Pol}^0(T^*M) = \mathcal{A}(M) = C^\infty(M)$, via l'identification $\pi_{T^*M}^*(C^\infty(M)) \cong C^\infty(M)$.

L'énoncé (b.1) est alors une conséquence immédiate de la Remarque 2.4 du troisième chapitre.

Le point (b.2) s'obtient comme corollaire du point (b.1) précédent ou en appliquant directement le Lemme 2.1 du chapitre 3. \square

2. Caractérisation algébrique des fibrés vectoriels.

Soient M une variété différentielle de dimension m , $E \rightarrow M$ un fibré vectoriel de rang n et $T^*E \rightarrow E$ le fibré cotangent de E .

Considérons l'algèbre associative $\mathcal{S}_{\mathcal{E}}(E)$, sous-algèbre associative de $Pol(T^*E) := \mathcal{S}(E)$, les éléments de ce dernier ensemble étant les fonctions polynomiales sur les fibres de T^*E .

On peut aussi énoncer le résultat suivant ; la justification étant la même qu'au point (a) du Théorème 1.1 précédent.

THÉORÈME 2.1. *Soient $E \rightarrow M$ et $F \rightarrow N$ deux fibrés vectoriels. Les algèbres associatives $\mathcal{D}_{\mathcal{E}}(E)$ et $\mathcal{D}_{\mathcal{E}}(F)$ sont isomorphes si et seulement si les fibrés vectoriels E et F sont isomorphes.*

PROPOSITION 2.2. *L'enveloppe lisse de la \mathbb{R} -algèbre géométrique $\mathcal{S}_{\mathcal{E}}(E)$ est donnée par*

$$\overline{\mathcal{S}_{\mathcal{E}}(E)} = C^{\infty}(T^*E).$$

DÉMONSTRATION. Notons d'abord que

$$\overline{\mathcal{S}_{\mathcal{E}}(E)} \supset \pi_{T^*E}^*(C^{\infty}(E)).$$

En effet, en vertu de la Proposition 4.5 du premier chapitre, on a d'une part,

$$\pi_{T^*E}^*(C^{\infty}(E)) = \pi_{T^*E}^*(\overline{\mathcal{A}(E)})$$

et de l'autre,

$$C^{\infty}(E) = \overline{\mathcal{A}(E)} \cong \overline{\pi_{T^*E}^*(\mathcal{A}(E))}$$

On obtient ainsi l'identification

$$\pi_{T^*E}^*(\overline{\mathcal{A}(E)}) \cong \overline{\pi_{T^*E}^*(\mathcal{A}(E))};$$

ce qui permet d'avoir le résultat annoncé en appliquant la Proposition 4.4 précédente à l'inclusion

$$\pi_{T^*E}^*(\mathcal{A}(E)) \subset \overline{\mathcal{S}_{\mathcal{E}}(E)}.$$

Soit $\mathbf{u} \in Pol^k(T^*E)$. Pour tout $\mathbf{e} \in T^*E$, il existe un domaine de carte canonique $\mathbf{U} \ni \mathbf{e}$ de T^*E associée à une trivialisatation (V, ψ) de E dans lequel on peut écrire

$$\mathbf{u}(\mathbf{e}) = \sum_{|r|+|s|=k} f_{rs}(x, y) \xi^r \eta^s,$$

où (x, y) sont les coordonnées locales dans V , (x, y, ξ, η) celles correspondantes dans \mathbf{U} et $f_{rs} \in C^{\infty}(V)$.

Recouvrons M par de tels domaines de trivialisatation et extrayons-en un recouvrement de Palais. Notons le recouvrement ouvert de T^*E associé à ce recouvrement de Palais de M par $\mathcal{O} = \mathcal{O}_1 \cup \dots \cup \mathcal{O}_N$ avec $N \in \mathbb{N}$ et notons $\mathbf{U}_{i,\alpha} (\alpha \in J)$ les éléments de \mathcal{O}_i .

Considérons une partition de l'unité $\varphi_{i,\alpha}$ de M subordonnée au recouvrement $(U_{i,\alpha})$ de M associé à \mathcal{O} , où chaque $\varphi_{i,\alpha}$ est à support compact dans $U_{i,\alpha}$; et pour chaque $U_{i,\alpha}$, considérons une fonction $\phi_{i,\alpha}$ à support compact dans $U_{i,\alpha}$ et qui vaut 1 lorsque $\varphi_{i,\alpha}$ est non nulle. On a alors

$$\begin{aligned}\pi_{T^*E}^* \circ \pi_E^*(\varphi_{i,\alpha})\mathbf{u} &= \pi_{T^*E}^* \circ \pi_E^*(\varphi_{i,\alpha} \cdot \phi_{i,\alpha})\mathbf{u} \\ &= \sum_{|r|+|s|=k} g_{i,\alpha}^{rs} \cdot \mathbf{v}_{i,\alpha}^{rs},\end{aligned}$$

où $g_{i,\alpha}^{rs} \in \pi_{T^*E}^*(C^\infty(E))$ et $\mathbf{v}_{i,\alpha}^{rs} \in \mathcal{S}_{\mathcal{E}}(E)$ sont à support dans $U_{i,\alpha}$ et sont donnés par

$$g_{i,\alpha}^{rs} = \varphi_{i,\alpha} f_{i,\alpha}^{rs} \text{ et } \mathbf{v}_{i,\alpha}^{rs} = \phi_{i,\alpha} \xi^r \eta^s.$$

Par suite, on peut écrire

$$\begin{aligned}\mathbf{u} &= \sum_{|r|+|s|=k} \sum_{i,\alpha} g_{i,\alpha}^{rs} \cdot \mathbf{v}_{i,\alpha}^{rs} \\ &= \sum_{|r|+|s|=k} \sum_i \left(\sum_{\alpha} g_{i,\alpha}^{rs} \right) \cdot \left(\sum_{\beta} \mathbf{v}_{i,\beta}^{rs} \right) \\ &= \sum_{|r|+|s|=k} \sum_i g_i^{rs} \cdot \mathbf{v}_i^{rs}\end{aligned}$$

puisque pour $\alpha \neq \beta$, $g_{i,\alpha}^{rs} \cdot \mathbf{v}_{i,\beta}^{rs} = 0$. On a alors que $\mathbf{u} \in \overline{\mathcal{S}_{\mathcal{E}}(E)}$, puisqu'on vient de montrer que \mathbf{u} se décompose en une somme dont les termes sont des produits ayant deux facteurs, l'un dans $\pi_{T^*E}^*(C^\infty(E))$ et l'autre dans $\mathcal{S}_{\mathcal{E}}(E)$. Par suite,

$$Pol(T^*E) \subset \overline{\mathcal{S}_{\mathcal{E}}(E)}.$$

D'après la Proposition 4.4 précédente, on a donc l'inclusion

$$\overline{Pol(T^*E)} \subset \overline{\mathcal{S}_{\mathcal{E}}(E)}.$$

Mais on a aussi $\overline{Pol(T^*E)} = C^\infty(T^*E)$ et donc

$$C^\infty(T^*E) \subset \overline{\mathcal{S}_{\mathcal{E}}(E)}.$$

On en déduit alors l'égalité

$$\overline{\mathcal{S}_{\mathcal{E}}(E)} = C^\infty(T^*E);$$

car l'inclusion $\overline{\mathcal{S}_{\mathcal{E}}(E)} \subset C^\infty(T^*E)$ vient de la Proposition 4.4 du chapitre 1, appliquée aux inclusions

$$\mathcal{S}_{\mathcal{E}}(E) \subset Pol(T^*E) \subset \overline{Pol(T^*E)}.$$

□

On peut maintenant énoncer le résultat suivant qui nous permettra de tirer quelques conclusions sur les fibrés vectoriels, en rapport avec la structure de \mathbb{R} -algèbre de l'espace des symboles des opérateurs homogènes.

PROPOSITION 2.3. *Soient $E \rightarrow M$ et $F \rightarrow N$ deux fibrés vectoriels et $T^*E \rightarrow E$ et $T^*F \rightarrow F$ les fibrés cotangents associés à E et F respectivement. Tout isomorphisme de \mathbb{R} -algèbres $\Psi : \mathcal{S}_{\mathcal{E}}(E) \rightarrow \mathcal{S}_{\mathcal{E}}(F)$ s'étend en un unique isomorphisme de \mathbb{R} -algèbres $\bar{\Psi} : C^{\infty}(T^*E) \rightarrow C^{\infty}(T^*F)$ tel que*

$$\bar{\Psi}(\mathcal{A}^0((E))) = \mathcal{A}^0((F))$$

où $\mathcal{A}^0((E)) = \pi_{T^*E}^*(\mathcal{A}^0(E))$ et $\mathcal{A}^0((F))$ est la \mathbb{R} -algèbre définie de manière analogue.

DÉMONSTRATION. Si $\mathbf{u} \in \mathcal{A}^0((E)) \subset Pol^0(T^*E)$, n'a pas de zéro sur T^*E , alors il en est de même pour

$$\mathbf{u}^{-1} : T^*E \rightarrow \mathbb{R} : \mathbf{e} \mapsto \frac{1}{\mathbf{u}(\mathbf{e})}$$

qui est un élément de $Pol^0(T^*E)$. Mais \mathbf{u} étant une fonction polynomiale de degré zéro en y , lorsque l'on considère un système de coordonnées locales (x, y, ξ, η) , dans une carte canonique de T^*E , il en est de même pour \mathbf{u}^{-1} ; et donc

$$\mathbf{u}^{-1} \in \mathcal{A}^0((E)) \subset \mathcal{S}_{\mathcal{E}}^0(E) = \pi_{T^*E}^*(\mathcal{A}(E)).$$

Par suite, la relation

$$\bar{\Psi}(\mathbf{u}) \cdot \bar{\Psi}(\mathbf{u}^{-1}) = 1_{T^*F} : \mathbf{e} \mapsto 1$$

devient, comme $\bar{\Psi}$ prolonge Ψ ,

$$\Psi(\mathbf{u}) \cdot \Psi(\mathbf{u}^{-1}) = 1_{T^*F}$$

ce qui permet de conclure que les polynômes $\Psi(\mathbf{u})$ et $\Psi(\mathbf{u}^{-1})$ sont constants en les fibres de T^*F ; ils sont donc dans

$$\mathcal{S}_{\mathcal{E}}^0(F) = \pi_{T^*F}^*(\mathcal{A}(F)).$$

Mais comme les éléments inversibles de $\mathcal{A}(F)$ ayant leurs inverses dans $\mathcal{A}(F)$ sont dans $\mathcal{A}^0(F)$ et

$$\pi_{T^*F}^*|_{C^{\infty}(F)} : C^{\infty}(F) \rightarrow C^{\infty}(F)$$

est un isomorphisme de \mathbb{R} -algèbres, on en conclut également que $\Psi(\mathbf{u})$ est dans $\mathcal{A}^0((F))$. Cela démontre la première égalité; puisque pour tout $\mathbf{u} \in \mathcal{A}^0((E))$, l'élément $\mathbf{u}^2 + 1$ n'ayant pas de zéro, on a bien que $(\Psi(\mathbf{u}))^2$ est un élément de $\mathcal{A}^0((F))$. On en tire directement que,

$$\Psi(\mathbf{u}) \in \mathcal{A}^0((F)).$$

Ce qui achève la démonstration. \square

REMARQUE 2.4. Soit $E \rightarrow M$ un fibré vectoriel. À tout difféomorphisme de transition du fibré $E \rightarrow M$ de la forme $(x, y) \mapsto (x, A(x)(y))$ correspond un difféomorphisme de transition du fibré tangent $TE \rightarrow E$ de la forme

$$(x, y, \mathbf{h}, \mathbf{k}) \mapsto (x, y, \mathbf{h}, (A'(x) \cdot y)(\mathbf{h}) + A(x)(\mathbf{k})),$$

où $A'(x) \cdot y$ est une matrice de type (n, m) dont l'élément de ligne l et colonne k est donné par

$$\sum_r \partial_k A_{l,r}(x) y^r$$

et vérifiant

$$(A'(x) \cdot y)(\mathbf{h}) = (A_{*x} \mathbf{h})(y).$$

Les difféomorphismes de transition de $T^*E \rightarrow E$ sont donnés par

$$(x, y, \xi, \eta) \mapsto (x, y, \xi - {}^t(A^{-1}(x) \circ (A'(x) \cdot y))(\eta), {}^t A^{-1}(x)(\eta))$$

Ces difféomorphismes définissent ainsi une fibration différentielle $T^*E \rightarrow M$ dont la projection est donnée par

$$\pi : T^*E \rightarrow M : \mathbf{e} \mapsto \pi_E \circ \pi_{T^*E}(\mathbf{e})$$

COROLLAIRE 2.5. Soient deux fibrés vectoriels $E \rightarrow M$ et $F \rightarrow N$. Si les \mathbb{R} -algèbres $\mathcal{S}_{\mathcal{E}}(E)$ et $\mathcal{S}_{\mathcal{E}}(F)$ sont isomorphes, alors les fibrations différentielles $T^*E \rightarrow M$ et $T^*F \rightarrow N$ sont isomorphes.

DÉMONSTRATION. En effet, en vertu de la Proposition 2.3 précédente, les \mathbb{R} -algèbres $C^\infty(T^*E)$ et \mathbb{R} -algèbres $C^\infty(T^*F)$ sont isomorphes. Il existe donc un difféomorphisme $\Phi : T^*E \rightarrow T^*F$ tel que, en vertu de la proposition citée précédemment, l'isomorphisme de \mathbb{R} -algèbres Ψ entre $\mathcal{S}_{\mathcal{E}}(F)$ et $\mathcal{S}_{\mathcal{E}}(E)$ soit donné par

$$\Psi : \mathbf{u} \in \mathcal{S}_{\mathcal{E}}(F) \mapsto \mathbf{u} \circ \Phi \in \mathcal{S}_{\mathcal{E}}(E).$$

La même Proposition 2.3 permet d'écrire

$$\Psi(\pi_{T^*F}^* \circ \pi_F^*(C^\infty(N))) = \pi_{T^*E}^* \circ \pi_E^*(C^\infty(M)).$$

Par suite, la restriction de Ψ à $\mathcal{A}^0(F)$ induit un isomorphisme de \mathbb{R} -algèbres $\bar{\Psi}$ entre $C^\infty(N)$ et $C^\infty(M)$.

Par Milnor, il existe donc un difféomorphisme $\phi : M \rightarrow N$ tel que

$$\bar{\Psi}(g) = g \circ \phi.$$

On déduit de ce qui précède,

$$\Psi(\pi_{T^*F}^* \circ \pi_F^*(g)) = \pi_{T^*E}^* \circ \pi_E^*(g \circ \phi).$$

Or on a l'égalité

$$(\pi_{T^*F}^* \circ \pi_F^*(g)) \circ \Phi = \Psi(\pi_{T^*F}^* \circ \pi_F^*(g)).$$

Donc, pour tout $\mathbf{e} \in T^*E$, on a

$$(\pi_{T^*F}^* \circ \pi_F^*(g))(\Phi(\mathbf{e})) = \pi_{T^*E}^* \circ \pi_E^*(g \circ \phi)(\mathbf{e}).$$

Ce qui équivaut à

$$g(\pi_F \circ \pi_{T^*F}(\Phi(\mathbf{e}))) = g(\phi(\pi_E \circ \pi_{T^*E}(\mathbf{e}))), \forall \mathbf{e} \in T^*E, \forall g \in C^\infty(N).$$

On en déduit que

$$(\pi_F \circ \pi_{T^*F}) \circ \Phi = \phi \circ (\pi_E \circ \pi_{T^*E});$$

et le résultat énoncé est établi. \square

REMARQUE 2.6. *Le corollaire ci-dessus, nous permet également de dire que si les \mathbb{R} -algèbres $\mathcal{S}_{\mathcal{E}}(E)$ et $\mathcal{S}_{\mathcal{E}}(F)$ sont isomorphes, les bases M et N des fibrés vectoriels E et F sont difféomorphes mais aussi que ces fibrés sont de même rang. Nous ne savons pas en dire plus à ce stade, en termes de caractérisation des fibrés vectoriels.*

3. Limite classique des opérateurs homogènes de poids nul

Soient $E \rightarrow M$ un fibré vectoriel. Rappelons que l'espace

$$\mathcal{D}_0(E) = \{T \in \mathcal{D}(E) : [\mathcal{E}, D] = 0\}$$

est l'algèbre de Poisson quantique des opérateurs homogènes de poids nul. Considérons l'algèbre de Poisson classique $\mathcal{S}_0(E)$, limite classique de $\mathcal{D}_0(E)$. On a alors

$$\mathcal{S}_0(E) = \bigoplus_{k \geq 0} \mathcal{S}_0^k(E),$$

avec $\mathcal{S}_0^k(E) = \{\sigma(T) : T \in \mathcal{D}_0^k(E)\}$. Vue comme sous-algèbre associative de $Pol(T^*E)$, on a bien

$$\mathcal{S}_0^0(E) = \pi_{T^*E}^*(\mathcal{A}^0(E)) = \mathcal{A}^0((E)).$$

Localement, dans une carte canonique de T^*E associée à une carte adaptée de E , un élément \mathbf{u} de $\mathcal{S}_0^k(E)$ s'écrit sous la forme

$$\mathbf{u}(\mathbf{e}) = \sum_{|r|+|s| \leq k} f_{rs}(x) y^r \xi^s \eta^r, \quad (*)$$

où $\mathbf{e} \in T^*E$ admet (x, y, ξ, η) comme coordonnées locales.

PROPOSITION 3.1. *Soient $E \rightarrow M$ et $F \rightarrow N$ deux fibrés vectoriels. Si $\Psi : \mathcal{S}_0(E) \rightarrow \mathcal{S}_0(F)$ est isomorphisme de \mathbb{R} -algèbres, alors*

$$\Psi(\mathcal{A}^0((E))) = \mathcal{A}^0((F)).$$

DÉMONSTRATION. La démonstration est analogue à celle du Lemme 2.1 du chapitre 3. En effet, soit $\mathbf{u} \in \mathcal{A}^0((E))$ n'ayant pas de zéro sur T^*E . Alors $\mathbf{u} = \pi_{T^*E}^*(u)$, avec $u \in \mathcal{A}^0(E)$ n'ayant pas de zéro dans E . Par suite, $u^{-1} \in \mathcal{A}^0(E)$ et, en notant $\mathbf{u}^{-1} = \pi_{T^*E}^*(u^{-1})$ on a bien la relation

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}^{-1} = 1_{T^*E} : \mathbf{e} \mapsto 1.$$

D'où, on a

$$\Psi(\mathbf{u}) \cdot \Psi(\mathbf{u}^{-1}) = 1_{T^*F}.$$

On en déduit que

$$\Psi(\mathbf{u}) \in \text{Pol}^0(T^*F) \cap \mathcal{S}_0(F) = \mathcal{A}^0((F)).$$

En considérant un élément quelconque \mathbf{u} de $\mathcal{A}^0((E))$, on a que $\mathbf{u}^2 + 1$ n'a pas de zéro dans T^*E et donc $\Psi(\mathbf{u}) \cdot \Psi(\mathbf{u}) \in \mathcal{A}^0((F))$.

On peut alors conclure car cela entraîne

$$\Psi(\mathbf{u}) \in \mathcal{A}^0((F)).$$

□

On en déduit alors le résultat suivant.

COROLLAIRE 3.2. *Soient $E \rightarrow M$ et $F \rightarrow N$ deux fibrés vectoriels. Si les \mathbb{R} -algèbres $\mathcal{S}_0(E)$ et $\mathcal{S}_0(F)$ sont isomorphes alors les variétés différentielles M et N sont difféomorphes.*

4. La structure de \mathbb{R} -algèbre de l'algèbre de Lie $\mathcal{S}(\mathcal{P}(E, M))$

Pour un fibré $E \rightarrow M$, de rang dépassant 1, nous avons établi que sous certaines hypothèses, la structure de Lie de $\mathcal{S}(\mathcal{P}(E, M))$ caractérise le fibré E . Nous allons voir ce qu'il en est de sa structure de \mathbb{R} -algèbre.

Considérons la suite exacte suivante, rencontrée dans le chapitre précédent, et limitons-nous à la seule structure d'algèbre associative des espaces en question

$$0 \rightarrow \mathcal{S}(M) \otimes sl(E) \xrightarrow{\theta} \mathcal{S}(\mathcal{P}(E, M)) \xrightarrow{\delta} \mathcal{S}(M) \rightarrow 0.$$

Notons qu'en vertu des opérations effectuées en (5) et en (6) au chapitre précédent, la structure de \mathbb{R} -algèbre sur $\mathcal{S}(M) \otimes sl(E)$ dont il est question ici est celle pour laquelle le produit de deux éléments quelconques est nul.

Considérons la partie de $\mathcal{S}(\mathcal{P}(E, M))$ définie et notée par

$$\mathcal{J}(E) := \{P \in \mathcal{S}(\mathcal{P}(E, M)) : P^2 = 0\}.$$

On a alors que l'espace $\mathcal{J}(E)$ est un idéal de la \mathbb{R} -algèbre $\mathcal{S}(\mathcal{P}(E, M))$. En effet, cela découle du fait que $\mathcal{J}(E)$ n'est rien d'autre que le noyau de l'homomorphisme de \mathbb{R} -algèbres δ de la suite exacte précédente.

PROPOSITION 4.1. *Les éléments inversibles de la \mathbb{R} -algèbre associative $\mathcal{S}(\mathcal{P}(E, M))$ se décomposent sous la forme $\mathbf{u} + f$, avec $\mathbf{u} \in \mathcal{J}(E)$ et $f \in \text{Pol}^0(T^*M) \cong C^\infty(M)$ une fonction n'ayant pas de zéro. Et l'inverse d'un tel élément est donné par*

$$(\mathbf{u} + f)^{-1} = -f^{-2} \cdot \mathbf{u} + f^{-1}.$$

avec $f^{-1} : T^*M \rightarrow \mathbb{R} : \mathbf{x} \mapsto \frac{1}{f(\mathbf{x})}$.

DÉMONSTRATION. Soient $P, Q \in \mathcal{S}(\mathcal{P}(E, M))$ tels que $P \cdot Q = 1$.
On a alors

$$\delta(P) \cdot \delta(Q) = 1,$$

et cela implique que $\delta(P)$ et $\delta(Q)$ sont des polynômes constants en les fibres de T^*M , en tenant compte de l'identification $\mathcal{S}(M) \cong \text{Pol}(T^*M)$. On en déduit qu'il existe des fonctions sans zéro $f, g \in C^\infty(M)$, l'une étant l'inverse de l'autre, telles que $\delta(P) = f$ et $\delta(Q) = g$. Par suite, par définition de l'homomorphisme δ , on a la décomposition

$$P = f + \mathbf{u} \text{ et } Q = g + \mathbf{v}$$

avec $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{J}(E) = \text{Ker}\delta$. On a alors

$$\begin{aligned} (f + \mathbf{u})^{-1} &= \frac{1}{f} \frac{1}{1 + \frac{1}{f}\mathbf{u}} \\ &= \frac{1}{f} \sum_k (-1)^k \frac{1}{f^k} \mathbf{u}^k = f^{-1} - f^{-2}\mathbf{u} \end{aligned}$$

car $\mathbf{u}^2 = 0$, et le résultat est établi. \square

Observons que la graduation de la \mathbb{R} -algèbre $\mathcal{S}(\mathcal{P}(E, M))$ en induit une sur $\mathcal{J}(E)$ et on peut noter

$$\mathcal{J}(E) = \bigoplus_{k \geq 0} \mathcal{J}^k(E),$$

avec en particulier $\mathcal{J}^0(E) = \{0\}$.

On peut maintenant énoncer le résultat suivant.

PROPOSITION 4.2. *Soient $E \rightarrow M$ et $F \rightarrow N$ deux fibrés vectoriels. Si $\Psi : \mathcal{S}(\mathcal{P}(E, M)) \rightarrow \mathcal{S}(\mathcal{P}(F, N))$ est un isomorphisme de \mathbb{R} -algèbres, alors Ψ respecte leurs idéaux $\mathcal{J}(E)$ et $\mathcal{J}(F)$.*

DÉMONSTRATION. Soit $\Psi : \mathcal{S}(\mathcal{P}(E, M)) \rightarrow \mathcal{S}(\mathcal{P}(F, N))$ un isomorphisme de \mathbb{R} -algèbres. La proposition vient directement du fait que pour tout $P \in \mathcal{S}(\mathcal{P}(E, M))$ tel qu'il existe $r \in \mathbb{N}$ avec $P^r = 0$, alors on a également $(\Psi(P))^r = 0$. \square

PROPOSITION 4.3. *Soient $E \rightarrow M$ et $F \rightarrow N$ deux fibrés vectoriels. Tout isomorphisme de \mathbb{R} -algèbres $\Psi : \mathcal{S}(\mathcal{P}(E, M)) \rightarrow \mathcal{S}(\mathcal{P}(F, N))$ est tel que*

$$\Psi(\mathcal{S}^0(\mathcal{P}(E, M))) = \mathcal{S}^0(\mathcal{P}(F, N)).$$

DÉMONSTRATION. Comme $\mathcal{J}(E)$ est un idéal pour la structure de \mathbb{R} -algèbre de $\mathcal{S}(\mathcal{P}(E))$, on a alors que

$$\bar{\Psi} : [Q] \mapsto [\Psi(Q)]$$

est bien un isomorphisme de \mathbb{R} -algèbres entre les espaces quotients $\mathcal{S}(\mathcal{P}(E, M))/\mathcal{J}(E)$ et $\mathcal{S}(\mathcal{P}(F, N))/\mathcal{J}(F)$ avec

$$[P] = [Q] \Leftrightarrow P - Q \in \mathcal{J}(E).$$

Observons que ces \mathbb{R} -algèbres quotients sont gradués, le sous-espace de poids k étant identifié à

$$\mathcal{S}^k(\mathcal{P}(E, M))/\mathcal{J}^k(E) \cong \text{Pol}^k(T^*M)$$

pour $\mathcal{S}(\mathcal{P}(E, M))/\mathcal{J}(E)$, et pour $\mathcal{S}(\mathcal{P}(F, N))/\mathcal{J}(F)$, on a une identification analogue. On en déduit l'existence d'isomorphismes gradués de \mathbb{R} -algèbres

$$\bar{\Psi}_M : \mathcal{S}(\mathcal{P}(E, M))/\mathcal{J}(E) \rightarrow \text{Pol}(T^*M)$$

et

$$\bar{\Psi}_N : \mathcal{S}(\mathcal{P}(F, N))/\mathcal{J}(F) \rightarrow \text{Pol}(T^*N).$$

On en tire un isomorphisme de \mathbb{R} -algèbres

$$\bar{\Psi}_N \circ \bar{\Psi} \circ \bar{\Psi}_M^{-1} : \text{Pol}(T^*M) \rightarrow \text{Pol}(T^*N).$$

Comme on a

$$\bar{\Psi}_N \circ \bar{\Psi} \circ \bar{\Psi}_M^{-1}(\text{Pol}^0(T^*M)) = \text{Pol}^0(T^*N),$$

en vertu du Lemme 2.1 du troisième chapitre, alors on peut écrire

$$\bar{\Psi}(\mathcal{S}^0(\mathcal{P}(E, M))/\mathcal{J}^0(E)) = \mathcal{S}^0(\mathcal{P}(F, N))/\mathcal{J}^0(F),$$

puisque $\bar{\Psi}_M$ et $\bar{\Psi}_N$ sont gradués. Par suite, pour tout $f \in \mathcal{S}^0(\mathcal{P}(E, M))$, on a l'égalité

$$\bar{\Psi}([f]) = [\Psi(f)] \in \mathcal{S}^0(\mathcal{P}(F, N))/\{0\},$$

et le résultat cherché en découle. \square

On en déduit le résultat suivant.

COROLLAIRE 4.4. *Soient $E \rightarrow M$ et $F \rightarrow N$ deux fibrés vectoriels. Si les \mathbb{R} -algèbres $\mathcal{S}(\mathcal{P}(E, M))$ et $\mathcal{S}(\mathcal{P}(F, N))$ sont isomorphes, alors les variétés différentielles M et N sont difféomorphes.*

On observe qu'un fibré vectoriel E ne peut pas être caractérisé par la seule structure d'algèbre associative de $\mathcal{S}(\mathcal{P}(E, M))$ puisque « l'information » sur la nature du fibré, hormis sa base, est logée dans l'idéal $\mathcal{J}(E)$ sur lequel la restriction de la multiplication de $\mathcal{S}(\mathcal{P}(E, M))$ se réduit à la structure triviale.

5. Caractérisation Poisson-algébrique des fibrés vectoriels

Pour des algèbres de Poisson quantiques, un homomorphisme de \mathbb{R} -algèbres est nécessairement un homomorphisme d'algèbres de Lie. Les résultats obtenus à la section précédente et au chapitre précédent suggèrent de considérer, pour les algèbres de Poisson classiques, des homomorphismes respectant à la fois les structures d'algèbres associatives et de Lie, dans le but d'obtenir une caractérisation algébrique des fibrés vectoriels sans imposer que les \mathbb{R} -algèbres $\mathcal{S}(\mathcal{P}(E, M))$ et $\mathcal{S}(\mathcal{P}(F, M))$ sont vues comme $C^\infty(M)$ -modules.

Mais donnons d'abord une définition.

Une application \mathbb{R} -linéaire Ψ entre deux algèbres de Poisson classiques est un *homomorphisme d'algèbres de Poisson* si Ψ est à la fois un homomorphisme d'algèbres associatives et de Lie.

Ici, il n'est pas exigé que Ψ soit gradué.

On peut maintenant énoncer la proposition suivante.

THÉORÈME 5.1. *Soient $E \rightarrow M$ et $F \rightarrow N$ deux fibrés vectoriels de fibre type \mathbb{R}^n et $\mathbb{R}^{n'}$ respectivement, avec $n, n' > 1$.*

Sous l'hypothèse $H^1(M, \mathbb{Z}/2) = 0$, les algèbres de Poisson $\mathcal{S}(\mathcal{P}(E, M))$ et $\mathcal{S}(\mathcal{P}(F, N))$ sont isomorphes si, et seulement si, les fibrés vectoriels E et F le sont.

DÉMONSTRATION. Soit $\Psi : \mathcal{S}(\mathcal{P}(E, M)) \rightarrow \mathcal{S}(\mathcal{P}(F, N))$ un isomorphisme d'algèbres de Poisson. Observons qu'en vertu de la Proposition 4.3 précédente, on a

$$\Psi(\mathcal{P}^0(E, M)) = \mathcal{P}^0(F, N).$$

Par suite, en appliquant le même raisonnement qu'au Théorème 3.6 du chapitre 5, il vient que

$$\Psi(\mathfrak{gl}(E)) = \mathfrak{gl}(F),$$

et le théorème est établi, en vertu du Théorème 2.4 du chapitre cité précédemment. \square

Bibliographie

- [1] Abe K, *Pursell-Shanks type theorem for orbit spaces and G-manifolds*, Publ. Res. Inst. Math. Sci., 18 (1982), pp. 265-282
- [2] Amemiya I, *Lie algebra of vector fields and complex structure*, J. Math. Soc. Japan, 27 (1975), pp. 545-549
- [3] Atkin C J, Grabowski J, *Homomorphisms of the Lie algebras associated with a symplectic manifold*, Compos. Math., 76 (1990), pp. 315-348
- [4] Caressa P, *The algebra of Poisson brackets*, Young Algebra Seminar, Roma Tor Vergata, 2000 (version électronique : <http://www.caressa.it/pdf/yas.pdf>)
- [5] De Wilde M, Lecomte P, *Some Characterizations of Differential operators on Vector Bundles*, In : E.B. Christoffel, Eds : Butzer P, Feher F, Birkhäuser Verlag, Basel (1981), pp. 543-549
- [6] De Wilde M, Lecomte P, *Cohomology of Lie algebra of smooth vector fields of a manifold, associated to the Lie derivative of smooth forms*, J. Pure Appl. Math., **9,62,no 2** (1983), pp. 197-214
- [7] Dieudonné J, *Éléments d'analyse T.3*, Cahiers scientifiques, Fascicules XXXIII, Gauthier-Villars, Paris, (1970).
- [8] Dieudonné J, *Éléments d'analyse T.2*, Cahiers scientifiques, Fascicules XXXIII, Gauthier-Villars, Paris, (1969).
- [9] Gelfand I. M. and Dorfman I. Ya., *Hamiltonian operators and associated algebraic structures*, Funk. Anal. Priloz. 15, 13-30 (1979) (Russian).
- [10] Gelfand, I. M. and Dorfman, I. Ya., *The Schouten bracket and hamiltonian operators*, Funkt. Anal. Prilozhen. 14(3) (1980), 71-74
- [11] Gel'fand I, Kolmogoroff A, *On rings of continuous functions on topological spaces*, C. R. (Dokl.) Acad. Sci. URSS, 22 (1939), pp. 11-15
- [12] Grabowska K, Grabowski J, Kubarski, J et al. *The Lie algebra of a Lie algebroid*, in « *Lie Algebroids and Related Topics in Differential Geometry* », (Eds.), Banach Center Publications, 54, Warszawa 2001, pp. 43-50
- [13] Grabowski J, *Isomorphisms and ideals of the Lie algebras of vector fields*, (Eds.), Invent. math., 50 (1978), pp. 13-33
- [14] Grabowski J, *Lie algebras of vector fields and generalized foliations*, Publ. Matem., 37 (1993), pp 359-367
- [15] Grabowski J, *Isomorphisms of Poisson and Jacobi brackets*, in *Poisson Geometry*, Eds : J. Grabowski and P. Urbański, Banach Center Publications, 51, Warszawa 2000, pp. 79-85
- [16] Grabowski J, *Isomorphisms of algebras of smooth functions revisited*, Archiv Math. (to appear) (electronic version at <http://arXiv.org/abs/math.DG/0310295>)
- [17] Grabowski J, Poncin N, *Automorphisms of quantum and classical Poisson algebras*, Comp. Math., **140** (2004), pp. 511-527

- [18] Grabowski J, Poncin N, *Lie-algebraic characterizations of manifolds*, Central Europ. J. of Math., **2(5)** (2005), pp. 811-825
- [19] Grabowski J, Poncin N, *Derivations of Lie algebras of differential operators*, Indag. Math., N.S., **16.(2)** (2005), pp. 181-200
- [20] Grabowski J, Kotov A, Poncin N, *Lie superalgebras of differential operators*, Journal of Lie theory 2013; Volum 23.(1) s. 35-54
- [21] Grabowski J, Kotov A, Poncin N, *Lie algebraic characterization of supercommutative space*, Journal of Lie theory 2010; Volum 20. 739 - 749
- [22] Grabowski J, Poncin N, *On quantum and classical Poisson algebras*, Banach Center Publ. **76**, Warszawa (2007), pp. 313-324.
- [23] Helgason S, *Differential geometry, Lie groups and symmetric spaces*, Academic Press Inc, New York, (1978)
- [24] Hauser H, Müller G, *Affine varieties and Lie algebras of vector fields*, Manusc. Math., 80 (1993), pp. 309-337.
- [25] Koriyama A, *On Lie algebras of vector fields with invariant submanifolds* Nagoya Math. J., 55 (1974), pp. 91-110
- [26] Koriyama A, Maeda Y, Omori H, *On Lie algebras of vector fields* Trans. Amer. Math. Soc., 226 (1977), pp. 89-117
- [27] Kriegl A, Michor P W, *The Convenient Setting of Global Analysis*, Math. Surv. Monog., 53, American Mathematical Society 1997,
- [28] Lecomte P, *On the infinitesimal automorphisms of a vector bundle*, J. Math. pure et appl. Go (1981), pp. 229-239
- [29] Lecomte P, *On some sequence of graded Lie algebras associated to manifolds*, Ann. Glob. Anal. Geom., 12 (1994), pp. 183-192
- [30] Lecomte P, Mathonet P, Tousset E, *Comparison of some modules of the Lie algebra of vector fields*, Indag. Math., **7(4)** (1996), pp. 461-471
- [31] Lecomte P.B.A, *Note on the Linear Endomorphisms of a Vector Bundle.*, Manuscripta mathematica 32 (1980) : 231-238
- [32] Lecomte P, *Sur l'algèbre de Lie des sections d'un fibré en algèbres de Lie*, Ann. Inst. Fourier, XXX, Fasc. **4**, (1980), pp. 35-50.
- [33] Lecomte P.B.A, *Sur la suite exacte canonique associée à un fibré principal*, Bull. S.M.F 113 (1985), pp, 256-271.
- [34] Lecomte P.B.A, Leuther T, Zihindula Mushengezi E, *On a Lie algebraic characterization of vector bundles*, SIGMA 8 (2012), 004 :10 pages, 2012.
- [35] Lichnérowicz A, *Fibrés vectoriels, structures unimodulaires exactes et automorphismes infinitésimaux*, J. Math. Pures Appl., 56(2), (1977), pp. 183-204.
- [36] Nestruev J, *Smooth manifolds and observables* volume 220 of Graduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, New York, 2003. Joint work of A. M. Astashov, A. B. Bocharov, S. V. Duzhin, A. B. Sossinsky, A. M. Vinogradov and M. M. Vinogradov, Translated from the 2000 Russian edition by Sossinsky, I. S. Krasil'schik and Duzhin
- [37] Omori H, *Infinite dimensional Lie transformation groups*, Lect. Notes in Math., 427 (1976), Springer Verlag
- [38] Siebert T, *Lie algebras of derivations and affine differential geometry over fields of characteristic 0*, Mat. Ann., 305 (1996), pp. 271-286,
- [39] Pham Mau Quan, *Introduction à la géométrie des variétés différentiables*, Dunod, Paris, (1969)

- [40] Poncin N, *Equivariant operators between some Modules of the Lie Algebra of Vector Fields*, Comm. Alg., **32**, **7** (2004), pp. 2559-2572
- [41] Pursell L E, Shanks M E, *The Lie algèbra of a smooth manifold*, Proc. Amer. Math. Soc. **5** (1954), pp. 468.
- [42] Schwarz L, *Analyse, Topologie générale et analyse fonctionnelle*, Hermann, Paris (1970)
- [43] Skryabin S M, *The regular Lie rings of derivations of commutative rings*, preprint WINITI 4403-W87 (1987)
- [44] Takens F, *Derivation of vector fields*, Compositio Math., **26** (1973), pp. 151-158
- [45] Leuther T, *Affine bundles are affine spaces over modules* arXiv :1201.5812v1 [math.DG]
- [46] Van Duc T, *Une caractérisation du fibré transverse*, Compositio Math., Collectanea Mathematica 41.1 (1990) : 35-44
- [47] Weil H, *The classical groups, their invariants and representations*, Princeton Math. Series, Princeton (1946).
- [48] Whitney H, *Differentiable manifolds*, Ann.,Math., **37** (1936), pp. 645-680.
- [49] Wollenberg L S, *Derivation of the Lie algebra of polynomials under Poisson bracket*, Proc. Amer. Math. Soc. **20** (1969), pp. 315-320.

Table des matières

Introduction	1
Chapitre 1. GÉNÉRALITÉS ET NOTIONS DE BASE	7
1. Fibrations différentielles et fibrés vectoriels	7
2. Connexions	9
3. Automorphismes infinitésimaux d'un fibré vectoriel	10
4. Un peu d'algèbre	11
5. Un peu de topologie	14
Chapitre 2. ALGÈBRES DE POISSON QUANTIQUES ET CLASSIQUES	15
1. Quelques définitions	15
2. Caractérisation Lie-algébrique des variétés	18
Chapitre 3. ALGÈBRE DE LIE DES OPÉRATEURS DIFFÉRENTIELS HOMOGÈNES D'UN FIBRÉ VECTORIEL	23
1. Opérateurs différentiels homogènes	23
2. Quelques caractérisations des fibrés vectoriels.	31
3. La sous-algèbre de Lie $\mathcal{D}_+(E)$	34
Chapitre 4. UNE AUTRE CONSTRUCTION DE L'ALGÈBRE DES OPÉRATEURS DIFFÉRENTIELS HOMOGÈNES	35
1. Introduction	35
2. L'espace topologique $\mathcal{A}(E)$	35
3. Identification d'algèbres : $\mathcal{D}_\varepsilon(E) \cong \mathcal{D}_G(E)$	37
4. Les dérivations de l'algèbre associative $\mathcal{A}(E)$	40
5. Algèbre de Lie des opérateurs homogènes de poids zéro	45
Chapitre 5. ALGÈBRE DE LIE DES OPÉRATEURS DIFFÉRENTIELS AGISSANT SUR LES SECTIONS D'UN FIBRÉ VECTORIEL	56
1. Cadre général	56
2. Opérateurs différentiels d'un fibré vectoriel	59
3. L'algèbre de Poisson quantique $\mathcal{P}(E, M)$	63
4. L'algèbre de Poisson classique $\mathcal{S}(\mathcal{P}(E, M))$	68

Chapitre 6. CARACTÉRISATION ALGÈBRIQUE DES VARIÉTÉS DIFFÉRENTIELLES ET DES FIBRÉS VECTORIELS	78
1. Caractérisation algébrique des variétés différentielles	78
2. Caractérisation algébrique des fibrés vectoriels.	78
3. Limite classique des opérateurs homogènes de poids nul	83
4. La structure de \mathbb{R} -algèbre de l'algèbre de Lie $\mathcal{S}(\mathcal{P}(E, M))$	84
5. Caractérisation Poisson-algébrique des fibrés vectoriels	86
Bibliographie	88
Bibliographie	88