

# Progrès technique et croissance économique

Lionel Artige

HEC - Université de Liège

9 novembre 2012

# Qu'est-ce que la croissance économique ?

- La croissance économique est la croissance à long terme de la production en volume (ou production réelle) par habitant.<sup>1</sup>
- La croissance est donc un processus temporel.

---

1. Par souci de simplification, on fera l'hypothèse que la population totale travaille. Par conséquent, production par travailleur ou production par habitant sont synonymes. Autre conséquence : le taux de croissance démographique est identique au taux de croissance du nombre de travailleurs. Empiriquement, ces deux taux sont souvent proches.

# Condition d'existence d'une production future ?

- Si la production au temps  $t$  est entièrement composée de biens de consommation, alors il n'y aura pas de production au temps  $t + 1$ .
- Pour qu'il y ait production future, il faut qu'une partie de la production au temps  $t$  soit composée de biens d'investissement qui seront utilisés comme inputs (facteurs de production) lors de la production au temps  $t + 1$ .

- D'un point de vue comptable, il n'y aura pas de production en  $t + 1$  si :

$$y_t = c_t \quad (1)$$

où  $y_t$  est la production réelle par habitant et  $c_t$  la consommation par habitant de biens et de services.<sup>2</sup>

- En revanche, il y aura production en  $t + 1$  si :

$$y_t = c_t + i_t \quad (2)$$

où  $i_t > 0$  est l'investissement par travailleur ou par habitant.

---

2. Les variables par habitant sont égales aux variables agrégées divisées par le nombre d'habitants. Exemple :  $y_t = \frac{Y_t}{N_t}$  où  $Y_t$  est la production réelle agrégée et  $N_t$  est le nombre total d'habitants.

# Condition d'existence de la croissance économique ?

Pour que la production réelle par travailleur augmente entre  $t$  et  $t + 1$  ...

... il faut que l'investissement permette de produire plus en  $t+1$  qu'en  $t$  :

$$i_t \implies y_{t+1} > y_t \quad (3)$$

Comme la production dépend des facteurs de production, il faut que **l'investissement accroisse la quantité des facteurs de production pour que la production par travailleur augmente** :

$$i_t \implies k_{t+1} > k_t \implies y_{t+1}(k_{t+1}) > y_t(k_t) \quad (4)$$

où  $k_t$  est la quantité de facteurs de production à la période  $t$ .

Il existe donc une *condition nécessaire et suffisante* pour obtenir une *croissance à long terme* du produit réel par travailleur :

**l'investissement net par travailleur doit être positif à toutes les périodes**

où l'investissement net = investissement brut – dépréciation du capital.

# Condition pour que l'investissement net soit positif ?

Pour que l'investissement net soit toujours positif il faut que l'investissement brut soit toujours supérieur à la dépréciation du capital. Cette condition est assurée ...

- ... **si l'investissement brut est positif et la dépréciation du capital est nulle.** Cette éventualité est évidemment irréaliste car les outils et les machines s'usent au cours du temps ou deviennent obsolètes : la dépréciation du capital ne peut pas être nulle.
- ... **si l'investissement brut est supérieur à la dépréciation du capital quel que soit le niveau du stock de capital.** C'est cette éventualité qui est pertinente et que nous allons étudier.

Nous devons donc comparer le taux d'accroissement de l'investissement brut<sup>3</sup> et le taux de dépréciation du capital lorsque le stock de capital augmente.

- Généralement, on suppose que la dépréciation est proportionnelle au capital. Par conséquent, **le taux de dépréciation, symbolisé par  $\delta$ , est constant.**
- Comme l'investissement brut est une fraction de la production, le taux d'accroissement de l'investissement brut, symbolisé par  $\gamma$ , est le taux d'accroissement de la production lorsque le capital augmente. **Tout dépend donc des hypothèses sur la fonction de production.**

---

3. Ici, on distingue, d'une part, le taux de croissance de l'investissement qui se rapporte à la variation de l'investissement au cours du temps et, d'autre part, le taux d'accroissement de l'investissement qui se rapporte à la variation de l'investissement résultant d'une variation du capital.



Si la **fonction de production est linéaire** alors le rendement des facteurs de production est constant. Par conséquent, le taux d'accroissement de l'investissement brut  $\gamma$  est constant. Il faut alors comparer  $\gamma$  et  $\delta$ .

- Si  $\gamma > \delta$ , alors on a une croissance de long terme de la production par travailleur.
- Si  $\gamma = \delta$ , alors la production par travailleur est constante dans le temps : croissance zéro.
- Si  $\gamma < \delta$ , alors la production par travailleur diminue au cours du temps : décroissance.

Si la **fonction de production est concave** alors le rendement des facteurs de production est décroissant. Par conséquent, le taux d'accroissement de l'investissement brut est décroissant. Le résultat sur la croissance est alors très clair :

- Quand le stock de capital est petit, le taux d'accroissement de l'investissement brut  $\gamma$  est élevé et donc dépasse le taux de dépréciation  $\delta$  : la production par travailleur à la période suivante augmente.
- Quand le stock de capital est élevé,  $\gamma$  est faible et donc est inférieur à  $\delta$  : la production par travailleur à la période suivante diminue.
- Il existe donc un niveau de stock de capital pour lequel  $\gamma = \delta$ . C'est l'état stationnaire. Une fois que cet état stationnaire est atteint, la production par travailleur est constante.

Ce cas de figure est étudié par Solow (1956).

Si la **fonction de production est convexe** alors le rendement des facteurs de production est croissant. Par conséquent, le taux d'accroissement de l'investissement brut est croissant. Le résultat sur la croissance est tout aussi clair :

- Quel que soit le stock de capital, le taux d'accroissement de l'investissement brut  $\gamma$  est plus élevé que le taux de dépréciation  $\delta$  : la production par travailleur augmente indéfiniment à un taux de plus en plus élevé.

Ce cas de figure est irréaliste en économie.

# Qu'est-ce que le progrès technique ?

- Le modèle de croissance de Solow a montré que l'accumulation du capital physique ne suffit pas à engendrer de la croissance à long terme. L'accroissement de la quantité de biens capitaux identiques ne permet pas d'avoir une croissance positive à long terme si leur rendement est décroissant.
- Est-ce que l'investissement des entreprises est simplement quantitatif ? Bien sûr que non. Les biens capitaux achetés par les entreprises diffèrent par leur qualité au cours du temps.
- En fait, derrière le chiffre de la croissance du Produit Intérieur Brut se dissimule une pluralité de phénomènes :
  - Disparition de certains produits et apparition de nouveaux
  - Amélioration des machines et outils nécessaires à la production
  - Invention de nouvelles technologies plus économes en inputs
  - Acquisition de compétences et apprentissage de la main d'oeuvre

# Qu'est-ce que progrès technique ?

La croissance économique, telle qu'elle est mesurée par l'augmentation du PIB, est un accroissement du volume de production.

Ce volume comprend deux dimensions :

- une dimension quantitative : l'économie produit de plus grandes quantités de biens identiques
- une dimension qualitative : des nouveaux produits apparaissent à côté (ou à la place) d'anciens produits

La dimension qualitative des biens d'investissement est l'antidote aux rendements décroissants de l'accumulation quantitative du capital. Cette dimension qualitative, c'est le progrès technique.

# Comment modéliser le progrès technique ?

On peut modéliser le progrès technique, symbolisé par  $A$ , à partir de la fonction de production. On peut le faire de trois manières :

- Le progrès technique est un facteur d'amélioration qualitative du capital. Chaque unité quantitative aura alors une productivité plus grande :  $Y = F(AK, N)$
- Le progrès technique est un facteur d'amélioration qualitative du travail. Chaque salarié aura alors une productivité plus grande :  $Y = F(K, AN)$
- Le progrès technique est un facteur d'amélioration qualitative de la combinaison productive du capital et du travail. L'ensemble des facteurs de production aura alors une productivité plus grande :  $Y = AF(K, N)$

On peut bien sûr envisager les trois possibilités ensemble. Pour des raisons de simplicité, on utilise généralement la deuxième possibilité. C'est ce que nous allons faire ici.

- Nous allons étudier maintenant un modèle de Solow avec du progrès technique. Le taux de croissance du progrès technique est supposé exogène et constant. Ce modèle permet de caractériser les conditions d'obtention d'une croissance de long terme du produit par travailleur.
- La fonction de production de notre modèle est de type "hypothèse 2" (voir dia 10) :

$$Y_t = f(K_t, A_t N_t) \quad (5)$$

où le niveau du progrès technique  $A_t$  s'applique au travail  $N_t$ .

Ce qui est vendu dans l'économie nationale est forcément acheté. Au cours d'une période (par exemple : l'année), on a donc une identité entre la production nationale vendue et les dépenses nationales :

$$Y_t = C_t + I_t \quad (6)$$

où  $Y_t$  est la production nationale (ou production agrégée),  $C_t$  et  $I_t$  sont les dépenses nationales de consommation et d'investissements à la période  $t$ .



Dans une économie autarcique, l'épargne nationale est nécessairement égale à l'investissement national. Cette égalité se déduit de l'identité comptable de l'économie :

$$Y_t - C_t = I_t \iff S_t = I_t \quad (7)$$

où  $S_t \equiv Y_t - C_t$  est l'épargne nationale à la période  $t$ .

Le modèle de Solow reprend l'hypothèse keynésienne selon laquelle l'épargne nationale est une fraction stable du revenu national dans le temps. Par conséquent, le modèle suppose que

$$S_t = sY_t \quad (8)$$

où  $s$ , le taux d'épargne, est constant dans le temps. C'est un paramètre exogène, qui n'est donc pas un résultat du modèle. Bien évidemment, l'investissement national sera aussi proportionnel au revenu national :

$$I_t = sY_t \quad (9)$$

L'accumulation du stock de capital physique procède de l'addition du stock de capital ancien (non encore amorti) et de l'investissement courant. On peut formaliser ce processus de la manière suivante :

$$K_{t+1} = (1 - \delta)K_t + I_t \quad (10)$$

où  $K_{t+1}$  est le stock de capital qui s'est accumulé (il est disponible pour la production à la période  $t + 1$ ),  $K_t$  est le stock de capital ancien (dont la totalité était disponible pour la production à la période  $t$  et dont une partie  $(1 - \delta)$  est disponible pour la production à la période  $t + 1$ ),  $\delta$  est le taux de dépréciation du capital physique au cours du temps, et  $I_t$  est l'investissement national (investissement agrégé) réalisé à la période  $t$ .

Sachant que, dans ce modèle, l'investissement national est proportionnel au revenu national  $I_t = sY_t$ , on peut réécrire cette équation :

$$K_{t+1} = (1 - \delta)K_t + sY_t \quad (11)$$

En réécrivant l'équation (11), on peut obtenir notre variable déterminante, l'investissement net :

$$K_{t+1} - K_t = sY_t - \delta K_t \quad (12)$$

où  $K_{t+1} - K_t$  est l'investissement net agrégé.

# Accumulation du stock de capital physique par travailleur effectif (I)

L'objet de notre intérêt est l'évolution du niveau de vie d'un travailleur dans cette économie. On doit donc observer le revenu par travailleur qui dépend du stock de capital par travailleur. Cependant, ce que l'on peut observer au cours du temps, c'est l'évolution conjointe des variables  $K_t$  (stock de capital),  $A_t$  (niveau technologique) et  $N_t$  (taille de la population). Il faut donc étudier la variation conjointe des valeurs de ces variables au cours du temps. C'est ce que l'on fait en calculant le ratio du stock de capital physique par travailleur effectif :

$$\frac{K_{t+1}}{A_{t+1}N_{t+1}} = \frac{(1 - \delta)K_t + sY_t}{A_{t+1}N_{t+1}} \quad (13)$$

où  $\frac{K_{t+1}}{A_{t+1}N_{t+1}}$  est le stock de capital par travailleur effectif à la période  $t + 1$  et où l'on a remplacé  $I_t$  par  $sY_t$ .

# Accumulation du stock de capital physique par travailleur effectif (II)

Il est évident que les ratios  $\frac{K_t}{A_{t+1}N_{t+1}}$  et  $\frac{sY_t}{A_{t+1}N_{t+1}}$  dans l'équation (13) ne respectent pas la cohérence temporelle (les numérateurs et dénominateurs n'ont pas les mêmes indices de temps). On va donc diviser le côté droit de l'équation (13), au numérateur comme au dénominateur, par  $A_t N_t$ , ce qui donne :

$$\frac{K_{t+1}}{A_{t+1}N_{t+1}} = \frac{(1 - \delta)\frac{K_t}{A_t N_t} + s\frac{Y_t}{A_t N_t}}{\frac{A_{t+1}N_{t+1}}{A_t N_t}} \quad (14)$$

Tous les ratios respectent maintenant la cohérence temporelle. Il reste cependant à déterminer le dénominateur de l'équation (14).

On suppose que le progrès technique croît au taux constant  $g_A$  et que la population augmente au taux constant  $g_N$ . Ces deux taux de croissance sont exogènes et ne sont donc pas des résultats du modèle. Notre économie nationale connaît, par conséquent, une croissance du progrès technique et de la population par hypothèse. L'objectif est d'étudier les effets du progrès technique et de la croissance démographique sur l'évolution du revenu par travailleur. Le dénominateur de l'équation (14) devient donc

$$\frac{A_{t+1}N_{t+1}}{A_tN_t} = \frac{A_{t+1}}{A_t} \cdot \frac{N_{t+1}}{N_t} = (1 + g_A)(1 + g_N) \quad (15)$$

# Accumulation du stock de capital physique par travailleur effectif (III)

L'équation (13) peut donc être réécrite de la façon suivante :

$$\frac{K_{t+1}}{A_{t+1}N_{t+1}} = \frac{(1 - \delta)\frac{K_t}{A_tN_t} + s\frac{Y_t}{A_tN_t}}{1 + g} \quad (16)$$

où  $1 + g \equiv (1 + g_A)(1 + g_N)$ . On peut réécrire l'équation sous la forme suivante :

$$\frac{K_{t+1}}{A_{t+1}N_{t+1}} - \frac{K_t}{A_tN_t} = s\frac{Y_t}{A_tN_t} - \delta\frac{K_t}{A_tN_t} - g\frac{K_{t+1}}{A_tN_t} \quad (17)$$

où le côté gauche de l'équation (17) est la différence de capital par travailleur effectif entre deux périodes, c'est-à-dire l'investissement net par travailleur effectif. Tant que cet investissement net est positif, le stock de capital par travailleur effectif augmente au cours du temps.



L'équilibre de l'économie nationale à la période  $t$  est atteint lorsque les trois marchés existants sont eux-mêmes à l'équilibre. Ces trois marchés sont : le marché du travail, le marché du capital et le marché des biens et des services. La condition d'équilibre sur chacun de ces trois marchés est :

$$\text{offre} = \text{demande}$$

Tant que les offres et les demandes ne sont pas égales, les prix bougent et les quantités offertes et demandées également. Une fois que les offres et les demandes se sont égalisées, les prix ne bougent plus et les transactions peuvent avoir lieu. On dit que l'économie a atteint un équilibre au moment  $t$ .

L'équilibre atteint par l'économie à la période  $t$  peut être différent ou égal à celui atteint à la période précédente ou postérieure.

L'équilibre du marché du travail est atteint lorsque

$$N_t^o = N_t^d = N_t \quad (18)$$

où  $N_t^o$  est l'offre de travail (exprimée par les travailleurs) et  $N_t^d$  est la demande de travail (exprimée par les employeurs). On suppose que l'offre de travail est inélastique : les travailleurs acceptent de travailler pour n'importe quel salaire. Il n'y a donc pas de chômage dans ce modèle. Tous les individus sont au travail.

L'équilibre du marché du capital est atteint lorsque

$$S_t = I_t \quad (19)$$

La demande de capital (l'épargne) est égale à l'offre de capital (l'investissement). L'épargne est en fait une demande d'actifs réels (titre de propriété du capital) et l'investissement est l'offre d'actifs réels exprimée par les entreprises.

L'équilibre du marché des biens et des services est atteint lorsque

$$Y_t = C_t + I_t \quad (20)$$

La condition d'équilibre de ce marché doit, bien sûr, respecter l'identité comptable de l'économie : l'égalité entre l'offre et la demande (Equation 20) doit respecter l'égalité entre les ressources et les dépenses (Equation 6) à l'échelle de l'économie.

- Définition : L'état stationnaire est l'équilibre de long terme de l'économie. Il est atteint quand les variables du modèle (production, consommation et investissement) ne varient plus.
- Or toutes ces variables dépendent d'une seule et même variable : le capital par travailleur effectif  $\frac{K}{AN}$ . Pour obtenir un état stationnaire, il faut donc que le capital par travailleur effectif ne varie plus au cours du temps.
- La condition d'obtention d'un état stationnaire est donc

$$\frac{K_{t+1}}{A_{t+1}N_{t+1}} - \frac{K_t}{A_t N_t} = 0 \quad (21)$$

L'équation (21) stipule que l'état stationnaire est atteint lorsque **l'investissement net par travailleur effectif est nul.**



# Accumulation du capital par travailleur effectif à l'état stationnaire

Comme  $g = (1 + g_A)(1 + g_N) - 1 = g_A + g_N + g_A g_N$ , alors on peut réécrire l'équation (22) :

$$sf \left( \frac{K}{AN} \right) = (\delta + g_A + g_N + g_A g_N) \frac{K}{AN} \quad (23)$$

L'équation (22) ou (23) donne le niveau d'investissement brut requis pour maintenir le capital par travailleur effectif constant dans le temps.

L'équation (23) est la condition de l'état stationnaire. Trois remarques sur cette condition :

- Si  $g_A = 0$  alors la condition est celle du modèle standard de Solow avec un taux de croissance démographique positif.
- Si  $g_A = g_N = 0$  et  $\delta = 0$  (dépréciation effective du capital nulle), il n'existe pas d'état stationnaire (hormis celui trivial en  $\frac{K}{AN} = 0$ ). En effet, l'égalité (23) ne peut exister et donc on a nécessairement :

$$\frac{K_{t+1}}{A_{t+1}N_{t+1}} - \frac{K_t}{A_tN_t} > 0 \quad (24)$$

Le capital par travailleur effectif augmentera indéfiniment au cours du temps (voir dia 7 pour le réalisme de ce cas de figure).



- Si  $f\left(\frac{K}{AN}\right)$  est linéaire, par exemple,  $f\left(\frac{K}{AN}\right) = \frac{K}{AN}$ , alors l'état stationnaire existe pour une seule valeur de  $s$  :

$$s = \delta + g_A + g_N + g_{AGN} \quad (25)$$

Si  $s < \delta + g_A + g_N + g_{AGN}$ , le capital décroît indéfiniment (donc pas d'état stationnaire).

Si  $s > \delta + g_A + g_N + g_{AGN}$ , le capital croît indéfiniment (donc pas d'état stationnaire).

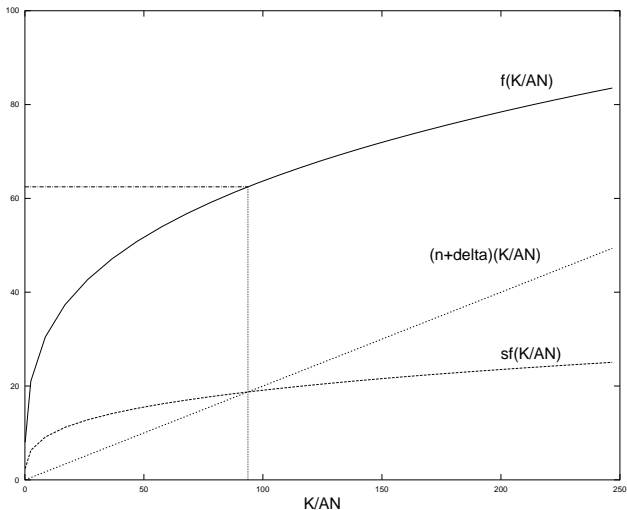
- **Taux de croissance du capital par travailleur effectif,  $\frac{K}{AN}$ , à l'état stationnaire :**

L'investissement et la production ne dépendent que du ratio  $\frac{K}{AN}$ . Le problème étudié est donc à deux dimensions : une pour la variable endogène (investissement ou production) et une pour le ratio  $\frac{K}{AN}$ . L'intersection entre la courbe d'investissement (côté gauche de l'équation 23) et la droite de dépréciation effective (côté droit de l'équation 23) donne la valeur stationnaire du ratio  $\frac{K}{AN}$ . Par conséquent, à l'état stationnaire, le taux de croissance du capital par travailleur effectif est égal à 0.

- **Taux de croissance du produit par travailleur effectif,  $\frac{Y}{AN}$ , à l'état stationnaire :**

Puisqu'elle ne dépend que du capital par travailleur effectif, la production par travailleur effectif a une croissance nulle à l'état stationnaire.

# Représentation graphique : Etat stationnaire



- **Taux de croissance du produit par travailleur  $\frac{Y}{N}$  :**

A l'état stationnaire,  $\frac{\frac{K_{t+1}}{A_{t+1}N_{t+1}}}{\frac{K_t}{A_t N_t}} = 1$  que l'on peut réécrire par :

$$\frac{\frac{K_{t+1}}{N_{t+1}}}{\frac{K_t}{N_t}} = \frac{A_{t+1}}{A_t} \text{ où } \frac{A_{t+1}}{A_t} = 1 + g_A.$$

Par conséquent, le capital par travailleur  $K/N$  (et donc le produit par travailleur  $Y/N$ ) croît au taux de croissance du progrès technique  $g_A$  à l'état stationnaire.

- **Différence entre le modèle de Solow sans progrès technique et avec progrès technique :**
  - Sans progrès technique, le taux de croissance du niveau de vie à long terme est égal à 0.
  - Avec progrès technique, le taux de croissance du niveau de vie à long terme est égal à  $g_A$ . Si  $g_A$  est positif, alors le niveau de vie progresse à long terme.

- **Taux de croissance du produit  $Y$  :**

A l'état stationnaire,  $\frac{K_{t+1}}{N_{t+1}} = 1 + g_A$  que l'on peut réécrire par :

$$\frac{K_{t+1}}{K_t} = (1 + g_A) \frac{N_{t+1}}{N_t} \text{ où } \frac{N_{t+1}}{N_t} = (1 + g_N).$$

Par conséquent, à l'état stationnaire, le taux de croissance du capital agrégé et donc de la production (c'est-à-dire de l'économie) est :

$$\frac{Y_{t+1} - Y_t}{Y_t} = g_A + g_N + g_A g_N \quad (26)$$

- **Différence entre le modèle de Solow sans progrès technique et avec progrès technique :**

- Sans progrès technique, le taux de croissance de l'économie à long terme est égal à  $g_N$ .

- Avec progrès technique, le taux de croissance de l'économie à long terme est égal à  $g_A + g_N + g_A g_N$ . Si  $g_A$  et  $g_N$  sont inférieurs à 5%, alors  $g_A g_N$  est négligeable.

# Exercice 1 : modèle de Solow sans progrès technique et sans croissance démographique

Supposons que

- Taux de croissance du progrès technique et de la population :  $g_A = g_N = 0$
- la fonction de production est concave :  $\frac{Y_t}{AN} = \left(\frac{K_t}{AN}\right)^{0,3}$
- le taux d'épargne :  $s = 0,3$
- le taux de dépréciation :  $\delta = 0,2$
- les niveaux de la technologie et de la taille de la population :  $A = N = 1$
- le stock de capital de départ :  $K_0 = 1$

Calculez pour les périodes  $t = 0$  à  $t = 30$  :

- 1) le stock de capital par travailleur
- 2) le produit par travailleur
- 3) l'investissement brut par travailleur
- 4) la dépréciation du capital par travailleur
- 5) l'investissement net par travailleur
- 6) le taux de croissance du niveau de vie
- 7) le capital et le produit par travailleur à l'état stationnaire
- 8) Représentez sur un même graphe questions 1) à 5)

## Exercice 2 : idem que précédemment mais avec fonction de production linéaire

Supposons que

- Taux de croissance du progrès technique et de la population :  $g_A = g_N = 0$
- la fonction de production est linéaire :  $\frac{Y_t}{AN} = 0,5 \left( \frac{K_t}{AN} \right)$
- le taux d'épargne :  $s = 0,3$
- le taux de dépréciation :  $\delta = 0,2$
- les niveaux de la technologie et de la taille de la population :  $A = N = 1$
- le stock de capital de départ :  $K_0 = 1$

Calculez pour les périodes  $t = 0$  à  $t = 30$  :

- 1) le stock de capital par travailleur
- 2) le produit par travailleur
- 3) l'investissement brut par travailleur
- 4) la dépréciation du capital par travailleur
- 5) l'investissement net par travailleur
- 6) le taux de croissance du niveau de vie
- 7) le capital et le produit par travailleur à l'état stationnaire
- 8) Représentez sur un même graphe questions 1) à 5)

# Exercice 3 : modèle de Solow avec progrès technique et avec croissance démographique

Supposons que

- Taux de croissance du progrès technique et de la population :  $g_A = g_N = 0,02$
- la fonction de production est concave :  $\frac{Y_t}{AN} = \left(\frac{K_t}{AN}\right)^{0,3}$
- le taux d'épargne :  $s = 0,3$
- le taux de dépréciation :  $\delta = 0,2$
- les niveaux de la technologie et de la taille de la population :  $A = N = 1$
- le stock de capital de départ :  $K_0 = 1$

Calculez pour les périodes  $t = 0$  à  $t = 30$  :

- 1) le stock de capital par travailleur
- 2) le produit par travailleur
- 3) l'investissement brut par travailleur
- 4) la dépréciation du capital par travailleur
- 5) l'investissement net par travailleur
- 6) le taux de croissance du niveau de vie
- 7) le capital et le produit par travailleur à l'état stationnaire
- 8) Représentez sur un même graphe questions 1) à 5)



## Exercice 4 : Taux de croissance des trois exercices

Représentez sur un même graphe les taux de croissance du niveau de vie des trois exercices précédents.

Exercice 1 : voir solution 1

Exercice 2 : voir solution 2

Exercice 3 : voir solution 3

Exercice 4 : voir solution 4