

**COMPLÉMENTS DE
FABRICATION
MÉCANIQUE ET F.A.O.
(LMECA2453)**

Édition 2013, entièrement refondue

DEUXIÈME PARTIE

J.F. Debongnie

7 septembre 2013

Table des matières

1	Défauts d'usinage en chariotage	5
2	Effet de la souplesse de la contrepointe	31
3	Prévision des défauts de forme par éléments finis	39
4	Détermination d'un défaut de forme	61

Chapitre 1

Prévision analytique des défauts d'usinage en chariotage

1. INTROUCTION

Le présent rapport présente une approche analytique permettant de prévoir le défaut de cylindricité dû aux efforts d'usinage apparaissant lors du chariotage d'un barreau, pour les trois montages classiques, à savoir, le montage en l'air, le montage entre pointes et le montage mixte.

Le principe de la méthode consiste à déterminer le déplacement radial de la pièce au droit de l'outil en cours d'usinage. Ce déplacement se retrouvera, changé de signe, comme défaut d'usinage.

Pour obtenir une solution analytique, il a fallu idéaliser quelque peu le problème. Nos hypothèses sont:

- a) Le barreau est assimilé à une poutre et les déformations dues à l'effort tranchant sont négligées.
- b) Tout effet de trilobe dû au mandrin éventuel est négligé.
- c) Est également négligé, tout moment de flexion parasite lié à l'entraînement par toc dans le cas du montage entre pointes.

Contrairement à la tradition [1], nous envisageons non seulement l'effet de la force passive, mais également celui de la force d'avance, qui crée un moment proportionnel au diamètre de la pièce.

Les calculs font librement appel aux résultats classiques de la résistance des matériaux, pour lesquels nous nous permettons de renvoyer le lecteur à la littérature [2].

Les résultats sont systématisés par une mise hors dimensions et l'adoption d'une *force équivalente*. Enfin, l'effet de l'approximation dite *usinage léger*, consistant à négliger le supplément de souplesse lié au fait que de la matière a été enlevée, est discuté à la fin du rapport.

2. MONTAGE EN L'AIR

2.1 - Dans le cas d'un montage en l'air, et pour un usinage se faisant dans le sens normal, c'est à dire en partant de l'extrémité du barreau, la partie usinée ne joue aucun rôle sur la flèche (fig. 1). En d'autres termes, si le diamètre initial est d_1 et le diamètre final, d_2 , le rapport

$$\beta = d_2/d_1$$

est sans effet sur le défaut.

Lorsque l'outil se trouve à une distance x du mandrin, la

force passive F_p induit une flèche

$$w_p = \frac{F_p x^3}{3EI} \quad (1)$$

où I est l'inertie calculée à partir du diamètre d_1 .

La force d'avance F_f induit, quant à elle, un moment

$$M_f = F_f \frac{d}{2} \quad (2)$$

où d est le diamètre d'application de cette force (généralement, $d_2 < d < d_1$). A ce moment correspond une flèche

$$w_f = F_f \frac{d}{2} \frac{x^2}{2EI} \quad (3)$$

Le déplacement total vaut donc, en notant $\xi = x/l$,

$$w_t = \frac{l^3}{3EI} \left[F_p \xi^3 - \frac{3}{4} F_f \frac{d}{l} \xi^2 \right] \quad (4)$$

Introduisons le rapport

$$A = \frac{3}{4} \frac{F_f d}{F_p l} \quad (5)$$

exprimant la direction de la charge. Il vient

$$w_t = \frac{F_p l^3}{3EI} (\xi^3 - A \xi^2) \quad (6)$$

Le défaut de cylindricité de mesure par

$$\text{Défaut} = \max_{\xi \in [0,1]} w_t(\xi) - \min_{\xi \in [0,1]} w_t(\xi) \quad (7)$$

Tout revient donc à étudier la variation de la fonction

$$\delta(x) = \xi^3 - A \xi^2 \quad (8)$$

Observons d'abord que cette fonction admet un minimum pour

$$\xi = \xi_{\min} = \frac{2}{3} A$$

pour autant que le dernier membre soit inférieur à l'unité, ce qui a lieu pour $A < 3/2$. Dans ces conditions,

$$\delta_{\min} = -\frac{4}{27} A^3$$

Par ailleurs, la valeur de δ à l'extrémité de la barre est

$$\delta(1) = 1 - A$$

Trois cas peuvent se présenter:

a) $\delta(1) > 0$, ce qui a lieu pour $A < 1$.

Alors,

$$\delta_{\max} = \delta(1) = 1 - A$$

$$\delta_{\min} = -\frac{4}{27} A^3$$

et

$$\text{Défaut} = \frac{F_p \ell^3}{3EI} \left(1 - A + \frac{4}{27} A^3 \right) \quad (9)$$

b) $\delta(1) < 0$ mais $\xi_{\min} < 1$, soit $1 < A < 1,5$

Dans ce cas,

$$\delta_{\max} = \delta(0) = 0$$

$$\delta_{\min} = -\frac{4}{27} A^3$$

et

$$\text{Défaut} = \frac{F_p \ell^3}{3EI} \cdot \frac{4}{27} A^3 \quad (10)$$

c) $\xi_{\min} > 1$, soit $A > 1,5$

Alors,

$$\delta_{\max} = \delta(0) = 0$$

$$\delta_{\min} = \delta(1) = 1 - A$$

et

$$\text{Défaut} = \frac{F_p \ell^3}{3EI} (A - 1) \quad (11)$$

2.2 - Notion de charge équivalente

Nous appellerons *charge équivalente* $F_{\text{éq}}$ la charge radiale fictive qui donne le même défaut que la charge réellement

appliquée. Il est facile de vérifier qu'une charge radiale $F_{\text{éq}}$ conduit au défaut

$$\text{Défaut} = \frac{F_{\text{éq}} \ell^3}{3EI}$$

Il en résulte que

$$F_{\text{éq}} = \frac{3EI}{\ell^3} \cdot \text{Défaut} \quad (12)$$

En remplaçant dans cette relation la valeur du défaut calculée par (9), (10) ou (11), on obtient les expressions suivantes de la charge équivalente:

$$a) A < 1 \dots\dots\dots F_{\text{éq}} = F_p \left(1 - A + \frac{4}{27} A^3 \right) \quad (13)$$

$$b) 1 \leq A \leq 1,5 \dots\dots\dots F_{\text{éq}} = F_p \cdot \frac{4}{27} A^3 \quad (14)$$

$$c) A > 1,5 \dots\dots\dots F_{\text{éq}} = F_p (A - 1) \quad (15)$$

On trouvera en figure 2 un diagramme de $F_{\text{éq}}/F_p$ en fonction du paramètre de direction de la charge A.

3. MONTAGE ENTRE POINTES

3.1 - Etude approchée dans le cas où $d_2 \cong d_1$

Nous présenterons d'abord une étude approchée par une méthode de Rayleigh-Ritz, dans le cas idéal où le coefficient d'enlèvement de matière

$$\beta = d_2/d_1 \quad (16)$$

est égal à l'unité. L'intérêt de cette étude préliminaire, au demeurant très simple, est de donner une indication sur la notion de charge équivalente.

L'approximation considérée se fonde sur l'hypothèse que la déformée peut toujours être convenablement approchée par une sinusoïde:

$$w(x) = A \sin \frac{\pi x}{\ell} \quad (17)$$

A étant un paramètre d'amplitude à déterminer. L'énergie de déformation vaut alors

$$U = \frac{1}{2} \int_0^{\ell} EI w''^2 dx = \frac{1}{2} \frac{\pi^4 EI}{\ell^4} \cdot A^2 \cdot \frac{\ell}{2} = \frac{1}{2} \frac{\pi^4 EI}{2\ell^3} A^2 \quad (18)$$

Lorsque l'outil se trouve à l'abscisse x_0 , il impose à la barre une force passive F_p dont l'énergie potentielle est

$$P_p = - F_p w(x_0) = - F_p A \sin \frac{\pi x_0}{\ell}$$

et une force d'avance F_f dont l'énergie potentielle vaut

$$P_f = F_f \frac{d}{2} w'(x_0) = F_f \frac{d}{2} \frac{\pi}{\ell} A \cos \frac{\pi x_0}{\ell}$$

Au total, l'énergie potentielle des charges vaut donc

$$P = P_p + P_f = - A \left(F_p \sin \frac{\pi x_0}{\ell} - \frac{\pi}{2} F_f \frac{d}{\ell} \cos \frac{\pi x_0}{\ell} \right) \quad (19)$$

On détermine la valeur de A en minimisant l'énergie potentielle totale:

$$\frac{d}{dA} (U + P) = 0$$

ce qui mène au résultat suivant:

$$A = \frac{2 \ell^3}{\pi^4 EI} \left(F_p \sin \frac{\pi x_0}{\ell} - \frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi x_0}{\ell} \right) \quad (20)$$

Au droit de l'outil, la flèche vaut donc

$$w(x_0) = A \sin \frac{\pi x_0}{\ell} = \frac{2 \ell^3}{\pi^4 EI} \left(F_p \sin^2 \frac{\pi x_0}{\ell} - \frac{\pi}{2} F_f \frac{d}{\ell} \sin \frac{\pi x_0}{\ell} \cos \frac{\pi x_0}{\ell} \right)$$

En faisant usage des formules trigonométriques

$$\sin^2 \lambda = \frac{1}{2} (1 - \cos 2\lambda)$$

$$\sin \lambda \cos \lambda = \frac{1}{2} \sin 2\lambda$$

on peut transformer le résultat précédent en

$$\begin{aligned} w(x_0) &= \frac{\ell^3}{\pi^4 EI} \left(F_p - F_p \cos \frac{2\pi x_0}{\ell} - \frac{\pi}{2} F_f \frac{d}{\ell} \sin \frac{2\pi x_0}{\ell} \right) \\ &= \frac{\ell^3}{\pi^4 EI} \left[F_p - \sqrt{F_p^2 + \left(\frac{\pi}{2} F_f \frac{d}{\ell} \right)^2} \sin \left(\frac{2\pi x_0}{\ell} - \psi \right) \right] \quad (21) \end{aligned}$$

où ψ est une phase qui ne nous intéresse pas directement. Il est clair que le défaut est donné par

$$\text{Défaut} = \max_{x_0} w(x_0) - \min_{x_0} x(x_0) = \frac{2\ell^3}{\pi^4 EI} \sqrt{F_p^2 + \left(\frac{\pi}{2} F_f \frac{d}{\ell}\right)^2} \quad (22)$$

Dans le cas où $F_f = 0$, on obtient

$$\text{Défaut} = \frac{2 F_p \ell^3}{\pi^4 EI} = \frac{F_p \ell^3}{48,7 EI}$$

ce qui constitue une bonne approximation (48,7 au lieu de 48 au dénominateur). Dans le cas général, on se ramène à

$$\text{Défaut} = \frac{F_{\text{éq}} \ell^3}{48,7 EI} \quad (23)$$

en posant

$$F_{\text{éq}} = \left[F_p^2 + \left(\frac{\pi}{2} F_f \frac{d}{\ell}\right)^2 \right]^{1/2} \quad (24)$$

On constate donc l'existence d'une charge équivalente approchée très simple. Ce résultat nous servira de guide dans l'étude exacte qui suit.

3.2 - Effet de la force passive

Revenant au problème exact, avec $\beta \neq 1$, la situation est schématisée en figure 3. Si ℓ est la longueur entre pointes, les réactions valent

$$R_1 = F_p \frac{\ell_1}{\ell} \quad , \quad R_2 = F_p \frac{\ell_2}{\ell}$$

La manière la plus simple de résoudre le problème consiste à calculer d'abord les déplacements en A et B sous l'effet des réactions, en supposant provisoirement la pièce encastree au droit de l'outil; puis à soustraire le déplacement rigide qui interpole ces déplacements. On a

$$a) \text{ Encastree en C : } w_1^* = \frac{R_1 \ell_1^3}{3EI_1} \quad w_2^* = \frac{R_2 \ell_2^3}{3EI_2}$$

$$b) \text{ Déplacement rigide : } w^{**} = w_1^* \left(1 - \frac{x}{\ell}\right) + w_2^* \frac{x}{\ell}$$

$$c) \text{ Déplacement résultant: } w = w^* + w^{**}$$

$$w_C = w_C^* - w_C^{**} = -w_1^* \frac{\ell_2}{\ell} - w_2^* \frac{\ell_1}{\ell}$$

car $w_C^* = 0$. On a donc

$$w_C = -\frac{R_1 l_1^3 l_2}{3EI_1 l} - \frac{R_2 l_2^3 l_1}{3EI_2 l} = F_P \left(\frac{l_1^3 l_2^2}{3EI_1 l^2} + \frac{l_2^3 l_1^2}{3EI_2 l^2} \right)$$

Nous poserons, pour nous ramener aux paramètres fondamentaux,

$$I_1 = I \quad ; \quad I_2 = \beta^4 I \quad (\beta = d_2/d_1) \quad (25)$$

$$l_1 = \xi l \quad ; \quad l_2 = (1 - \xi) l \quad (26)$$

Dès lors, en notant w_P le déplacement sous l'outil dû à la force passive, on obtient

$$w_P(\xi) = \frac{F_P l^3}{3EI} \cdot \xi^2 (1-\xi)^2 \cdot \left[\xi + \frac{1-\xi}{\beta^4} \right] \quad (27)$$

On vérifie aisément que pour $\beta = 1$, ce déplacement a un maximum en $\xi = 1/2$; la valeur de ce maximum est

$$w_{Pmax}|_{\beta=1} = \frac{F_P l^3}{48EI} \quad (28)$$

3.3 - Effet de la force d'avance

La force d'avance F_f induit (fig. 4) un moment concentré

$$M_f = F_f d/2 \quad (29)$$

où d représente le diamètre auquel s'applique ladite force. Les réactions correspondantes sont

$$R_1 = M_f/l \quad ; \quad R_2 = M_f/l$$

Par la même méthode que pour la force passive, on obtient

$$w_C = -\frac{R_1 l_1^3 l_2}{3EI_1 l} - \frac{R_2 l_2^3 l_1}{3EI_2 l} = \frac{M_f l_1^3 l_2}{3EI_1 l^2} - \frac{M_f l_1 l_2^3}{3EI_2 l^2}$$

En tenant compte des définitions (10) et (11),

$$w_C = \frac{M_f l^2}{3EI} \xi(1-\xi) \left[\xi^2 - \frac{(1-\xi)^2}{\beta^4} \right] \quad (30)$$

Pour $\beta = 0$, ce déplacement a un minimum et un maximum situés aux points

$$\xi = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{6}$$

La valeur absolue commune de ces extrema est

$$w_{f\max} = -w_{f\min} = \frac{F_f d \ell^2}{62,35}$$

ce qui signifie que pour $\beta = 0$ et une force passive nulle, le défaut est donné par

$$w_{f\max} - w_{f\min} = F_f \frac{d}{\ell} \frac{\ell^3}{31,18EI} = 1,5396 F_f \frac{d}{\ell} \cdot \frac{\ell^3}{48EI} \quad (31)$$

3.4 - Charge équivalente

Nous définirons une charge de référence $F_{\text{éq}}$ de la forme

$$F_{\text{éq}} = \sqrt{(AF_p)^2 + (BF_f \frac{d}{\ell})^2}$$

choisie de telle sorte que dans le cas $\beta = 1$, on ait, aussi bien pour $F_p = 0$ que pour $F_f = 0$,

$$\text{Défaut} = w_{\max} - w_{\min} = \frac{F_{\text{éq}} \ell^3}{48EI}$$

En vertu des résultats précédents, cette double condition implique

$$A = 1 \quad ; \quad B = 1,5396$$

Notre charge équivalente sera donc

$$F_{\text{éq}} = \sqrt{F_p^2 + (1,5396 F_f \frac{d}{\ell})^2} \quad (32)$$

On constate qu'elle diffère peu de l'expression (24), puisque

$$\pi/2 = 1,571\dots$$

Dans le cas général, le défaut est donné par

$$\text{Défaut} = (w_p + w_f)_{\max} - (w_p + w_f)_{\min} \quad (33)$$

Nous le rapporterons à la grandeur de référence

$$\frac{F_{\text{éq}} \ell^3}{48EI}$$

ce qui conduit à la notion de *défaut normalisé*

$$\Delta = \frac{48EI \cdot \text{Défaut}}{F_{\text{éq}} \ell^3} \quad (34)$$

Cette grandeur peut dépendre du coefficient d'enlèvement de matière β et du coefficient de direction de la charge

$$\gamma = \frac{1,5396 F_f \frac{d}{\ell}}{F_{\text{éq}}} \quad (35)$$

Pratiquement, on calcule le défaut en écrivant

$$\Delta = \max \delta - \min \delta \quad (36)$$

avec

$$\delta = \delta_p + \delta_f \quad (37)$$

et

$$\delta_p = 16 \sqrt{1 - \gamma^2} \xi^2 (1 - \xi)^2 \left[\xi + \frac{1 - \xi}{\beta^4} \right] \quad (38)$$

$$\delta_f = \frac{8\gamma}{1,5396} \xi (1 - \xi) \left[\xi^2 - \frac{(1 - \xi)^2}{\beta^4} \right] \quad (39)$$

Ces calculs ont été effectués numériquement pour γ variant de 0 à 1 et pour quelques valeurs de β . Les résultats obtenus sont consignés dans le tableau 1 et représentés en figure 5. On constate que pour $\beta = 1$, le défaut ne dépend pratiquement pas de γ , à charge équivalente donnée. Cette propriété se détériore lorsque β diminue. Néanmoins, on a toujours

$$\Delta(\beta, \gamma) \leq \Delta(\beta, 0) \quad (40)$$

et on peut écrire sans grande erreur (2% pour $\beta \geq 0,8$)

$$\Delta(\beta, 0) \cong \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{\beta^4} \right) \quad (41)$$

formule que l'on obtient aisément en supposant que la forme du déplacement ne varie pas. Une approximation un peu meilleure, toujours pour le même intervalle, est

$$\Delta(\beta, 0) \cong 0,4704 + \frac{0,5258}{\beta^4} \quad (41 \text{ bis})$$

On peut donc, pour se faire une première idée, utiliser la formule-enveloppe

$$\Delta \leq \left(0,4704 + \frac{0,5258}{\beta^4} \right) \frac{F_{\text{éq}} \ell^3}{48EI} \quad (42)$$

qui dispense de tout calcul supplémentaire si le second membre est inférieur au défaut admissible.

4. MONTAGE MIXTE

Le montage mixte, hyperstatique, est un peu plus lourd à traiter que les précédents. Le choix le plus simple de l'inconnue hyperstatique semble être celui de la réaction à la contre-pointe. La structure isostatique de référence est donc une poutre console.

4.1 - Effet de la force passive

Dans la structure isostatique de référence, on peut faire le bilan suivant, en appelant w le déplacement sous la charge, ϕ la rotation au même point, et u le déplacement à l'extrémité (voir figure 6):

$$\text{Effet de } F_p \dots \dots w_p = \frac{F_p l_1^3}{3EI_1}$$

$$\phi_p = \frac{F_p l_1^2}{2EI_1}$$

$$u_p = w_p + \phi_p l_2 = \frac{F_p}{EI_1} \left(\frac{l_1^3}{3} + \frac{l_1^2 l_2}{2} \right)$$

Nous adopterons immédiatement les notations définies en (25) et (26), ce qui donne

$$w_p = \frac{F_p l^3}{3EI} \xi^3$$

$$\phi_p = \frac{F_p l^3}{3EI} \xi^2$$

$$u_p = \frac{F_p l^3}{3EI} \xi^2 \left[\xi + \frac{3}{2} (1-\xi) \right]$$

Effet de la réaction d'extrémité R

Le tronçon non encore usiné est soumis à l'effort tranchant R et un moment de flexion Rl_2 (voir figure 7). On a donc

$$w_R = \frac{Rl_1^3}{3EI_1} + \frac{Rl_2^3}{2EI_1} = \frac{Rl^3}{3EI} \left[\frac{\xi^3}{3} + \frac{\xi^2(1-\xi)}{2} \right]$$

$$\phi_R = \frac{Rl_1^2}{2EI_1} + \frac{Rl_2 l_1}{EI_1} = \frac{Rl^2}{EI} \left[\frac{\xi^2}{2} + \xi(1-\xi) \right]$$

$$\begin{aligned} u_R &= w_R + \phi_R l_2 + \frac{Rl_2^3}{3EI_2} \\ &= \frac{Rl^3}{EI} \left[\frac{\xi^3}{3} + \frac{\xi^2(1-\xi)}{2} + \frac{\xi^2(1-\xi)}{2} + \xi(1-\xi)^2 + \frac{(1-\xi)^3}{3\beta^4} \right] \\ &= \frac{Rl^3}{3EI} \left[\xi^3 + 3\xi^2(1-\xi) + 3\xi(1-\xi)^2 + (1-\xi)^3 - (1-\xi)^3 \left(1 - \frac{1}{\beta^4}\right) \right] \\ &= \frac{Rl^3}{3EI} \left[1 - (1-\xi)^3 \left(1 - \frac{1}{\beta^4}\right) \right] \end{aligned}$$

Condition de nullité du déplacement d'extrémité

$$0 = u = u_p + u_R = \frac{F_p l^3}{3EI} \xi^2 \left[\xi + \frac{3}{2}(1-\xi) \right] + \frac{Rl^3}{3EI} \left[1 - (1-\xi)^3 \left(1 - \frac{1}{\beta^4}\right) \right]$$

ce qui donne

$$R = -F_p \frac{\xi^2 \left[\xi + \frac{3}{2}(1-\xi) \right]}{1 - (1-\xi)^3 \left(1 - \frac{1}{\beta^4}\right)} \quad (43)$$

Valeur du déplacement au droit de l'outil

$$\begin{aligned} w &= w_P + w_R = \frac{F_P l^3}{3EI} \xi^3 + \frac{Rl^3}{3EI} \left[\frac{\xi^3}{3} + \frac{\xi^2(1-\xi)}{2} \right] \\ &= \frac{F_P l^3}{3EI} \xi^3 + \frac{Rl^3}{3EI} \xi^2 \left[\xi + \frac{3}{2}(1-\xi) \right] \end{aligned}$$

soit, en tenant compte de la valeur (43) de la réaction,

$$\begin{aligned} w &= \frac{F_P l^3}{3EI} \left\{ \xi^3 - \frac{\xi^4 \left[\xi + \frac{3}{2}(1-\xi) \right]^2}{1 - (1-\xi)^3 \left(1 - \frac{1}{\beta^4}\right)} \right\} \\ &= \frac{F_P l^3}{3EI} \xi^3 \left\{ 1 - \frac{\xi \left[\xi + \frac{3}{2}(1-\xi) \right]^2}{1 - (1-\xi)^3 \left(1 - \frac{1}{\beta^4}\right)} \right\} \quad (44) \end{aligned}$$

Dans le cas particulier où $\beta = 1$, on peut écrire

$$\frac{3EIw}{F_p l^3} = \xi^3 \left[1 - \xi \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2} \xi \right)^2 \right] = \xi^3 - \frac{9}{4} \xi^4 + \frac{3}{2} \xi^5 - \frac{1}{4} \xi^6$$

La dérivée de cette expression est donnée par

$$\text{Dérivée} = 3\xi^2 - 9\xi^3 + \frac{15}{2} \xi^4 - \frac{3}{2} \xi^5 = \xi^2 \left(3 - 9\xi + \frac{15}{2} \xi^2 - \frac{3}{2} \xi^3 \right)$$

Elle s'annule en $\xi = 0$ ainsi qu'au seul zéro de la parenthèse contenu entre 0 et 1, que l'on peut obtenir numériquement. On trouve

$$\xi_0 = 0,5857864$$

En ce point, on obtient

$$\frac{3EIw(\xi_0)}{F_p l^3} = 0,0943725$$

soit

$$w(\xi_0) = \frac{F_p l^3}{101,9116EI} \quad (45)$$

4.2 - Effet de la force d'avance

Nous suivrons une démarche identique. La figure 8 montre la mise en charge, avec $M = F_f d/2$.

$$\text{Effet de } M \dots w_M = -\frac{Ml_1^2}{2EI_1} = -\frac{Ml^2}{2EI} \xi^2$$

$$\phi_M = -\frac{Ml_1}{EI_1} = -\frac{Ml}{EI} \xi$$

$$u_M = w_M + \phi_M l_2 = -\frac{Ml^2}{EI} [\xi^2 + \xi(1-\xi)] = -\frac{Ml^2}{EI} \xi \left(1 - \frac{\xi}{2} \right)$$

Effet de R : comme ci-dessus,

$$w_R = \frac{Rl^3}{EI} \left[\frac{\xi^3}{3} + \frac{\xi^2(1-\xi)}{2} \right] = \frac{Rl^3}{EI} \left(\frac{\xi^2}{2} - \frac{\xi^3}{6} \right) = \frac{Rl^3}{2EI} \xi^2 \left(1 - \frac{\xi}{3} \right)$$

$$u_R = \frac{Rl^3}{3EI} \left[1 - (1-\xi)^3 \left(1 - \frac{1}{\beta^4} \right) \right]$$

Condition de nullité du déplacement d'extrémité

$$0 = u = u_M + u_R = -\frac{Ml^2}{EI} \xi \left(1 - \frac{\xi}{2} \right) + \frac{Rl^3}{3EI} \left[1 - (1-\xi)^3 \left(1 - \frac{1}{\beta^4} \right) \right]$$

ce qui donne

$$R = \frac{M}{\ell} \frac{3\xi(1 - \frac{\xi}{2})}{1 - (1-\xi)^3(1 - \frac{1}{\beta^4})} \quad (46)$$

Valeur du déplacement au droit de l'outil

$$\begin{aligned} w = w_M + w_R &= -\frac{M\ell^2}{2EI} \xi^2 + \frac{R\ell^3}{2EI} \xi^2(1 - \frac{\xi}{3}) \\ &= \frac{M\ell^2}{2EI} \xi^2 \left[-1 + \frac{3\xi(1 - \frac{\xi}{2})(1 - \frac{\xi}{3})}{1 - (1-\xi)^3(1 - \frac{1}{\beta^4})} \right] \end{aligned} \quad (47)$$

En explicitant la valeur de M, on obtient

$$w = \frac{F_f d \ell^2}{4EI} \xi^2 \left[-1 + \frac{3\xi(1 - \frac{\xi}{2})(1 - \frac{\xi}{3})}{1 - (1-\xi)^3(1 - \frac{1}{\beta^4})} \right] \quad (48)$$

Dans le cas particulier où $\beta = 1$, on peut vérifier sans peine que ce déplacement a une variation

$$w_{\max} - w_{\min} = 1,676 F_f \frac{d}{\ell} \cdot \frac{\ell^3}{101,9116EI} \quad (49)$$

4.3 - Force équivalente

Nous définirons la force équivalente de la même façon que dans le cas du montage entre pointes, ce qui conduit à l'expression

$$F_{\text{éq}} = \sqrt{F_p^2 + (1,676 F_f \frac{d}{\ell})^2} \quad (50)$$

Le paramètre de direction de la charge sera ici

$$\gamma = \frac{1,676 F_f \frac{d}{\ell}}{F_{\text{éq}}} \quad (51)$$

Ces définitions impliquent, par (45) et (49) que pour $\beta = 1$, la variation du déplacement vaut

$$w_{\max} - w_{\min} = \frac{F_{\text{éq}} \ell^3}{101,9116EI} \quad \text{pour } \gamma = 0 \text{ et } \gamma = 1.$$

Dans le cas général, nous définirons le déplacement normalisé

$$\delta = \frac{101,9116EI}{F_{\text{éq}} \ell^3} w = \delta_p + \delta_f \quad (52)$$

avec

$$\delta_p = 33,97 \sqrt{1 - \gamma^2} \xi^3 \left\{ 1 - \frac{\xi[\xi + \frac{3}{2}(1-\xi)]^2}{1 - (1-\xi)^3(1 - \frac{1}{\beta^4})} \right\} \quad (53)$$

$$\delta_f = \frac{\gamma}{1,676} \cdot 25,48 \xi^2 \left\{ -1 + \frac{3\xi(1 - \frac{\xi}{2})(1 - \frac{\xi}{3})}{1 - (1-\xi^3)(1 - \frac{1}{\beta^4})} \right\} \quad (54)$$

Le défaut normalisé, défini par

$$\Delta = \delta_{\text{max}} - \delta_{\text{min}} = \frac{101,9116EI}{F_{\text{éq}} \ell^3} \cdot \text{Défaut} \quad (55)$$

a été calculé numériquement pour un certain nombre de valeurs de γ et β . Les résultats sont consignés dans le tableau 2 et représentés en figure 9.

On constate que pour $\beta = 1$, la charge équivalente représente assez bien le défaut, avec un léger excès. Pour de plus petites valeurs de β , le défaut normalisé est toujours minimal pour $\gamma \cong 0,8$. C'est d'ailleurs pour cette valeur que l'influence de β est la plus faible. Pour $\beta \geq 0,8$, Δ est maximum lorsque $\gamma = 0$. Les valeurs correspondantes répondent assez bien à l'expression

$$\Delta|_{\gamma=0} \cong 0,6301 + \frac{0,3764}{\beta^4} \quad (56)$$

A nouveau, on peut se faire une première idée du défaut à l'aide de la *formule enveloppe*

$$\Delta \leq \left(0,6301 + \frac{0,3764}{\beta^4} \right) \frac{F_{\text{éq}} \ell^3}{101,9116EI} \quad (57)$$

5. USINAGE LOURD ET USINAGE LÉGER

Dans les applications pratiques de calcul d'un défaut d'usinage, on peut se demander s'il est nécessaire de tenir compte de l'enlèvement de matière lors du calcul des raideurs. Pour le cas qui nous concerne, il s'agit de savoir dans quelle mesure on peut se contenter de l'approximation $\beta = 1$. Si la réponse à cette question est affirmative, nous parlerons d'*usinage léger*; Dans le cas contraire, nous dirons qu'il est *lourd*.

Tout dépend évidemment de la précision que l'on exige du calcul du défaut. Partant de l'idée qu'en métrologie courante, on exige des calibres divers qu'ils aient une précision dix fois

meilleure que le défaut à mesurer, il nous semble légitime de poser que l'usinage sera réputé léger chaque fois que le défaut calculé pour $\beta = 1$ différera du défaut effectif de moins de 10% .

a) Rappelons d'abord que dans le cas du tournage en l'air, l'enlèvement de matière ne joue aucun rôle.

b) Pour les deux autres montages, un examen rapide des figures 5 et 9 montre que la condition la plus sévère sera obtenue pour $\gamma = 0$. Dans ce cas, pour $\beta = 1$, le défaut normalisé vaut l'unité; pour les valeurs plus faibles de β , il est correctement représenté par les formules-enveloppes

$$\Delta = 0,4704 + 0,5258/\beta^4 \dots\dots\dots \text{entre pointes}$$

$$\Delta = 0,6301 + 0,3764/\beta^4 \dots\dots\dots \text{montage mixte}$$

En faisant le calcul avec le diamètre initial ($\beta = 1$), on a exactement $\Delta = 1$. La valeur effective excède la précédente de 10% lorsque $\Delta = 1,1$, soit pour

$$\beta = 0,9560 \dots\dots\dots \text{entre pointes}$$

$$\beta = 0,9460 \dots\dots\dots \text{montage mixte}$$

On peut donc affirmer que l'usinage sera certainement léger si β excède 0,95 environ, ce qui revient à dire que l'engagement a (profondeur de passe) vérifie

$$a = \frac{d_1 - d_2}{2} \leq \frac{1 - 0,95}{2} d_1 = 0,025 d_1 \quad (58)$$

Une autre manière de faire consiste à faire le calcul comme si la pièce avait uniformément le diamètre d_2 . Dans ce cas, pour $\gamma = 0$, on obtient $\Delta = 1/\beta^4$, valeur toujours approchée par excès. Elle excède la valeur effective de 10% lorsque

$$\beta = 0,9501 \dots\dots\dots \text{entre pointes}$$

$$\beta = 0,9589 \dots\dots\dots \text{montage mixte,}$$

soit à nouveau pour un engagement de l'ordre de 2,5% du diamètre.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] A. CAMPA, J. ROLLET - *Technologie professionnelle pour les mécaniciens* - Tome III, Foucher, Paris, 1971
- [2] Ch. MASSONNET, S. CESCOTTO - *Mécanique des matériaux* Sciences et Lettres, Liège, 1980

Défaut de cylindricité - montage entre pointes

Force équivalente: $F_{\text{éq}} = \text{SQRT} [F_p^{**2} + (1,5396 * F_f * d / l)^{**2}]$

Paramètre de direction des forces: $\text{GAMMA} = (1,5396 * F_f * d / l) / F_{\text{éq}}$

Paramètre d'enlèvement de matière: $\text{BETA} = d(\text{nouveau}) / d(\text{ancien})$

VALEURS DE DELTA = $48 * E * I * (w_{\text{max}} - w_{\text{min}}) / F_{\text{éq}} / l^{**3}$

BETA

GAMMA	BETA				
	8.000E-01	8.500E-01	9.000E-01	9.500E-01	1.000E+00
0.000E+00	1.757E+00	1.475E+00	1.269E+00	1.115E+00	1.000E+00
1.000E-01	1.692E+00	1.435E+00	1.246E+00	1.106E+00	1.001E+00
2.000E-01	1.635E+00	1.399E+00	1.226E+00	1.099E+00	1.004E+00
3.000E-01	1.583E+00	1.367E+00	1.210E+00	1.093E+00	1.006E+00
4.000E-01	1.537E+00	1.339E+00	1.195E+00	1.089E+00	1.009E+00
5.000E-01	1.497E+00	1.315E+00	1.183E+00	1.084E+00	1.011E+00
6.000E-01	1.465E+00	1.296E+00	1.173E+00	1.081E+00	1.011E+00
7.000E-01	1.445E+00	1.285E+00	1.167E+00	1.078E+00	1.011E+00
8.000E-01	1.448E+00	1.287E+00	1.168E+00	1.077E+00	1.009E+00
9.000E-01	1.495E+00	1.315E+00	1.182E+00	1.082E+00	1.005E+00
1.000E+00	1.738E+00	1.466E+00	1.265E+00	1.115E+00	1.000E+00

TABLEAU 1

Défaut de cylindricité - montage mixte

Force équivalente: $F_{\text{éq}} = \text{SQRT} [F_p^{**2} + (1,676 * F_f * d / l)^{**2}]$

Paramètre de direction de la force: $\text{GAMMA} = (1,676 * F_f * d / l) / F_{\text{éq}}$

Paramètre d'enlèvement de matière: $\text{BETA} = d(\text{nouveau}) / d(\text{ancien})$

VALEURS DE DELTA = $101,9116 * E * I * (w_{\text{max}} - w_{\text{min}}) / F_{\text{éq}} / l^{**3}$

GAMMA	BETA				
	8.000E-01	8.500E-01	9.000E-01	9.500E-01	1.000E+00
0.000E+00	1.543E+00	1.357E+00	1.210E+00	1.093E+00	1.000E+00
1.000E-01	1.486E+00	1.318E+00	1.185E+00	1.081E+00	9.977E-01
2.000E-01	1.421E+00	1.273E+00	1.156E+00	1.064E+00	9.921E-01
3.000E-01	1.352E+00	1.224E+00	1.124E+00	1.046E+00	9.848E-01
4.000E-01	1.280E+00	1.174E+00	1.091E+00	1.027E+00	9.766E-01
5.000E-01	1.210E+00	1.126E+00	1.061E+00	1.009E+00	9.686E-01
6.000E-01	1.147E+00	1.084E+00	1.034E+00	9.939E-01	9.616E-01
7.000E-01	1.101E+00	1.054E+00	1.015E+00	9.834E-01	9.567E-01
8.000E-01	1.085E+00	1.045E+00	1.011E+00	9.812E-01	9.557E-01
9.000E-01	1.126E+00	1.075E+00	1.032E+00	9.941E-01	9.619E-01
1.000E+00	1.396E+00	1.266E+00	1.160E+00	1.072E+00	1.000E+00

TABLEAU 2

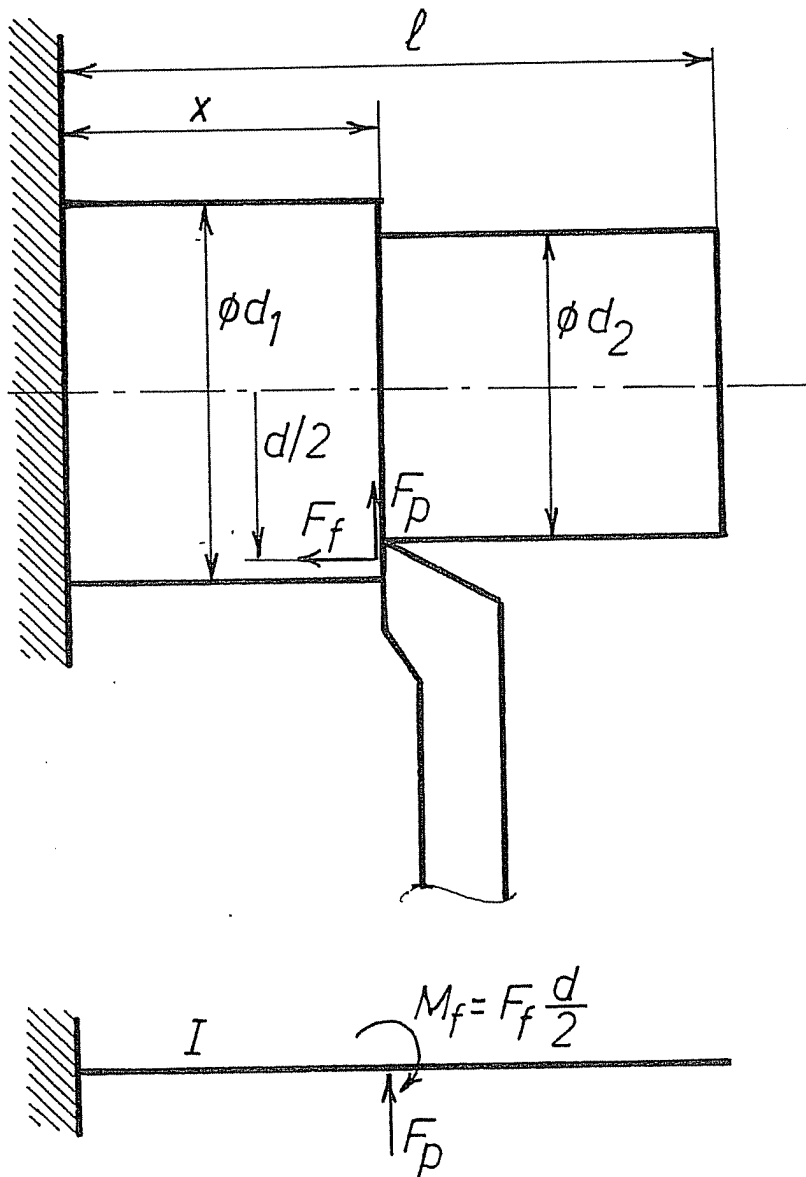
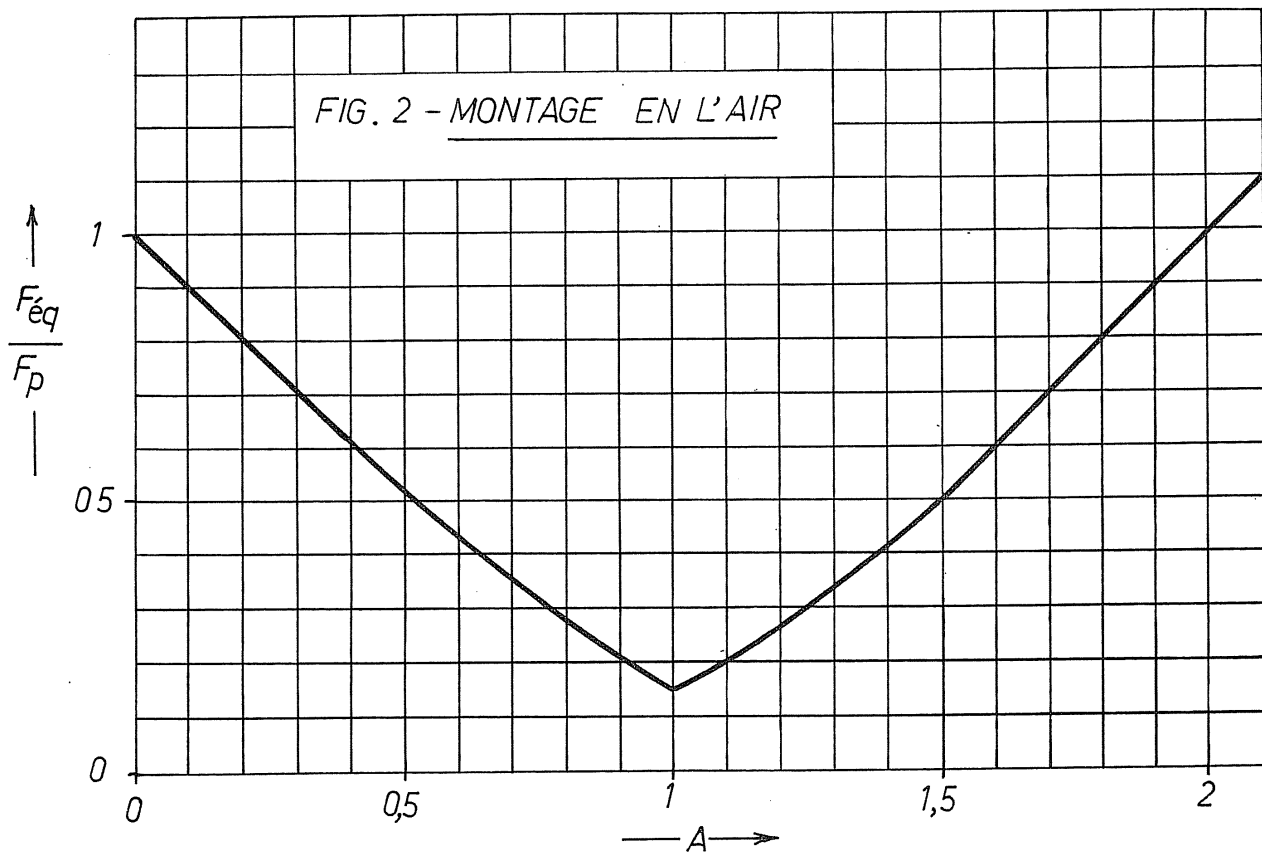


FIG. 1

FIG. 2 - MONTAGE EN L'AIR

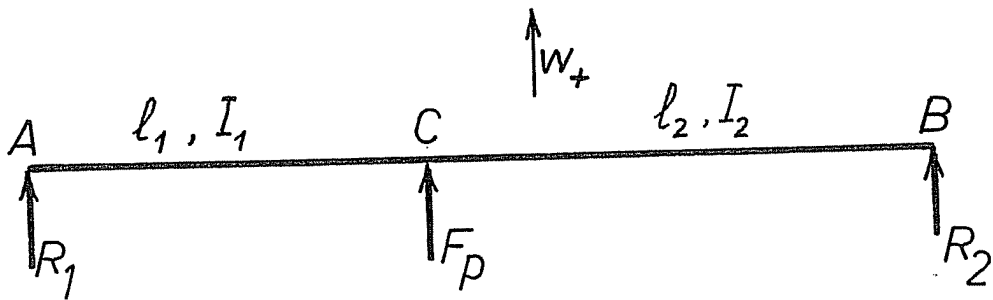


FIG. 3

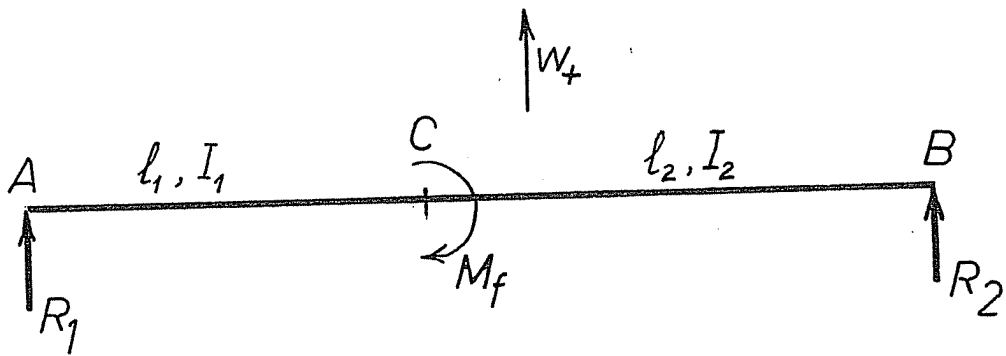


FIG. 4

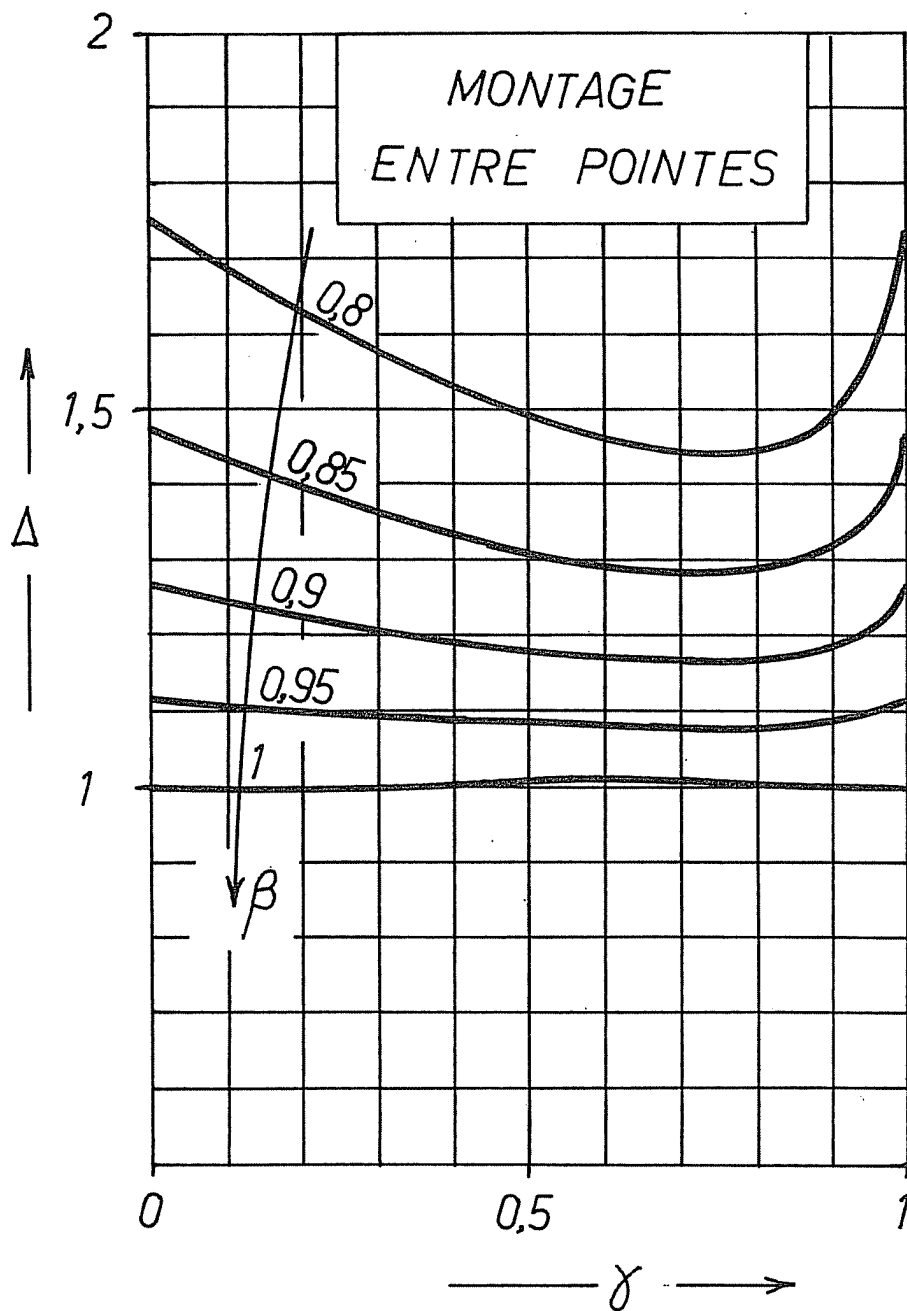


FIG. 5

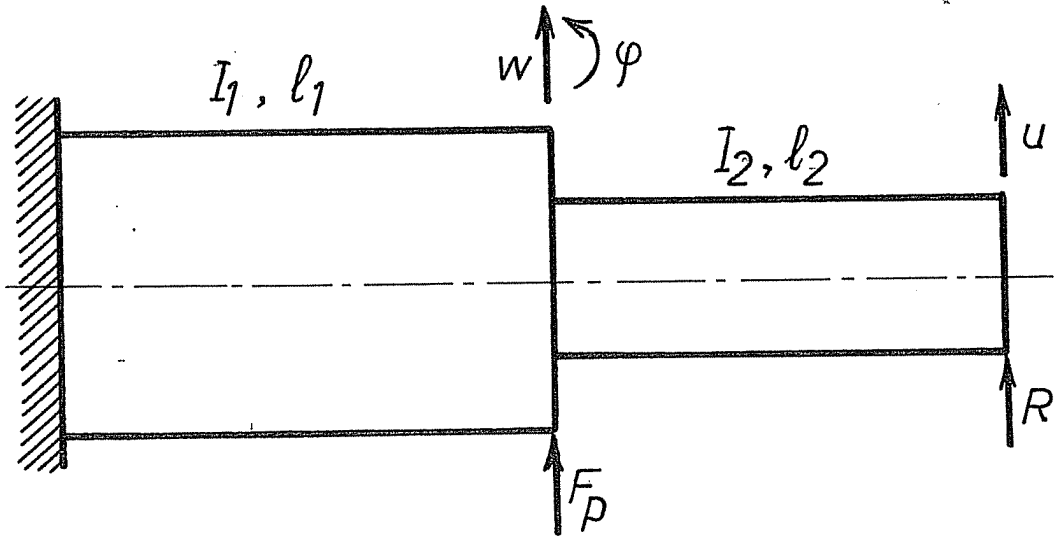


FIG. 6

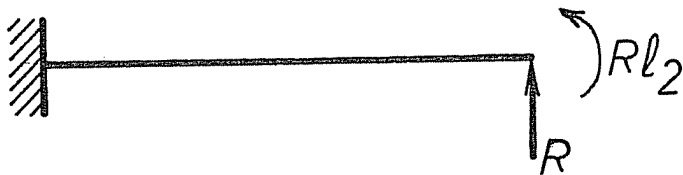


FIG. 7

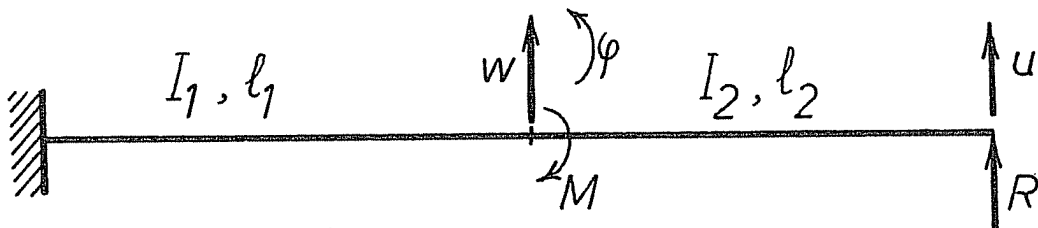


FIG. 8

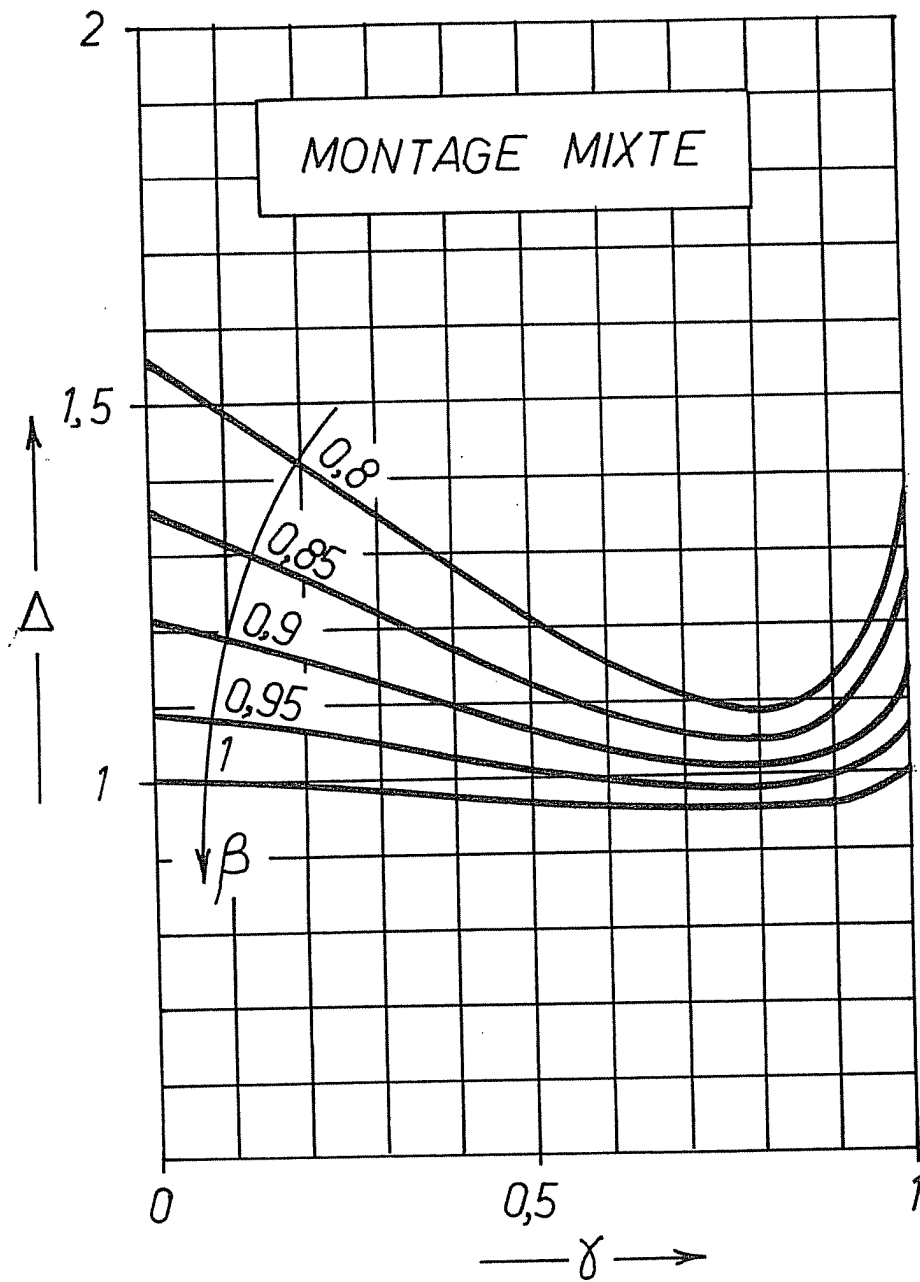


FIG. 9

Chapitre 2

Effet de la souplesse de contrepointe sur le défaut de cylindricité

INTRODUCTION

Ce rapport est né d'une volonté de comprendre des résultats de mesures de cylindricité après tournage d'une pièce cylindrique en montage mixte. En effet, ces résultats, montrant une forme où le rayon passait par un maximum et un minimum, a d'abord provoqué un certain scepticisme de notre part. Nous avons donc étudié le problème par voie analytique et, à notre grande surprise, le modèle confirme exactement ce genre de comportement.

1. HYPOTHÈSES GÉNÉRALES

La présente étude est fondée sur les hypothèses suivantes:

H1 - Le mandrin ou la pointe fixe est parfaitement rigide et réalise, selon le cas, un encastrement ou un appui simple parfait.

H2 - La contrepointe est assimilable à un ressort linéaire de raideur k .

H3 - Le défaut résulte essentiellement de la force passive, qui garde une valeur constante F . (En d'autres termes, l'effet de la force d'avance est négligé.)

H4 - La variation temporelle de raideur due à l'enlèvement de matière est négligée.

H5 - Le barreau tourné est assimilable à une poutre de Navier (effet de l'effort tranchant négligé).

2. CAS DU TOURNAGE ENTRE POINTES

Le problème consiste, comme on le sait, à déterminer la flèche en un point courant A lorsque la force est appliquée en ce point? car c'est cette flèche que l'on retrouve, changée de signe, comme défaut. L'effet de la contre-pointe est d'apporter à l'extrémité B une réaction $R = k u_B$.

Appelons l la longueur de la barre, et notons ξl la distance de la pointe fixe au point d'application de la force F . Il est évident que la réaction en B est

$$R = \xi F$$

Le déplacement en ce point est donc

$$u_B = \frac{R}{k} = \xi \frac{F}{k}$$

Le déplacement au point d'application de la charge F est alors de la forme

$$u_A = \xi u_B + u'_A$$

où u_A n'est autre que le déplacement élastique de la même barre sur deux appuis idéaux, soit

$$u'_A = \frac{Fl^3}{3EI} \xi^2 (1-\xi)^2$$

Au total, on a donc

$$\begin{aligned} u_A &= \frac{Fl^3}{3EI} \xi^2 (1-\xi)^2 + \xi^2 \frac{F}{k} \\ &= \frac{Fl^3}{3EI} \xi^2 [(1-\xi)^2 + \beta] \end{aligned}$$

avec

$$\beta = \frac{3EI}{kl^3}$$

La figure 1 donne les courbes de la variable sans dimension $\frac{3EIu_A}{Fl^3}$ pour différentes valeurs du paramètre β . On constate effectivement l'apparition de maxima et minima paradoxaux.

3. MONTAGE MIXTE

On peut traiter le cas du montage mixte en superposant l'effet de la force F sur la pièce montée en l'air à celui d'une réaction provisoirement inconnue R et en exprimant qu'à l'extrémité B, $u_B = R/k$.

a) *Effet de la force F seule*

$$u'_A = \frac{F l^3 \xi^3}{3EI}$$

$$\phi'_A = \frac{F l^2 \xi^2}{2EI}$$

$$u'_B = u'_A + \phi'_A (1-\xi) l = \frac{F l^3}{6EI} [2\xi^3 + 3\xi^2(1-\xi)] = \frac{F l^3}{6EI} \xi^2 (3-\xi)$$

b) *Effet de la réaction R seule*

$$M'' = R l (1-\xi)$$

$$\phi'' = \frac{R l^2}{EI} \left(\xi - \frac{\xi^2}{2} \right)$$

$$u''_A = \frac{R l^3}{EI} \left(\xi^2 - \frac{\xi^3}{6} \right) = \frac{R l^3}{6EI} \xi^2 (3 - \xi)$$

$$u''_B = \frac{R l^3}{3EI}$$

c) Calcul de la réaction

$$u_B = u'_B - u''_B = \frac{l^3}{6EI} \xi^2 (3 - \xi) - \frac{R l^3}{3EI} = \frac{R}{k}$$

Il en découle

$$R \left[\frac{1}{k} + \frac{l^3}{3EI} \right] = \frac{F l^3}{6EI} \xi^2 (3 - \xi)$$

soit

$$R = \beta \frac{F}{2} \xi^2 (3 - \xi)$$

avec

$$\beta = \frac{1}{1 + \frac{3EI}{kl^3}}$$

Le coefficient β est la fraction de la charge qui passe dans la contre-pointe, lorsque l'on charge sur celle-ci ($\xi = 1$). Pour $k \rightarrow \infty$, $\beta \rightarrow 1$; pour $k \rightarrow 0$, $\beta \rightarrow 0$.

d) Déplacement sous la charge

$$\begin{aligned} u_A &= u'_A - u''_A = \frac{Fl^3}{3EI} \xi^2 - \beta \frac{Fl^3}{12EI} \xi^4 (3 - \xi)^2 \\ &= \frac{Fl^3}{3EI} \xi^3 \left[1 - \frac{\beta}{4} \xi (3 - \xi)^2 \right] \end{aligned}$$

Il est équivalent d'écrire

$$\frac{3EIu_A}{Fl^3} = \xi^3 \left[1 - \frac{\beta}{4} \xi (3 - \xi)^2 \right] = f(\xi; \beta)$$

4. POINTS STATIONNAIRES DU DÉFAUT DANS LE CAS DU MONTAGE MIXTE

On a

$$f(\xi; \beta) = \xi^3 - \frac{\beta}{4} \xi^4 (9 - 6\xi + \xi^2) = \xi^3 - \frac{\beta}{4} (9\xi^4 - 6\xi^5 + \xi^6)$$

Dérivons par rapport à ξ :

$$\frac{\partial f}{\partial \xi} = 3\xi^2 - \frac{\beta}{4} (36\xi^3 - 30\xi^4 + 6\xi^5)$$

$$= 3 \xi^2 \left[1 - \frac{\beta}{2} \xi (6 - 5 \xi + \xi^2) \right]$$

Les points stationnaires sont donc:

- $\xi = 0$ (deux fois)
- d'autres racines $\xi_0 \neq 0$.

En un ξ_0 donné, on a la relation

$$\beta = \frac{2}{\xi_0 (\xi_0 - 2) (\xi_0 - 3)},$$

ce qui revient à dire

$$\frac{k l^3}{3EI} = \frac{1}{\frac{1}{\beta} - 1} = \frac{1}{\frac{\xi_0 (\xi_0 - 2) (\xi_0 - 3)}{2} - 1},$$

ce qui permet en principe d'induire la raideur de la contre-pointe de la forme du défaut de cylindricité. Cependant, cette relation ne fournit $k > 0$ que pour $\xi_0 > 0,5858$. On retrouve alors la même valeur de $k l^3 / (3EI)$ pour deux valeurs différentes de ξ_0 , correspondant à un maximum du défaut pour la plus petite, à un minimum pour la plus grande. La plus petite valeur possible de k donnant lieu à des points stationnaires non nuls correspond à

$$0 = \frac{d}{d\xi_0} (\xi_0^3 - 5 \xi_0^2 + 6 \xi_0) = 3 \xi_0^2 - 10 \xi_0 + 6,$$

ce qui donne

$$\xi_0 = \frac{5 - \sqrt{25-18}}{3} = 0,7847$$

A cette valeur correspond

$$\frac{k l^3}{3EI} = 17,76.$$

Pour les raideurs k plus faibles, il n'existe pas d'extremum.

La figure 2 donne les courbes du défaut pour différentes valeurs de k supérieures à $17,76 EI$. Elles illustrent bien l'oscillation paradoxale du défaut près de la contre-pointe.

fig.1 - Entre pointes

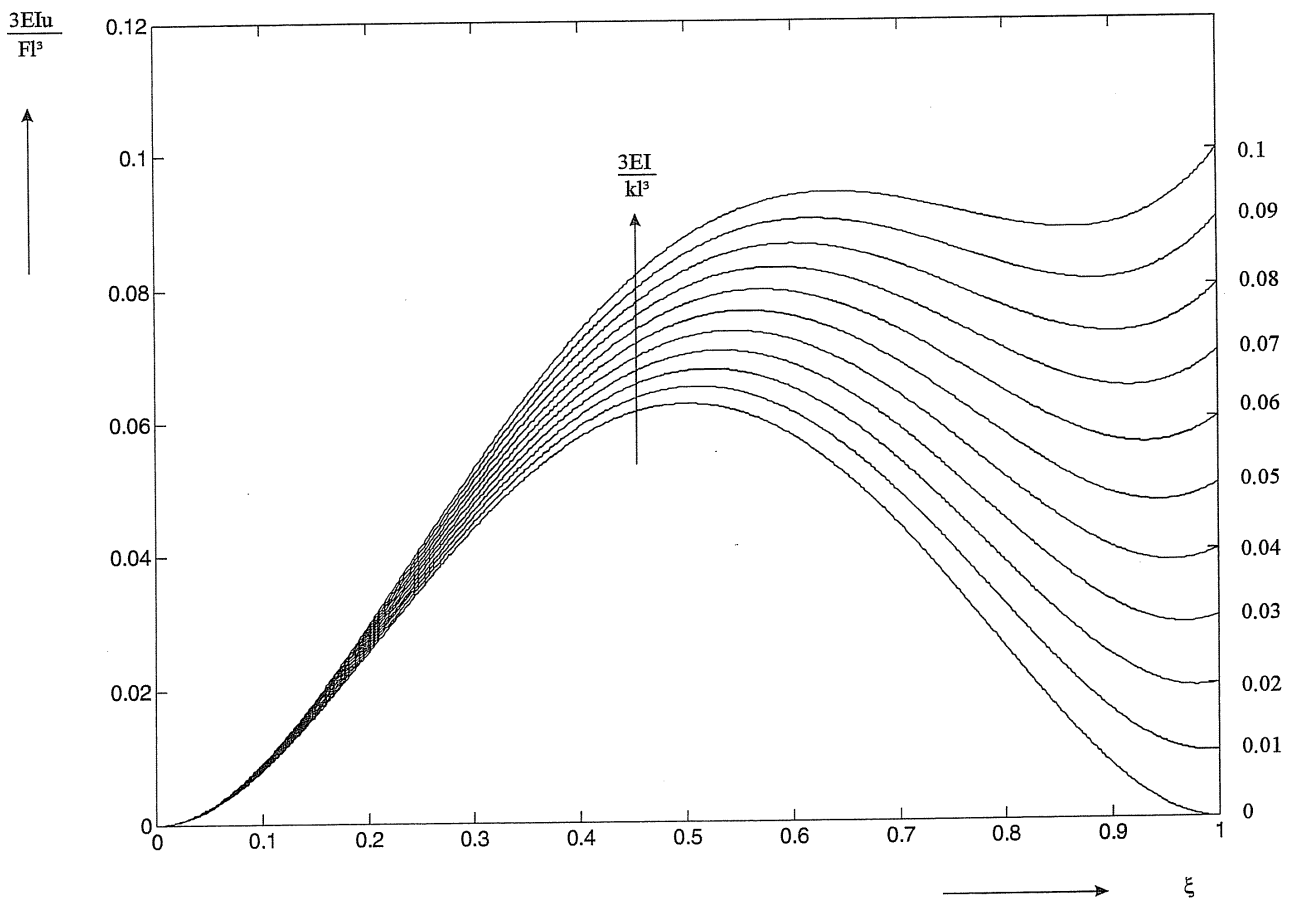
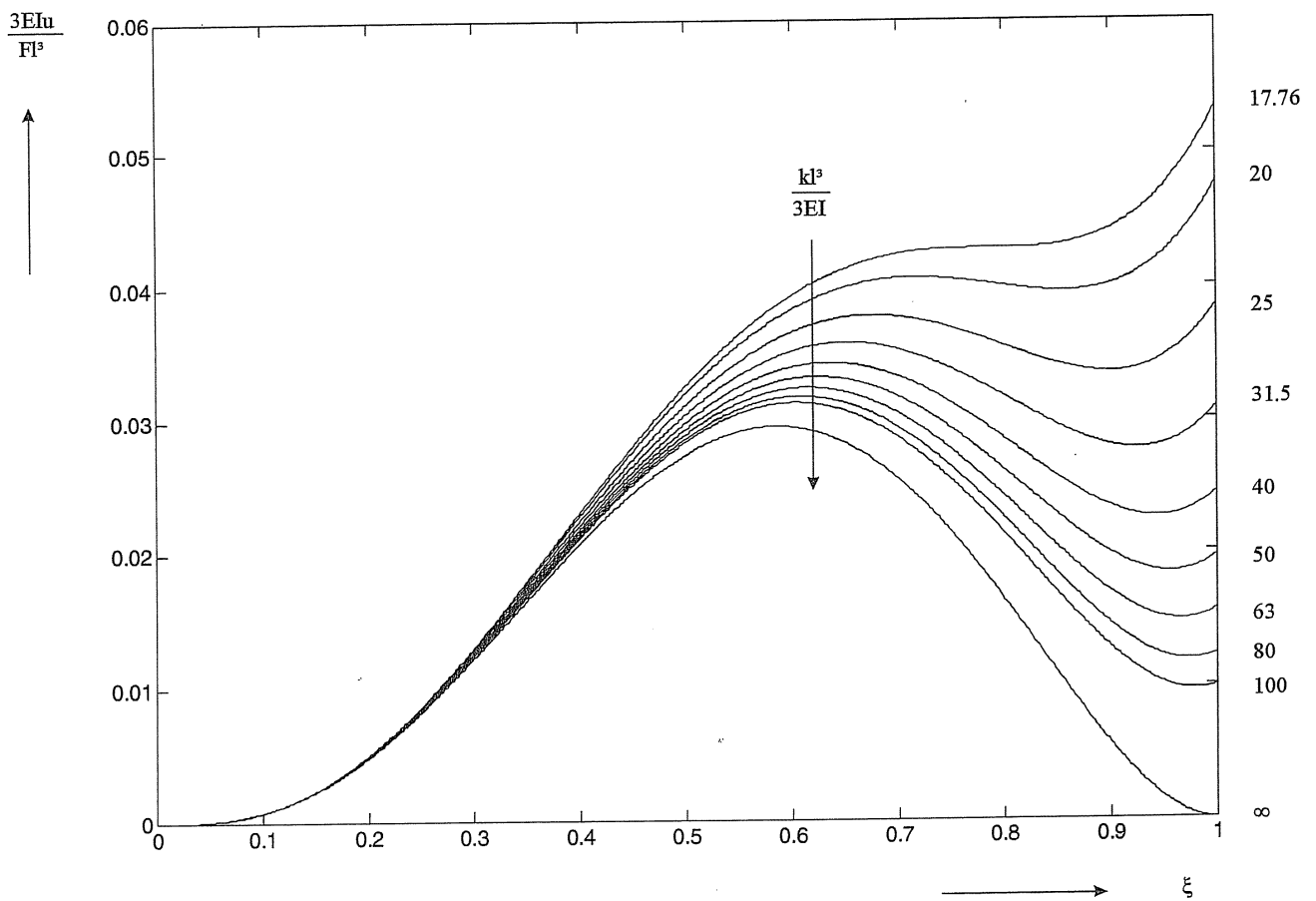


fig. 2 - MONTAGE MIXTE



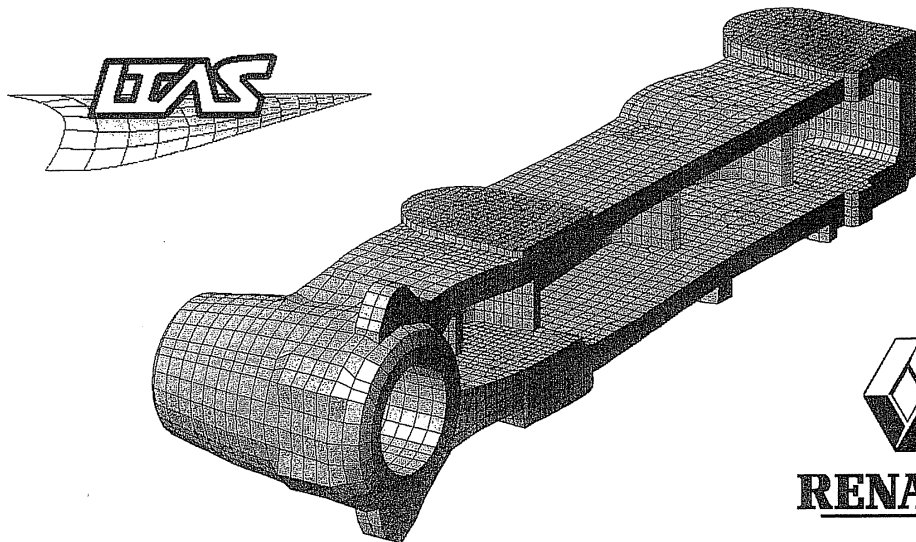
Chapitre 3

Prévision des défauts de forme par éléments finis

Face milling and turning simulation with the finite element method

Luc Masset, Jean-François Debongnie - Manufacturing laboratory

Pierre Beckers - Aerospace Department (LTAS)



Introduction

Simulation tool developed for Renault

Computation of the form error resulting from the workpiece flexibility

Application to face milling and turning processes

Workpiece deformations computed with the FEM

Forces applied by the tool and the fixing devices



Limitations

Only static workpiece deformations (linear elastic)

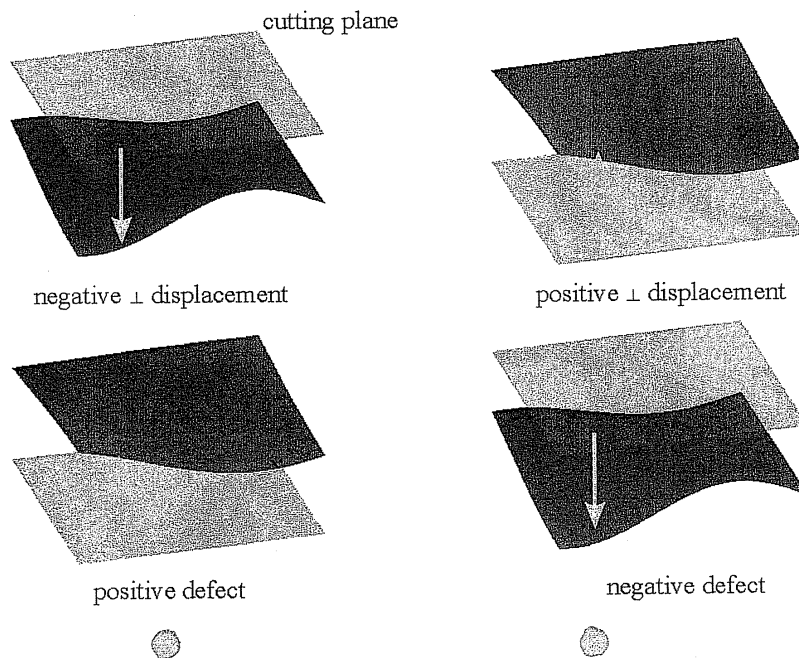
Small thermal deformation and dynamic response

Tool and machine-tool perfectly rigid

Mill inserts identical and equally spaced

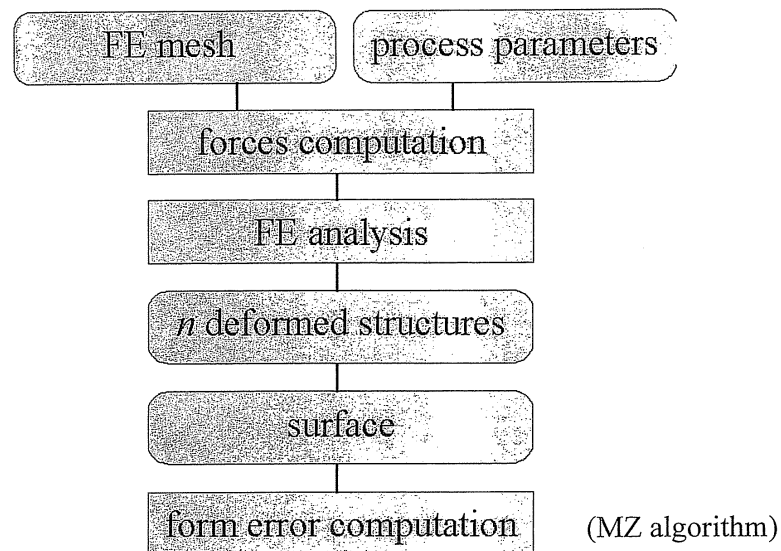
How the form error appears

The defect of a surface point depends on its displacement when the tool cuts it



Method description [3] [4]

Compute the error of each of the n nodes of a FE mesh surface



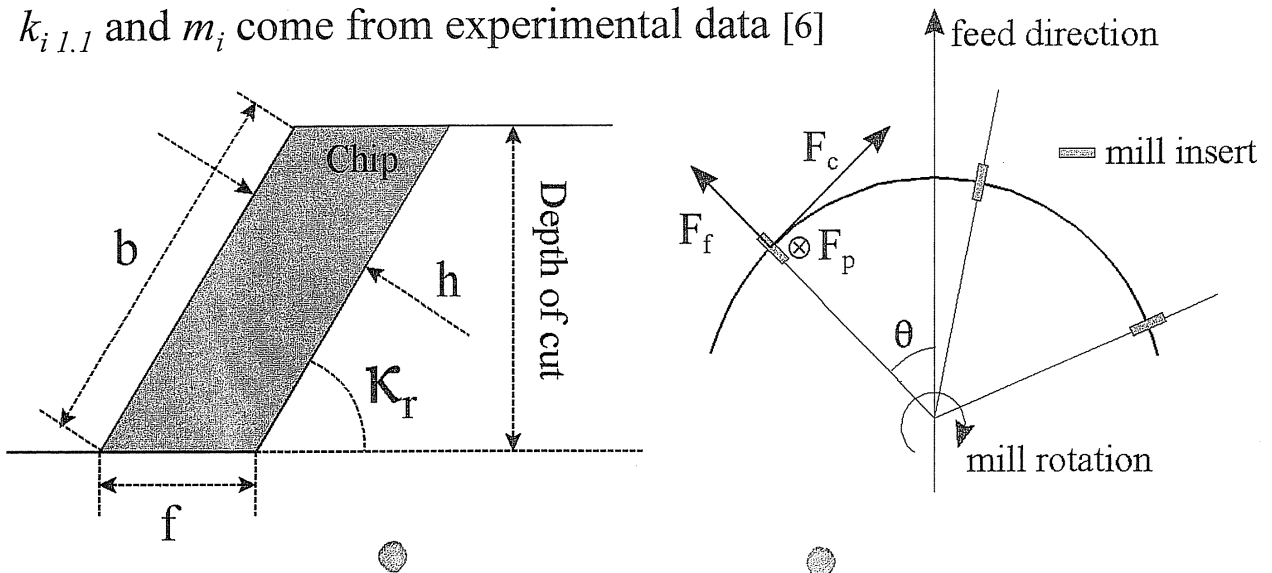
Forces computation

Kienzle force model

$$F_i = bhk_i \quad \{i = c, f, p\}$$

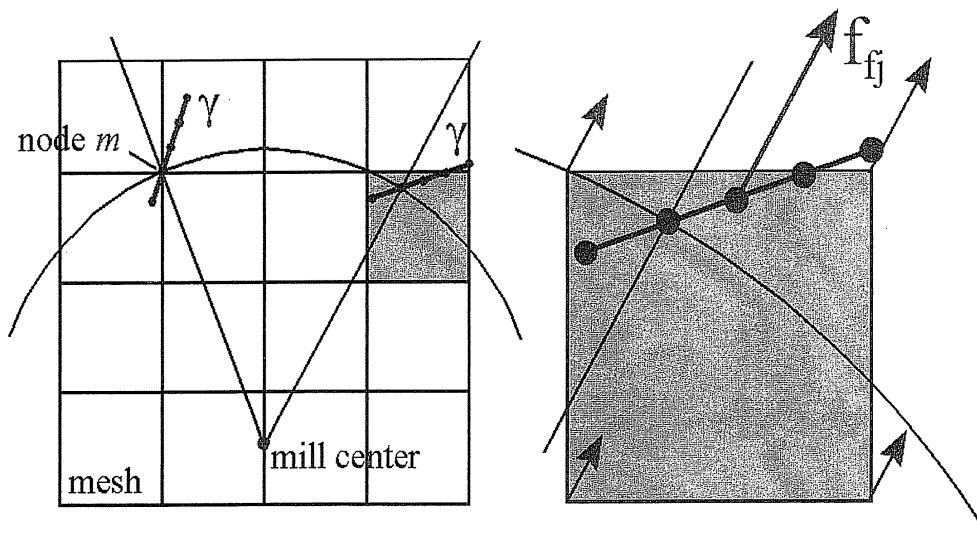
$$k_i = k_{i1.1} h^{-m_i}$$

$k_{i1.1}$ and m_i come from experimental data [6]



Applying cutting forces on the mesh

Load case corresponding to defect of node m



$$F_i = \sum_j^N f_{ij} \quad \{i = c, f, p\} \quad \text{with} \quad f_{ij} = \alpha_j F_i \quad \text{and} \quad \sum_j^N \alpha_j = 1$$

FE Analysis - Direct method

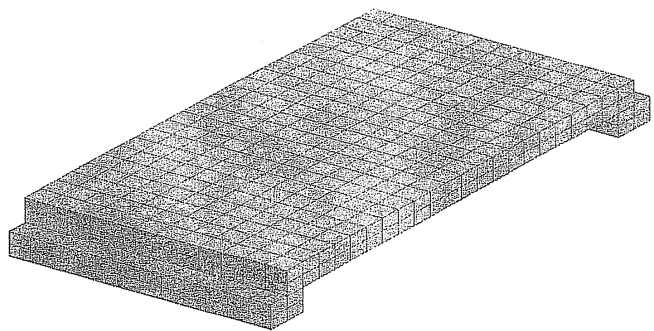
FE code: Samcef V8.1

Pentium III 770 / 512Mb

Two severe drawbacks:

- significant amount of stored data (n load cases)
- high computation cost

DOF	11295
CPU (s)	51196
Disk (Mb)	3428



FE Analysis - Superelement method

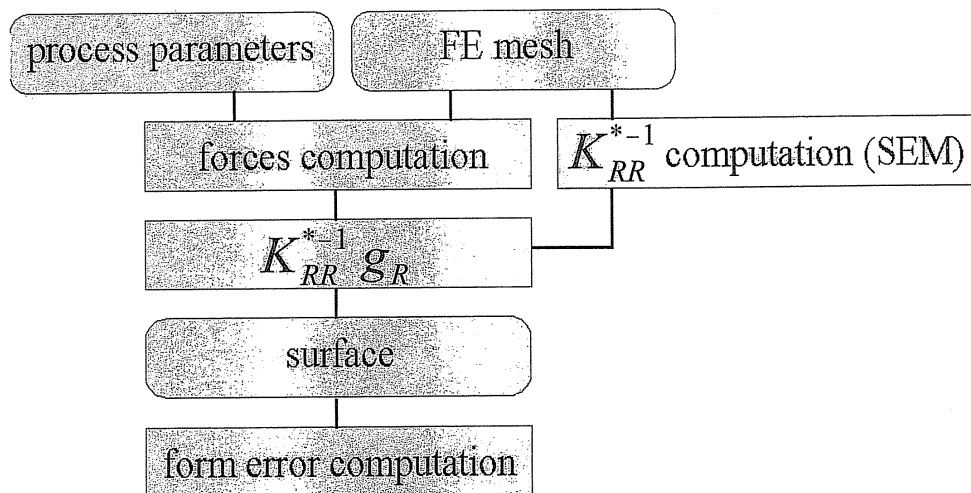
$$\begin{array}{l} n_R \text{ retained DOF } q_R \\ n_C \text{ condensed DOF } q_C \end{array} \quad \begin{bmatrix} K_{RR} & K_{RC} \\ K_{CR} & K_{CC} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_R \\ q_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_R \\ g_C \end{bmatrix}$$

$$\left[K_{RR} - K_{RC} K_{CC}^{-1} K_{CR} \right] q_R = g_R \Leftrightarrow K_{RR}^* q_R = g_R$$

Step 1 : SE creation Step 2 : K_{RR}^* inversion

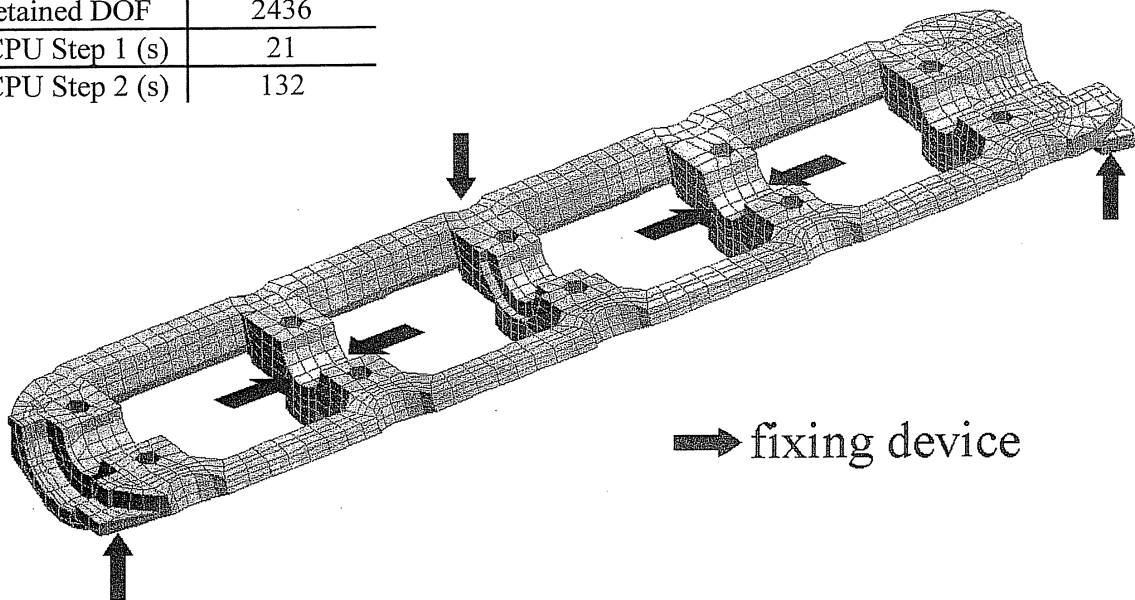
	CPU	Disk
ratio [direct method / SE method]	30 to 50	3 to 5

Method description (SE)



Camshaft Cover

DOF	36639
retained DOF	2436
CPU Step 1 (s)	21
CPU Step 2 (s)	132



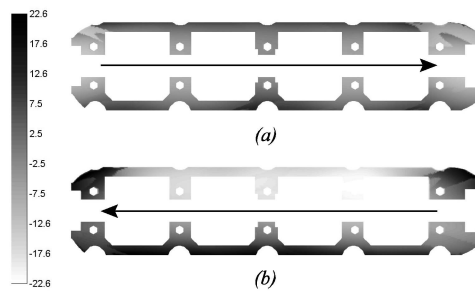
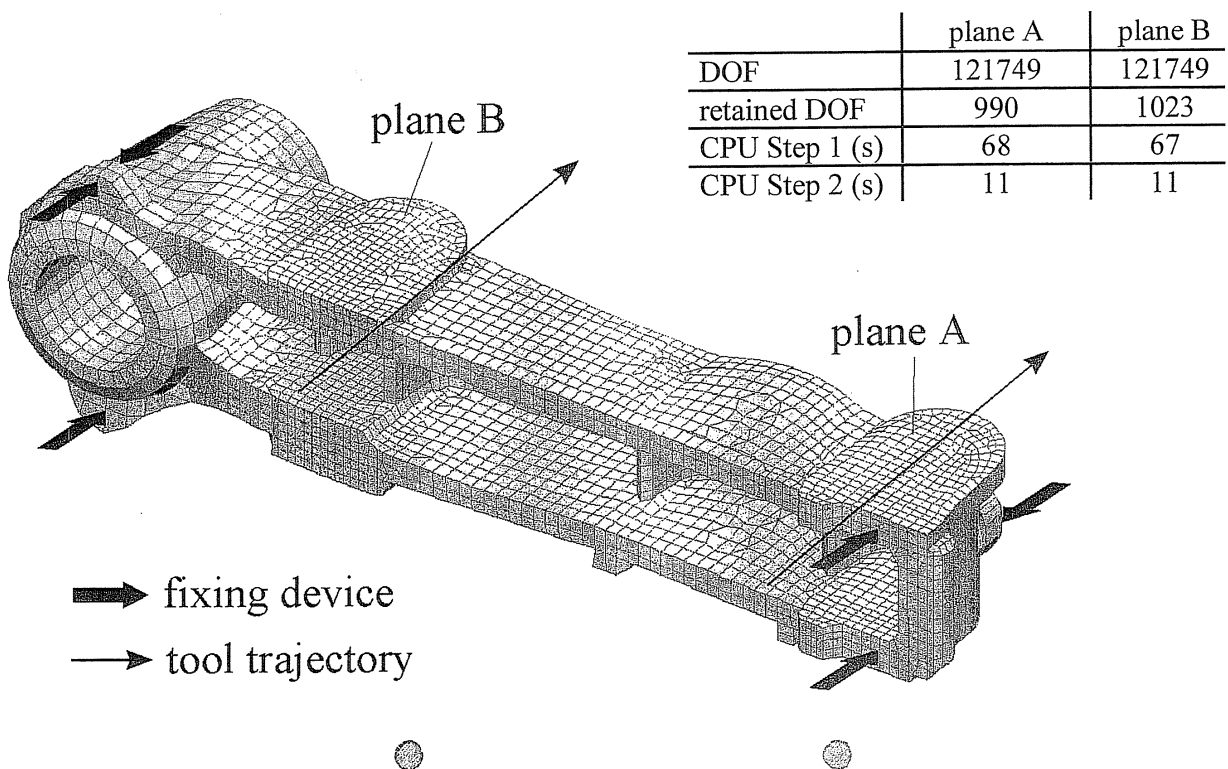


Figure 3 : Flatness errors obtained with trajectories (a) and (b) are equal to 27.4 μm and 45.2 μm respectively

Suspension support



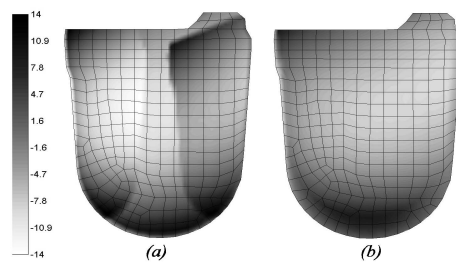
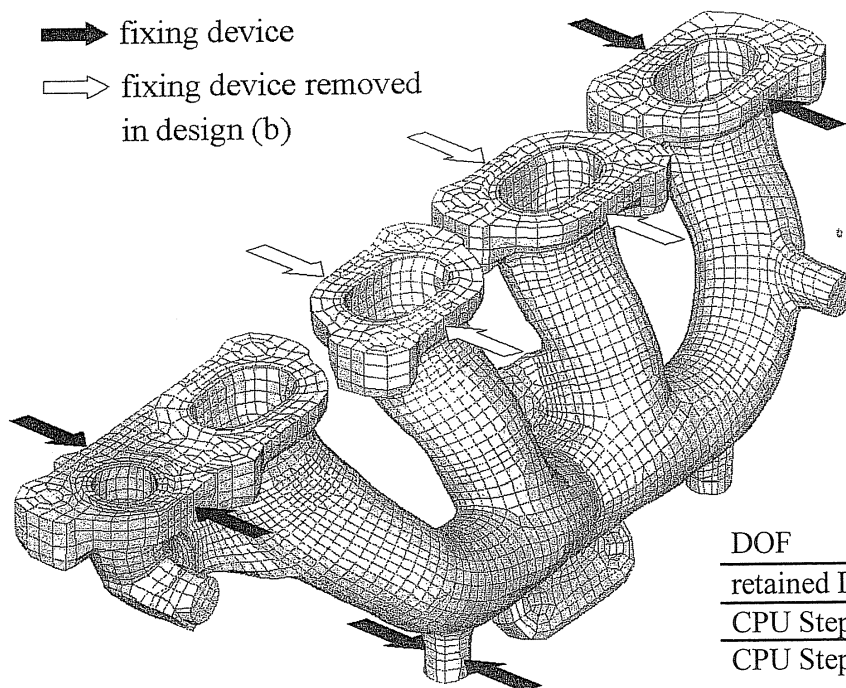


Figure 5 :Flatness errors for plane A with 100-mm mill (a) and 140-mm mill (b) are equal to 27.9 μm and 18 μm respectively

Exhaust manifold



DOF	184944
retained DOF	3087
CPU Step 1 (s)	147
CPU Step 2 (s)	250

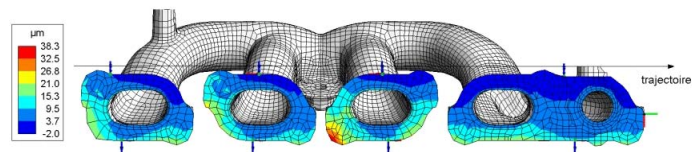


Figure 204 : défaut obtenu pour une trajectoire décalée à gauche

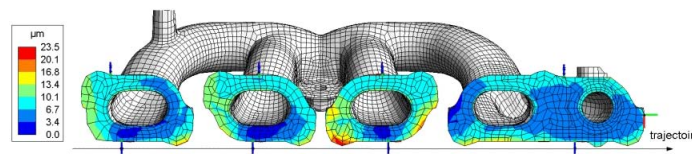
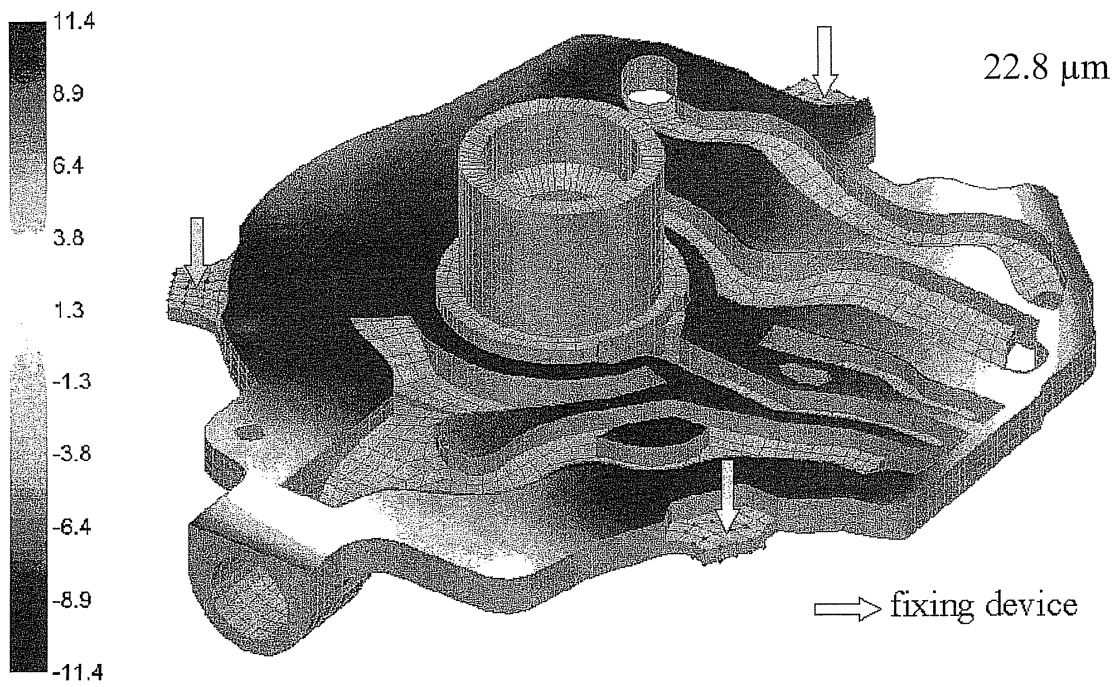


Figure 205 : défaut obtenu pour une trajectoire décalée à droite

Gear box cover

DOF	112365
retained DOF	5328
CPU Step 1 (s)	211
CPU Step 2 (s)	1806



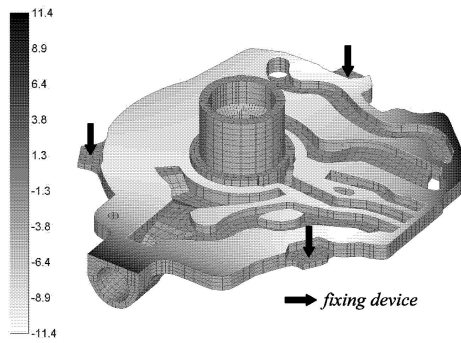


Figure 8 : Gear box cover model and flatness error obtained

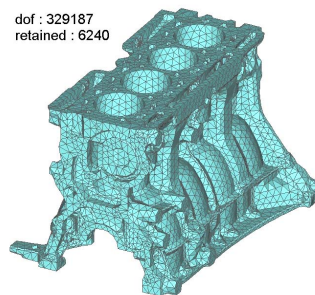
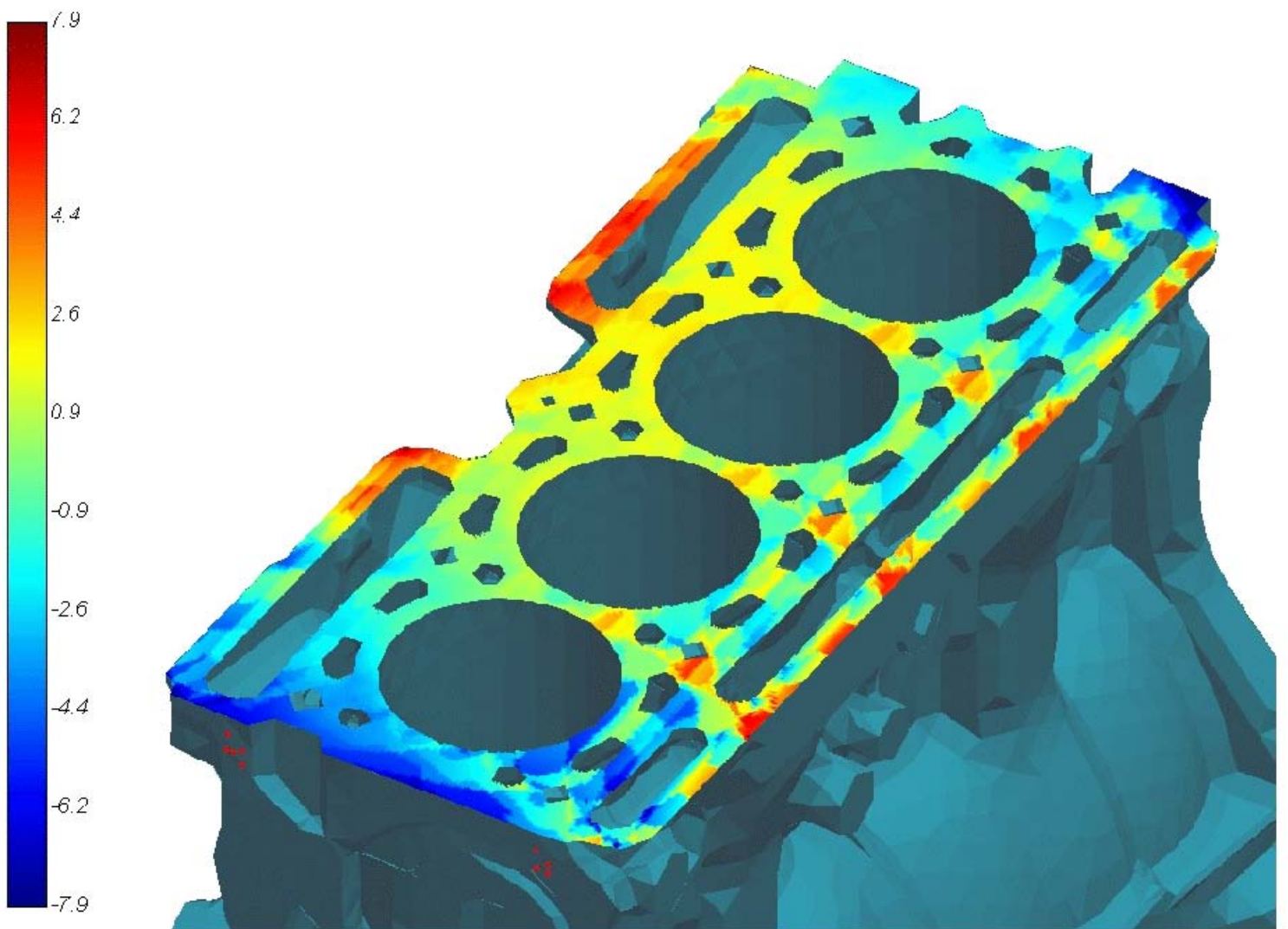


Figure 9: 4-cylinder block (D4 model)



Conclusions

- Very flexible and cost effective tool for industrial applications
- Easy way to improve a process set-up without making actual tests
- Introduction of other effects (tool deformation)
- Application to other cutting processes (broaching)
- Optimization methods



Chapitre 4

Détermination d'un défaut de forme à partir de mesures tridimensionnelles

1. Formulation abstraite du problème de détermination des défauts de forme

1.1 – Fonction d'encadrement

Dans un souci de synthèse et de généralité, nous croyons utile de donner une forme *abstraite* au problème de détermination des défauts de forme.

Les mesures tridimensionnelles fournissent un ensemble compact K , fini, de points de mesure. Les tolérances de forme s'expriment toujours par un *encadrement* : deux droites extrêmes dans le cas de la rectitude, deux plans extrêmes en planéité, deux cercles concentriques extrêmes en circularité et deux cylindres de même axe en cylindricité. Mathématiquement, on peut parler d'une *fonction d'encadrement* (continue) $f(\mathbf{x}; \lambda)$ dépendant des coordonnées \mathbf{x} et d'un jeu de paramètres λ . La valeur de cette fonction en un point \mathbf{x}_i donné, $f_i(\lambda) = f(\mathbf{x}_i, \lambda)$, sera appelée dans ce qui suit *hauteur* du point \mathbf{x}_i (pour la valeur λ du jeu de paramètres).

a) En *rectitude*, nous écrivons

$$f(x, y; \varphi) = x \cos \varphi + y \sin \varphi$$

Le paramètre φ donne la direction de la normale \mathbf{n} à la droite,

$$\mathbf{n} = (\cos \varphi, \sin \varphi)$$

b) En *planéité*, nous supposerons le plan approximativement horizontal. On penserait *a priori* à définir la direction de la normale au plan à l'aide des coordonnées sphériques classiques, à savoir,

$$\mathbf{n} = (\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta)$$

mais ce choix est malheureux, car la direction idéale de la normale, c'est-à-dire la verticale, correspond précisément au pôle, où la longitude θ est indéterminée. Il est préférable de placer le pôle sur l'axe des x , par exemple, ce qui donne

$$\mathbf{n} = (\cos \theta, \sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi)$$

La verticale est alors sur l'équateur de la sphère, en $\theta = \frac{\pi}{2}$, $\varphi = \frac{\pi}{2}$. Dans le voisinage de ce point, les coordonnées sphériques sont quasiment cartésiennes, puisque

$$x = \cos \theta = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) \approx -\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$y = \sin \theta \cos \varphi = \sin \theta \sin\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) \approx \sin \frac{\pi}{2} \sin\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) \approx -\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right)$$

La fonction d'encadrement sera alors

$$f(x, y, z; \theta, \varphi) = x \cos \theta + y \sin \theta \cos \varphi + z \sin \theta \sin \varphi$$

c) En *circularité*, soient a et b les coordonnées d'un centre. La fonction d'encadrement d'un point (x, y) est tout simplement le rayon de ce point par rapport au centre, soit

$$f(x, y; a, b) = \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2}$$

d) Pour la *cylindricité*, on commencera par définir un axe de la forme

$$\mathbf{n} = (\cos \theta, \sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi)$$

comme ci-dessus. Nous admettrons en effet que l'axe du cylindre est à peu de chose près l'axe des z . On projettera alors le point (x, y, z) sur les deux axes perpendiculaires

$$\mathbf{e}_1 = -\frac{\partial \mathbf{n}}{\partial \theta} = (\sin \theta, -\cos \theta \cos \varphi, -\cos \theta \sin \varphi)$$

$$\mathbf{e}_2 = -\frac{\frac{\partial \mathbf{n}}{\partial \varphi}}{\left\| \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial \varphi} \right\|} = (0, \sin \varphi, -\cos \varphi)$$

ce qui donne

$$x_p = x \sin \theta - y \cos \theta \cos \varphi - z \cos \theta \sin \varphi$$

$$y_p = y \sin \varphi - z \cos \varphi$$

Alors, si (a, b) est la position d'un centre dans le plan perpendiculaire à l'axe, on a

$$f(x, y, z; \theta, \varphi, a, b) = \sqrt{(x_p - a)^2 + (y_p - b)^2}$$

1.2 – Valeur d'encadrement du compact K ; défaut du compact K

Nous appellerons *valeur d'encadrement* du compact K , pour une valeur des paramètres λ , le nombre

$$enc(K, \lambda) = \max_{\mathbf{x} \in K} f(\mathbf{x}, \lambda) - \min_{\mathbf{x} \in K} f(\mathbf{x}, \lambda) \quad (1)$$

Cela étant, le *défaut* du compact K est donné par

$$def(K) = \min_{\lambda} enc(K, \lambda) \quad (2)$$

L'existence de ce minimum est évidente dans le cas où les paramètres varient sur un ensemble compact (rectitude, planéité). Dans les cas de la circularité et de la cylindricité, a et b peuvent varier de $-\infty$ à $+\infty$, si bien qu'*a priori*, on peut seulement parler de la meilleure borne $\inf_{\lambda} enc(K, \lambda)$. Le fait que cette borne est atteinte demande alors une démonstration spéciale,

dont le principe général consiste à montrer que la borne inférieure hors d'une boule donnée est supérieure à la borne cherchée, ce qui limite la recherche à un compact et, *ipso facto*, garantit l'existence d'un minimum.

1.3 – Unicité

L'*unicité* du minimum n'est malheureusement pas toujours garantie. Ainsi, en rectitude et planéité, il est assez aisé de trouver des cas où le même minimum est atteint pour deux valeurs différentes du jeu de paramètres. Cependant, il s'agit toujours de cas très particuliers, impliquant certaines symétries que l'on ne rencontre guère en pratique.

1.4 – Formulation en termes d'écart

Le problème de la détermination des défauts admet une seconde formulation équivalente. Introduisons une variable supplémentaire et définissons l'*écart* par

$$e(\mathbf{x}; \lambda, \rho) = f(\mathbf{x}, \lambda) - \rho \quad (3)$$

et appelons *écart maximum sur K* la grandeur

$$e_M(K; \lambda, \rho) = \max_{\mathbf{x} \in K} |e(\mathbf{x}; \lambda, \rho)| \quad (4)$$

Montrons que

$$enc(K; \lambda) = 2 \min_{\rho} e_M(K; \lambda, \rho) \quad (5)$$

En effet, $e_M(K; \lambda, \rho)$ est le maximum de la valeur absolue de l'écart sur K . C'est donc soit le maximum de l'écart, soit son minimum changé de signe :

$$e_M(K; \lambda, \rho) = \max \left[\max_{\mathbf{x} \in K} e(\mathbf{x}; \lambda, \rho), - \min_{\mathbf{x} \in K} e(\mathbf{x}; \lambda, \rho) \right]$$

Tenant compte de la formule évidente

$$\max(A, B) = \frac{1}{2}(A + B) + \frac{1}{2}|A - B|$$

on a encore

$$\begin{aligned} e_M(K; \lambda, \rho) &= \frac{1}{2} \left[\left(\max_{\mathbf{x} \in K} f(\mathbf{x}; \lambda) - \rho \right) - \left(\min_{\mathbf{x} \in K} f(\mathbf{x}; \lambda) - \rho \right) \right] \\ &\quad + \frac{1}{2} \left| \left(\max_{\mathbf{x} \in K} f(\mathbf{x}; \lambda) - \rho \right) + \left(\min_{\mathbf{x} \in K} f(\mathbf{x}; \lambda) - \rho \right) \right| \\ &= \frac{1}{2} \left[\max_{\mathbf{x} \in K} f(\mathbf{x}; \lambda) - \min_{\mathbf{x} \in K} f(\mathbf{x}; \lambda) \right] \\ &\quad + \frac{1}{2} \left| \max_{\mathbf{x} \in K} f(\mathbf{x}; \lambda) + \min_{\mathbf{x} \in K} f(\mathbf{x}; \lambda) - 2\rho \right| \end{aligned}$$

Le deuxième terme de cette expression est le seul à encore contenir ρ . Il est visiblement toujours non négatif, et atteint son minimum, zéro en l'occurrence, pour

$$\rho = \frac{1}{2} \left[\max_{\mathbf{x} \in K} f(\mathbf{x}; \lambda) + \min_{\mathbf{x} \in K} f(\mathbf{x}; \lambda) \right] \quad (6)$$

La valeur minimale de l'écart est donc

$$\min_{\rho} e_M(K; \lambda, \rho) = \frac{1}{2} \left[\max_{\mathbf{x} \in K} f(\mathbf{x}; \lambda) - \min_{\mathbf{x} \in K} f(\mathbf{x}; \lambda) \right] = \frac{1}{2} \text{enc}(K; \lambda)$$

comme annoncé.

Cette propriété permet de donner une nouvelle définition du défaut :

$$\text{def}(K) = 2 \min_{\lambda, \rho} e_M(K; \lambda, \rho) \quad (7)$$

Sous cette forme, la détermination du défaut apparaît comme la recherche de la surface d'équation

$$f(\mathbf{x}; \lambda) = \rho$$

dont l'écart maximum à un point de K est minimum. C'est un problème de *meilleure approximation uniforme*, très voisin de l'approximation des fonctions au sens de Tchébycheff [1, 2].

2. – Calcul approché des défauts à partir des moindres carrés

L'approximation uniforme étant difficile à traiter, de nombreux praticiens se contentent de l'approche grossière consistant à minimiser

$$\|\mathbf{e}\|_2 = \left(\sum_i |e_i|^2 \right)^{1/2} \quad \text{où } e_i = e(\mathbf{x}_i; \lambda, \rho) \quad (8)$$

ce qui permet de déterminer une valeur (λ_2, ρ_2) des paramètres, à partir de laquelle on peut obtenir une *idée* du défaut, à savoir,

$$def(K) \approx 2 \max_i |e(\mathbf{x}_i, \lambda_2, \rho_2)| \quad (9)$$

Cette valeur est évidemment *en excès*, puisque l'on n'a pas cherché le minimum défini en (7). L'expérience montre que, dans certains cas, cet excès peut être important et surtout, que les paramètres λ peuvent être grandement en erreur.

3. Méthodes géométriques de calcul des défauts

La théorie des défauts de rectitude, planéité et circularité nous a permis, dans les chapitres précédents, de définir des méthodes *directes* de calcul du défaut. Par méthode directe, on entend une méthode donnant le résultat en un nombre *fini* d'opérations. Cela ne signifie cependant pas que ces méthodes sont les meilleures, car *fini* n'est pas synonyme de *petit*. En particulier, la méthode des quatre points en circularité a une complexité $O(n^4)$ où n est le nombre de points de mesure, ce qui en fait une méthode fort lente en pratique.

En réalité, nous avons effectivement développé ces méthodes directes, mais elles ont seulement servi de référence sur des problèmes servant de tests pour d'autres méthodes.

4. Calcul des défauts par la méthode du simplexe de Nelder et Mead

Il semble plus élémentaire et plus général de chercher à minimiser directement l'écart maximal par une procédure numérique. Malheureusement, le minimum de cette fonction est en forme de cône, c'est-à-dire que si (λ_0, ρ_0) est le point minimal, on a une relation de la forme

$$e_M(\lambda_0 + \Delta\lambda, \rho_0 + \Delta\rho) - e_M(\lambda_0, \rho_0) \geq \alpha \left(\|\Delta\lambda\|^2 + (\Delta\rho)^2 \right)^{1/2}, \quad \alpha > 0$$

Du reste, la fonction e_M est continue, mais pas continûment dérivable, ni, *a fortiori*, de classe C^2 . Des représentations graphiques mettent bien en évidence l'existence de *thalwegs* (fonds de vallées). Dans ces conditions, les méthodes classiques de minimisation, gradient, gradient conjugué ou Newton-Raphson ne s'appliquent pas.

Pauly [4] a suggéré d'utiliser la méthode du simplexe de Nelder et Mead [3] qui a l'avantage de n'utiliser que les valeurs de la fonction elle-même. Cette méthode est de mise

en oeuvre aisée dans la mesure où l'on peut facilement se procurer les routines correspondantes. Malheureusement, l'expérience a montré que le *choix du simplexe de départ* est d'une importance cruciale, ce qui rend la méthode délicate et, finalement, peu sûre.

5. La méthode des normes d'ordre p

5.1 – Principe

La recherche du défaut consiste à minimiser l'écart maximal, mais cette fonction est malheureusement peu régulière. On peut songer à la remplacer par une fonction voisine, mais plus régulière. Dans cet ordre d'idées, la méthode des moindres carrés consiste à remplacer l'écart maximal par la norme d'ordre 2

$$\|\mathbf{e}\|_2 = \left(\sum_i |e_i|^2 \right)^{1/2}$$

On atteint ainsi l'objectif de régularité mais, malheureusement, cette norme est trop peu voisine de l'écart maximal. Mais on peut aussi imaginer de minimiser une norme d'ordre p , à savoir

$$\|\mathbf{e}\|_p = \left(\sum_i |e_i|^p \right)^{1/p} \quad (10)$$

car on sait (voir chapitre consacré à ces normes) qu'elles convergent pour p tendant vers l'infini vers l'écart maximal. Cette convergence se fait en décroissant. Du reste, les moyennes d'ordre p , définies par

$$\langle \mathbf{e} \rangle_p = \left(\frac{1}{n} \sum_i |e_i|^p \right)^{1/p}$$

convergent également vers l'écart maximal, mais en croissant, ce qui permet, pour tout p , d'obtenir un encadrement :

$$\langle \mathbf{e} \rangle_p \leq e_M \leq \|\mathbf{e}\|_p$$

Telle est l'idée de base de la méthode des normes d'ordre p : *on remplace e_M par la norme d'ordre p , avec p suffisamment grand*. qui est une fonction régulière à laquelle on peut appliquer la procédure de Newton-Raphson.

5.2 – Convergence du minimum de la norme d'ordre p vers le défaut

Cependant, ce n'est pas parce qu'une suite de fonctions tend vers une fonction limite que la suite des minima converge. Ce point demande à être démontré. Appelons μ l'ensemble des paramètres (λ, ρ) . Quel que soit μ , on a pour tout p

$$\frac{1}{2} def \leq e_M(\mu) \leq \|\mathbf{e}(\mu)\|_p$$

Ceci étant vrai pour tout μ , on a encore

$$\frac{1}{2} def \leq \inf_{\mu} \|\mathbf{e}(\mu)\|_p$$

Par ailleurs, quel que soit μ , on a aussi la relation générale

$$\|\mathbf{e}(\mu)\|_p \leq e_M(\mu).n^{1/p}$$

ce qui entraîne évidemment

$$\inf_{\nu} \|\mathbf{e}(\nu)\|_p \leq e_M(\mu).n^{1/p}$$

et ceci étant vrai pour tout μ , on a encore

$$\inf_{\nu} \|\mathbf{e}(\nu)\|_p \leq \inf_{\mu} e_M(\mu).n^{1/p} = \frac{1}{2} def.n^{1/p}$$

Finalement, on a donc

$$\frac{1}{2} def \leq \inf_{\mu} \|\mathbf{e}(\mu)\|_p \leq \frac{1}{2} def.n^{1/p} \quad (11)$$

ce qui montre que la valeur du minimum de la norme d'ordre p converge, pour p croissant, vers la moitié du défaut.

5.3 – Convergence du point extrémal

Soit μ_{0p} le point où la norme d'ordre p atteint son minimum, et soit μ_0 le point minimal de e_M . Peut-on dire que $\mu_{0p} \rightarrow \mu_0$ lorsque p croît ? La réponse est affirmative sous certaines conditions. Supposons donc que

- $e_M(\mu)$ admet un minimum en μ_0 ;
- Dans une boule fermée de rayon R de l'espace des paramètres, centrée en μ_0 , la condition de minimum peut être précisée comme suit :

$$e_M(\mu) - e_M(\mu_0) \geq \alpha \|\mu - \mu_0\|^r \quad (12)$$

avec $\alpha > 0$ et $r > 0$.

Dans ces conditions, en μ_0 , on a

$$\|\mathbf{e}(\mu_0)\|_p \leq e_M(\mu_0).n^{1/p} = \frac{1}{2}def.n^{1/p}$$

A une distance R de ce point, on a par (12)

$$\|\mathbf{e}(\mu)\|_p \geq e_M(\mu) \geq \frac{1}{2}def + \alpha R^r$$

Dès lors, dès que

$$\frac{1}{2}def.n^{1/p} \leq \frac{1}{2}def + \alpha R^r \quad \text{c - à - d} \quad n^{1/p} < 1 + \frac{\alpha R^r}{\frac{1}{2}def}$$

la norme d'ordre p prend en μ_0 une valeur inférieure à ses valeurs sur la frontière de la boule, ce qui implique qu'elle admet un minimum dans cette boule. Soit μ_{0p} le point minimal correspondant. On a

$$\alpha \|\mu_{0p} - \mu_0\|^r \leq e_M(\mu_{0p}) - \frac{1}{2}def \leq \|\mathbf{e}(\mu_{0p})\|_p - \frac{1}{2}def$$

Mais $\|\mathbf{e}(\mu_{0p})\|_p$ est le minimum de la norme d'ordre p des écarts qui, par (11) vérifie

$$\inf_{\mu} \|\mathbf{e}(\mu)\|_p \leq \frac{1}{2}def.n^{1/p}$$

Donc on a

$$\alpha \|\mu_{0p} - \mu_0\|^r \leq (n^{1/p} - 1) \frac{1}{2}def$$

ce qui implique que $\mu_{0p} \rightarrow \mu_0$.

En pratique, l'exposant r est égal à l'unité, si bien que le point minimal converge comme $(n^{1/p} - 1)$, de même que le défaut approché.

On constate du reste qu'il faut en pratique choisir p très grand. Nous travaillons quotidiennement avec $p = 10^6$, ce qui donne une erreur relative inférieure à 10^{-5} tant que $n \leq 22025$.

5.4 – Méthode de Newton – Raphson pour minimiser la norme d'ordre p .

Soit à minimiser la norme d'ordre p ou, ce qui revient au même, la fonction

$$F(\mu) = \sum_i |e_i(\mu)|^p$$

Minimiser F , c'est annuler son gradient dont les composantes sont

$$g_k = \frac{\partial F}{\partial \mu_k} = p \sum_i |e_i|^{p-1} \text{sign}(e_i) \frac{\partial e_i}{\partial \mu_k}$$

A partir d'un point μ donné, on écrit que

$$g_k(\mu + \Delta\mu) \approx g_k(\mu) + \sum_\ell \frac{\partial^2 F}{\partial \mu_k \partial \mu_\ell} \Delta\mu_\ell = 0$$

ce qui permet de calculer l'incrément de μ par le système linéaire

$$K\Delta\mu = -g$$

où K est la matrice dont les composantes sont données par

$$K_{k\ell} = \frac{\partial^2 F}{\partial \mu_k \partial \mu_\ell} = p(p-1) \sum_i |e_i|^{p-2} \frac{\partial e_i}{\partial \mu_k} \frac{\partial e_i}{\partial \mu_\ell} + p \sum_i |e_i|^{p-1} \text{sign}(e_i) \frac{\partial^2 e_i}{\partial \mu_k \partial \mu_\ell}$$

Pour p très grand, le second terme est négligeable face au premier et peut être omis. Dans bien des cas, d'ailleurs, on peut l'omettre même pour des valeurs petites de p , ce qui donne une méthode de Newton-Raphson *modifiée*. Mais il existe des problèmes (rectitude dans l'espace et plus petit cercle contenant les points de mesure, notamment), où il est nécessaire de conserver le second terme pour les petites valeurs de p sous peine de divergence.

5.5 – Problèmes liés à la représentation des nombres sur ordinateur

Pour éviter tout problème de dépassement de capacité des exposants (*over-* ou *underflow*), il convient d'écrire à chaque itération

$$F(\mu) = e_M \sum_* \left| \frac{e_i}{e_M} \right|^p$$

le signe * indiquant que l'on supprime tous les termes tels que

$$\left| \frac{e_i}{e_M} \right| < 10^{-100/p}$$

par exemple.

5.6 – Stratégie de calcul

Le calcul direct avec la norme d'ordre p , p élevé, est impraticable car la fonction à minimiser est d'autant plus tourmentée que p est plus grand, ce qui rend la convergence de la méthode de Newton-Raphson problématique si le point de départ n'est pas bien choisi. Au lieu de cela, on peut imaginer le processus suivant. Soit $q > 1$. On commence par chercher le minimum pour $p = 2$, puis on prend le résultat comme point de départ avec $p = 2q$. La solution obtenue sert de point de départ avec $p = 2q^2$ et ainsi de suite.

L'expérience montre que dans la plupart des cas, on peut, au lieu de travailler avec un exposant donné jusqu'à convergence, on peut se limiter à *une seule itération pour chaque p* et qu'une bonne valeur de la raison de progression de p est $q = \sqrt{2}$. Ainsi conçu, et avec une valeur finale $p = 10^6$, l'algorithme converge en une quarantaine d'itérations. On notera que le nombre de calculs à chaque itération est strictement proportionnel au nombre de points n . Nous sommes donc en présence d'un algorithme de complexité $O(n)$, ce qui est *remarquable*.

Cependant, il peut arriver, bien que ce soit rare, que le processus diverge à un certain moment. Il est donc nécessaire d'assortir notre stratégie d'un *contrôle de divergence*.

5.7 – Contrôle de divergence

Le principe de notre contrôle de divergence est fondé sur l'*inégalité de Jensen*, qui revient à dire que *pour un même jeu d'écart* \mathbf{e} , si $p > q$, on a $\|\mathbf{e}\|_p < \|\mathbf{e}\|_q$. Cela étant, si le processus itératif améliore la solution, les normes successives ne peuvent que décroître. On calcule donc à chaque itération la norme d'ordre p de l'écart, et on la compare à la plus petite des normes obtenues jusque là. Si la nouvelle norme d'ordre p lui est supérieure, on en déduit qu'une divergence s'amorce. On peut alors stopper la progression de p jusqu'à être redescendu en dessous de la plus petite valeur obtenue et alors, reprendre la croissance de p . Dans les quelques cas difficiles où les choses ne s'arrangent pas après un nombre donné d'itérations, on peut recommencer le processus avec une raison q plus faible, ce qui donnera un peu plus d'itérations.

6. Influence des erreurs de mesure sur le calcul des défauts de forme

6.1 – Introduction

Au-delà du calcul des défauts de forme, il est nécessaire de s'enquérir de leur sensibilité aux erreurs de mesure. Partant toujours de l'idée de mesures tridimensionnelles, nous admettrons que les valeurs x_i, y_i, z_i mesurées ou calculées en chaque point sont entachées d'imprécisions $\Delta x_i, \Delta y_i, \Delta z_i$. La question qui se pose est de déterminer une borne supérieure, aussi réaliste que possible, de l'influence de ces imprécisions sur la mesure de l'erreur de forme.

6.2 – Formulation du problème

Pour aborder ce problème, le plus simple est de partir des hauteurs $f_i(\lambda)$ des points mesurés. Il est clair que la valeur d'encadrement de l'ensemble K des points de mesure s'écrit alors

$$enc(K; \lambda) = \sup_i f_i(\lambda) - \inf_i f_i(\lambda)$$

Rappelons que le défaut n'est autre que la valeur minimale de cette fonction d'encadrement lorsque l'on fait varier les paramètres :

$$def(K) = \inf_{\lambda} enc(K; \lambda)$$

Une perturbation des coordonnées conduit aux nouvelles hauteurs

$$f_i^*(\lambda) = f(x_i + \Delta x_i, y_i + \Delta y_i, z_i + \Delta z_i; \lambda)$$

et nous admettrons, comme hypothèse de base, que la différence

$$\Delta f_i(\lambda) = f_i^*(\lambda) - f_i(\lambda)$$

vérifie une inégalité du type

$$|\Delta f_i(\lambda)| \leq \varepsilon$$

uniformément par rapport à λ . Dans la pratique, il restera évidemment à examiner quand cette inégalité a lieu pour les défauts de forme courants, ce que nous ferons § 6.6.

6.3 – Majoration de l'imprécision des enveloppes supérieures et inférieures

Supposons un instant qu'il n'y ait que deux points. Dans ce cas,

$$\sup(f_1^*, f_2^*) = \sup(f_1 + \Delta f_1, f_2 + \Delta f_2) \leq \sup(f_1 + \varepsilon, f_2 + \varepsilon) = \sup(f_1, f_2) + \varepsilon$$

En permutant les rôles des f_i et des f_i^* , on trouve de même

$$\sup(f_1, f_2) \leq \sup(f_1^*, f_2^*) + \varepsilon$$

si bien que

$$\left| \sup(f_1^*, f_2^*) - \sup(f_1, f_2) \right| \leq \varepsilon$$

Un raisonnement analogue montre que

$$\left| \inf(f_1^*, f_2^*) - \inf(f_1, f_2) \right| \leq \varepsilon$$

Dans le cas où il y a n points, ces résultats subsistent par récurrence, puisque

$$\sup(f_1, \dots, f_n) = \sup(\sup(f_1, \dots, f_{n-1}), f_n)$$

et de même pour les bornes inférieures. On a donc

$$\left\{ \begin{array}{l} \left| \sup_i f_i^* - \sup_i f_i \right| \leq \varepsilon \\ \left| \inf_i f_i^* - \inf_i f_i \right| \leq \varepsilon \end{array} \right.$$

6.4 – Majoration de l'imprécision de la valeur d'encadrement

La valeur d'encadrement perturbée étant donnée par

$$enc^*(K; \lambda) = \sup_i f_i^*(\lambda) - \inf_i f_i^*(\lambda)$$

on a visiblement

$$\begin{aligned}
|enc^*(K; \lambda) - enc(K; \lambda)| &= \left| \left(\sup_i f_i^* - \inf_i f_i^* \right) - \left(\sup_i f_i - \inf_i f_i \right) \right| \\
&\leq \left| \sup_i f_i^* - \sup_i f_i \right| + \left| \inf_i f_i^* - \inf_i f_i \right| \leq 2\varepsilon
\end{aligned}$$

6.5 – Majoration de l'imprécision du défaut

Le défaut est, comme on sait, le minimum de la valeur d'encadrement quand on fait varier les paramètres,

$$def(K) = \inf_{\lambda} enc(K; \lambda)$$

Sa valeur perturbée est

$$def^*(K) = \inf_{\lambda} enc^*(K; \lambda)$$

Or, nous savons que pour tout λ , on a

$$enc^*(K; \lambda) \geq enc(K; \lambda) - 2\varepsilon \geq \inf_{\mu} enc(K; \mu) - 2\varepsilon = def(K) - 2\varepsilon$$

Le dernier membre étant indépendant de λ , on a donc

$$def^*(K) = \inf_{\lambda} enc^*(K; \lambda) \geq def(K) - 2\varepsilon$$

A l'inverse, on a pour tout λ

$$enc(K; \lambda) \geq enc^*(K; \lambda) - 2\varepsilon \geq \inf_{\mu} enc^*(K; \mu) - 2\varepsilon = def^*(K) - 2\varepsilon$$

ce qui permet, par le même raisonnement, de montrer que

$$def(K) \geq def^*(K) - 2\varepsilon$$

Finalement, on peut donc affirmer que

$$|def^*(K) - def(K)| \leq 2\varepsilon$$

C'est le résultat fondamental : *la perturbation du défaut de forme n'exécède pas le double de la perturbation des hauteurs.*

6.6 – Application aux défauts de forme les plus courants

Voyons à présent ce que signifie ce résultat dans les cas de rectitude, planéité, circularité et cylindricité. Nous supposons dans chaque cas que les coordonnées subissent une perturbation telle qu'en chaque point,

$$\sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2} \leq \eta$$

pour les problèmes plans ou

$$\sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2 + (\Delta z_i)^2} \leq \eta$$

pour les problèmes spatiaux.

6.6.1 – Rectitude

En rectitude, les hauteurs s'écrivent

$$f_i(\varphi) = x_i \cos \varphi + y_i \sin \varphi$$

et leur perturbation,

$$\Delta f_i(\varphi) = \Delta x_i \cos \varphi + \Delta y_i \sin \varphi$$

Il résulte directement de l'inégalité du produit scalaire que

$$|\Delta f_i(\varphi)| \leq \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2} \leq \eta$$

ce qui revient à dire $\varepsilon = \eta$.

6.6.2- Planéité

Dans ce cas,

$$f_i(\theta, \varphi) = x_i \cos \theta + y_i \sin \theta \cos \varphi + z_i \sin \theta \sin \varphi$$

ce qui donne

$$\Delta f_i(\theta, \varphi) = \Delta x_i \cos \theta + \Delta y_i \sin \theta \cos \varphi + \Delta z_i \sin \theta \sin \varphi$$

Ici encore, l'inégalité du produit scalaire conduit à

$$|\Delta f_i(\theta, \varphi)| \leq \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2 + (\Delta z_i)^2} \sqrt{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi)} \leq \eta$$

soit encore $\varepsilon = \eta$.

6.6.3 – Circularité

Les hauteurs sont ici les rayons,

$$f_i(a, b) = \sqrt{(x_i - a)^2 + (y_i - b)^2}$$

Il ne s'agit pas, ici, d'une expression linéaire en termes des coordonnées. La *partie principale* de la variation des hauteurs est donnée par

$$\delta f_i(a, b) = \frac{x_i - a}{f_i(a, b)} \Delta x_i + \frac{y_i - b}{f_i(a, b)} \Delta y_i$$

et l'inégalité du produit scalaire permet encore une fois d'écrire

$$|\delta f_i(a, b)| \leq \eta$$

ce qui revient à dire $\varepsilon \approx \eta$.

6.6.4 - Cylindricité

Nous avons vu qu'en cylindricité, on commence par projeter les coordonnées suivant la loi

$$\begin{aligned} x_{pi}(\theta, \varphi) &= x_i \sin \theta - y_i \cos \theta \cos \varphi - z_i \cos \theta \sin \varphi \\ y_{pi}(\varphi) &= y_i \sin \varphi - z_i \cos \varphi \end{aligned}$$

La hauteur du point i est alors donnée par

$$f_i(a, b, \theta, \varphi) = \sqrt{[x_{pi}(\theta, \varphi) - a]^2 + [y_{pi}(\varphi) - b]^2}$$

Ici encore, il s'agit d'une expression non linéaire en termes des coordonnées et il nous faudra nous contenter de la partie principale de la perturbation de hauteur, qui vaut

$$\delta f_i(a, b, \theta, \varphi) = \frac{[x_{pi}(\theta, \varphi) - a] \Delta x_{pi}(\theta, \varphi) + [y_{pi}(\varphi) - b] \Delta y_{pi}(\varphi)}{f_i(a, b, \theta, \varphi)}$$

avec

$$\begin{aligned}\Delta x_{pi}(\theta, \varphi) &= \Delta x_i \sin \theta - \Delta y_i \cos \theta \cos \varphi - \Delta z_i \cos \theta \sin \varphi \\ \Delta y_{pi}(\varphi) &= \Delta y_i \sin \varphi - \Delta z_i \cos \varphi\end{aligned}$$

Par l'inégalité du produit scalaire, on a

$$|\mathcal{F}_i(a, b, \theta, \varphi)| \leq \sqrt{[\Delta x_{pi}(\theta, \varphi)]^2 + [\Delta y_{pi}(\varphi)]^2}$$

Or,

$$\begin{aligned}|\Delta x_{pi}(\theta, \varphi)| &\leq \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i \cos \varphi + \Delta z_i \sin \varphi)^2} \\ |\Delta y_{pi}(\varphi)| &= |\Delta y_i \sin \varphi - \Delta z_i \cos \varphi|\end{aligned}$$

ce qui entraîne

$$\begin{aligned}[\Delta x_{pi}(\theta, \varphi)]^2 + [\Delta y_{pi}(\varphi)]^2 &\leq (\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2 (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) + (\Delta z_i)^2 (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) \\ &\quad + 2\Delta y_i \Delta z_i (\cos \varphi \sin \varphi - \sin \varphi \cos \varphi) \\ &\leq \eta^2\end{aligned}$$

Ainsi, au premier ordre, $\varepsilon \leq \eta$.

6.6.5 – Conclusions

Dans les quatre cas considérés, l'incertitude sur le défaut n'excède pas le double de l'incertitude sur les mesures, exprimé par la norme du vecteur erreur. Cette conclusion est stricte en rectitude et en planéité. Elle ne vaut qu'au premier ordre dans les deux autres cas.

6.7 – Incertitude sur la valeur des paramètres λ

Pour répondre à cette question, il est nécessaire de supposer, comme dans le § 5.3, que la valeur d'encadrement admet un minimum bien prononcé, c'est-à-dire que si $enc(K; \lambda)$ est minimale en λ_0 , on a, dans une boule fermée de rayon R de l'espace des paramètres, centrée sur le minimum,

$$enc(K; \lambda) - enc(K; \lambda_0) \geq \alpha \|\lambda - \lambda_0\|^r \quad \text{avec } \alpha > 0, \quad r > 0$$

Dans ces conditions, on a d'une part

$$enc^*(K; \lambda_0) \leq enc(K; \lambda_0) + 2\varepsilon$$

et d'autre part, en tout point λ situé à une distance R de λ_0 ,

$$enc^*(K; \lambda) \geq enc(K; \lambda) - 2\varepsilon \geq enc(K; \lambda_0) + \alpha R^r - 2\varepsilon$$

ce qui implique que pour $\varepsilon < \frac{\alpha R^r}{4}$, c'est-à-dire si la perturbation des coordonnées est suffisamment petite, toutes les valeurs de enc^* à la frontière de la boule sont supérieures à $enc^*(K; \lambda_0)$. La valeur d'encadrement perturbée $enc^*(K; \lambda)$ admet alors un minimum dans cette boule, en un certain point λ_0^* .

Ceci posé, on peut écrire

$$\alpha \|\lambda_0^* - \lambda_0\|^r \leq |enc(K; \lambda_0^*) - enc(K; \lambda_0)| \leq |enc(K; \lambda_0^*) - enc^*(K; \lambda_0^*)| + |enc^*(K; \lambda_0^*) - enc(K; \lambda_0)|$$

Or, nous savons que (§6.4)

$$|enc(K; \lambda_0^*) - enc^*(K; \lambda_0^*)| \leq 2\varepsilon$$

et que (§6.5)

$$|enc^*(K; \lambda_0^*) - enc(K; \lambda_0)| = \left| \inf_{\lambda} enc(K; \lambda) - \inf_{\lambda} enc(K; \lambda) \right| = |def^*(K) - def(K)| \leq 2\varepsilon$$

Il en découle

$$\|\lambda_0^* - \lambda_0\| \leq \left(\frac{4\varepsilon}{\alpha} \right)^{1/r}$$

En pratique, les fonctions d'encadrement ont un minimum en forme de cône, c'est-à-dire que $r = 1$. On peut du reste évaluer sommairement α par

$$\alpha \approx \liminf_{\|\Delta\lambda\| \rightarrow 0} \frac{enc(K; \lambda_0 + \Delta\lambda) - enc(K; \lambda_0)}{\|\Delta\lambda\|}$$

c'est-à-dire la plus petite valeur du gradient de l'encadrement en λ_0 .

7. Bibliographie

1. **G. Hacques** – *Algorithmique numérique*
Colin, Paris, 1971
2. **I.S. Berezin, N.P. Zhidov** – *Computing methods*
Vol. 1, Pergamon Press, Oxford, 1965
3. **J.A. Nelder, R. Mead** – A simplex method for function minimization
Computer Journal, vol. 7, pp. 308-313, 1965
4. **P. Pauly** – Établissement d'algorithmes de calcul des erreurs de forme et de position
Mémoire de fin d'études, Université de Liège, 1996
5. **A. Ballu, P. Bourdet, L. Mathieu** – The processing of measured points in coordinate metrology in agreement with the definition of standardized specifications
CIRP Annals, vol. 40/1, pp. 491-494, 1991
6. **G. Goch** – Efficient multipurpose algorithm for approximation and alignment problems in coordinate measurement techniques
CIRP Annals, vol. 39/1, pp. 553-556, 1990
7. **L.P. Lebedev, I.I. Vorovich, G.M.L. Galdwell** – *Functional analysis*
Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Boston London, 1996
ISBN 0-7923-3849-9
8. **J.D. Meadows** – *Geometric dimensioning and tolerancing*
Marcel Dekker inc., New York, Basel, Hong Kong, 1995
ISBN 0-8247-9309-9
9. **J.F. Debongnie, L. Masset** – Sur l'évaluation des défauts de forme à partir de mesures tridimensionnelles
European Journal of Mechanical and Environmental Engineering, vol. 43 n°1,
pp. 13-21, 1998