Table des matières

Je vous propose dans ce syllabus un ensemble d'exercices couvrant toute la matière vue pendant l'année académique dans le cadre du cours Mathématique 1 dispensé en Faculté d'Architecture en première bachelier.

La plupart des exercices seront réalisés lors des séances d'exercices organisées toutes les semaines le jeudi de 10h20 à 12h20. Ces séances débuteront systématiquement par un rappel du cours théorique.

Ces notes provisoires sont accompagnées d'un second syllabus d'exercices supplémentaires permettant de vous exercer.

Chaque série d'exercices est suivie des solutions.

Les exercices marqués d'un astérisque sont tirés de Construction Mathematics : Surinder Virdi et Roy Baker. Toute remarque pouvant favoriser l'amélioration de ces syllabi est la bienvenue.

Je remercie Stéphanie Jacqmin, Julien Deprez et Anne-Marie Lejeune pour leurs nombreuses suggestions.

Bon travail !

Séance d'exercices 1

1 Exercices sur les nombres et les opérations

1. Mettre sous forme de somme
   (a) $3a(a-2b)-2b(4a+b)-3(a+b)(a-b)+(a-3b)^2$
   (b) $(x+y+z-1)(x+y-z+1)$
   (c) $(4a-3b)^2$
   (d) $(2x-y)(4x^2+2xy+y^2)$
   (e) $(a-3)(a+3)(a^2+9)$
   (f) $(4x^3-2x^2+1)+(-x^2+3x)-(x-3)$
   (g) $\frac{9x^6-6x^3+12x^5}{3x^2}$
   (h) $\frac{4a^2b^2-3a^2b^4+12a^4b^2}{-2a^2b}$
2. Décomposer en facteurs
   (a) $5ax-5bx$
   (b) $6a^2b-2a^2b^3+8ab^2$
   (c) $ac+bc+ad+bd$
   (d) $3(2-x)^2-3(x-2)^3$
3. Décomposer en facteurs $(a^2-b^2)=(a+b)(a-b)$
   (a) x^4-y^6
   (b) $x^2-\frac{1}{25}$
   (c) $(a-b)^2-a^2$
4. $y=4x^2-(3x+1)^2$
   (a) décomposer y en une somme de termes
   (b) décomposer y en un produit de facteurs
   (c) déterminer les valeurs de x qui annulent y
5. Calculer la valeur de
   (a) $\sqrt{48}+\sqrt{12}$
   (b) $\sqrt{\frac{18}{25}}+\frac{2\sqrt{2}}{3}-\frac{3}{\sqrt{2}}$

6. Montrer que si p est un nombre entier quelconque, alors la différence $p^3 - p$ est égale au produit de trois nombres entiers consécutifs.

7. Soit φ le nombre d'or. Il engendre la suite

$$1, \varphi, \varphi^2, \varphi^3, \ldots$$

On constate que chaque terme de cette suite est égal au produit du terme précédent par φ. On nous dit, de plus, que chaque terme est égal à la somme des deux termes précédents. Réexprimer les termes de cette suite sous la forme $a\varphi + b$ en utilisant deux méthodes différentes.

8.* (a) Isolez la variable r dans l'égalité suivante : $A = \pi r^2$.

(b) Isolez la variable V dans l'égalité suivante : $r = \sqrt{\frac{V}{\pi h}}$.

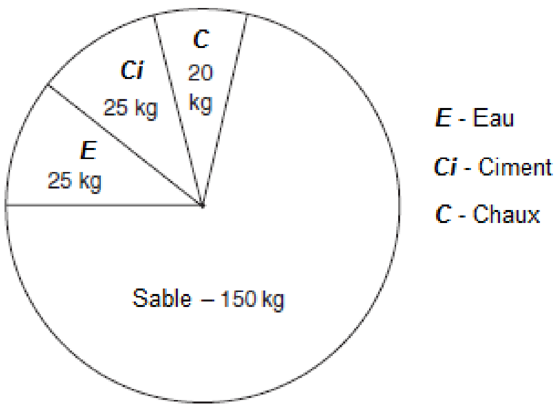
9.* L'aire de la surface latérale d'une colonne circulaire est donnée par la formule $S = 2\pi r h$ où r est le rayon et h la hauteur. Calculez l'aire de la surface latérale d'une colonne de rayon $r = 30cm$ et d'hauteur $h = 3m$. Exprimez la réponse en cm^2.

10.* Calculez

(a) $\frac{2}{7}$ de 35

(b) $\frac{2}{3}$ de £19.80

11.* Les composants d'un mélange de mortier ainsi que leur masse sont donnés dans la figure ci-dessous. Exprimez la masse de chaux comme fraction de la masse totale de mortier.



12.* (a) Additionnez $\frac{1}{3}$ et $\frac{2}{5}$.

(b) Soustrayez $\frac{2}{3}$ de $\frac{3}{4}$.

(c) Multipliez $\frac{3}{7}$ et $\frac{1}{2}$.

(d) Divisez $\frac{3}{7}$ par $\frac{1}{2}$.

13.* Convertissez $\frac{3}{25}$ en un pourcentage.

14.* Convertissez 0.25 en un pourcentage.

15.* Un étudiant a obtenu 60/75 à son examen de sciences. Quel pourcentage ce résultat représente-t-il ?

16.* Convertissez 40% en

(a) une fraction

(b) un nombre décimal

17.* Baptiste a acheté les produits suivants dans un entrepôt où les prix sont affichés hors TVA :

1 boiler - €490
7 radiateurs -€80/pièce

Trouvez le montant total que Baptiste devra payer sachant que le taux de TVA est de 17.5%.

18.* Un mélange de béton est fait des matériaux suivants :

200kg de ciment
450kg de sable
750kg de gravier
100kg d'eau

(a) Exprimez la quantité de sable comme une fraction et comme un pourcentage de la masse totale de béton.

(b) Exprimez la quantité d'eau comme une fraction et comme un pourcentage de la quantité de ciment.

19.* Deux briques ont été testées sur leur manière d'absorber l'eau. Les résultats sont les suivants :

Brique	Masse de la brique sèche (kg)	Masse de l'eau absorbée (kg)
A	2.200	0.200
B	2.500	0.250

Sachant que

$$\text{Absorption d'eau} = \frac{\text{Masse d'eau absorbée}}{\text{Masse de la brique sèche}},$$

exprimez l'eau absorbée par chaque brique comme une fraction et comme un pourcentage.

20.* La perte totale de chaleur d'une construction est de 25000watts. Déterminez la perte de chaleur due aux fenêtres et au toit, sachant que

(a) 15% de la perte totale de chaleur se fait à travers les fenêtres.

(b) 35% de la perte totale de chaleur est due au toit.

Solutions

1. (a) $a^2 - 20ab + 10b^2$

   (b) $x^2 + y^2 - z^2 + 2xy + 2z - 1$

   (c) $16a^2 - 24ab + 9b^2$

   (d) $8x^3 - y^3$

   (e) $a^4 - 81$

   (f) $4x^3 - 3x^2 + 2x + 4$

   (g) $3x^4 + 4x^3 - 2x$

   (h) $-2b + \dfrac{3}{2}b^3 - 6a^2b$

2. (a) $5x(a - b)$

   (b) $2ab(3a - ab^2 + 4b)$

   (c) $(a + b)(c + d)$

   (d) $3(x - 2)^2(3 - x)$

3. (a) $(x^2 - y^3)(x^2 + y^3)$

   (b) $(x - \frac{1}{5})(x + \frac{1}{5})$

   (c) $b(b - 2a)$

4. (a) $y = -5x^2 - 6x - 1$

   (b) $y = -(x + 1)(5x + 1)$

   (c) $y = 0$ ssi $x = -1$ ou $x = -\dfrac{1}{5}$

5. (a) $6\sqrt{3}$

(b) $-\frac{7}{30}\sqrt{2}$

8. $r = \sqrt{\frac{A}{\pi}}$ et $V = r^2\pi h$
9. $S = 56548.67cm^2$
10. (a) 10

    (b) 13.20£
11. $\frac{1}{11}$
12. (a) $\frac{11}{15}$

    (b) $\frac{1}{12}$

    (c) $\frac{3}{14}$

    (d) $\frac{6}{7}$
13. 12%
14. 25%
15. 80%
16. (a) $\frac{2}{5}$

    (b) 0.4
17. Baptiste devra payer $1233,75$ euro.
18. (a) $\frac{2}{15}$ ce qui correspond à $13,33\%$.

    (b) $\frac{1}{15}$ ce qui correspond à $6,66\%$.
19. – A : $\frac{1}{11}$ ce qui correspond à $9,09\%$.
    – B : $\frac{1}{10}$ ce qui correspond à 10%.
20. La perte de chaleur totale est de 12500watts.

Séances d'exercices 2 et 3

Ces exercices sont proposés en collaboration avec A.-M. Lejeune et T. Brogneaux

2 Exercices de trigonométrie

1. Calculer sans calculatrice
   (a) $\sin 120°$
   (b) $\sin 330°$
   (c) $\cos 210°$
2. Calculer les nombres trigonométriques de $\alpha = 960°$.
3. Simplifier les expressions suivantes :
   (a) $\sin(180° - \alpha) + \sin(360° - \alpha)$
   (b) $\sin(270° + \alpha) + \sin(90° + \alpha)$
   (c) $\sec(270° - \alpha) + \operatorname{cosec}(-\alpha)$
4. Vérifier les égalités suivantes :
   (a) $\sin x \cos x = \frac{\tan x}{1+\tan^2 x}$
   (b) $\sec^2 x + \operatorname{cosec}^2 x = \sec^2 x \operatorname{cosec}^2 x$
   (c) $(1 + \tan x)^2 + (1 - \tan x)^2 = 2\sec^2 x$
5. Calculer $\cos\alpha$ et $\tan\alpha$ si $\sin\alpha = \frac{12}{13}$ avec α un angle dans le deuxième quadrant.
6. Calculer les nombres trigonométriques d'un angle α du second quadrant si

$$12\sin\alpha + 5\cos\alpha = 0.$$

7. Calculer $\sin 2x$ sachant que $\sin x - \cos x = \frac{2}{10}$.
8. Transformer en somme algébrique
   (a) $\sin 50° \cos 80°$
   (b) $\sin 35° \cos 25°$
9. Transformer en produit
   (a) $\sin 4a + \sin a$
   (b) $\sin 7a - \sin 5a$
   (c) $\cos 3a + \cos 7a$

10. Si une pente de toit a une déclivité de 100 % et que la longueur du versant (de la corniche au faîtage) mesure 360 cm, de quelle hauteur utile dispose-t-on sous le faîtage ?

11. Evaluer $\cos 15°$.

12. Résoudre $\sin 2x = -\sin x$

13. Résoudre $3(1 - \cos x) = \sin^2 x$

14. Résoudre dans $\mathbb{R}$

$$12\cos^2 x - 5 - 8\sin x = 0$$

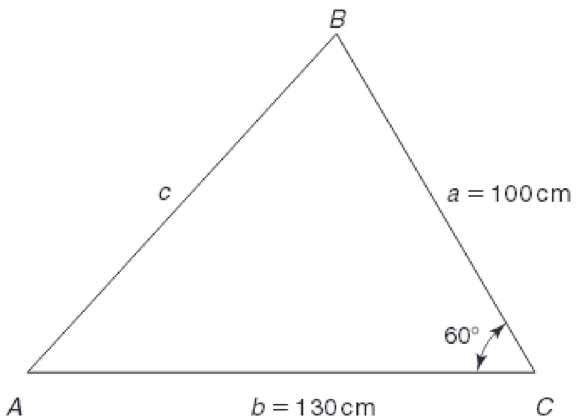
Les solutions comprises entre 0 et 2π seront portées sur le cercle trigonométrique.

15. Calculer la longueur du troisième côté et les angles d'un triangle dont on connait $a = 53,6m$, $c = 35,29m$ et $\alpha = 71^0 15'$.

16.* Déterminez

(a) $\widehat{A}$, $\widehat{B}$, c

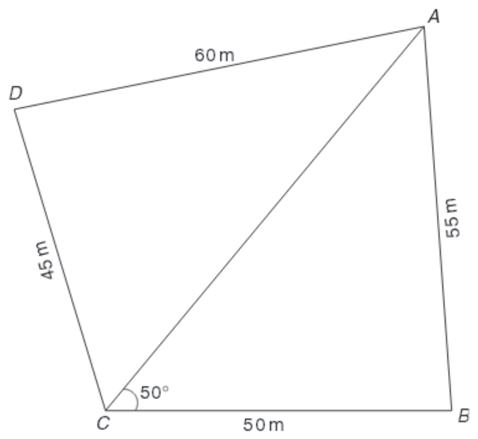
(b) L'aire ABC



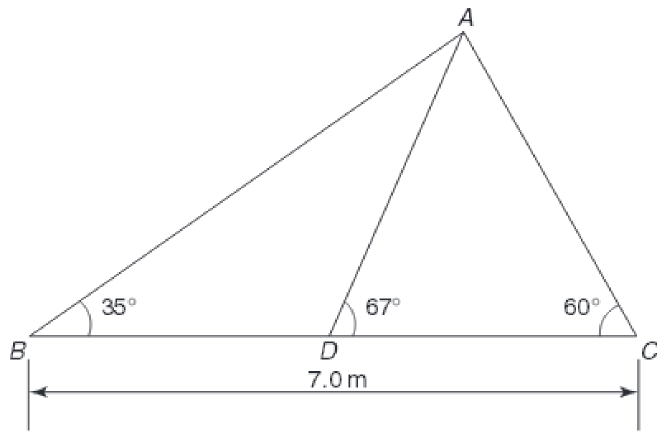
17.* Le plan d'un immeuble est représenté ci-dessous. Calculez

(a) Les angles $\widehat{B}$, $\widehat{D}$, $\widehat{DAC}$, $\widehat{DCA}$ et $\widehat{CAB}$

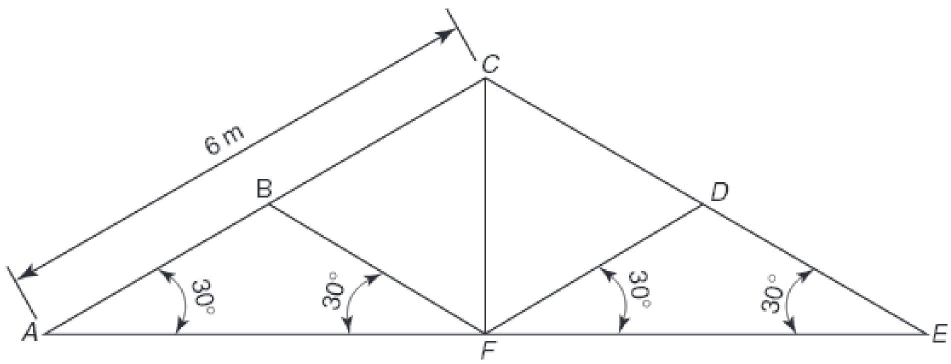
(b) L'aire au sol de l'immeuble



18.* Une toiture possède les caractéristiques du schéma ci-dessous. Déterminez les longueurs des éléments de celle-ci.

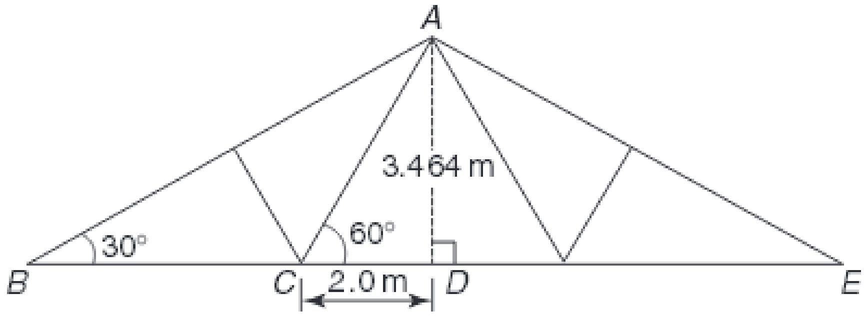


19.* Déterminez les longueurs des éléments de la toiture de King Post représentée ci-dessous.



20.* Un parc triangulaire est délimité sur deux de ses côtés par des allées perpendiculaires mesurant 26m et 38m. Déterminez le périmètre du parc.

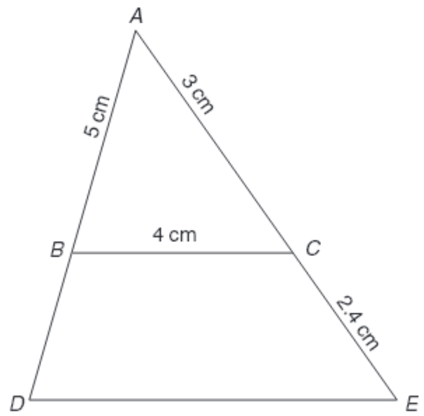
21.* Déterminez les longueurs des éléments AB et BE de la toiture ci-dessous.



22.* Sachant que sur le dessin ci-dessous BC est parallèle à DE

(a) Montrez que les triangles ABC et ADE sont semblables.

(b) Déterminez BD et DE



Solutions

1. (a) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

   (b) $-\frac{1}{2}$

   (c) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

2. $\cos\alpha = -\frac{1}{2}$, $\sin\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\tan\alpha = \sqrt{3}$, $\cot\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$

3. (a) 0

   (b) 0

   (c) $-2 \operatorname{cosec} \alpha$

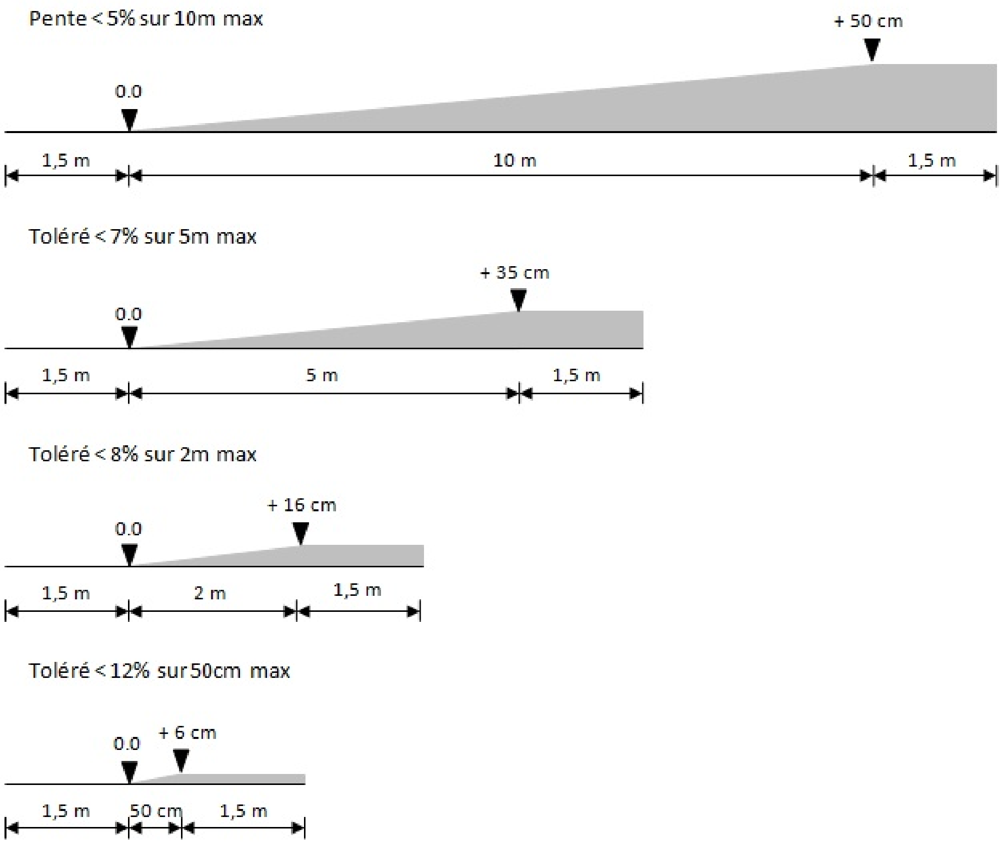
5. $\cos\alpha = -\frac{5}{13}$, $\tan\alpha = -\frac{12}{5}$
6. $\cos x = -\frac{12}{13}$, $\sin x = \frac{5}{13}$, $\cos x = -\frac{5}{12}$, $\cos x = -\frac{12}{5}$
7. $\sin 2x = \frac{24}{25}$
8. (a) $\frac{1}{2}(\sin 130° - \frac{1}{2})$
   (b) $\frac{1}{2}(\frac{\sqrt{3}}{2} + \sin 10°)$
9. (a) $2\sin\frac{5}{2}a\cos\frac{3}{2}a$
   (b) $2\cos 6a\sin a$
   (c) $2\cos 5a\cos 2a$
10. La hauteur sous le faîtage vaut $180\sqrt{2}$.
11. $\cos 15° = \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{6}}{4}$
12. $x = \begin{cases} k.180°,\ k \in \mathbb{Z} \\ 120° + k.360°,\ k \in \mathbb{Z} \\ -120° + k.360°,\ k \in \mathbb{Z} \end{cases}$
13. $x = k.360°, k \in \mathbb{Z}$
14. $x = \begin{cases} 30° + k.360°,\ k \in \mathbb{Z} \\ 150° + k.360°,\ k \in \mathbb{Z} \end{cases}$
15. $b = 53.19m$, $\beta = 70°4'34''$, $\gamma = 38°30'26''$
16. (a) $A = 47,2694°$, $B = 72,7306°$, $c = 117,896cm$
    (b) Aire $= 5629cm^2$
17. (a) $B = 85,8608°$, $D = 84,7053°$, $DAC = 38,7417°$, $DCA = 56,5531°$, $CAB = 44,1392°$
    (b) Aire $= 2715,43m^2$
18. $AB = 6,085m$, $AC = 4,03m$, $AD = 3,791m$, $BD = 3,504m$, $DC = 3,496m$
19. $AB = BC = BF = CF = 3cm$, $AF = 3\sqrt{3} = 5,196cm$
20. Le parc a un périmètre de $148,04m$.
21. $AB = 4\sqrt{3} = 6,298m$, $BE = 12m$
22. (b) BD = 4cm, DE = 7,2cm

Problèmes

1. Calculer la hauteur d'une tour dressée au bord d'une falaise sachant qu'à 100 m, on voit la falaise sous un angle de 43° et la tour sous un angle de 12° supplémentaires.

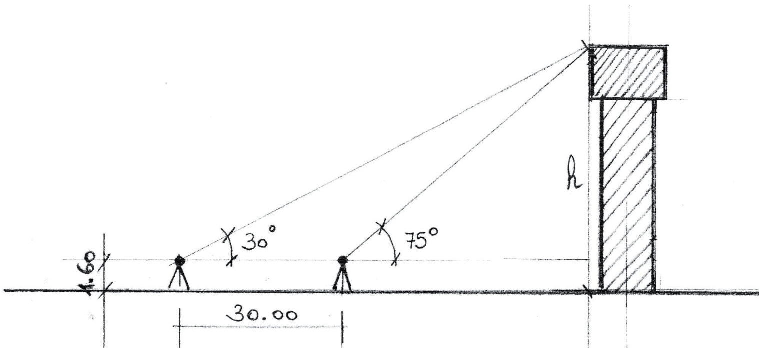
2. Calculer les angles d'un losange dont le périmètre mesure 842 m et une diagonale 92 m.
3. Un goal de football mesure $7,32$ m de centre à centre des piquets dont le diamètre vaut 12 cm. Un joueur se trouve à 11 m du bord intérieur d'un des piquets, côté terrain et sur la perpendiculaire à la ligne de but.
   (a) Sous quel angle maximal par rapport à cette perpendiculaire le joueur doit-il tirer pour atteindre l'intérieur du goal ?
   (b) Quelle sera la longueur maximale de la trajectoire du ballon ?
4. Dans une station de ski, une pente a une inclinaison de 20° par rapport à l'horizontale. Pour cette colline, le télésiège est supporté par un poteau vertical de 50 m. Un câble de support va de la partie supérieure du poteau jusqu'à un ancrage situé à 88 m de la base du poteau suivant la pente de la colline. Quelle est la longueur du câble ?
5. Vous commandez à une compagnie de bois un poteau de 58 m de hauteur. Un bûcheron pense avoir repéré un arbre assez haut pour satisfaire la commande. L'arbre est situé sur une colline et l'angle qu'il fait par rapport au plan de la colline est de 115°. Le bûcheron, placé à 89 m de l'arbre voit le sommet de l'arbre sous un angle de 25°. L'arbre est-il bien celui qu'il faut couper ?
6. Une maison de 12 m de hauteur est vue, d'un point a au sol, sous un angle de 7°.
   (a) Quelle est la distance du point a de la maison ?
   (b) Si le point a se trouvait non pas au sol mais à mi-hauteur, et que l'angle de vision soit encore 7°, quelle différence y aura-t-il entre la distance obtenue à partir de ces nouvelles données et le résultat trouvé au début ?
   (c) Si dans chacune des hypothèse, l'angle était non pas de 7°, mais de 45°, la différence serait-elle aussi négligeable que dans le premier cas ?
7. Une voiture circule sur un tronçon rectiligne d'autoroute. A un endroit donné, le sommet d'une colline est vu dans une direction qui forme un secteur angulaire de 45° avec la route ; 1 km plus loin, la direction sous laquelle on voit la colline forme un angle de 40° avec celle de l'autoroute. Quelle est la distance de la colline à l'autoroute ?
8. Si une rampe pour Personnes à Mobilité Réduite a une pente constante de 5% et que le point culminant est à 55 cm, quelle est la longueur parcourue horizontalement pour cette rampe ?
9. Vous devez réaliser un aménagement pour Personnes à Mobilité Réduite sur un terrain en pente de 6% et de 80 m de long (mesurés le long de la pente) permettant à ces

personnes de se mouvoir du point A jusqu'au point B.
Pour réaliser cette rampe, vous allez mettre à la suite l'une de l'autre des rampes d'un seul des 4 types standards représentés sur le schéma suivant. Dans ces rampes, chaque tronçon de cheminement doit être suivi d'un palier de repos d'une longueur de $1,5$ m.
On vous demande de choisir le type de rampe qui est le plus raide en moyenne (c-à-d en tenant compte du tronçon de cheminement et du palier).



Sachant que vous pouvez démarrer directement au point A avec un cheminement en pente, calculez en cm la différence d'altitude au point B entre votre cheminement (d'un seul type de rampe) et le terrain naturel (un nombre négatif indiquera que vous êtes en déblais, un nombre positif en remblais).

10. Un géomètre souhaite connaître la hauteur d'une tour. Pour ce faire, depuis sa station de mesure située à 1m 60 du sol, il effectue une première mesure de l'angle sous lequel il aperçoit la tour : celui-ci est de 30°. Ensuite, le géomètre avance de 30 m et effectue une nouvelle mesure de l'angle sous lequel il aperçoit la tour : il est cette fois de 75°. Déterminez la hauteur h de la tour.

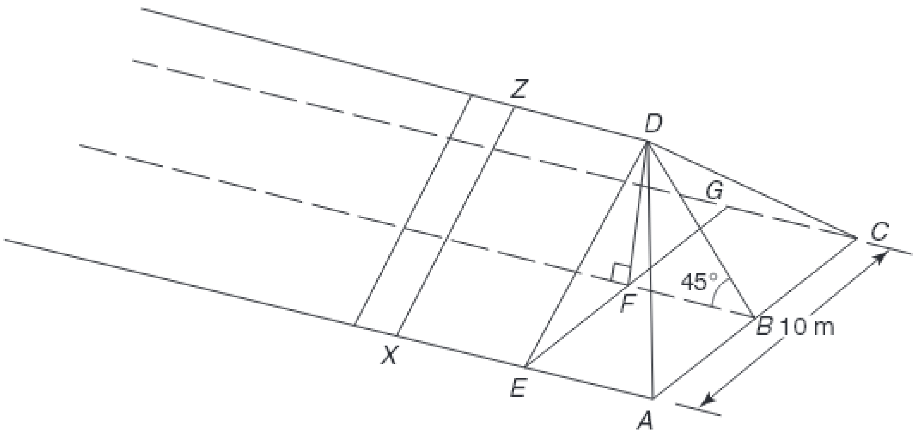


11.* L'inclinaison d'un toit de 14m de long vaut 45°. Si ce toit mesure 10m de large, déterminez :

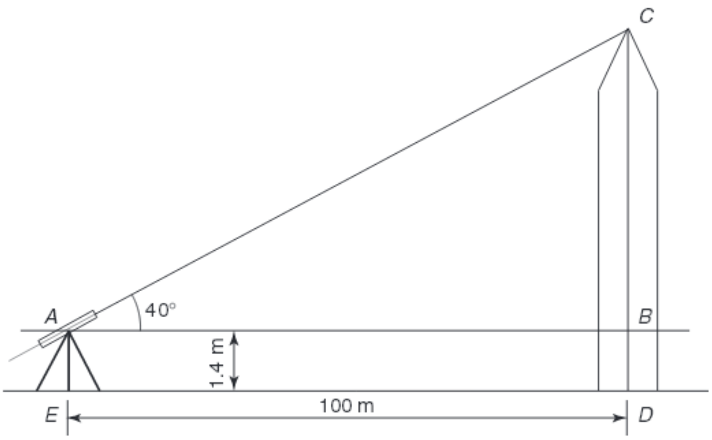
(a) La hauteur DF du toit

(b) La longueur du chevron XZ

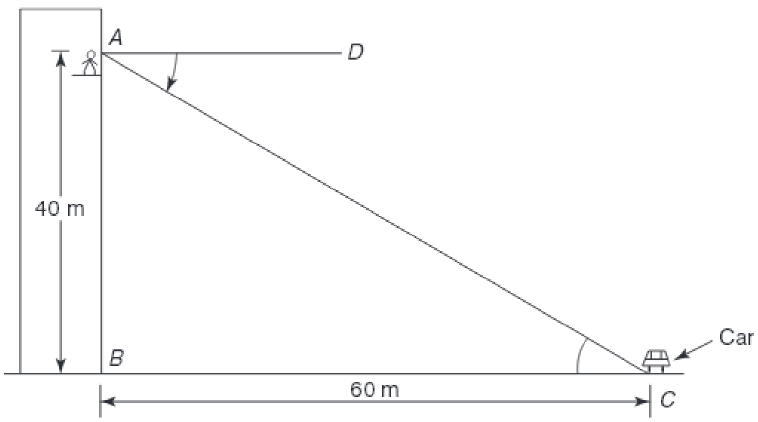
(c) La longueur du chevron DA



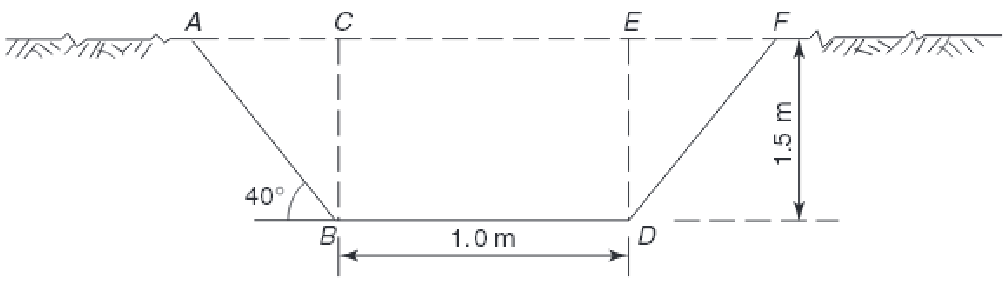
12.* Un passant souhaite calculer la hauteur d'une tour. Pour ce faire, il positionne son instrument de mesure à 100m de celle-ci et constate que l'angle d'élévation du sommet de la tour vaut 40°. Sachant que la hauteur de l'instrument est de 140cm, déterminez la hauteur de la tour.



13.* Isaline habite au 15ème étage d'un immeuble et regarde par la fenêtre sa voiture garée dans la rue adjacente. Calculez l'angle de dépression sachant que le 15ème étage se trouve à une hauteur de 40m et que la voiture est garée à 60m de l'immeuble.

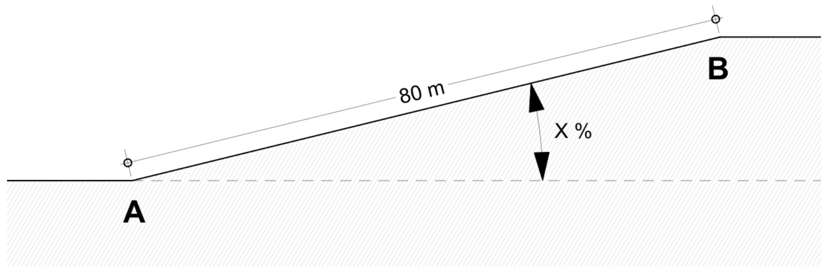


14.* Un fossé de 10m de long, dont la section est un trapèze isocèle, possède des côtés inclinés formant un angle de 40° avec l'horizontale. Si la base du fossé mesure 1m de large et se situe à une profondeur de 1, 5m, déterminez le volume de terre à extraire.



Solutions des problèmes

1. Hauteur de la tour : 49,56 m
2. Premier angle : $154°45'18''$, deuxième angle : $25°14'42''$
3. (a) Angle : $33°12'23''$
   (b) Distance : $13,15$ m
4. Longueur du câble : $115,12$ m
5. Hauteur de l'arbre : $58,51$ m (un peu court)
6. (a) Distance au sol : $97,73$ m distance à mi-hauteur : $98,0991$ m
   (b) Distance au sol : 12 m distance à mi-hauteur : $14,48$ m
   (c) Différence non négligeable car, si $\tan 7° \approx \tan 3,5°$, $\tan 22,5° = 0,414$ et $\tan 45° = 1$.
7. Distance de la colline à l'autoroute : $5,21$ km.
8. 11 m
9. Résolution de l'exercice de trigonométrie



   (a) Choix de la pente la plus raide :
   Le pourcentage d'une pente est égal au quotient de la hauteur atteinte divisée par la longueur parcourue horizontalement. Pour chacune des rampes de l'énoncé nous obtenons donc les pentes moyennes suivantes :
   - $p_1 = \dfrac{0,5m}{11,5m} = 0,0435 = 4,35\%$
   - $p_2 = \dfrac{0,35m}{6,5m} = 0,0538 = 5,38\%$
   - $p_3 = \dfrac{0,16m}{3,5m} = 0,0457 = 4,57\%$
   - $p_1 = \dfrac{0,06m}{2m} = 0,03 = 3\%$

Nous devons donc choisir la rampe numéro 2 (pente de 7% et pente moyenne de $5,38\%$)

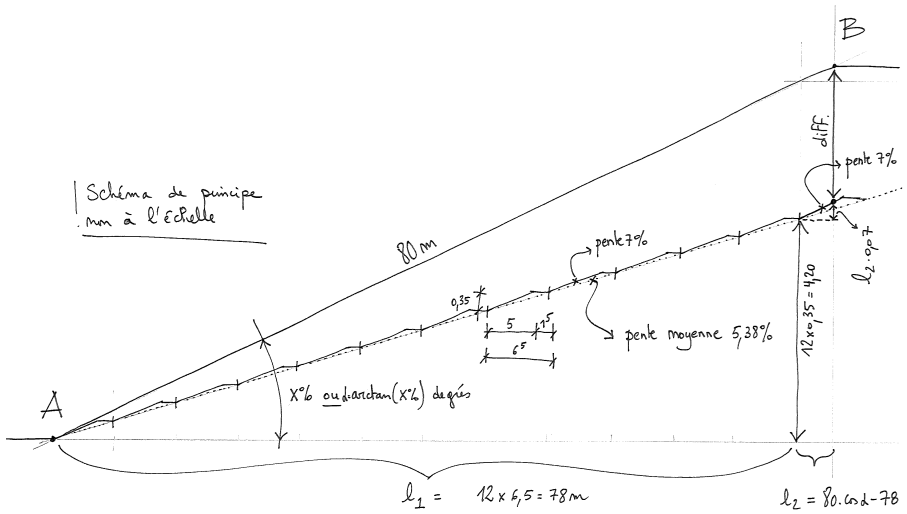
Remarque : Pour obtenir l'angle α que fait la pente avec l'horizontale, nous avons

$$p = \frac{h}{l} = \tan \alpha.$$

Pour exemple pour la pente numéro 2, nous avons

$$\alpha = \arctan p_2 = 3,08°.$$

(b) Insertion de cette rampe sur le terrain :



Une séquence complète (pente + palier) de la rampe numéro 2 fait $6,5$ m horizontalement. Regardons pour commencer combien de séquences complètes de cette rampe il est possible de placer sur le terrain. Pour cela, nous devons connaître la longueur horizontale du terrain. Or, sur le schéma, dans le triangle ABC, la longueur Horizontale $\overline{AC}$ du terrain est le côté adjacent à l'angle α. De plus, $\alpha = \arctan(6\%) = 3,43°$. Nous avons donc

$$\text{longueur horizontale du terrain} = 80m. \cos(3,43°) = 79,86m$$

Nous pouvons alors calculer le nombre de séquences de rampe que l'on peut placer sur le terrain, en divisant la longueur horizontale du terrain par la longueur horizontale d'une rampe :

$$n_{seq} = \frac{79,86}{6,5} = 12,285$$

Nous pouvons donc placer 12 séquences complètes de rampe sur ce terrain.

Après ces 12 séquences complètes, nous avons donc parcouru horizontalement $12.6,5m = 78m$ et nous atteignons une hauteur de $12.0,35m = 4,2m$. Il reste donc $79,86m - 78m = 1,86m$ à parcourir horizontalement afin d'arriver au droit de B.

L'énoncé nous impose de garder la même rampe, nous allons donc encore monter à du 7 % pendant 1,86 m horizontalement (le palier de la dernière rampe est au delà de B, il ne faut donc plus considérer la pente moyenne). Nous monterons donc encore de

$$1,86m.7\% = 1,86m.0,07 = 0,13m.$$

Au total, nous serons donc monté de

$$4,2m + 0,13m = 4,33m.$$

(c) <u>Différence d'altitude avec le point B</u> :

Dans le triangle rectangle ABC, la hauteur du point B correspond au côté opposé à l'angle α, nous a avons alors

$$\text{hauteur du point } B = 80m.\sin(3,43°) = 4,79m.$$

La différence de hauteur au point B est donc de $4,33m - 4,79m = -0,46m$. Il faut donc déblayer 46 cm de terre.

10. (a) Dans le triangle rectangle de droite, on a

$$h = 1,60 + \sin(75°).H$$

où H est l'hypoténuse du triangle rectangle. Or avec les formules d'addition pour le sinus, il vient

$$\sin(75°) = \sin(45° + 30°) = \sin(45°)\cos(30°) + \sin(30°)\cos(45°)$$

$$\sin(75°) = \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\right).$$

De plus, dans le triangle quelconque de gauche, en utilisant la relation des sinus, on obtient

$$\frac{H}{\sin(30°)} = \frac{30}{\sin(45°)}.$$

On en tire que $H = \dfrac{30\sin(30°)}{\sin(45°)} = \dfrac{\frac{30}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \dfrac{30}{\sqrt{2}}$ et au final

$$h = 1,60 + \sin(75°).H = 1,60 + \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\right)\frac{30}{\sqrt{2}} = 1,60 + \frac{30}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\right).$$

($h = 1,60 + 20,46$ si on donne la valeur de $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ pour calculer sans calculette)

(b) Dans le triangle rectangle de droite, on a

$$h = 1,60 + \sin(\beta)H$$

où H est l'hypoténuse du triangle rectangle. L'angle supérieur du triangle quelconque de gauche vaut

$$180° - \alpha - (180° - \beta) = \beta - \alpha$$

En utilisant la relation des sinus dans le triangle de gauche, il vient donc

$$\frac{H}{\sin(\alpha)} = \frac{l}{\sin(\beta - \alpha)}.$$

On en tire que $H = \dfrac{\sin(\alpha)l}{\sin(\beta - \alpha)}$ et au final que

$$h = 1,60 + \frac{\sin(\alpha)\sin(\beta)}{\sin(\beta - \alpha)}l.$$

C'est cette formule que les géomètres utilisent pour calculer la hauteur d'un objet à l'aide de deux mesures d'angle.

11. (a) $DF = 5m$
    (b) $XZ = 7,071m$
    (c) $DA = 8,66m$
12. La tour mesure $85,310$m de haut.
13. L'angle de dépression vaut $33,69°$.
14. Il faut retirer $41.82m^3$ de terre.

Séances d'exercices 4 et 5

3 Exercices sur les études de fonctions

1. Calculer le domaine des fonctions suivantes :
   (a) $f(x) = \sqrt{2x+7}$
   (b) $f(x) = \frac{1}{\cos 3x}$
   (c) $f(x) = \frac{x^3}{1-|x|}$
   (d) $f(x) = \sqrt{x^2+2x+3}$
   (e) $f(x) = \sqrt{(x-2)(x+1)}$
   (f) $f(x) = \sqrt{2\cos x - 1}$

2. Chercher algébriquement les intersections des courbes suivantes et représenter graphiquement ces courbes :
   (a) $y = x^2 - 4x - 5$ avec l'axe des X et l'axe des Y.
   (b) $y = 2x - 3$ et $y = x^2 + 2x$
   (c) $y = 2x + 3$ et $y = x^2 + 2x$
   (d) $x = y^2 + 2$ et $x = 3$

3. Calculer le domaine des fonctions $(f \circ g)$ et $(g \circ f)$:

$$f(x) = \sqrt{2x+7},\ g(x) = \frac{1}{x}$$

4. Calculer les limites suivantes :
   (a) $\lim\limits_{x\to 0}(-x^3 - 7x^2 - 6x + 5)$
   (b) $\lim\limits_{x\to -2}(-x^3 - 7x^2 - 6x + 5)$
   (c) $\lim\limits_{x\to +\infty}(-x^3 - 7x^2 - 6x + 5)$
   (d) $\lim\limits_{x\to -\infty}(-x^3 - 7x^2 - 6x + 5)$
   (e) $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{|x|}{x}$ et $\lim_{x\to 0^-} \frac{|x|}{x}$
   (f) $\lim\limits_{x\to 2^+} \sqrt{x-2}$ et $\lim_{x\to 2^-} \sqrt{x-2}$

5. Calculer la limite $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$
   (a) Si $f(x) = x^2 - 6x + 9$ et $g(x) = x^2 - 9$ et $a = 1, a = 3, a = +\infty, a = -3$
   (b) Si $f(x) = x^2 + x - 6$ et $g(x) = x^2 - x - 2$ et $a = 2$

(c) Si $f(x) = 3x - 4$ et $g(x) = 2x^2 - 3x + 5$ et $a = +\infty$

(d) Si $f(x) = 2x^2 - 3$ et $g(x) = 5x^2 + 4x - 6$ et $a = +\infty$

(e) Si $f(x) = \sqrt{x^2 + 3x - 5}$ et $g(x) = 3x + 2$ et $a = +\infty, a = -\infty$

(f) Si $f(x) = 3x^3 - 4x^2 - x + 2$ et $g(x) = 3x^2 - 6x + 3$ et $a = +\infty$

6. Utiliser la règle de l'Hospital pour calculer les limites suivantes :

   (a) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1 + \cos \pi x}{x^2 - 2x + 1}$

   (b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(\cos 3x)}{\ln(\cos 2x)}$

   (c) $\lim\limits_{x\to 0^+} (x \ \ln x)$

   (d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\arcsin x}{x}$

7. Calculer les asymptotes des fonctions suivantes :

   (a) $f(x) = \dfrac{x^2 - x - 2}{x - 2}$

   (b) $f(x) = \dfrac{(x-1)^2}{(x+2)^2}$

   (c) $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 2}$

   (d) $f(x) = \dfrac{x - 2}{x^2 - 1}$

   (e) $f(x) = \dfrac{x^2 - 4x + 3}{x + 1}$

   (f) $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$

   (g) $f(x) = \sqrt{x^2 + x} - x$ (dépassement)

8. Calculer les dérivées des fonctions suivantes :

   (a) $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2 - 1}$

   (b) $f(x) = (x^2 + 1)^{\frac{1}{3}}$

   (c) $f(x) = \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$

   (d) $f(x) = x\sqrt{x^2 + x + 1}$

   (e) $f(x) = \dfrac{1}{x + \sqrt{1 + x^2}}$

   (f) $f(x) = (\dfrac{x}{x^2 - 1})^{\frac{2}{3}}$

   (g) $f(x) = \dfrac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x}$

   (h) $f(x) = \dfrac{1 - \cos 2x}{1 + \cos 2x}$

   (i) $f(x) = \sin^3 x + \cos^3 x$

   (j) $f(x) = \tan^2 x^3$

   (k) $f(x) = \arccos(1/x)$

9. Vérifier que $(1 + x^2)y'' + xy' - 4y = 0$ où $y = (x + \sqrt{1 + x^2})^2$.

10. Si la somme de 2 nombres positifs vaut 2013, quel est le plus grand produit possible ? Le plus petit possible ?

11. Parmi tous les rectangles de périmètres donnés, quel est celui qui a la plus grande aire ?

12. Construire un parallélépipèède rectangle à base carrée, de volume V donné, dont la surface totale est minimale.

13. Parmi tous les cylindres circulaires droits de volume V donné, déterminer celui dont l'aire totale est maximale et ensuite l'aire totale est minimale.
14. Un fermier possède 120 mètres de clôture à utiliser dans la construction de deux enclos rectangulaires et identiques qui partagent un côté commun. Exprimer l'aire totale A(x) comprise par les deux enclos en fonction de la largeur x. En tenant compte de considérations physiques, quel est le domaine de la fonction A ? Trouver les dimensions des enclos qui maximiseront l'aire totale comprises par les enclos.
15. Lors de travaux d'aménagement, vous devez concevoir une annexe rectangulaire accolée à un living (le mur commun aux deux pièces est donc déjà existant). Quelle dimension donner à cette annexe pour que sa surface S soit maximale sachant que la longueur totale des murs de la nouvelle construction L vous est imposée ? Appliquez ensuite votre résultat pour une longueur totale de nouvelle construction égale à 16 m.
16. Une fenêtre romane a la forme d'un rectangle surmonté d'un demi-cercle. Le périmètre du rectangle étant de 6 m, déterminer les dimensions de la fenêtre qui laissent passer le plus de lumière. Prendre l et L comme notation pour les dimensions du rectangle.

Solutions

1. (a) $\text{dom} f = \left[-\frac{7}{2}, +\infty\right[$
   (b) $\text{dom} f = \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{3} : k \in \mathbb{Z}\}$
   (c) $\text{dom} f = \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$
   (d) $\text{dom} f = \mathbb{R}$
   (e) $\text{dom} f =]-\infty, -1] \cup [2, +\infty[$
   (f) $\text{dom} f = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left[-\frac{\pi}{3} + 2k\pi, \frac{\pi}{3} + 2k\pi\right]$
2. (a) Intersections avec l'axe des X : $(-1; 0)$,$(5; 0)$
   Intersection avec l'axe des Y : $(0; -5)$
   (b) Pas d'intersection
   (c) $(\sqrt{3}; 3 + 2\sqrt{3})$,$(-\sqrt{3}; 3 - 2\sqrt{3})$
   (d) $(3; 1)$,$(3; -1)$
3. $\text{dom}(f \circ g) = \left]-\infty, -\frac{2}{7}\right] \cup]0, +\infty[$
   $\text{dom}(g \circ f) = \left]-\frac{7}{2}, +\infty\right[$

4. (a) 5
   (b) -3
   (c) $-\infty$
   (d) $+\infty$
   (e) $1,-1$
   (f) 0, la limite n'existe pas
5. (a) Si $a = 1$: $-\dfrac{1}{2}$

   Si $a = 3$: 0

   Si $a = +\infty$: 1

   Si $a = -3$: la limite n'existe pas car

$$\lim_{x \to -3^-} \tfrac{f(x)}{g(x)} = +\infty \text{ et } \lim_{x \to -3^+} \tfrac{f(x)}{g(x)} = -\infty$$

   (b) $\dfrac{5}{3}$
   (c) 0
   (d) $\dfrac{2}{5}$
   (e) Si $a = -\infty$: $-\dfrac{1}{3}$

   Si $a = +\infty$: $\dfrac{1}{3}$

   (f) $+\infty$
6. (a) $\dfrac{\pi^2}{2}$
   (b) $\dfrac{9}{4}$
   (c) 0
   (d) 1
7. (a) Asymptote oblique : $y = x + 1$
   (b) Asymptote verticale : $x = -2$

   Asymptote horizontale : $y = 1$

   (c) Asymptote verticale : $x = 2$

   Asymptote oblique : $y = x + 2$

   (d) Asymptotes verticales : $x = 1$ et $x = -1$

   Asymptote horizontale : $y = 0$

(e) Asymptote verticale : $x = -1$

Asymptote oblique : $y = x - 5$

(f) Asymptotes obliques : $y = x$ en $+\infty$ et $y = -x$ en $-\infty$

(g) Asymptote horizontale : $y = \dfrac{1}{2}$ en $+\infty$

Asymptote oblique : $y = -2x - \dfrac{1}{2}$ en $-\infty$

8. (a) $Df(x) = \dfrac{x^2(x^2-3)}{(x^2-1)^2}$

(b) $Df(x) = \dfrac{2x}{3(x^2+1)^{\frac{2}{3}}}$

(c) $Df(x) = \dfrac{-1}{\sqrt{(x+1)(x-1)^3}}$

(d) $Df(x) = \dfrac{4x^2+3x+2}{2\sqrt{x^2+x+1}}$

(e) $Df(x) = \dfrac{-1}{\sqrt{1+x^2}(x+\sqrt{1+x^2})}$

(f) $Df(x) = -\dfrac{2}{3}\left(\dfrac{x^2-1}{x}\right)^{\frac{1}{3}} \dfrac{x^2+1}{(x^2-1)^2}$

(g) $Df(x) = \dfrac{2}{(\sin x + \cos x)^2}$

(h) $Df(x) = \dfrac{4 \sin 2x}{(1+\cos 2x)^2} = \dfrac{2 \sin x}{\cos^3 x}$

(i) $Df(x) = 3 \sin x \cos x (\sin x - \cos x)$

(j) $Df(x) = 6x^2 \dfrac{\tan x^3}{\cos^2 x^3}$

(k) $Df(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2(x^2-1)}}$

Séance d'exercices 6

4 Exercices sur les exponentielles

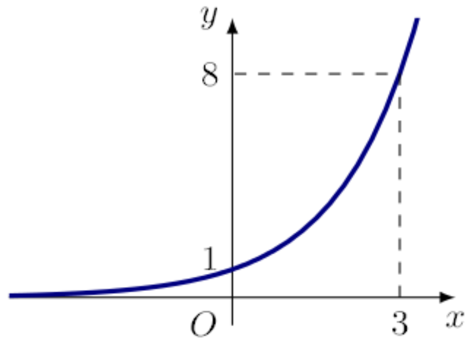
1. Résoudre les équations exponentielles suivantes :
   (a) $7^{2x-5} = 7^{1-x}$
   (b) $9^{x+1} = 3^{1-2x}$
   (c) $(0,3)^{3x+1} = \dfrac{1}{(0,3)^2}$
   (d) $2^{x+1} = \sqrt{2}$
   (e) $\left(\dfrac{1}{5}\right)^{3x-4} = 1$
   (f) $4^{x-1} + 1 = 5.2^{x-2}$
   (g) $3^{3x+1} + 7.3^{x+3} = 3^5 + 5.9^{x+1}$
   (h) $9^x + 3^{x-3} = 1 + 27^{x-1}$
   (i) $\ln x + \ln(4-x) = \ln(6-x)$
   (j) $\ln 2x - \ln(x+1) = \ln 3 - \ln(x+4)$
   (k) $e^{3x+1} = \dfrac{1}{e^2}$
   (l) $\log_3(x+2) = \log_3 7$

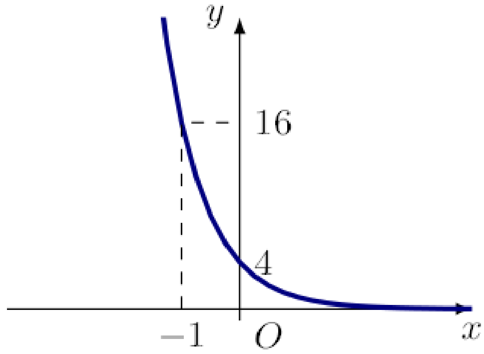
2. Calculer
   (a) $\left(-\dfrac{1}{3}\right)^2$
   (b) $\left(\dfrac{-4}{-9}\right)^{\frac{1}{2}}$
   (c) $\log_4 8$
   (d) $\log_{27} 9$

3. Déterminer le domaine des fonctions suivantes :
   (a) $f(x) = \log(1-2x)$
   (b) $f(x) = \dfrac{1}{\log_7 x}$
   (c) $f(x) = \log_2(1-3x) + \log_2(2x-1)$
   (d) $f(x) = \log_2(-1+5x-6x^2)$

4. Représenter graphiquement les fonctions suivantes :
   (a) $-\ln x$
   (b) $\ln(x-3)$
   (c) $-e^x$
   (d) $2e^x$

5. Identifier les fonctions exponentielles représentées (de la forme $f(x) = k.a^x$)





6. Un capital de valeur initiale C_0 est placé à intérêt composé au taux annuel de $i\%$.
   (a) Montrer que la valeur de ce capital au terme de t années est de
   $$C(t) = C_0(1 + \frac{i}{100})^t$$
   (b) Si $i = 5$, après combien de temps double-t-il ?
   (c) A quel taux d'intérêt faudrait-il le placer pour qu'il augmente de 50 % après 6 ans ?
7. La population du Nambutu était estimée à $35,7$ millions d'habitants le 1^{er} janvier 2005 ; son taux de croissance annuel est supposé constant et égal à $1,55\%$. En notant t le temps compté, en années, à partir du 1^{er} janvier 2000, écrire la fonction exprimant la population du Nambutu à l'instant t.
8. Le nombre $n(t)$ de bactéries dans une culture grandit exponentiellement avec le temps t exprimé en heures selon la loi
   $$n(t) = n_0.e^{kt}.$$

(a) Déterminer k sachant qu'après une heure, le nombre de bactéries a augmenté de 1% par rapport à l'instant $t = 0$.

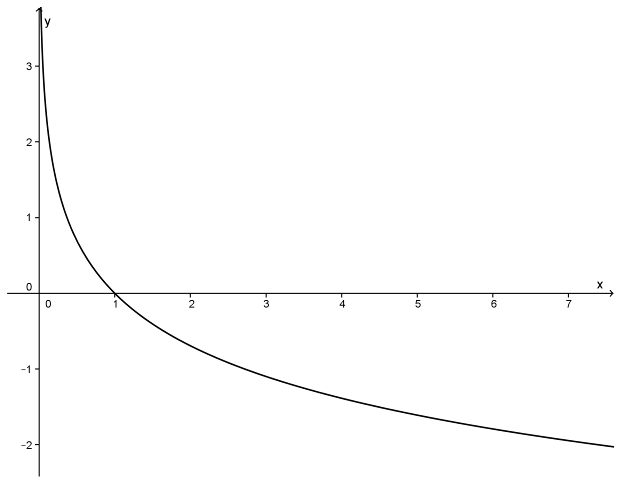
(b) Pour un tel k, si le nombre de bactéries à l'instant initial est de 10000, calculer

i. Le nombre de bactéries après $5h$;

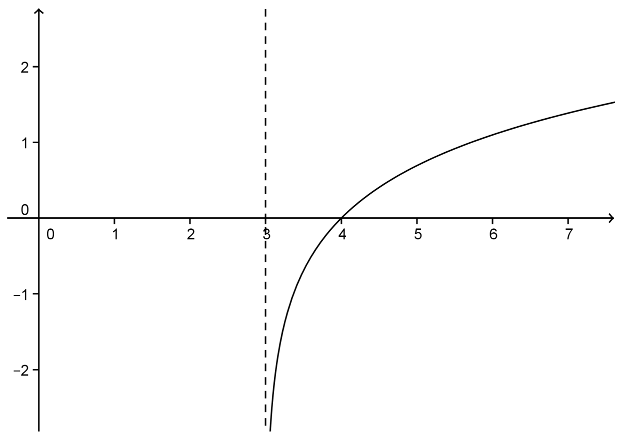
ii. Au bout de combien de temps la population atteindra 45000 bactéries.

Solutions

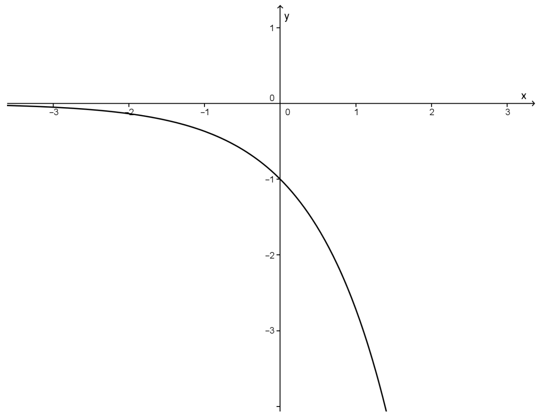
1. (a) $x = 2$
   (b) $x = -\frac{1}{4}$
   (c) $3x + 1 = -2$
   (d) $x = -\frac{1}{2}$
   (e) $3x - 4 = 0$
   (f) $x = 0, x = 2$
   (g) $x = 1, x = 2$
   (h) $x = 0, x = 3$
   (i) $x = 2, x = 3$
   (j) $x = -3$ à rejeter, $x = \frac{1}{2}$
   (k) $x = -1$
   (l) $x = 5$ Attention au domaine
2. (a) $\dfrac{1}{9}$
   (b) $\dfrac{2}{3}$
   (c) $\dfrac{3}{2}$
   (d) $\dfrac{2}{3}$
3. (a) $]-\infty, \frac{1}{2}[$
   (b) $]0, 1[\cup]1, +\infty[$
   (c) $\varnothing$
   (d) $]\frac{1}{3}, \frac{1}{2}[$
4. (a) $-\ln x$



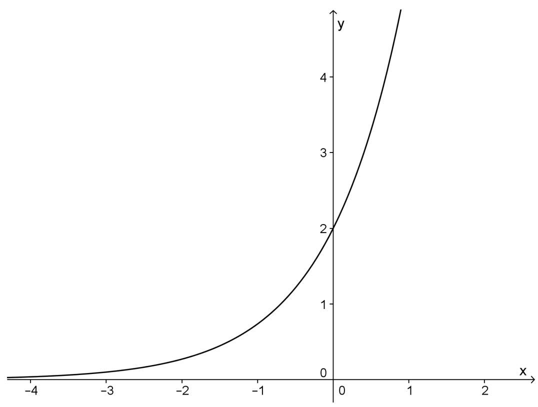
   (b) $\ln(x - 3)$



(c) $-e^x$



(d) $2e^x$



5. $f(x) = 2^x$

   $f(x) = 4.\left(\dfrac{1}{4}\right)^x = 4^{1-x}$

6. (a) équation

   (b) t= 14,2067 années

   (c) C = 6,99 %

7. $P(t) = 33.0574(1 + 0,0155)^t$
8. (a) $k = \ln(1,01) = 0,00995$
   (b) i. 10510 bactéries
      ii. 152 heures

Séances d'exercices 7, 8, 9 et 10

5 Exercices sur les intégrales

5.1 Coordonnées cartésiennes

1. Rechercher les primitives suivantes :

(a) $\displaystyle\int x^7 \, dx$

(b) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2} \, dx$

(c) $\displaystyle\int \sqrt{x} \, dx$

(d) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} \, dx$

(e) $\displaystyle\int (x^3 - 7x + 2) \, dx$

(f) $\displaystyle\int (3x - 1)(1 - x) \, dx$

(g) $\displaystyle\int \frac{x^2 - 1}{x^2} \, dx$

(h) $\displaystyle\int 3x^2(x^3 - 1)^7 \, dx$

(i) $\displaystyle\int \frac{3u^2}{(u^3 - 1)^4} \, du$

(j) $\displaystyle\int 10x \sin 5x^2 \, dx$

(k) $\displaystyle\int \frac{7}{\sqrt{1 - 49x^2}} \, dx$

(l) $\displaystyle\int t^2 \sqrt{t^3 + 2} \, dt$

(m) $\displaystyle\int \frac{x + 3}{\sqrt[3]{x^2 + 6x}} \, dx$

(n) $\displaystyle\int \cos 4x \, dx$

(o) $\displaystyle\int (1 - t)\sqrt{t} \, dt$

(p) $\displaystyle\int \frac{(1 + x)^2}{\sqrt{x}} \, dx$

(q) $\displaystyle\int \frac{1 + \cos^2 x}{\cos^2 x} \, dx$

(r) $\displaystyle\int \sin x \cos^3 x \, dx$

(s) $\displaystyle\int \frac{\cos \sqrt{x}}{\sqrt{x}} \, dx$

(t) $\displaystyle\int \frac{x^3 + 5x^2 - 4}{x^2} \, dx$

(u) $\displaystyle\int x \, e^{2x} \, dx$

(v) $\displaystyle\int x^2 \, e^{2x} \, dx$

(w) $\displaystyle\int \ln x \, dx$

2. Calculer les intégrales définies suivantes :

   (a) $\int_0^1 (3x^2+4)^3 \; dx$

   (b) $\int_0^\pi \sin x \cos^4 x \; dx$

   (c) $\int_0^3 (x-1)(x+2) \; dx$

   (d) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin x \; dx$

   (e) $\int_1^3 x^2 - 3x + 1 \; dx$

   (f) $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2+9}$

   (g) $\int_0^\pi (x+1)\cos x \; dx$

   (h) $\int_{-2}^2 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$

   (i) $\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{4-x}}$

3. Calculer l'intégrale d'une fonction paire pour une borne inférieure $-a$ et une borne supérieure a.

4. Calculer l'intégrale d'une fonction impaire pour une borne inférieure $-a$ et une borne supérieure a.

5. Vérifier le théorême de la moyenne pour $f(x) = x^2$ avec $a = 1$ et $b = 3$.

6. Calculer l'aire comprise entre les courbes :

$$y = x^2 + 2x + 1 \; , \qquad y = x^2 - 2 \; , \qquad x = 0 \; , \qquad y = 0 \; , \qquad x = 2 \; .$$

7. Idem pour

$$y = \tfrac{1}{x} \; , \qquad y = 0 \; , \qquad x = 1 \; , \qquad x = 2 \; .$$

8. Calculer l'aire comprise entre les courbes d'équation :

$$y = \cos x \; , \quad y = \sin x \qquad \text{et} \qquad y = 0 \; , \qquad \text{lorsque } x \in \left[0, \tfrac{\pi}{2}\right] \; .$$

Solutions

1. (a) $\dfrac{x^8}{8} + c$

(b) $\dfrac{-1}{x} + c$

(c) $\dfrac{2}{3}\ x\ \sqrt{x} + c$

(d) $3\sqrt[3]{x} + c$

(e) $\dfrac{x^4}{4} - \dfrac{7x^2}{2} + 2x + c$

(f) $-x^3 + 2x^2 - x + c$

(g) $\dfrac{x^2+1}{x} + c$

(h) $\dfrac{(x^3-1)^8}{8} + c$

(i) $\dfrac{-1}{3(u^3-1)^3} + c$

(j) $-\cos(5x^2) + c$

(k) $\arcsin 7x + c$

(l) $\dfrac{2}{9}\ (t^3+2)\sqrt{t^3+2} + c$

(m) $\dfrac{3}{4}\ \sqrt[3]{(x^2+6x)^2} + c$

(n) $\dfrac{1}{4}\ \sin 4x + c$

(o) $\dfrac{2}{3}\ t\sqrt{t} - \dfrac{2}{5}\ t^2\sqrt{t} + c$

(p) $2\sqrt{x} + \dfrac{4x\sqrt{x}}{3} + \dfrac{2x^2\sqrt{x}}{5} + c$

(q) $\tan x + x + c$

(r) $-\dfrac{\cos^4 x}{4} + c$

(s) $2\sin\sqrt{x} + c$

(t) $\dfrac{x^3 + 10x^2 + 8}{2x} + c$

(u) $\dfrac{1}{2}\ x\ e^{2x} - \dfrac{1}{4}\ e^{2x} + c$

(v) $\dfrac{1}{2}\ x^2\ e^{2x} - \dfrac{1}{2}\ x\ e^{2x} + \dfrac{1}{4}\ e^{2x} + c$

(w) $x\ln x - x + c$

2. (a) $\left.\dfrac{135x^7 + 756x^5 + 1680x^3 + 2240x}{35}\right|_0^1 = \dfrac{4811}{35}$

(b) $\left.\dfrac{-\cos^5 x}{5}\right|_0^\pi = \dfrac{2}{5}$

(c) $\left.\dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^2}{2} - 2x\right|_0^3 = \dfrac{15}{2}$

(d) 0

(e) $-\dfrac{4}{3}$

(f) $\dfrac{\pi}{6}$

(g) -2

(h) π

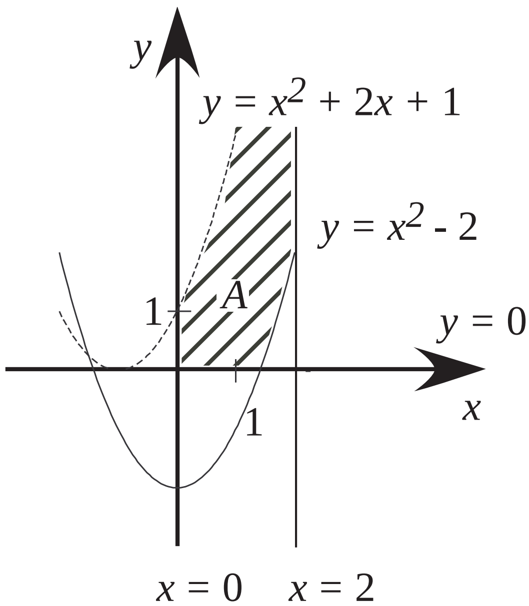
(i) 4

3. Voir théorie

4. Voir théorie

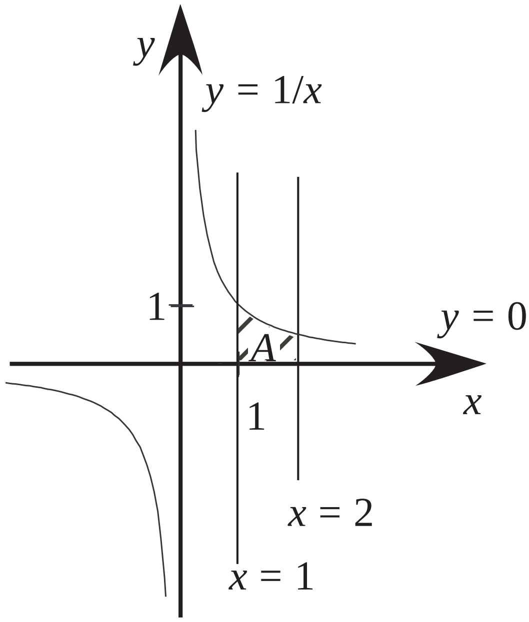
5. c $\approx$ 2,08

6. $A = \int_0^2 (x^2+2x+1)\ dx - \int_{\sqrt{2}}^2 (x^2-2)\ dx$
   $= \left(\frac{x^3}{3}+x^2+x\right)\Big|_0^2 - \left(\frac{x^3}{3}-2x\right)\Big|_{\sqrt{2}}^2$
   $= \left(10-\frac{4\sqrt{2}}{3}\right)$



7. $A = \int_1^2 \frac{1}{x}\ dx$

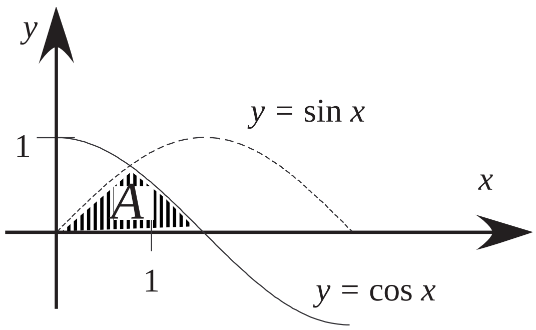
   $= \ln x|_1^2 = \ln 2$



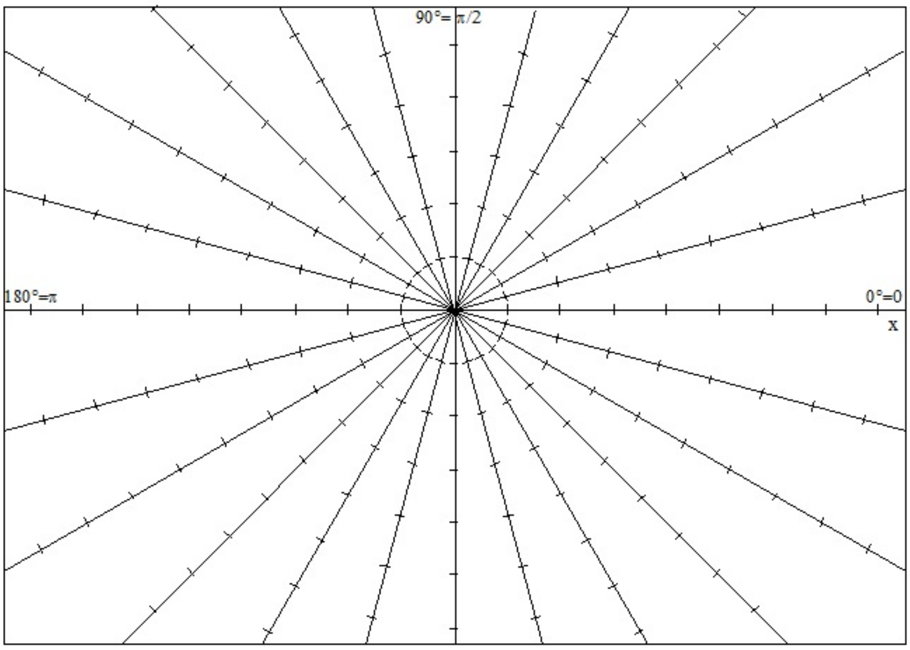
8. $A = \int_0^{\pi/4} \sin x \; dx + \int_{\pi/4}^{\pi/2} \cos x \; dx$

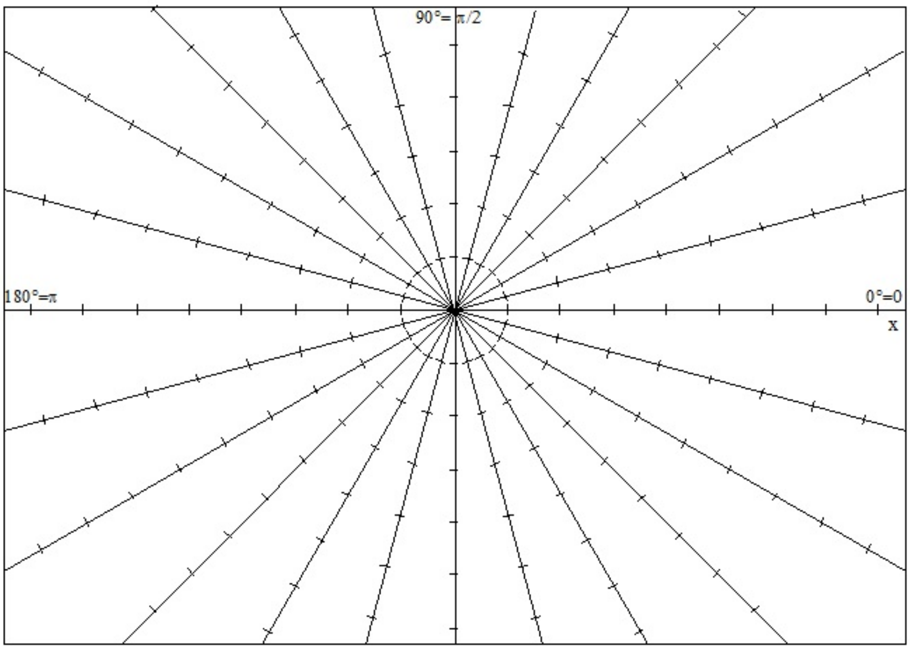
$= -\cos x|_0^{\pi/4} + \sin x|_{\pi/4}^{\pi/2}$

$= (2 - \sqrt{2})$



5.2 Coordonnées polaires





1. Représenter sur les graphiques les fonctions suivantes :
   (a) la cardioïde $\rho = 3(1 + \cos\theta)$ avec $\theta \in [0, 2\pi]$
   (b) la rosace $\rho = 4(\sin 2\theta)$ avec $\theta \in [0, \pi]$
2. Calculer l'aire d'une cardioïde d'équation $\rho = 2(1 - \cos\theta)$.
3. Calculer l'aire d'une cardioïde d'équation $\rho = a(1 - \cos\theta)$ avec si $a > 0$.
4. Calculer l'aire délimitée par l'astroïde dont le domaine est donné par $\rho = a\sqrt{2\cos 2\theta}$ avec $\theta \in [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$ ou $[\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}]$ avec $a > 0$.
5. Calculer l'aire commune entre le cercle $\rho = 3\cos\theta$ et la cardioïde $\rho = 1 + \cos\theta$.

Solutions

1. Voir cours
2. $A = 6\pi$
3. $A = \dfrac{3}{2}a^2$
4. $A = 2a^2$
5. $A = \dfrac{5\pi}{4}$

5.3 Coordonnées paramétriques

1. Soit l'équation paramétrique d'un cercle de rayon 3 et centrée en (0,0)
$$\begin{cases} x &= 3\cos\theta \\ y &= 3\sin\theta \end{cases}$$
Calculer l'aire sous-tendue par cette courbe.
2. Calculer l'aire comprise entre une arche de cycloïde d'équations paramétriques
$$\begin{cases} x &= 2(t - \sin t) \\ y &= 2(1 - \cos t) \end{cases}$$
3. Calculer l'aire de la surface délimitée par une astroïde d'équation paramétrique
$$\begin{cases} x &= 2\cos^3 u \\ y &= 1\sin^3 u \end{cases}$$

Solutions

1. $A = 9\pi$
2. $A = 12\pi$
3. $A = \frac{3}{4}\pi$

5.4 Exercices sur les calculs de volume

1. Calculer le volume d'une sphère de rayon R.
2. Calculer le volume engendré par la rotation d'une demi ellipse
   (a) on tourne autour de OX.
   (b) on tourne autour de OY.
3. Calculer le volume du cylindre circulaire droit de rayon R et de hauteur h.
4. Calculer le volume du cône circulaire droit de rayon R et de hauteur h.
5. Soit la surface délimitée par la parabole $y^2 = 8x$ et la droite $x = 2$, calculer le volume engendré par la rotation de cette surface autour de l'axe des y.
6. Soit la surface délimitée par la parabole $y = 4x - x^2$ et par l'axe des x, calculer le volume engendré par la rotation de cette surface autour de la droite $y = 6$.
7. Calculer le volume engendré par la rotation de la surface $y = 4x^2$, limitée par les droites $x = 0$ et $y = 16$, autour de l'axe des y.

Solutions

1. $V = \frac{4}{3}\pi R^3$
2. (a) $V = \frac{4}{3}\pi a^2 b$
   (b) $V = \frac{4}{3}\pi b^2 a$
3. $V = \pi R^2 h$
4. $V = \frac{1}{3}\pi R^2 h$
5. $V = \frac{28}{5}\pi$
6. $V = \frac{1408}{15}\pi$
7. $V = 32\pi$

Séance d'exercices 11

6 Exercices supplémentaires sur les calculs d'aire et de volume

1. Calculer le volume engendré par la rotation autour de OX de la courbe plane $xy = R^2$, avec $x \in [R, +\infty[$.
2. Calculer le volume engendré par la rotation autour de OX de la courbe plane $y = \sin x$ avec $x \in [0, \pi]$.
3. Calculer le volume engendré par la rotation de la surface $y = 4x^2$ limitée par les droites $x = 0$ et $y = 16$ autour de l'axe OY. Même question si la surface tourne autour de la droite $y = 16$.
4. Calculer le volume engendré par la rotation de la surface $y = x^3$ limitée par les droites $y = 0$, $x = 2$ autour de OX. Même question si la surface tourne autour de la droite $x = 2$.
5. Calculer l'aire sous tendue par l'astroïde d'équation
$$x(u) = 2\cos^3 u, y(u) = \sin^3 u,\ u \in [0, 2\pi].$$
6. Calculer l'aire sous tendue par la cardioïde d'équation
$$\rho = 3(1 - \cos\theta),\ \theta \in [0, 2\pi].$$
7. Calculer l'aire sous tendue par un arc de cycloïde d'équation
$$x(u) = u - \sin u,\ y(u) = 1 - \cos u,\ u \in [0, 2\pi].$$

7 Examen de juin 2013

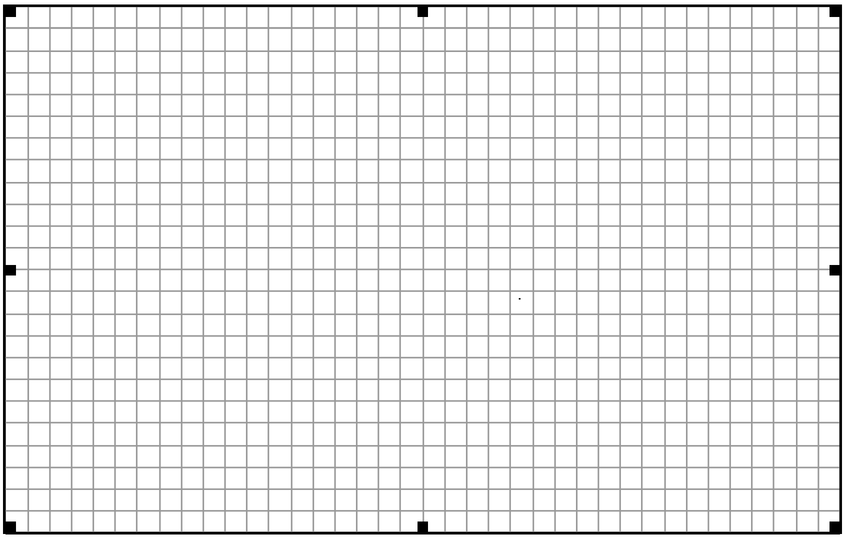
Examen de mathématique - 1BAC - premier quadrimestre / 20

Pour chacune des questions QCM, cochez les réponses correctes (et uniquement celles-là). Vous n'avez droit ni à vos notes, ni à votre calculatrice. Justifiez vos réponses. Bon travail !

Etude de fonction /5

1. Donnez le domaine, la parité et les asymptotes de la fonction $f(x)$. Calculez ensuite les dérivées, leurs tableaux de signes et réalisez le graphique.

$$f(x) = \frac{x^2 - x + 1}{x - 1}$$



Optimisation /5

2. On décide d'accoler à une construction existante un abri ouvert, rectangulaire, composé de deux parois verticales de 1 m de largeur, et d'un toit horizontal. Le toit est exécuté en zinc dont le prix est de 40 euros le m^2. Les deux côtés sont réalisés en contre-plaqué dont le prix est de 15 euros le m^2. Sachant que l'on a dépensé 360 euros, quelle sont les dimensions de l'abri pour que son volume soit maximal ? Quel est alors ce volume ?

Choix multiples /5

3. **Evaluer** $\cos 75°$

   ☐ $\frac{\sqrt{2}+1}{2}$

   ☐ $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2}$

   ☐ $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

   ☐ $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

   ☐ Aucune de ces réponses. La réponse est ....

4. **Un architecte décide de s'octroyer 12 % de bénéfice sur le prix final d'un projet. Comme le client est hésitant, il décide ensuite de se résigner à faire 12 % de ristourne sur le prix donné. Quel est le résultat final de cette opération commerciale ?**

   ☐ La perte est de ....%

   ☐ Le gain est de ....%

5. **Si une pente de toit a une déclivité de 100 % et que la longueur du versant (de la corniche au faîtage) mesure 240 cm, de quelle hauteur utile dispose-t-on sous le faîtage ?**

   ☐ 240 cm

   ☐ $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 240 cm

   ☐ $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 240 cm

   ☐ Impossible. Pourquoi ? ....

Trigonométrie /5

6. Résoudre dans $\mathbb{R}$

$$12\cos^2 x - 5 - 8\sin x = 0$$

Les solutions comprises entre 0 et 2π seront portées sur le cercle trigonométrique.

Examen de mathématique - 1BAC - second quadrimestre / 20

Pour la question rapide, uniquement votre réponse sera prise en compte. Vous n'avez droit ni à vos notes, ni à votre calculatrice. Justifiez toutes vos réponses. Bon travail !

QCM /4

1. **Calculez** $I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin x \; dx$

   ☐ $I = \pi$

   ☐ $I = 0$

   ☐ $I = 2\pi$

   ☐ $I = \pi^2/4$

   ☐ Aucune de ces réponses : la réponse correcte est ....

2. **Calculez l'aire sous tendue par la courbe**

$$\rho = 2(1 + \cos\theta) \text{ si } \theta \in [0, \pi]$$

   ☐ $A = 2\pi$

   ☐ $A = 3\pi$

   ☐ $A = 6\pi$

   ☐ $A = 12\pi$

   ☐ Aucune de ces réponses : la réponse correcte est ....

Question rapide /2

3. **Résoudre** $2\ln 3 = \ln(x+2) + \ln(5-2x)$**. Attention au domaine.**

   ☐ *Solution* : ....

Calcul de volume /5

4. Calculez le volume engendré par la rotation de la surface $y = 3x^2$ limitée par les droites $x = 0$ et $y = 12$ autour de l'axe OY. Même question si la surface tourne autour de la droite $y = 12$.

Calcul d'aire /4

5. Calculez l'aire comprise entre la parabole $y = -x^2 + 9$ et les droites $4x + y = 4$ et $5x - y = 5$. Je vous demande de considérer l'aire pour laquelle tous les y doivent être positifs ou nuls.

Calcul d'aire /5

6. Calculez l'aire limitée par la courbe d'équation paramétrique

$$\begin{cases} x &= 3+\cos\theta \\ y &= 4\sin\theta \end{cases} \quad \text{avec } \theta \in [0, 2\pi].$$

Tracer le graphe.