Thèse de doctorat en Sciences

Projectively Invariant Quantization in Super Geometry

Thomas LEUTHER

Juin 2013

Université de Liège

Académie Universitaire Wallonie-Europe

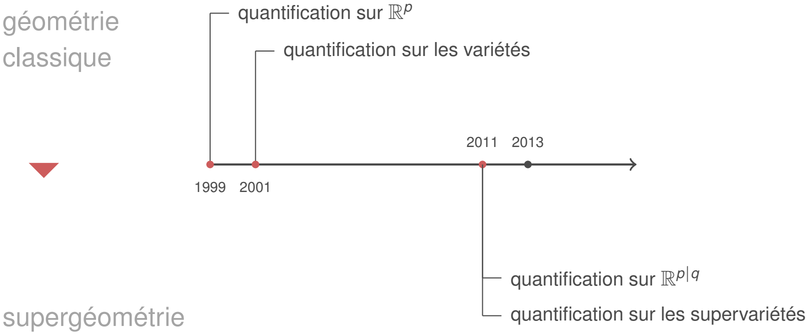
Thèse de doctorat en Sciences

Quantification Projectivement Invariante en Supergéométrie

Thomas LEUTHER

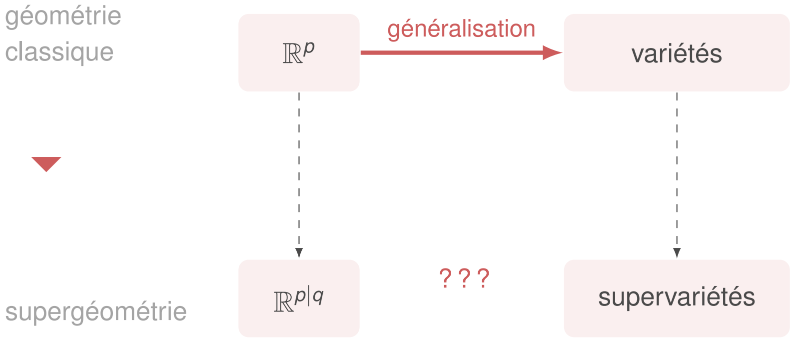
Juin 2013

La recherche de quantifications projectivement invariantes a été étendue au contexte de la supergéométrie.



La supérisation dans langage des faisceaux complique l'étude des aspects géométriques.

Quid du lien entre cas courbe et cas plat ?



La thèse formule, dans le langage des $\mathcal{A}$-variétés
les réponses à 3 questions.

La quantification sur $\mathbb{R}^{p|q}$ est-elle associée
à l'action d'un super groupe projectif ?
invariance projective dans le cas plat

La quantification sur les supervariétés est-elle liée
à la notion de supergéodésique ?
invariance projective dans le cas courbe

La quantification sur les supervariétés
généralise-t-elle la quantification sur $\mathbb{R}^{p|q}$?
particularisation du cas courbe au cas plat

On retrouve, en supergéométrie,
les liens qui existent en géométrie classique.

$$
\begin{tikzcd}
\text{géométrie classique} & \mathbb{R}^p \arrow[r] \arrow[d] & \text{variétés} \arrow[d] \\
\text{supergéométrie} & \mathbb{R}^{p|q} \arrow[r, "\text{généralisation}"] & \text{supervariétés}
\end{tikzcd}
$$

Plan

invariance projective dans le cas plat

invariance projective dans le cas courbe

particularisation du cas courbe au cas plat

invariance projective dans le cas plat

invariance projective dans le cas courbe

particularisation du cas courbe au cas plat

Le langage des $\mathcal{A}$-variétés ressemble au langage de la géométrie classique.

1. algèbre de nombres

   $\mathcal{A} = \mathcal{A}_0 \oplus \mathcal{A}_1 \quad , \quad a \cdot b = (-1)^{\epsilon(a).\epsilon(b)} \cdot b \cdot a$

2. $\mathcal{A}$-espace vectoriel

   $E^{p|q} = E_0^{p|q} \oplus E_1^{p|q}$

3. $\mathcal{A}$-variété

   modèle local $E_0^{p|q}$

   espace topologique M + cartes locales

4. fibrés, connexions…

Le langage des $\mathcal{A}$-variétés est équivalent au langage des faisceaux.

Il y a une équivalence de catégories **B** entre les $\mathcal{A}$-espaces vectoriels et les super espaces vectoriels réels.

Il y a une équivalence de catégories entre les $\mathcal{A}$-variétés et les supervariétés définies en termes de faisceaux.

$$E_0^{p|q} \leftrightarrow \mathbb{R}^{p|q} = (\mathbb{R}^p, \mathrm{C}^\infty_{\mathbb{R}^{p|q}})$$

correspondance des modèles locaux

La construction classique du plongement projectif peut être adaptée en supergéométrie.

géométrie classique

supergéométrie

1. action du groupe projectif

$$\underbrace{\mathrm{PAut}(p+1|q,\mathcal{A})}_{\text{super groupe projectif}} \times \mathrm{P}(E_0^{p+1|q}) \to \mathrm{P}(E_0^{p+1|q})$$

2. algèbre projective

$$\mathfrak{paut}(p+1|q,\mathcal{A}) = \mathrm{Lie}(\mathrm{PAut}(p+1|q,\mathcal{A}))$$

3. champs fondamentaux

$$\{X^h : E_0^{p|q} \to TE_0^{p|q}\}_{h\in\mathfrak{paut}(p+1|q,\mathcal{A})}$$

L'expression des champs du plongement projectif coïncide avec les formules de Mathonet-Radoux.

$$\mathbf{B}\mathfrak{paut}(p+1|q,\mathcal{A}) = \mathfrak{pgl}(p+1|q,\mathbb{R})$$

$$\mathfrak{paut}(p+1|q,\mathcal{A}) \cong \underbrace{E^{p|q}}_{\mathfrak{g}_{(1)}} \oplus \underbrace{\mathrm{End}_R(E^{p|q})}_{\mathfrak{g}_{(0)}} \oplus \underbrace{(E^{p|q})^*}_{\mathfrak{g}_{(1)}}$$

$$\begin{cases} X^h = -\sum_{i=1}^{p+q} \underbrace{h^i}_{\in\mathcal{A}} \cdot \partial_{y^i} \ , & \text{dans } \mathfrak{g}_{(-1)} \\ X^h = -\sum_{i,j=1}^{p+q} (-1)^{\varepsilon_j.(\varepsilon_i+\varepsilon_j)} \cdot \underbrace{h^i_j}_{\in\mathcal{A}} \cdot y^j \cdot \partial_{y^i} \ , & \text{dans } \mathfrak{g}_{(0)} \\ X^h = \sum_{j=1}^{p+q} (-1)^{\varepsilon_j} \cdot \underbrace{h_j}_{\in\mathcal{A}} \cdot y^j \cdot \mathcal{E} \ , & \text{dans } \mathfrak{g}_{(1)} \end{cases}$$

L'invariance projective du cas plat provient d'une famille lisse de champs de vecteurs sur $E_0^{p|q}$

famille de champs lisses

$$\{X^h : E_0^{p|q} \to TE_0^{p|q}\}_{h \in \mathfrak{pgl}(p+1|q,\mathbb{R})} \subset \mathrm{Vect}(E_0^{p|q})$$

famille lisse de champs de vecteurs

$$Z : \mathfrak{paut}(p+1|q,\mathcal{A})_0 \times E_0^{p|q} \to TE_0^{p|q},\ (h,x) \mapsto X^h(x)$$

invariance projective dans le cas plat

invariance projective dans le cas courbe

particularisation du cas courbe au cas plat

L'équivalence projective a été étendue à la supergéométrie de façon algébrique.

superconnexion sur M :

$$\nabla : \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \to \Gamma(TM)$$

$$\nabla_X Y = X^j \cdot \frac{\partial Y^i}{\partial x^j} \cdot \partial_{x^i} + (-1)^{\varepsilon_j(\varepsilon(Y)+\varepsilon_k)} \cdot X^j \cdot Y^k \cdot \Gamma^i_{jk} \cdot \partial_{x^i}$$

équivalence projective :

$$\nabla \sim \nabla' \overset{\text{déf.}}{\Leftrightarrow} \nabla - \nabla' = \alpha \vee \mathrm{id}$$

L'équivalence projective en supergéométrie peut être caractérisée en termes de géodésiques.

supérisation du théorème de Weyl

géométrie classique

supergéodésiques de ∇

$\overset{\text{déf.}}{=}$ projection sur M du flot du champ géodésique

$$G^{\nabla} \in \mathrm{Vect}(TM^{(0)})$$

supergéométrie

$$\nabla - \nabla' = \alpha \vee \mathrm{id}$$

ssi ∇ et ∇' ont les mêmes supergéodésiques à reparamétrisation près.

invariance projective dans le cas plat

invariance projective dans le cas courbe

particularisation du cas courbe au cas plat

Dans le cas plat, on cherche des quantifications

$$
\begin{array}{rcl}
Q : \bigoplus_{k \geqslant 0} \mathrm{Smb}^k(E_0^{p|q}) & \xrightarrow{\simeq} & \bigcup_{k \geqslant 0} \mathrm{Diff}^k(E_0^{p|q}) \\
S & \mapsto & Q(S)
\end{array}
$$

(quantification) Si $S = S^{i_1,\dots,i_k} \cdot \partial_{i_1} \vee \cdots \vee \partial_{i_k}$,
alors $Q(S) = S^{i_1,\dots,i_k} \cdot \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \circ \cdots \circ \frac{\partial}{\partial x^{i_k}}$ + ordres inférieurs

Dans le cas plat, on cherche des quantifications projectivement équivariantes

$$\begin{array}{rcl} Q : \bigoplus_{k\geqslant 0} \mathrm{Smb}^k(E_0^{p|q}) & \xrightarrow{\simeq} & \bigcup_{k\geqslant 0} \mathrm{Diff}^k(E_0^{p|q}) \\ S & \mapsto & Q(S) \end{array}$$

(quantification) Si $S = S^{i_1,\dots,i_k} \cdot \partial_{i_1} \vee \cdots \vee \partial_{i_k}$,
alors $Q(S) = S^{i_1,\dots,i_k} \cdot \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \circ \cdots \circ \frac{\partial}{\partial x^{i_k}}$ + ordres inférieurs

(équivariance) Pour tout champ lisse X^h du plongement projectif,
Q vérifie $\quad Q \circ \mathrm{L}_{X^h} = \mathrm{L}_{X^h} \circ Q$

Dans le cas courbe, on cherche des quantifications

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{Q}_M : \ \mathrm{Conn}(M) \times \bigoplus_{k\geqslant 0} \mathrm{Smb}^k(M) & \longrightarrow & \bigcup_{k\geqslant 0} \mathrm{Diff}^k(M) \\ \nabla \quad , \quad S & \mapsto & \mathcal{Q}_M(\nabla, S) \end{array}$$

(quantification) Si $S = S^{i_1,\dots,i_k} \cdot \partial_{i_1} \vee \cdots \vee \partial_{i_k}$,
alors $\mathcal{Q}_M(\nabla, S) = S^{i_1,\dots,i_k} \cdot \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \circ \cdots \circ \frac{\partial}{\partial x^{i_k}}$ + ordres inférieurs

Dans le cas courbe, on cherche des quantifications projectivement invariantes

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{Q}_M : \ \mathrm{Conn}(M) \times \bigoplus_{k \geqslant 0} \mathrm{Smb}^k(M) & \longrightarrow & \bigcup_{k \geqslant 0} \mathrm{Diff}^k(M) \\ \nabla \quad , \quad S & \mapsto & \mathcal{Q}_M(\nabla, S) \end{array}$$

(quantification) Si $S = S^{i_1,\ldots,i_k} \cdot \partial_{i_1} \vee \cdots \vee \partial_{i_k}$,
alors $\mathcal{Q}_M(\nabla, S) = S^{i_1,\ldots,i_k} \cdot \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \circ \cdots \circ \frac{\partial}{\partial x^{i_k}}$ + ordres inférieurs

(invariance) Si ∇ et ∇' sont projectivement équivalentes,
alors les quantifications correspondantes coïncident :

$$\nabla \sim \nabla' \quad \Rightarrow \quad \mathcal{Q}_M(\nabla, \cdot) = \mathcal{Q}_M(\nabla', \cdot)$$

Dans le cas courbe, on cherche
des quantifications projectivement invariantes et naturelles

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{Q}_M : \ \mathrm{Conn}(M) \times \bigoplus_{k\geqslant 0} \mathrm{Smb}^k(M) & \longrightarrow & \bigcup_{k\geqslant 0} \mathrm{Diff}^k(M) \\ \nabla \quad , \quad S & \mapsto & \mathcal{Q}_M(\nabla, S) \end{array}$$

(naturalité) Les applications $\mathcal{Q}_M$ sont constituées d'opérateurs naturels au sens de la théorie des fibrés naturels.

Toute solution du cas courbe contient une solution du cas plat

géométrie classique

supergéométrie

Étant donné une solution du cas courbe

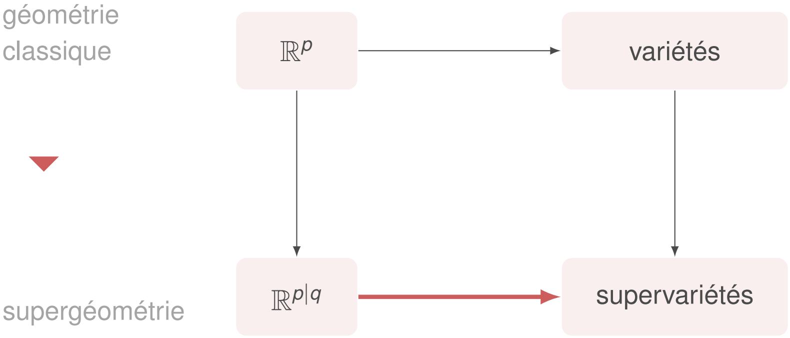
$$\left\{ \mathcal{Q}_M : \ \mathrm{Conn}(M) \times \bigoplus_{k \geqslant 0} \mathrm{Smb}^k(M) \xrightarrow{\simeq} \bigcup_{k \geqslant 0} \mathrm{Diff}^k(M) \right\}$$

la particularisation

$$Q = \mathcal{Q}_{E_0^{p|q}}(\nabla_0, \cdot)$$

définit une solution du cas plat.

On retrouve, en supergéométrie,
les liens qui existent en géométrie classique.



Thèse de doctorat en Sciences

Projectively Invariant Quantization in Super Geometry

Thomas LEUTHER

Juin 2013

Université de Liège

Académie Universitaire Wallonie-Europe