

Conception des pseudo-articulations à col parabolique

Jean-François Debongnie

ULg, LTAS/LMF

avril 2013

Articulations flexibles : avantages et inconvénients

- Absence de jeu
- Absence de frottement, donc
 - Pas d'hystérésis
 - Pas de particules d'usure
- MAIS course limitée.

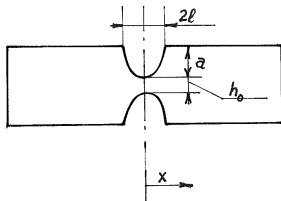
Applications:

- Métrologie
- Micromécanique
- Micropompes d'injection de fluides dans le corps humain

Pour les concevoir, on a besoin d'un modèle de leur raideur sous différentes sollicitations.

Le cas des cols *elliptiques* a été présenté à Marrakech l'an dernier (AF3M).

Description géométrique



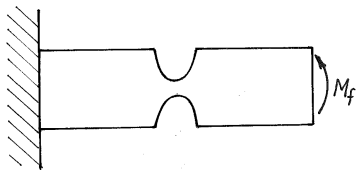
Variation de l'épaisseur:

$$\begin{aligned}h(x) &= h_0 + 2a \frac{x^2}{\ell^2} \\ &= h_0 (1 + \xi^2)\end{aligned}$$

avec

$$\xi = \sqrt{\frac{2a}{h_0} \frac{x}{\ell}}$$

Moment de flexion constant dans le plan



$$\frac{d\alpha}{dx} = \frac{12M_f}{Eb h^3}$$

$$\alpha(\ell) = \frac{12M_f}{Eb} \int_{-\ell}^{\ell} \frac{dx}{h^3} = \frac{M_f}{Eb} I_1$$

avec

$$I_1 = 12 \int_{-\ell}^{\ell} \frac{dx}{h^3}$$

Calcul exact de I_1

Un calcul assez long donne

$$I_1 = \frac{\ell}{2a} \frac{\sqrt{2a}}{h_0^{5/2}} \mathcal{I}_1$$

avec

$$\mathcal{I}_1 = 9 \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{2a}{h_0}} + 12 \frac{\sqrt{\frac{h_0}{2a}}}{1 + \frac{h_0}{2a}} \left(1 - \frac{1}{4} \frac{1 - \frac{h_0}{2a}}{1 + \frac{h_0}{2a}} \right)$$

... un peu compliqué !

Expression asymptotique pour $h_0/a \ll 1$

Pour $h_0/a \rightarrow 0$, l'expression précédente se réduit à

$$\mathcal{I}_1 \approx \mathcal{I}_{1,as} = \frac{9\pi}{2}$$

ce qui donne

$$\alpha(\ell)_{as} = \frac{9\pi}{2} \frac{\ell}{2a} \frac{\sqrt{2a}}{h_0^{5/2}} \frac{M_f}{Eb}$$

...beaucoup plus simple !

Expression approchée dans le cas général

On se propose d'écrire

$$\alpha(\ell) = \alpha(\ell)_{as} \cdot \frac{1}{K_1(h_0/a)}$$

ce qui revient à dire

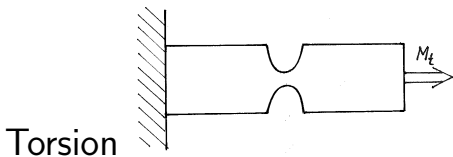
$$K_1 = \frac{9\pi}{2\mathcal{I}_1}$$

Ajustement des valeurs numériques pour $h_0/a \leq 0,5 \rightarrow$ approximation simple de K_1 :

$$K_1 \approx K_{1,app} = 1 + 0,264 \left(\frac{h_0}{a} \right)^2$$

erreur relative : 0,018%

Ceci fournit une méthode simple de calcul.



$$\frac{d\psi}{dx} = \frac{M_t}{\frac{1}{3} G b h^3}$$

$$\psi(\ell) = \frac{3M_t}{Gb} \int_{-\ell}^{\ell} \frac{dx}{h^3} = \frac{1}{4} \frac{M_t}{Gb} l_1$$

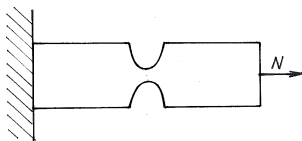
Même intégrale qu'en flexion, donc

$$\psi(\ell)_{as} = \frac{9\pi}{8} \frac{\ell}{2a} \frac{\sqrt{2a}}{h_0^{5/2}} \frac{M_t}{Gb}$$

et

$$\psi(\ell) = \psi(\ell)_{as} \cdot \frac{1}{K_1}$$

Extension



$$\frac{du}{dx} = \frac{N}{Ebh}$$

$$u(\ell) = \frac{N}{Eb} \int_{-\ell}^{\ell} \frac{dx}{h} = \frac{N}{Eb} I_2$$

Valeur exacte

$$I_2 = 2 \frac{\ell}{2a} \sqrt{\frac{2a}{h_0}} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{2a}{h_0}}$$

Expression asymptotique

$$u(\ell)_{as} = \frac{N}{Eb} \pi \frac{\ell}{2a} \sqrt{\frac{2a}{h_0}}$$

Expression approchée

$$u(\ell) = u(\ell)_{as} \cdot \frac{1}{K_2} \quad , \quad K_2 = \frac{\pi}{2 \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{2a}{h_0}}} \approx 1 + 0,56 \sqrt{\frac{h_0}{a}}$$

Erreur $\leq 1,61 \%$

Flexion transverse sous moment constant M_{fT}

La rotation d'extrémité $\beta(\ell)$ se calcule par

$$\beta(\ell) = \frac{12M_{fT}}{Eb^3} \int_{-\ell/2}^{\ell/2} \frac{dx}{h} = \frac{12M_{fT}}{Eb^3} l_2$$

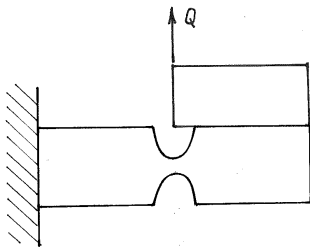
Même intégrale qu'en traction, donc

$$\beta(\ell)_{as} = \frac{12M_{fT}}{Eb^3} \pi \frac{\ell}{2a} \sqrt{\frac{2a}{h_0}}$$

et

$$\beta(\ell) = \beta(\ell)_{as} \cdot \frac{1}{K_2}$$

Translation pure d'une extrémité dans le plan



$$M_f = -Qx$$

Déformée = terme de flexion v_f + terme de cisaillement v_c , à évaluer séparément:

$$v = v_f + v_c$$

Terme de flexion v_f

$$\frac{d\alpha}{dx} = \frac{12M_f}{Eb h^3} = -\frac{12Qx}{Eb h^3}$$

$$\begin{aligned}v_f(\ell) &= \int_{-\ell}^{\ell} \alpha dx = [x\alpha]_{-\ell}^{\ell} - \int_{-\ell}^{\ell} x \frac{d\alpha}{dx} dx = - \int_{-\ell}^{\ell} x \frac{d\alpha}{dx} dx \\ &= \frac{12Q}{Eb} \int_{-\ell}^{\ell} \frac{x^2}{h^3} dx = \frac{Q}{Eb} I_3\end{aligned}$$

Valeur exacte (calcul un peu long):

$$I_3 = 3 \left(\frac{\ell}{2a} \right)^3 \cdot \left(\frac{2a}{h_0} \right)^{3/2} \left[\arctg \sqrt{\frac{2a}{h_0}} + \frac{\sqrt{\frac{h_0}{2a}} \left(1 - \frac{h_0}{2a} \right)}{\left(1 + \frac{h_0}{2a} \right)^2} \right]$$

Expression asymptotique

$$v_f(\ell)_{as} = \frac{Q}{Eb} \cdot \frac{3\pi}{2} \left(\frac{\ell}{2a}\right)^3 \left(\frac{2a}{h_0}\right)^{3/2}$$

Expression approchée

$$v_f(\ell) = v_f(\ell)_{as} \frac{1}{K_3}$$

avec

$$K_3 \approx K_{3,app} = 1 + 1,455 \left(\frac{h_0}{a}\right)^{1,44}$$

Erreur relative: 0,25%

Terme de cisaillement

$$v_c(\ell) = \int_{-\ell}^{\ell} \frac{Q}{\frac{5}{6}Gb h} dx = \frac{6Q}{5} Gb \int_{-\ell}^{\ell} \frac{dx}{h} = \frac{6Q}{5Gb} l_2 = \frac{6Q}{5Gb} \pi \frac{\ell}{a} \sqrt{\frac{2a}{h_0}} \frac{1}{K_2}$$

Généralement, cette contribution $\propto (2a/h_0)^{1/2}$ est petite devant $v_f \propto (2a/h_0)^{3/2}$.

Translation pure hors plan

Même raisonnement, avec charge R et déplacement d'extrémité $w(\ell)$.

$$w_f(\ell)_{as} = 12 \frac{R\ell^2}{Eb^3} \frac{\ell}{a}$$

$$w_f(\ell) = w_f(\ell)_{as} \frac{1}{K_4}$$

$$K_4 = \frac{1}{1 - \sqrt{\frac{h_0}{2a}}} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{2a}{h_0}}, \quad \frac{1}{K_{4,app}} = 1 - 1,111 \sqrt{\frac{h_0}{a}} + 0,470 \frac{h_0}{a}$$

Erreur relative : 0,7%.

$$w_c(\ell) = \frac{6R}{5Gb} \pi \frac{\ell}{2a} \sqrt{\frac{2a}{h_0}} \frac{1}{K_2}$$

On notera que

$$\frac{w_c}{w_f} \propto \left(\frac{b}{\ell}\right)^2 \sqrt{\frac{a}{h_0}}$$

n'est généralement pas petit devant l'unité.

Conclusions

- Nos résultats permettent de traiter toutes les solutions du col : flexion simple = flexion pure ($M_f = cte$) + translation pure ($M_f = linéaire$).
- Pour chaque cas, nous avons dégagé la solution générale, la solution asymptotique et une *solution approchée originale et très simple*.
- Nos résultats constituent un outil très efficace au niveau de la conception.