Eléments de processus stochastiques

M. Arnst, V. Denoël, P. Geurts

MATH0488-1

Année Académique 2021-2022

Last update : 7 février 2022

Informations Générales

Où télécharger les mises à jours de ce document ? (documents disponibles sur E-campus, +notes de cours à la Centrale 5€)

Où ? Quand ?
Le cours est organisé le mardi, de 10h30 à 12h30 (2eme quadri)
Visioconférence sur LifeSize pendant les 4 premières semaines

Me contacter ?
Bureau : B52/3, +1/422
Téléphone : 04/366.29.30
Mail : v.denoel@ulg.ac.be

Objectifs du cours et plan pédagogique ? Examen ?
`http://progcours.ulg.ac.be/cocoon/cours/MATH0488-1.html`
Cours 10h+20h, valorisation 2 ECTS
Evaluation sur base d'un rapport de projet de groupe

Support additionnel – Podcast des cours de janvier et février 2021.

Motivations

Pourquoi un cours de stats/probas/processus ?

1. Bachelier :

▷ Calcul des probabilités : bases logiques et mathématiques du raisonnement en présence d'incertitudes

▷ Statistique : méthodes pour tirer des conclusions fiables à partir de données d'observation

▷ Processus aléatoires : modélisation opérationnelle des phénomènes spatio-temporels

2. Master : applications dans les différentes disciplines

[P. Sacré , Eléments du Calcul des Probabilités]

Objet du cours :

Vous préparer à l'utilisation des concepts stochastiques en Master

→ volonté de rendre les choses *simples*, *appliquées*, *illustrées*

→ "savoir-faire" plutôt que "savoir"

Cours Théorique & Projet

Cours théorique :
▷ limiter les démonstrations et développements mathématiques
▷ privilégier l'illustration et la mise en application dans Matlab
pour mieux vous préparer à un travail en autonomie

Projet :
▷ énoncé balisé avec un objectif à atteindre
▷ les étudiants choisissent le mode de travail pour y arriver
▷ évaluation basée sur les connaissances acquises et compétences développées
▷ choix parmi 3 projets proposés (**présentation des projets le mardi 22/02/22**)

Pré-requis :
MATH0062-1 : Eléments du Calcul des Probabilités
MATH0487-1 : Eléments de Statistiques

Objets de la mathématique déterministe :

- variables discrètes : chiffres (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9), résultats non-numéraux (a., b., c., d., ... pile/face)
- variables continues : nombres réels, nombres complexes
- matrices : $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$
- fonctions : $f(x) = \sin(x)$, $f(x, y) = x^2 + y^2$

... et on réalise des opérations sur ces objets

Exemples :

Scalaires	Fonctions	Matrices
$x = 1$ $y = 2$ $x + y = ?$	$f'' + f = 1$ $f(x)?$	$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ $A \cdot A = ?$

Stat-Proba-PrStoc : Objectifs

Peut-on considérer que toutes les grandeurs (variables, matrices, fonctions) rencontrées en pratique soient ***déterministes*** ?

NON, LA VIE EST NON DÉTERMINISTE

Ex : addition de deux mesures de longueur prises avec une vieille latte
Ex : somme de deux variables aléatoires : X=norm(0,1) ; Y=norm(0,1) ; X+Y = ?

NB : le cas déterministe est un cas particulier d'une variable aléatoire ... à variance nulle

Stat-Proba-PrStoc : Objectifs

Peut-on considérer que toutes les grandeurs (variables, matrices, fonctions) rencontrées en pratique soient ***déterministes*** ?

NON, LA VIE EST NON DÉTERMINISTE

Ex : addition de deux mesures de longueur prises avec une vieille latte
Ex : somme de deux variables aléatoires : X=norm(0,1) ; Y=norm(0,1) ; X+Y = ?

NB : le cas déterministe est un cas particulier d'une variable aléatoire ... à variance nulle

Stat-Proba-PrStoc : Objectifs

Théorie des probabilités (nombres)

Scalaires → variable aléatoire

- un nombre entre 1 et 6
- la température à Liège le 1er novembre de chaque année
- ...

Théorie des processus aléatoires (fonctions)

Fonctions → Fonction aléatoire, processus aléatoire, champ aléatoire spatial, processus spatio-temporel

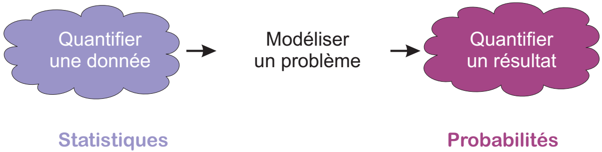
- le profil d'une vague en un instant donné (snapshot)
- l'accélération du sol pendant un tremblement de terre
- la concentration d'un polluant dans le sol
- le cours de l'indice Down Jones
- l'état d'un stock de pièces détachées

Quantifier une donnée → Modéliser un problème → Quantifier un résultat

Quantifier une donnée → Modéliser un problème → Quantifier un résultat

Statistiques

Statistiques **Probabilités**



Dans une approche non déterministe :

- ▷ variables aléatoires : probabilités, statistiques
- ▷ fonctions aléatoires : (processus aléatoires)
- ▷ matrices aléatoires

Objectif du cours : fonctions aléatoires, séquences aléatoires

- ▷ définition, caractérisation
- ▷ opérations (+ - * /), mais surtout opérateurs différentiels

Exemple de problème

On chauffe un barreau de longueur ℓ, conductivité thermique λ(W/mK), chaleur spécifique c (W/m^3), masse volumique ρ (kg/m^3) à une extrémité à l'aide d'une flamme. Le problème est modélisé par la loi de Fourier, avec comme condition limite une température imposée, égale à la température de la flamme.

$$\lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \rho \, c \, \frac{\partial T}{\partial t} \qquad \text{sur } (x,t) \in [o; \ell] \times [0, +\infty]$$

Condition initiale

$$T(x,0) = T_0(x)$$

Conditions limites

$$T(\ell,t) = T_\ell(t)$$

$$\partial_x T(0,t) = Q_0(t)$$

Quid si $T_\ell(t)$ est une fonction aléatoire ?

Organisation Du Cours

Table des matières :

- **Introduction générale, chaînes de Markov (2h) :** variable & processus aléatoire // opérations de base sur les variables, extension intuitive aux processus aléatoires // exemples de processus aléatoires // représentation duale de variables/processus aléatoires // chaînes de Markov, problème de l'ivrogne, marche aléatoire
- **Chaînes de Markov (2h) :** matrice de transition, distribution initiale, récurrence et transience, réductibilité et périodicité, invariance (stationnarité)
- **Description des processus (2h) :** densité de probabilité de rang 1, de rang 2, autocorrélation, fonction moments, notion de stationnarité, ergodicité, densité spectrale de puissance, processus de Markov
- **Description des processus au second ordre (2h) :** moments spectraux, opérations sur les processus stochastiques (+, -, intégration, dérivation, solution d'une ODE). Lien avec la théorie des systèmes
- **Simulation de réalisations de processus :** filtrage d'un bruit blanc en bande limitée et décomposition fréquentielle - Relations statistiques et probabilités

Programme Prévisionnel

08/02/2022	1	Intro générale, chaînes de Markov
15/02/2022	2	chaînes de Markov
22/02/2022	3	processus stationnaire au second ordre
01/03/2022	—	Mardi Gras
08/03/2022	4	systèmes LTI & processus aléatoires
15/03/2022	5	Projet, séance 1
22/03/2022	6	Projet, séance 2
29/03/2022	7	Projet, séance 3
05/04/2022	8	Congé de printemps (Pâques - rattrapage du mardi gras
12/04/2022		Congé de printemps (Pâques)
19/04/2022	9	Projet, séance 5 (récupération du mardi gras) - non supervisé
26/04/2022	10	Projet, séance 6
03/05/2022	11	Projet, séance 7
10/05/2022	12	Projet, séance 8, Remise des rapports à 22:00
17/05/2022	13	(consultation de copie, sur RDV)

NB: étudiants travaillent seuls pendant la séance 4 (spring break)

Choix des projets pour le 2/03/2022
Remise des projets le 10 mai 2022 avant 22h00.

Programme Prévisionnel - Locaux

Cours théorique : 202 (B7b, Galerie des Arts)

Projets, au bâtiment B6d Chimie Travaux Pratiques (A annoncer après le 03/03, composition des groupes)
(i) V. Denoël : ? ?

(ii) P. Geurts : ? ?

(iii) M. Arnst : ? ?

Introduction

Caractérisation de processus stochastiques
- Généralités
- Processus discrets
- Processus continus
- Processus Stationnaires
- Processus/Chaines de Markov

Opérations sur les processus aléatoires
- Systèmes sans mémoire
- Systèmes avec mémoire (LTI)
- Autres Systèmes

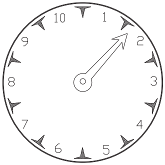
Génération de réalisations de processus stochastiques

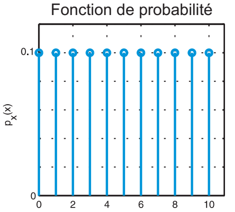
Partie I : Introduction

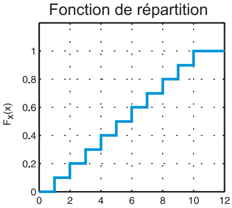
Acquis d'apprentissage :

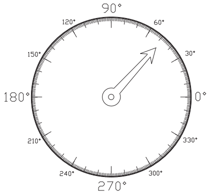
- voir un processus aléatoire (une séquence aléatoire) comme un extension de variables aléatoires conjointes
- faire la distinction entre statistiques et probabilités
- admettre l'équivalence des deux représentations d'un processus aléatoire

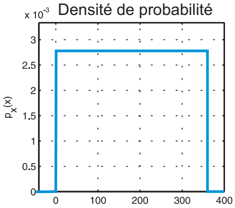
Représentation d'une variable aléatoire



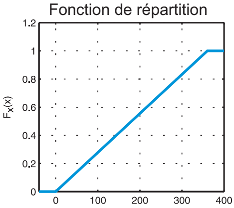








(a)



(a)

Rappels de Statistiques-Probabilités

2022

V. Denoël

Variable discrète

fonction de probabilité
$$p_X(x_i) = \mathrm{prob}(X = x_i)$$

fonction de répartition
$$F_X(x) = p(X \leq x)$$

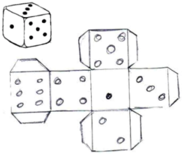
$$\sum_i p_x(x_i) = 1$$

Variable continue

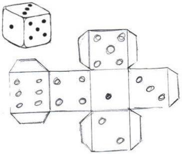
densité de probabilité
$$p_X(x) = \frac{dF_X}{dx}$$

fonction de répartition
$$F_X(x) = p(X \leq x)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p_X(x)dx = 1$$



Dans un lancer de dé, que est la probabilité d'obtenir un "6" ?



Dans un lancer de dé, que est la probabilité d'obtenir un "6" ?

How did they know !?

Statistiques .vs. Probabilités

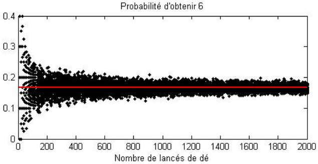
Approches Probabiliste & Statistique

Approche Probabiliste (facile : 1/6)

Approche Statistique (Monte Carlo, par simulation)

simuler les résultats de l'expérience : 1, 2, 5, 4, 3, 6, 1, 2, 3, 6, 5, 4, 3, 2, 4,...
(à répéter un grand nombre de fois), puis ... faire des statistiques

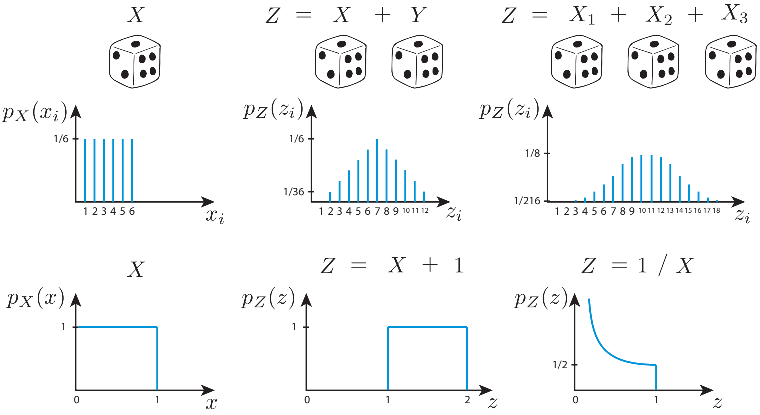
- ▷ facile à mettre en oeuvre
- ▷ demande plus de temps et de capacités de calcul
- ▷ besoin de répéter les simulations un "grand" nombre de fois (en fonction de ce que l'on observe*)



L'approche probabiliste est généralement plus efficace, mais ce n'est pas toujours possible...

* e.g. imaginez de déterminer, par simulation, la probabilité de gagner au Lotto.

Exemples



[heureusement qu'il y a une approche statistique ? ? ?]

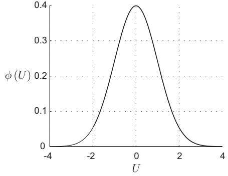
Représentation d'une Variable Aléatoire

Ajustement d'une loi

Représentation statistique

-0.0808,	-0.2913,	0.8616,	0.9470,	0.1365,
-0.1502,	0.7754,	2.2712,	0.0830,	0.4614,
-0.9314,	-0.0613,	0.1232,	0.1924,	0.0679,
0.4258,	-1.0290,	0.1000,	-0.5919,	1.2051,
0.6757,	-0.7125,	0.0339,	-1.9477,	-1.6986,
-1.6997,	-0.8314,	1.8033,	-0.4867,	...

Représentation probabiliste

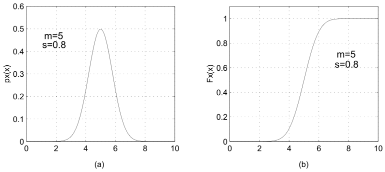


Simulation de réalisations

- un ensemble infini de réalisations (approche statistique) ou
- une densité de probabilité (approche probabiliste).

Ces deux représentations sont équivalentes - modèle fréquentiste des probabilités

Une variable aléatoire continue



$$p_X(x)\ dx = \mathrm{prob}\,(x < X < x + dx)$$

La fonction p_X contient trop d'information (?)

- ajuster une distribution théorique à quelques paramètres : Gauss, lognormale, uniforme, beta, Gumbel, Rayleigh, Frechet ...
- utiliser quelques moments statistiques

Moments (bruts), raw moments

$$\mu_k = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k p_X(x)\, dx$$

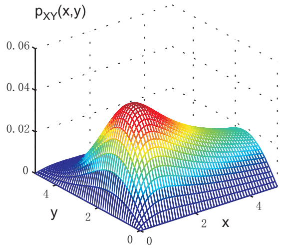
μ_1 : moyenne ; μ_2 : carré moyen

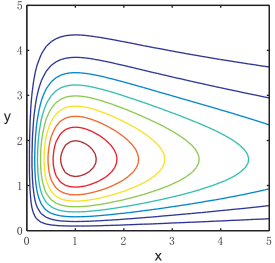
Moments centrés, centered moments

$$m_k = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu_1)^k p_X(x)\, dx$$

$m_1 = 0$; $m_2 = \sigma^2$: variance = carré de l'écart-type

Deux variables aléatoires continues





$$p_{XY}(x,y)\ dx\, dy = \text{prob}\left(x < X < x + dx \quad \text{et} \quad y < Y < y + dy\right)$$

La densité de probabilité conjointe $p_{XY}(x,y)$ contient trop d'information (?)

- ajuster une distribution théorique à quelques paramètres : Gauss 2-D, autres ?
- utiliser les quelques premiers moments statistiques

Moments (bruts), raw moments

$$\mu_{kl} = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x^k y^l p_{XY}(x, y)\, dxdy$$

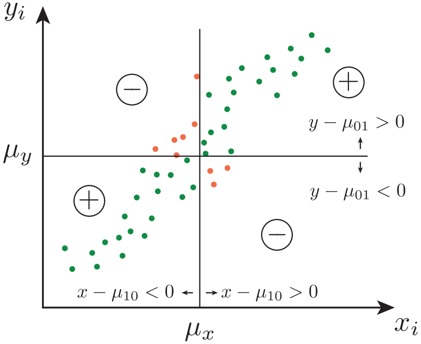
μ_{10} : moyenne de x ; μ_{01} : moyenne de y

Moments centrés, centered moments

$$m_{kl} = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu_{10})^k (y-\mu_{01})^l p_{XY}(x, y)\, dxdy$$

$m_{11} = \sigma_{xy}$ covariance (unités $=$ unités de $x\times$ unités de y)

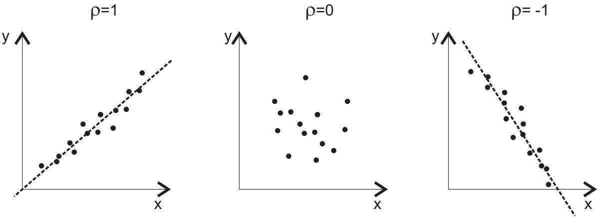
$$m_{11} = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu_{10})(y - \mu_{01})\, p_{XY}(x, y)\, dx dy$$



Notion de corrélation

▷ en statistiques descriptives

$$\rho = \frac{cov\left(x, y\right)}{s_x s_y}$$



Densités de probabilité marginale et conditionnelle

Conditionnelle

$$p_{X/Y}(x,y) = \frac{p_{XY}(x,y)}{p_Y(y)}$$

(coupe normalisée dans la ddp conjointe)

Marginale

$$p_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} p_{XY}(x,y)\ dy$$

(projection)

Introduction

Caractérisation de processus stochastiques

- Généralités
- Processus discrets
- Processus continus
- Processus Stationnaires
- Processus/Chaines de Markov

Opérations sur les processus aléatoires

- Systèmes sans mémoire
- Systèmes avec mémoire (LTI)
- Autres Systèmes

Génération de réalisations de processus stochastiques

Introduction

Caractérisation de processus stochastiques

Généralités

Processus discrets

Processus continus

Processus Stationnaires

Processus/Chaines de Markov

Opérations sur les processus aléatoires

Systèmes sans mémoire

Systèmes avec mémoire (LTI)

Autres Systèmes

Génération de réalisations de processus stochastiques

Partie II : Caractérisation de Processus Stochastiques

Acquis d'apprentissage :

- pouvoir charactériser un processus aléatoire en termes de densités de probabilités de tous rangs
- définir un processus stationnaire et le caractériser
- comprendre équivalence entre les densités de probabilités de différents rangs et les densités de probabilités conditionnelles
- pouvoir implémenter et illustrer les différents concepts de façon numérique dans Matlab

Notion de processus aléatoire

"Un processus stochastique ou processus aléatoire ou fonction aléatoire représente une évolution, discrète ou à temps continu, d'une variable aléatoire." -- `Wikipedia.org`

Un processus stochastique est caractérisé par

- un ensemble infini de réalisations (approche statistique) ou
- ...à préciser... (approche probabiliste).

Comment passer de l'un à l'autre ? Point de vue de l'expérimentateur (approche statistique) et du modélisateur (approche probabiliste)
(variables aléatoires : on collecte des variables, un histogramme normalisé donne une estimation de la densité de probabilité)

Notion de processus aléatoire

On peut commencer par observer des réalisations de processus aléatoires (expérimentateur)

Les réalisations de processus aléatoires proviennent d'expériences aléatoires (comme un lancé de dé pour une variable aléatoire)

a. Collecte expérimentale (on a des réalisations en main et on voudrait les caractériser, ajuster un modèle)

b. Fonctions aléatoires construites à partir de variables aléatoires

exemple : $f(t) = \text{interp}(t_i, x_i)$

c. Fonctions aléatoires construitres de façon séquentielle (chaine de Markov)

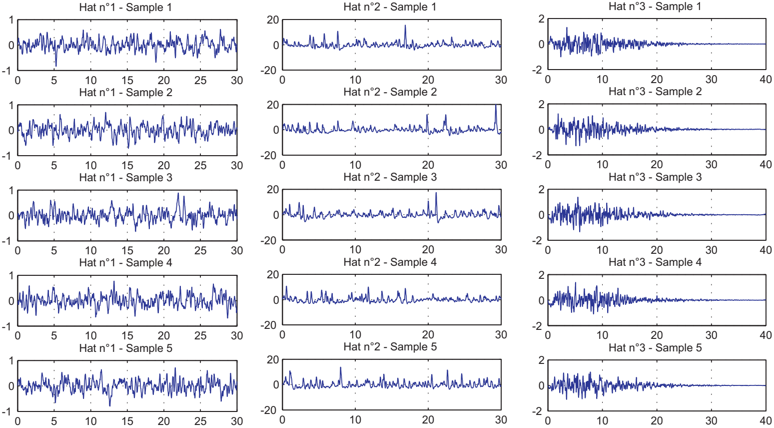
exemple : marche aléatoire

On peut également obtenir des réalisations de processus aléatoires à partir d'un modèle

d. Modèle existant → génération de réalisations

Notion de processus aléatoire

Continu



$\vdots$ $\vdots$ $\vdots$

$\mathcal{A}$ $\mathcal{B}$ $\mathcal{C}$

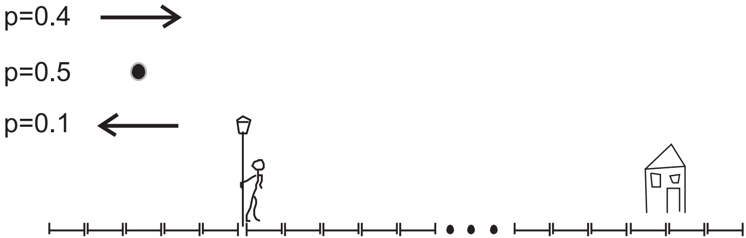
Notion de processus aléatoire

2022

V. Denoël

Introduction
Caractérisation
Généralités
Processus discrets
Processus continus
Processus Stationnaires
Processus/Chaines de Markov
Opérations
Génération

Discret



Introduction

Caractérisation de processus stochastiques

- Généralités
- Processus discrets
- Processus continus
- Processus Stationnaires
- Processus/Chaines de Markov

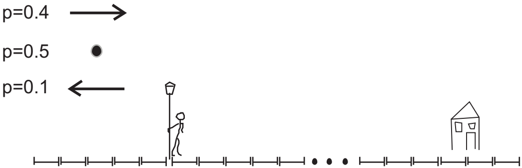
Opérations sur les processus aléatoires

- Systèmes sans mémoire
- Systèmes avec mémoire (LTI)
- Autres Systèmes

Génération de réalisations de processus stochastiques

Marche Aléatoire - Random Walk

Exemple de marche aléatoire (drunkard problem)




```
X(1)=0;
for k=1:50
  x = rand(1,1);
  if x<0.1 incr = -1;
  elseif x<0.5; incr = +1;
  else incr = 0; end
  X(k+1) = X(k) + incr;
end
```

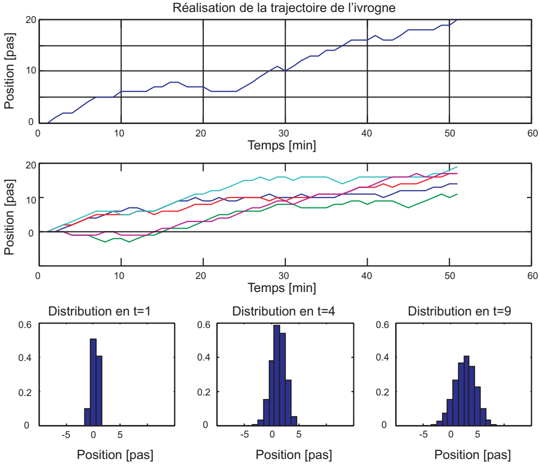
Position à la fin de la nuit ?
Probabilité qu'il finisse par arriver chez lui ?

2022

V. Denoël

Introduction
Caractérisation
Généralités
Processus discrets
Processus continus
Processus Stationnaires
Processus/Chaines de Markov
Opérations
Génération

1. Approche par simulation



Introduction
Caractérisation
Généralités
Processus discrets
Processus continus
Processus Stationnaires
Processus/Chaines de Markov
Opérations
Génération

2. Approche par la théorie des probabilités

	-1	0	+1	pas 2
-1	0.01	0.05	0.04	0.1
0	0.05	0.25	0.20	0.5
+1	0.04	0.20	0.16	0.4
pas 1	0.1	0.5	0.4	1

(Fct de) Probabilités **conjointes** entre les résultats des deux premiers mouvements

Introduction
Caractérisation
Généralités
Processus discrets
Processus continus
Processus Stationnaires
Processus/Chaines de Markov
Opérations
Génération

3. Approche par la théorie des processus aléatoires

Distribution initiale :

$$prob\,(X_0 = 0) = 1, \qquad prob\,(X_0 = j) = 0, \forall j \neq 0$$

Itérations :

$$\begin{aligned} prob\,(X_n = x) &= 0.5prob\,(X_{n-1} = x) + 0.1prob\,(X_{n-1} = x+1) \\ &\quad +0.4prob\,(X_{n-1} = x-1) \end{aligned}$$

(description dynamique d'un processus)

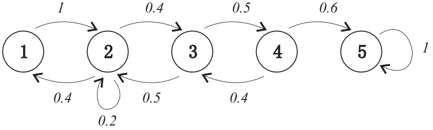
x	-3	-2	-1	0	1	2	3
n=0	0	0	0	1	0	0	0
n=1	0	0	0.1	0.5	0.4	0	0
n=2	0	0.01	0.1	0.33	0.4	0.16	0
n=3	0.001	0.015	0.087	0.245	0.348	0.240	0.064
⋮							

Chaine de Markov : Généralités I

Définition d'une ***Chaîne de Markov*** $\{X_n\}$:

$$prob\left(X_{n+1} = i_{n+1} | X_n = i_n, \cdots, X_0 = i_0\right) = prob\left(X_{n+1} = i_{n+1} | X_n = i_n\right) := Q_n\left(i_n, i_{n+1}\right)$$

Graphe



Matrice de transition

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0.4 & 0.2 & 0.4 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0.4 & 0 & 0.6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$Q_n\left(i, j\right)$: probabilité de passer de l'état i à l'état j lors de la transition de l'instant n à l'instant $n+1$

Chaine de Markov : Généralités II

La matrice Q est dite ***stochastique*** ssi
(i) tous ses éléments sont positifs et
(ii) la somme des éléments sur chaque ligne est unitaire.

Chaîne de Markov ***homogène*** ssi

$$Q_n(i,j) = Q_0(i,j),\ \forall n \in \mathbb{N}_0 \quad \rightarrow \quad Q(i,j)$$

Distribution de probabilité initiale : $\pi_0(i) = prob(X_0 = i)$
Distribution de probabilité courante : $\pi_n(i) = prob(X_n = i)$
[à préciser]

Une chaîne de Markov est entièrement caractérisée par sa densité de probabilité conjointe $prob(X_n = i_n, \cdots, X_0 = i_0)$.

Chaine de Markov : Généralités III

Factorisation de la fonction de probabilité conjointe :

- entre 2 états

$$\begin{aligned} prob\,(X_1 = i_1, X_0 = i_0) &= prob\,(X_0 = i_0)\,prob\,(X_1 = i_1 | X_0 = i_0) \\ &= \pi_0\,(i_0)\,Q\,(i_0, i_1) \end{aligned}$$

- entre n états

$$prob\,(X_n = i_n, \cdots, X_0 = i_0) = \pi_0\,(i_0) \prod_{k=1}^{n} Q\,(i_{k-1}, i_k)$$

Une chaîne de Markov est entièrement caractérisée par sa densité de probabilité initiale π_0 et sa matrice de transition $\mathbf{Q}$

Introduction
Caractérisation
Généralités
Processus discrets
Processus continus
Processus Stationnaires
Processus/Chaines de Markov
Opérations
Génération

Matrice de transition en plusieurs étapes

Matrice de transition (homogène) : $Q(i,j)$ = probabilité de passer de l'état i à l'état j en ***une*** étape

Quelle serait $Q^{(2)}(i,j)$ = probabilité de passer de l'état i à l'état j en ***deux*** étapes ? $Q^{(n)}(i,j)$, en n étapes ?

$$Q^{(n)}(i_0, i_n) = Q^n(i_0, i_n)$$

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0.4 & 0.2 & 0.4 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0.4 & 0 & 0.6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{Q}^2 = \begin{pmatrix} 0.4 & 0.2 & 0.4 & 0 & 0 \\ 0.08 & 0.64 & 0.08 & 0.2 & 0 \\ 0.2 & 0.1 & 0.4 & 0 & 0.3 \\ 0 & 0.2 & 0 & 0.2 & 0.6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Chaine de Markov : Généralités

2022

V. Denoël

Introduction

Caractérisation

Généralités

Processus discrets

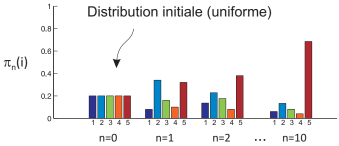
Processus continus

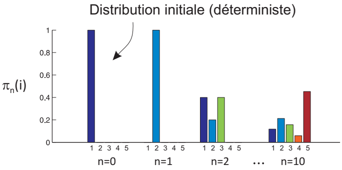
Processus Stationnaires

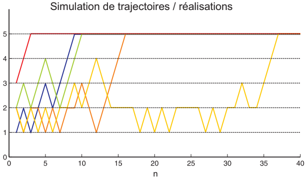
Processus/Chaines de Markov

Opérations

Génération







Distribution courante :

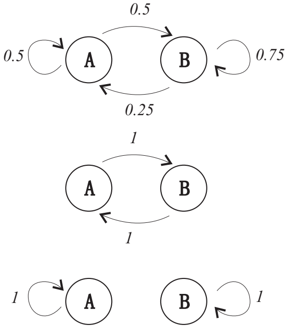
$$\pi_n = \pi_0 Q^n$$

$$\pi_n = \pi_k Q^{n-k}$$

Chaine de Markov : Invariance

Exemple de chaînes de Markov simples :

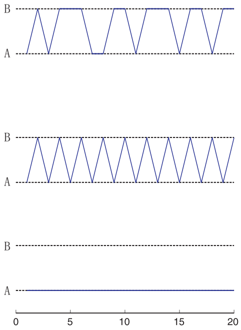
[initialisation systématique dans l'état A]



$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.25 & 0.75 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$



Distribution invariante ? Comportement asymptotique ?

$\pi_\infty = \lim_{n\to+\infty} \pi_n = (\exists ?)$

Chaine de Markov : Invariance

$\pi_n = \pi_0 Q^n \rightarrow$ pour que la distribution se stabilise, il faut et suffit que la matrice de transition en plusieurs étapes converge vers une valeur limite lorsque $n \rightarrow +\infty$.

Exemple 1

$$Q^6 = \begin{pmatrix} 0.3335 & 0.6665 \\ 0.3333 & 0.6667 \end{pmatrix} \quad ; \quad Q^n \rightarrow \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 \\ 1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$$

Une distribution de probabilité π_s est dite ***invariante*** ou ***stationnaire*** lorsque $\pi_s = \pi_s Q$.
(si la chaîne est initialisée selon une distribution stationnaire, la distribution reste inchangée)

Réductibilité

Une chaine de Markov (ou sa matrice de transition) est dite ***irréductible*** si la probabilité d'atteindre l'état i_2 partant de i_1 est non nulle, $\forall i_1, i_2$

$\exists$ un accès à tous les états de la chaîne de Markov (même avec une probabilité très petite)
$\rightarrow$ tous les chemins du graphe représentant la matrice de transition doivent offrir la possibilité d'aller de n'importe quel état vers n'importe quel autre

On dit que les deux états i_1 et i_2 ***communiquent*** si l'état i_1 est accessible à partir de l'état i_2 et **inversement**.

Introduction

Caractérisation

Généralités

Processus discrets

Processus continus

Processus Stationnaires

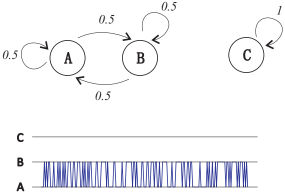
Processus/Chaines de Markov

Opérations

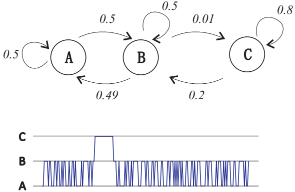
Génération

Chaine de Markov : Reductibilité

Exemple :



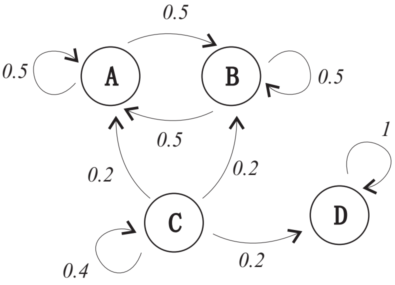
Chaîne réductible



Chaîne irréductible

Chaine de Markov : Reductibilité

Exemple :



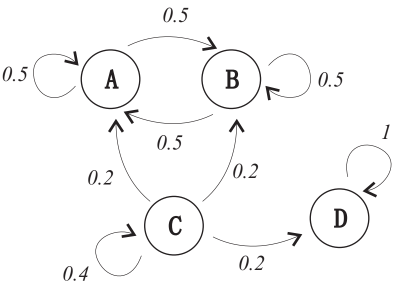
$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0.2 & 0.2 & 0.4 & 0.2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3 classes irréductibles : $\{A, B\}$, C et D

La réductibilité est une propriété de classe

Chaine de Markov : Reductibilité

Exemple :



$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0.2 & 0.2 & 0.4 & 0.2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

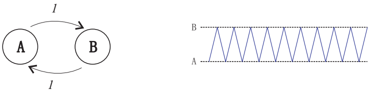
3 classes irréductibles : $\{A, B\}$, C et D

La réductibilité est une propriété de classe

Introduction
Caractérisation
Généralités
Processus discrets
Processus continus
Processus Stationnaires
Processus/Chaines de Markov
Opérations
Génération

Chaine de Markov : Périodicité

La ***période*** d ***d'un état*** i d'une chaîne de Markov est définie comme étant le plus grand commun diviseur de l'ensemble des nombres $n \in \mathbb{N}_0$ tels que $Q^n(i,i) \neq 0$.



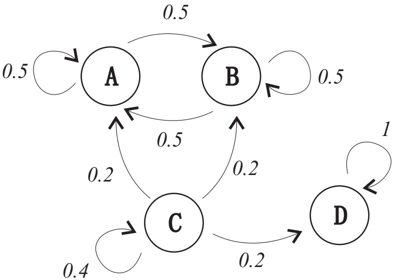
$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{Q}^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{Q}^3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \ldots \rightarrow d = 2$$

Si ce nombre est plus grand ou égal à 2, on dit que l'état est périodique de période d ; l'état est ***apériodique*** sinon.

La périodicité est une propriété de classe (irréductible)

Une chaîne de Markov à espace d'états fini, irréductible et apériodique est dite ***ergodique***.

Chaine de Markov : Recurrence



$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0.2 & 0.2 & 0.4 & 0.2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Après un certain temps, l'état C n'est plus visité
$\rightarrow$ ***état transient***

les autres états sont ***récurrents*** : si on y passe une fois, la probabilité d'y revenir est non nulle

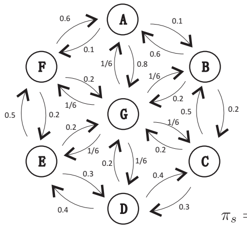
Chaine de Markov : Ergodicite

La distribution stationnaire $\pi_s\left(i\right)$ d'un état i transient est nécessairement nulle.
→ un processus qui n'a que des états transients n'admet pas de distribution invariante
→ une chaîne de Markov à espace d'états fini ne peut pas avoir que des états transients
→ une chaîne de Markov à espace d'états fini possède au moins une distribution de probabilité stationnaire

La distribution de probabilité stationnaire π_s

- est unique si la chaîne est irréductible ;
- correspond aux lignes (toutes identiques) de $\lim_{n\to\infty} Q^n$ si la chaîne est **ergodique** (irréductible & apériodique)

Chaine de Markov : Ergodicite

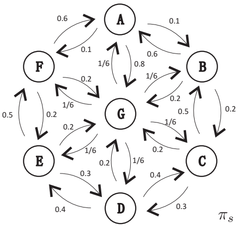


$$Q = \begin{bmatrix} 0 & 0.1 & 0 & 0 & 0 & 0.1 & 0.8 \\ 0.6 & 0 & 0.2 & 0 & 0 & 0 & 0.2 \\ 0 & 0.5 & 0 & 0.3 & 0 & 0 & 0.2 \\ 0 & 0 & 0.4 & 0 & 0.4 & 0 & 0.2 \\ 0 & 0 & 0 & 0.3 & 0 & 0.5 & 0.2 \\ 0.6 & 0 & 0 & 0 & 0.2 & 0 & 0.2 \\ 0.167 & 0.167 & 0.167 & 0.167 & 0.167 & 0.167 & 0 \end{bmatrix}$$

Distribution invariante:

$$\pi_s = [0.1822 \quad 0.1160 \quad 0.1097 \quad 0.1088 \quad 0.1097 \quad 0.1160 \quad 0.2577]$$

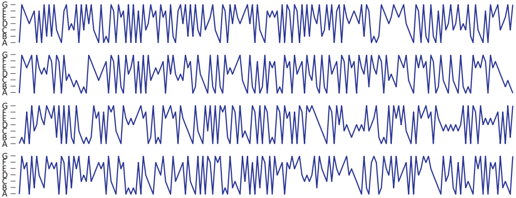
CHAINE DE MARKOV : ERGODICITE



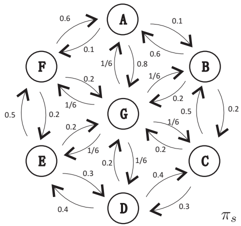
$$Q = \begin{bmatrix} 0 & 0.1 & 0 & 0 & 0 & 0.1 & 0.8 \\ 0.6 & 0 & 0.2 & 0 & 0 & 0 & 0.2 \\ 0 & 0.5 & 0 & 0.3 & 0 & 0 & 0.2 \\ 0 & 0 & 0.4 & 0 & 0.4 & 0 & 0.2 \\ 0 & 0 & 0 & 0.3 & 0 & 0.5 & 0.2 \\ 0.6 & 0 & 0 & 0 & 0.2 & 0 & 0.2 \\ 0.167 & 0.167 & 0.167 & 0.167 & 0.167 & 0.167 & 0 \end{bmatrix}$$

Distribution invariante:

$$\pi_s = [0.1822 \quad 0.1160 \quad 0.1097 \quad 0.1088 \quad 0.1097 \quad 0.1160 \quad 0.2577]$$



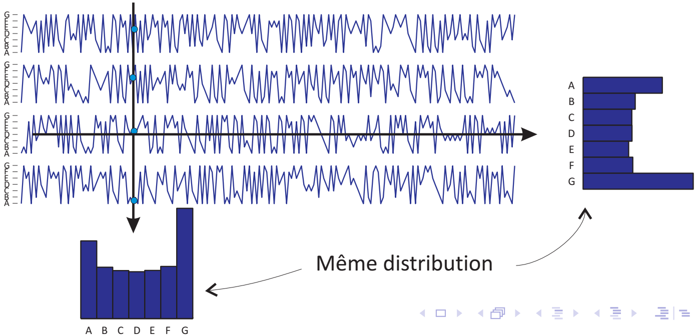
Chaine de Markov : Ergodicite



$$Q = \begin{bmatrix} 0 & 0.1 & 0 & 0 & 0 & 0.1 & 0.8 \\ 0.6 & 0 & 0.2 & 0 & 0 & 0 & 0.2 \\ 0 & 0.5 & 0 & 0.3 & 0 & 0 & 0.2 \\ 0 & 0 & 0.4 & 0 & 0.4 & 0 & 0.2 \\ 0 & 0 & 0 & 0.3 & 0 & 0.5 & 0.2 \\ 0.6 & 0 & 0 & 0 & 0.2 & 0 & 0.2 \\ 0.167 & 0.167 & 0.167 & 0.167 & 0.167 & 0.167 & 0 \end{bmatrix}$$

Distribution invariante:

$$\pi_s = [0.1822 \quad 0.1160 \quad 0.1097 \quad 0.1088 \quad 0.1097 \quad 0.1160 \quad 0.2577]$$

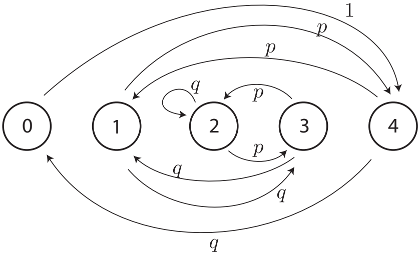


Exercices

Juin 2016. Pierre a quatre parapluies ; certains à la maison et les autres au bureau. Lorsqu'il pleut, il prend un parapluie pour faire le chemin d'un endroit à l'autre, pour autant qu'il y ait un parapluie disponible à cet endroit. Lorsqu'il ne pleut pas, il ne pense évidemment plus à ses parapluies, qui restent donc là où ils sont. Il arrive donc que Pierre n'ait pas de parapluie pour faire le chemin sous la pluie. On considère que la probabilité p qu'il pleuve au moment où Pierre doit faire son chemin est constante.

1. Représentez ce problème à l'aide d'une chaine de Markov dont la variable est le nombre de parapluies disponibles au moment du départ.
2. Cette chaîne est-elle irréductible ? Justifiez.
3. Quelle est la probabilité que Pierre quitte son domicile avec n parapluies sachant qu'il était déjà parti avec n parapluies la veille ? (Répondre pour $n \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$).
4. Sur le long terme, quelle est la proportion de trajets où Pierre est surpris par la pluie sans parapluie ?

Exercices



$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & q & p \\ 0 & 0 & q & p & 0 \\ 0 & q & p & 0 & 0 \\ q & p & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} ; \mathbf{A}^2 = \begin{pmatrix} q & p & 0 & 0 & 0 \\ pq & p^2+q^2 & pq & 0 & 0 \\ 0 & pq & p^2+q^2 & pq & 0 \\ 0 & 0 & pq & p^2+q^2 & pq \\ 0 & 0 & 0 & pq & p^2+q \end{pmatrix}$$

Exercices

Juin 2018. Une communauté de singes paresseux se nourrit exclusivement de bananes. Le calendrier de cette communauté de paresseux ne comporte que des numéros de jours ; pas de semaines, pas de mois, pas d'année. On sait que

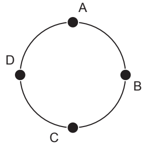
- chaque jour un régime de bananes est consommé par la communauté pour nourrir ses membres ;
- les paresseux partent en quête de nourriture chaque jour pair, après le dernier repas de la journée ;
- lorsqu'ils partent en quête de nourriture, les paresseux se contentent a priori de ne ramener que deux régimes de bananes. Juste de quoi survivre. Si par hasard, ils trouvent un troisième régime de bananes sur le chemin du retour, ils le rapportent également. On peut considérer qu'il y a une probabilité $p \in [0;1]$ de rentrer de cueillette avec deux régimes, et $1-p$ de revenir avec trois régimes ;
- lorsque le stock de bananes au moment d'un départ (présumé) en cueillette atteint 10 régimes, la paresse prend le dessus et les singes ne partent à la cueillette qu'avec une probabilité $p^\star \in [0;1]$. Dans ce cas, s'ils partent à le cueillette, ils reviennent avec deux régimes de bananes exactement. Dans le cas contraire, ils vivent sur leurs réserves et repartent à la cueillette deux jours plus tard ;
- ces règles de consommation sont telles que la nourriture ne périme pas.

Exercices

1. Représentez le niveau du stock de bananes les jours pairs (tout juste après le dernier repas de la journée) à l'aide d'une chaine de Markov. Donnez-en le graphe et la matrice de transition.
2. Cette chaîne est-elle irréductible ? Justifiez.
3. Cette chaîne est-elle périodique ? Si oui, quelle est sa période ? Justifiez.
4. L'état "10 régimes" est-il réfléchissant ? Absorbant ? Justifiez.
5. Montrez qu'un régime (dans l'autre sens du mot) s'établit sur le long terme. Calculez sa distribution.

Exercices

Juin 2019. On considère une marche aléatoire sur un cercle. Il y a quatre stations sur le cercle, notées A, B, C et D. A chaque instant, on se déplace vers une des deux stations voisines avec la même probabilité.



1. Représentez cette marche aléatoire à l'aide d'une chaine de Markov. Donnez-en le graphe et la matrice de transition.
2. Sachant que la chaîne de Markov est initialisée dans son état A, quelle est la probabilité de revenir à l'état A après un grand nombre de déplacements ? Discutez s'il y a lieu.
3. Cette chaîne est-elle périodique ? Si oui, quelle est sa période ? Justifiez.
4. Répondez à nouveau aux questions 1 à 3 sachant qu'il y a 5 stations au lieu de 4 sur le cercle (ne décrivez que ce qui change par rapport à la configuration précédente).

Introduction

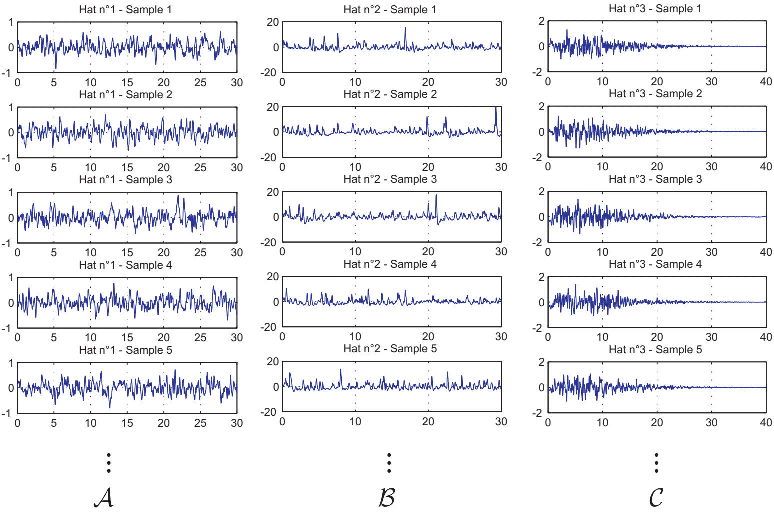
Caractérisation de processus stochastiques
- Généralités
- Processus discrets
- Processus continus
- Processus Stationnaires
- Processus/Chaines de Markov

Opérations sur les processus aléatoires
- Systèmes sans mémoire
- Systèmes avec mémoire (LTI)
- Autres Systèmes

Génération de réalisations de processus stochastiques

Introduction
Caractérisation
Généralités
Processus discrets
Processus continus
Processus Stationnaires
Processus/Chaines de Markov
Opérations
Génération

Exemples

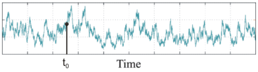


Représentation de rang 1

Densité de probabilité de rang 1

$$p_x(x, t_1) = p_{X_1}(x)$$

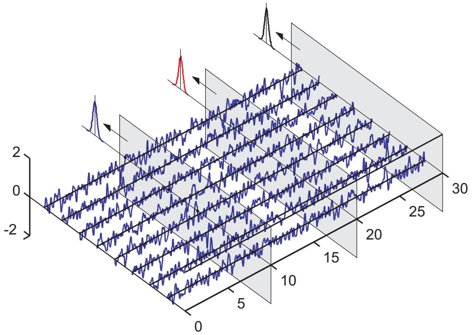
- densité de probabilité de la variable $X_1 \equiv x(t_1)$
- $p_x(x, t_1)\, dx$: probabilité que $x < x(t_1) < x + dx$, c'est-à-dire que la fonction prenne une valeur dans l'intervalle $[x; x + dx]$ à l'instant t_1



La fonction $p_x(x, t_1)$ contient trop d'information ?

Représentation de rang 1

Du point de vue de l'expérimentateur



Du point de vue de la modélisation, exemple :

$$p_x(x,t) = \frac{1}{\sigma(t)\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu(t))^2}{2\sigma(t)}}$$

Représentation de rang 1

Définition des moments statistiques (de rang 1) :

$$\mu_k(t_1) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k p_x(x, t_1)\, dx$$

$\mu_1(t_1)$: évolution de la moyenne au cours du temps
[idem pour les moments centrés]

Simplification : processus stationnaire ($\partial/\partial t_1 \to 0$)

- $p_x(x, t_1) \to p_x(x)$
- $\mu_k(t_1) \to \mu_k$

...les caractéristiques statistiques ne dépendent pas du temps

note : la distribution de rang-1 ne contient pas d'information relative à la distribution fréquentielle

Représentation de rang 1

Définition des moments statistiques (de rang 1) :

$$\mu_k(t_1) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k p_x(x, t_1)\, dx$$

$\mu_1(t_1)$: évolution de la moyenne au cours du temps
[idem pour les moments centrés]

Simplification : processus stationnaire ($\partial/\partial t_1 \to 0$)

- $p_x(x, t_1) \to p_x(x)$
- $\mu_k(t_1) \to \mu_k$

...les caractéristiques statistiques ne dépendent pas du temps

note : la distribution de rang-1 ne contient pas d'information relative à la distribution fréquentielle

Représentation de rang 1

Une condition **suffisante** pour qu'un processus aléatoire soit **non-stationnaire** est que sa densité de probabilité de rang 1 dépende explicitement du temps.

$$\frac{\partial p_x(x,t)}{\partial t} \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \text{processus instationnaire}$$

Une condition **nécessaire** pour qu'un processus aléatoire soit **stationnaire** est que sa densité de probabilité de rang 1 ne dépende pas explicitement du temps.

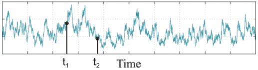
$$\text{processus stationnaire} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial p_x(x,t)}{\partial t} = 0$$

Introduction
Caractérisation
Généralités
Processus discrets
Processus continus
Processus Stationnaires
Processus/Chaines de Markov
Opérations
Génération

Densité de probabilité de rang 2

$$p_x(x_1, t_1; x_2, t_2) = p_{X_1 X_2}(x_1, x_2)$$

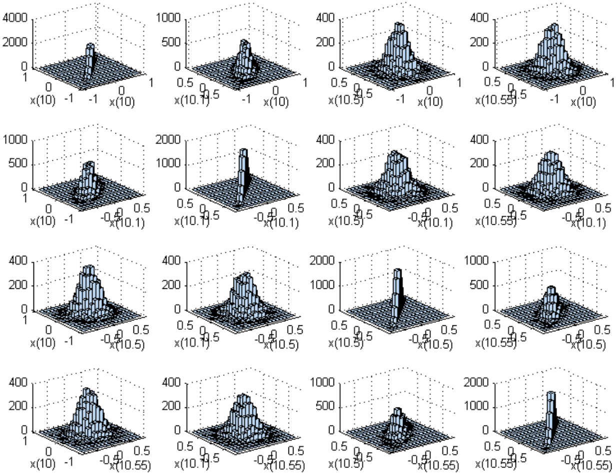
- densité de probabilité conjointe des variables $X_1 \equiv x(t_1)$ et $X_2 \equiv x(t_2)$,
- $p_x(x_1, t_1; x_2, t_2)\, dx_1 dx_2$= probabilité que $x_1 \leq x(t_1) \leq x_1 + dx_1$ et que $x_2 \leq x(t_2) \leq x_2 + dx_2$.



La fonction $p_x(x_1, t_1; x_2, t_2)$ contient trop d'information ?
Notamment :

$$p_x(x_1, t_1) = \int_{-\infty}^{+\infty} p_x(x_1, t_1; x_2, t_2)\, dx_2.$$

Représentation de rang 2



Représentation de rang 2

2022

V. Denoël

Introduction
Caractérisation
Généralités
Processus discrets
Processus continus
Processus Stationnaires
Processus/Chaines de Markov
Opérations
Génération

Définition des moments statistiques (de rang 2)

$$\mu_{k,l}\left(t_1,t_2\right)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x_1^k x_2^l p_x\left(x_1,t_1;x_2,t_2\right)dx_1 dx_2$$

$\mu_{1,1}\left(t_1,t_2\right)$ est la fonction d'auto-corrélation
De plus, $\mu_{1,1}\left(t_1,t_1\right)=\mu_2\left(t_1\right)$ représente l'évolution du carré moyen au cours du temps
[idem pour les moments centrés] $\rightarrow$ auto-covariance

Simplification : processus stationnaire, $f\left(t_1,t_2\right)\rightarrow\phi\left(\left|t_2-t_1\right|\right)$

- $p_x\left(x_1,t_1;x_2,t_2\right)\rightarrow p_x\left(x_1,x_2,\Delta t\right)$
- $\mu_{k,l}\left(t_1,t_2\right)\rightarrow\mu_{k,l}\left(\Delta t\right)$

...les caractéristiques statistiques ne dépendent que du délai $\Delta t=\left|t_2-t_1\right|$.

Représentation de rang 2

Définition des moments statistiques (de rang 2)

$$\mu_{k,l}\left(t_1, t_2\right) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x_1^k x_2^l p_x\left(x_1, t_1; x_2, t_2\right) dx_1 dx_2$$

$\mu_{1,1}\left(t_1, t_2\right)$ est la fonction d'auto-corrélation
De plus, $\mu_{1,1}\left(t_1, t_1\right) = \mu_2\left(t_1\right)$ représente l'évolution du carré moyen au cours du temps
[idem pour les moments centrés] $\rightarrow$ auto-covariance

Simplification : processus stationnaire, $f\left(t_1, t_2\right) \rightarrow \phi\left(\left|t_2 - t_1\right|\right)$

- $p_x\left(x_1, t_1; x_2, t_2\right) \rightarrow p_x\left(x_1, x_2, \Delta t\right)$
- $\mu_{k,l}\left(t_1, t_2\right) \rightarrow \mu_{k,l}\left(\Delta t\right)$

...les caractéristiques statistiques ne dépendent que du délai $\Delta t = \left|t_2 - t_1\right|$.

Représentation de rang 2

Une condition **suffisante** pour qu'un processus aléatoire soit **non-stationnaire** est que sa densité de probabilité de rang 2 ne puisse pas s'exprimer explicitement en fonction de $t_2 - t_1$.

$$\frac{\partial p_x\left(x_1, t_1; x_2, t_1+\tau\right)}{\partial t_1} \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \text{processus instationnaire}$$

Une condition **nécessaire** pour qu'un processus aléatoire soit **stationnaire** est que sa densité de probabilité de rang 2 exprimée explicitement en fonction de t_1 et $t_1 + \tau$ ne dépende pas de t_1.

$$\text{processus stationnaire} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial p_x\left(x_1, t_1; x_2, t_1+\tau\right)}{\partial t_1} = 0$$

Représentation de rang n

Densité de probabilité de rang 3

$$p_3\left(x_1, t_1; x_2, t_2; x_3, t_3\right) = p_{X_1 X_2 X_3}\left(x_1, x_2, x_3\right)$$

densité de probabilité conjointe des variables $X_1 \equiv x\left(t_1\right)$,$X_2 \equiv x\left(t_2\right)$, $X_3 \equiv x\left(t_3\right)$

Généralisation au rang n

$$p_n\left(x_1, t_1; ...; x_n, t_n\right)$$

La densité de probabilité de rang n contient les informations se trouvant dans les densités de rangs inférieurs.

nb : Difficulté de pouvoir déterminer les densités de probabilité d'ordres élevés à partir de résultats expérimentaux.
$\rightarrow$ supposer une forme “simple”, p.ex. que les variables $X_1, ...X_N$ sont conjointement gaussiennes

Représentation de rang n

Propriétés de la densité de probabilité

Positivité – La densité de probabilité de rang n est une fonction positive

$$p_n\left(x_1,t_1;...;x_n,t_n\right) \geq 0$$

Normalisation – L'intégrale de la densité de probabilité de rang n est unitaire sur son support

$$\int\cdots\int_{\mathbb{R}^n} p_n\left(x_1,t_1;...;x_n,t_n\right) dx_1 \cdots dx_n = 1$$

Symétrie – La densité de probabilité de rang n possède des conditions de symétrie vis-à-vis de ses arguments

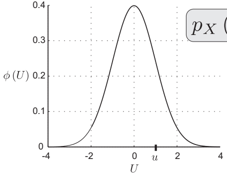
$$p_n\left(x_1,t_1;...x_k,t_k;...x_l,t_l;...;x_n,t_n\right) = p_n\left(x_1,t_1;...x_l,t_l;...x_k,t_k;...;x_n,t_n\right)$$

Compatibilité – On peut toujours retrouver une densité d'ordre $k < n$ à partir de la densité de probabilité d'ordre n

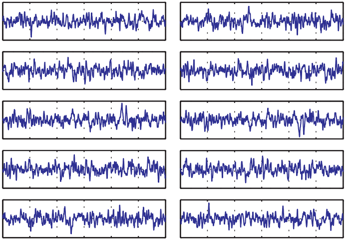
$$p_k\left(x_1,t_1;...x_k,t_k\right) = \int\cdots\int_{\mathbb{R}^{n-k}} p_n\left(x_1,t_1;..;x_n,t_n\right) dx_{k+1} \cdots dx_n$$

Description d'un Processus Aléatoire

-0.0808,	-0.2913,	0.8616,	0.9470,	0.1365,
-0.1502,	0.7754,	2.2712,	0.0830,	0.4614,
-0.9314,	-0.0613,	0.1232,	0.1924,	0.0679,
0.4258,	-1.0290,	0.1000,	-0.5919,	1.2051,
0.6757,	-0.7125,	0.0339,	-1.9477,	-1.6986,
-1.6997,	-0.8314,	1.8033,	-0.4867,	...

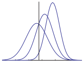


$p_X(x)$

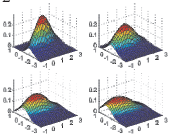


$p_n(x_1, t_1; ..; x_n, t_n)$

rang 1



rang 2



Réalisations (statistiques)

Modèle (probabilités)

Introduction

Caractérisation de processus stochastiques
- Généralités
- Processus discrets
- Processus continus
- Processus Stationnaires
- Processus/Chaines de Markov

Opérations sur les processus aléatoires
- Systèmes sans mémoire
- Systèmes avec mémoire (LTI)
- Autres Systèmes

Génération de réalisations de processus stochastiques

Stationnarité

Un processus aléatoire est dit *stationnaire* (au sens strict) lorsque ses probabilités de différents ordres sont indépendantes d'un changement d'origine de l'axe du temps.

Les processus aléatoires $x(t)$ et $x(t+\tau)$ ont donc les mêmes caractéristiques statistiques $(\forall \tau)$

Ceci se traduit donc par le fait que

$$\begin{aligned} p_x(x_1, t) &= p_x(x_1, t+\tau) \\ p_x(x_1, t_1; x_2, t_2) &= p_x(x_1, t_1+\tau; x_2, t_2+\tau) \\ &\vdots \end{aligned}$$

Stationnarité

Un processus aléatoire est dit *stationnaire* (au sens large) si *(i)* sa moyenne est constante et *(ii)* sa fonction d'autocorrélation ne dépend que d'un décalage temporel τ

Si un processus est stationnaire au sens strict, alors il est également stationnaire au sens large.

Un processus est dit *stationnaire de rang* n si ses densités de probabilité de rangs $n' \leq n$ sont toutes indépendantes d'un changement de repère de temps.

Stationnarité

On a défini les moments statistiques (de rang 1) :

$$p_x(x, t_1) \quad \rightarrow \quad \mu_k(t_1) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k p_x(x, t_1)\, dx$$

De façon plus générale, on définit l'***espérance mathématique de rang** n*

$$E\left[f(x_1, \dots, x_n)\right] = \int \cdots \int_{\mathbb{R}^n} f(x_1, \dots, x_n)\, p_x(x_1, t_1; \dots; x_n, t_n)\, dx_1 \dots dx_n.$$

Espérance mathématique de rang 1

$$\varphi(t_1) = E\left[f(x_1)\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x_1)\, p_x(x_1, t_1) dx_1,$$

Espérance mathématique de rang 2

$$\varphi(t_1, t_2) = E\left[f(x_1, x_2)\right] = \iint_{-\infty}^{+\infty} f(x_1, x_2)\, p_x(x_1 t_1; x_2, t_2) dx_1 dx_2,$$

(une moyenne à travers les échantillons)

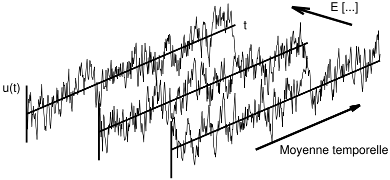
Ergodicité

Espérance mathématique de rang 1

$$\varphi(t_1) = E[f(x_1)] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x_1)\, p_x(x_1, t_1) dx_1 \simeq \frac{1}{n_s} \sum_{i=1}^{n_s} f(x_i(t_1))$$

La moyenne temporelle de $f(x_i)$, s'exprimerait pour la réalisation i par

$$\tilde{\varphi}_i = \frac{1}{T} \int_0^T f(x_i(t))\, dt,$$



Processus ***ergodique*** : $\varphi(t_1) \equiv \tilde{\varphi}_i, \forall t_1, \forall i.$

Ergodicité

Un processus aléatoire stationnaire est ergodique lorsque les caractéristiques statistiques, déduites des valeurs moyennes calculées à partir des valeurs à un même instant d'un grand nombre de réalisations différentes du processus considéré, coïncident avec celles qui sont déduites des valeurs successives dans le temps d'une quelconque de ces réalisations. -- Larousse

Moyenne d'un processus

$$\mu = E\left[x_1\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} x_1\, p_x(x_1) dx_1 = \lim_{T \to +\infty} \frac{1}{T} \int_0^T x_i\left(t\right) dt.$$

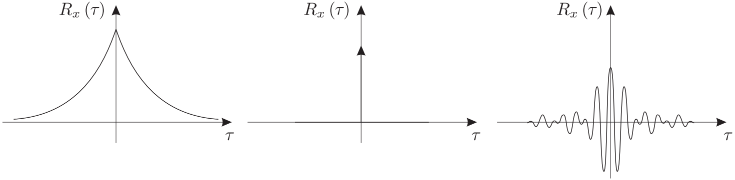
Fonction d'autocorrélation

$$R_x(\Delta t) = E\left[x_1 x_2\right]$$

$$= \int \int_{-\infty}^{+\infty} x_1 x_2\, p_x(x_1; x_2, \Delta t) dx_1 dx_2 = \lim_{T \to +\infty} \frac{1}{T} \int_0^T x_i(t) x_i(t+\Delta t) dt.$$

La Fonction D'Autocorrelation

(processus à moyenne nulle)



$$R_x(\tau) = \sigma^2 e^{-\beta|\tau|}$$

$$R_x(\tau) = R_o\,\delta(\tau)$$

$$R_x(\tau) = \frac{2\sigma^2 \sin\left(\frac{\Delta\tau}{2}\right)\cos(\tau\omega_0)}{\Delta\tau}$$

$$R_x(\Delta t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x_1 x_2\, p_x(x_1; x_2, \Delta t)\, dx_1 = \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T}\int_0^T x_i(t) x_i(t+\Delta t)\, dt.$$

La Fonction D'Autocorrelation

Propriétés

Valeur à l'origine – La fonction d'autocorrléation à l'origine est égale à la variance du processus

$$R_x(0) = \sigma_x^2 \qquad \rightarrow \qquad r_x(\tau) = \frac{R_x(\tau)}{\sigma_x^2}$$

Valeur à l'infini – La fonction d'autocorrléation tend vers 0

$$\lim_{\tau \to +\infty} R_x(\tau) = 0$$

Parité – La fonction d'autocorrléation est paire

$$R_x(\tau) = R_x(-\tau)$$

Dérivées – Les fonctions d'autocorrélation des dérivées de x sont estimées par

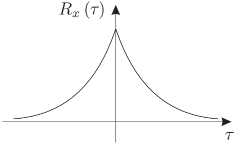
$$R_{\dot{x}}(\tau) = \frac{-d^2 R_x(\tau)}{d\tau^2} \qquad ; \qquad R_{\ddot{x}}(\tau) = \frac{d^4 R_x(\tau)}{d\tau^4}.$$

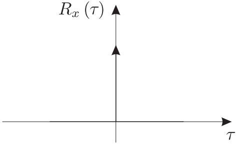
Temps caractéristique

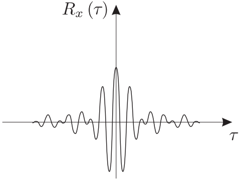
$$\tau_c = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} R_x(\tau)\, d\tau}{\sigma_x^2}.$$

Théorème de Wiener-Khintchine - Densité Spectrale de Puissance

$$S_x(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} R_x(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \quad \rightleftarrows \quad R_x(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} S_x(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega$$







$$R_x(\tau) = \sigma^2 e^{-\beta|\tau|}$$

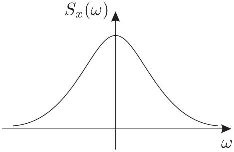
$$S_x(\omega) = \frac{\sigma_x^2}{\pi\beta}\frac{\beta^2}{\beta^2+\omega^2}$$

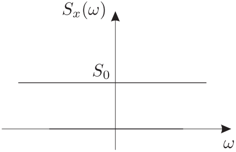
$$R_x(\tau) = R_o\,\delta(\tau)$$

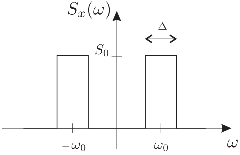
$$S_x(\omega) = S_0$$

$$R_x(\tau) = \frac{2\sigma^2 \sin\left(\frac{\Delta\tau}{2}\right)\cos(\tau\omega_0)}{\Delta\tau}$$

$$S_x(\omega) = \begin{cases} S_0 & \text{pour } \omega_0-\frac{\Delta}{2} < |\omega| < \omega_0+\frac{\Delta}{2} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$







2022

V. Denoël

Introduction

Caractérisation

Généralités

Processus discrets

Processus continus

Processus Stationnaires

Processus/Chaines de Markov

Opérations

Génération

Estimation de la fonction d'autocorrélation

$$R_x(\Delta t) = \lim_{T \to +\infty} \frac{1}{T} \int_0^T x_i(t) x_i(t + \Delta t) dt.$$

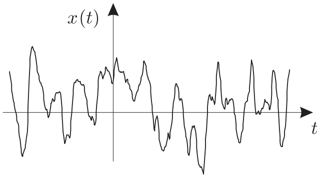
Estimation de la densité spectrale de puissance

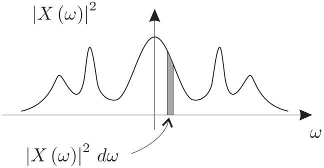
$$S_x(\omega) = \lim_{T \to \infty} \frac{2\pi}{T} \left| X_i(\omega, T) \right|^2$$

où $X_i\left(\omega; T\right) = \frac{1}{2\pi} \int_{-T/2}^{+T/2} x_i\left(t\right) e^{-j\omega t} dt.$

La Densité Spectrale de Puissance

Théorème de Parseval : $\int_{-\infty}^{+\infty} x^2(t)\, dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} |X(\omega)|^2\, d\omega$





Distribution fréquentielle –L'intégrale de la DSP est égale à la variance

$$\int_{-\infty}^{+\infty} S_x(\omega) d\omega = \sigma_x^2$$

Parité – La densité spectrale de puissance est une fonction paire

$$S_x(\omega) = S_x(-\omega)$$

Dérivées – La densité spectrale de puissance d'un processus dérivé

$$S_{\dot{x}}(\omega) = \omega^2 S_x(\omega) \qquad ; \qquad S_{\ddot{x}}(\omega) = \omega^4 S_x(\omega)$$

2022

V. Denoël

Introduction

Caractérisation

Généralités

Processus discrets

Processus continus

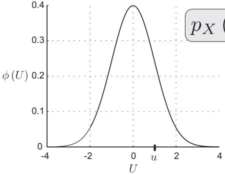
Processus Stationnaires

Processus/Chaines de Markov

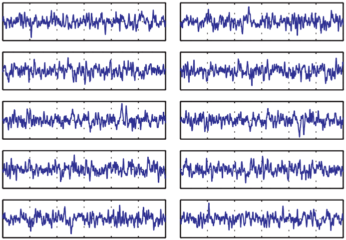
Opérations

Génération

-0.0808,	-0.2913,	0.8616,	0.9470,	0.1365,
-0.1502,	0.7754,	2.2712,	0.0830,	0.4614,
-0.9314,	-0.0613,	0.1232,	0.1924,	0.0679,
0.4258,	-1.0290,	0.1000,	-0.5919,	1.2051,
0.6757,	-0.7125,	0.0339,	-1.9477,	-1.6986,
-1.6997,	-0.8314,	1.8033,	-0.4867,	...

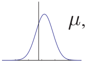


$p_X(x)$



$p_n(x_1, t_1; ..; x_n, t_n)$

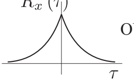
rang 1

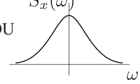


$\mu, \sigma, \ldots$

rang 2

$R_x(\tau)$ OU $S_x(\omega)$





Réalisations (statistiques) Modèle (probabilités)

Introduction

Caractérisation de processus stochastiques
- Généralités
- Processus discrets
- Processus continus
- Processus Stationnaires
- Processus/Chaines de Markov

Opérations sur les processus aléatoires
- Systèmes sans mémoire
- Systèmes avec mémoire (LTI)
- Autres Systèmes

Génération de réalisations de processus stochastiques

Probabilité Conditionnelle

Représentation séquentielle d'une séquence aléatoire ?

Intérêt de la ***densité de probabilité conditionnelle*** :

$$p_n\left(x_n, t_n | x_{n-1}, t_{n-1}; \cdots; x_1, t_1\right)$$

(probabilité que la variable aléatoire $X\left(t_n\right)$ du processus en l'instant t_n soit comprise dans $]x_n, x_n + dx_n]$, sachant qu'aux instants antérieurs $t_1 < t_2 < ... < t_{n-1}$, les valeurs de $X\left(t_i\right)$ étaient respectivement x_i, $i = 1, \cdots n-1$)

Exemple :

$$p_2\left(x_2, t_2 | x_1, t_1\right) = \frac{p_2\left(x_1, t_1; x_2, t_2\right)}{p\left(x_1, t_1\right)}$$

Probabilité Conditionnelle

▷ si on connait les $p_n\left(x_n, t_n; \cdots; x_1, t_1\right)$,$\forall n$, alors on connait les $p_{n'}\left(x_{n'}, t_{n'} | x_{n'-1}, t_{n'-1}; \cdots; x_1, t_1\right)$, $\forall n' \leq n$

▷ si on connait les $p_n\left(x_n, t_n | x_{n-1}, t_{n-1}; \cdots; x_1, t_1\right)$, $\forall n$, on peut établir les $p_{n'}\left(x_{n'}, t_{n'}; \cdots; x_1, t_1\right)$, $\forall n' \leq n$.
Notamment

$$p_2\left(x_1, t_1; x_2, t_2\right) = p_1\left(x_1, t_1\right) p_2\left(x_2, t_2 | x_1, t_1\right)$$

$$p_3\left(x_1, t_1; x_2, t_2; x_3, t_3\right) = p_2\left(x_1, t_1; x_2, t_2\right) p_3\left(x_3, t_3 | x_2, t_2; x_1, t_1\right)$$

(pour autant que la densité de probabilité de rang 1, $p_1\left(x_1, t_1\right)$, soit connue)

→ équivalence des représentations (en principe)

Densité de probabilité Transitionnelle

La densité conditionnelle $p_2(x_2, t_2 | x_1, t_1)$ joue un rôle particulier. On l'appelle ***densité de probabilité transitionnelle*** et la note parfois $q(x_2, t_2 | x_1, t_1)$.

Propriété 1

$$\lim_{t_2 \to t_1} q(x_2, t_2 | x_1, t_1) = \delta(x_2 - x_1)$$

càd

$$p_2(x_1, t_1; x_2, t_2) = p_1(x_1, t_1)\, q(x_2, t_2 | x_1, t_1) \to p_1(x_1, t_1)\, \delta(x_2 - x_1)$$

Propriété 2

$$\lim_{t_2 - t_1 \to +\infty} q(x_2, t_2 | x_1, t_1) = p_1(x_2, t_2)$$

çàd

$$p_2(x_1, t_1; x_2, t_2) = p_1(x_1, t_1)\, q(x_2, t_2 | x_1, t_1) \to p_1(x_1, t_1)\, p_1(x_2, t_2)$$

Processus de Markov

Un processus de Markov est un processus dont la densité de probabilité conditionnelle $p_n\left(x_n, t_n | x_{n-1}, t_{n-1}; \cdots; x_1, t_1\right)$ ne dépend explicitement que de l'instant le plus proche t_{n-1} et non pas des valeurs prises aux instants précédents, soit

$$p_n\left(x_n, t_n | x_{n-1}, t_{n-1}; \cdots; x_1, t_1\right) = q\left(x_n, t_n | x_{n-1}, t_{n-1}\right)$$

Donc

$$p_n\left(x_1, t_1; \cdots; x_n, t_n\right) = q\left(x_n, t_n | x_{n-1}, t_{n-1}\right) \cdots q\left(x_2, t_2 | x_1, t_1\right) p_1\left(x_1, t_1\right)$$

(de sorte que l'on puisse effectivement reconstruire toutes les p_n à partir de la seule connaissance de q)

Exemples

Exemple : Processus à incréments indépendants
Soient Y_i, $i = 1, \cdots, n$ des variables aléatoires mutuellement indépendantes et x_0 un état initial connu. Soit la séquence

$$X_m = x_0 + \sum_{i=1}^{m} Y_i \qquad m = 1, \cdots, n$$

[nb : les incréments $X_m - X_{m-1} = Y_m$ sont mutuellement indépendants (d'où le nom).]

Puisque ses densités de probabilités conjointes se factorisent, ce processus est markovien.

Application au jeu de pile ou face (gain cumulé)

Introduction

Caractérisation de processus stochastiques
- Généralités
- Processus discrets
- Processus continus
- Processus Stationnaires
- Processus/Chaines de Markov

Opérations sur les processus aléatoires
- Systèmes sans mémoire
- Systèmes avec mémoire (LTI)
- Autres Systèmes

Génération de réalisations de processus stochastiques

Partie III : Opérations sur les Processus Aléatoires

Acquis d'apprentissage :

- faire des opérations simples avec les processus aléatoires : addition, dérivation, intégration, solution d'équation différentielle


Quantifier une donnée
Modéliser un problème
Quantifier un résultat
Statistiques
Probabilités

Exemple de Problème

On chauffe un barreau de longueur ℓ, conductivité thermique λ(W/mK), chaleur spécifique c (W/m^3), masse volumique ρ (kg/m^3) à une extrémité à l'aide d'une flamme. Le problème est modélisé par la loi de Fourier, avec comme condition limite une température imposée, égale à la température de la flamme.

$$\lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \rho\, c\, \frac{\partial T}{\partial t} \qquad \text{sur } (x,t) \in [o;\ell] \times [0,+\infty]$$

Condition initiale

$$T\,(x,0) = T_0\,(x)$$

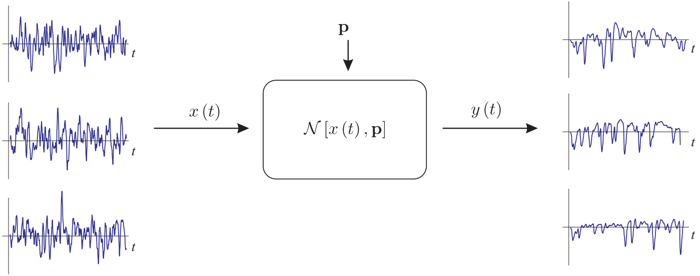
Conditions limites

$$T\,(\ell,t) = T_\ell\,(t)$$

$$\partial_x T\,(0,t) = Q_0\,(t)$$

Quid si $T_\ell\,(t)$ est une fonction aléatoire ?

Opérations sur les Processus Aléatoires : Concepts



$$y(t) = \mathcal{N}[x(t), \mathbf{p}]$$

[on se limite aux systèmes déterministes, $\mathbf{p}$ est un paramètre connu]

Introduction
Caractérisation
Opérations
Systèmes sans mémoire
Systèmes avec mémoire (LTI)
Autres Systèmes
Génération

Exemple :

$$y(t) = \frac{dx}{dt} = \dot{x}(t)$$

Fonction d'autocorrélation d'un processus dérivé

$$R_{\dot{x}}(\tau) = \frac{-d^2 R_x(\tau)}{d\tau^2} \qquad ; \qquad R_{\ddot{x}}(\tau) = \frac{d^4 R_x(\tau)}{d\tau^4}.$$

La densité spectrale de puissance d'un processus dérivé

$$S_{\dot{x}}(\omega) = \omega^2 S_x(\omega) \qquad ; \qquad S_{\ddot{x}}(\omega) = \omega^4 S_x(\omega)$$

2022

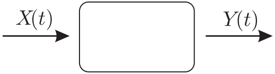
V. Denoël

Introduction
Caractérisation
Opérations
Systèmes sans mémoire
Systèmes avec mémoire (LTI)
Autres Systèmes
Génération

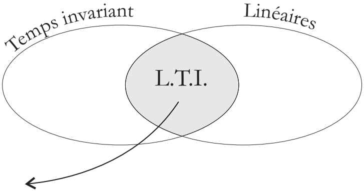
Systèmes deterministes

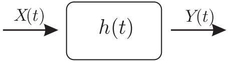
$$Y(t) \;=\; g\left[X(t)\right]$$

Systèmes sans mémoire



Systèmes avec mémoire





$$Y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h\left(\tau\right) X(t-\tau)\, d\tau$$

Introduction

Caractérisation de processus stochastiques

Généralités

Processus discrets

Processus continus

Processus Stationnaires

Processus/Chaines de Markov

Opérations sur les processus aléatoires

Systèmes sans mémoire

Systèmes avec mémoire (LTI)

Autres Systèmes

Génération de réalisations de processus stochastiques

Systèmes Sans Mémoire (fonctions)

$$y(t) = g[x(t)]$$

Exemples

Pression dans un écoulement de vitesse $v(t)$: $p(t) = \frac{1}{2}\rho C v^2(t)$

Décodeur binaire : $y(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } x(t) < 0 \\ 1 & \text{si } x(t) \geq 0 \end{cases}$

Somme de deux processus $z(t) = x(t) + y(t)$

Problème

Admettons que nous connaissions $p_{x_n}(x_1, t_1; ...; x_n, t_n)$, la représentation de rang n de $x(t)$.

Comment exprimer $p_{y_n}(y_1, t_1; ...; y_n, t_n)$, la distribution de rang n de $y(t) = g[x(t)]$?

Rappel de variables aléatoires (fonction d'UNE variable)

Pour une fonction $g(\cdot)$ monotonément croissante, la densité de probabilité de la variable aléatoire $Y = g(X)$ s'exprime par

$$p_Y(y) = \frac{1}{g'\left(g^{-1}(y)\right)} p_X\left(g^{-1}(y)\right)$$

En particulier, pour une transformation linéaire, $g(X) = aX + b$, avec $a > 0$, la densité de probabilité de la variable $Y = g(X)$ s'écrit

$$p_Y(y) = \frac{1}{a} p_X\left(\frac{y-b}{a}\right)$$

Plus généralement, pour une fonction $g(\cdot)$ quelconque présentant les k racines distinctes x_1, ...x_k telles que $y = g(x_1) = ... = g(x_k)$, la densité de probabilité de la variable $Y = g(X)$ s'exprime par

$$p_Y(y) = \frac{p_X[x_1(y)]}{|g'[x_1(y)]|} + ... + \frac{p_X[x_k(y)]}{|g'[x_k(y)]|}$$

2022

V. Denoël

Introduction

Caractérisation

Opérations

Systèmes sans mémoire

Systèmes avec mémoire (LTI)

Autres Systèmes

Génération

Rappel de variables aléatoires (fonction d'UNE variable)

Pour une fonction $g(\cdot)$ monotonément croissante, la densité de probabilité de la variable aléatoire $Y = g(X)$ s'exprime par

$$p_Y(y) = \frac{1}{g'\left(g^{-1}(y)\right)} p_X\left(g^{-1}(y)\right)$$

En particulier, pour une transformation linéaire, $g(X) = aX + b$, avec $a > 0$, la densité de probabilité de la variable $Y = g(X)$ s'écrit

$$p_Y(y) = \frac{1}{a} p_X\left(\frac{y-b}{a}\right)$$

Plus généralement, pour une fonction $g(\cdot)$ quelconque présentant les k racines distinctes x_1, ...x_k telles que $y = g(x_1) = ... = g(x_k)$, la densité de probabilité de la variable $Y = g(X)$ s'exprime par

$$p_Y(y) = \frac{p_X[x_1(y)]}{|g'[x_1(y)]|} + ... + \frac{p_X[x_k(y)]}{|g'[x_k(y)]|}$$

Densité de probabilité de rang 1

Soit $y(t) = g[x(t)]$, alors

$$p_y(y,t) = \frac{1}{g'\left(g^{-1}(y)\right)} p_x\left(g^{-1}(y), t\right)$$

Et donc, par exemple,

$$E[y(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} y\, p_y(y,t) dy = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\; p_x(x,t)\, dx$$

Rappel de variables aléatoires (fonction de 2 variables)

La densité de probabilité conjointe de deux variables aléatoires $Y_1 = g_1(X_1, X_2)$ et $Y_2 = g_2(X_1, X_2)$ s'écrit

$$p_{Y_1 Y_2}(y_1, y_2) = \frac{p_{X_1 X_2}\left(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}\right)}{\left|J\left(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}\right)\right|} + \dots + \frac{p_{X_1 X_2}\left(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}\right)}{\left|J\left(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}\right)\right|}$$

où les $\left(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}\right) \dots \left(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}\right)$ sont les k racines du système

$$\begin{cases} g_1\left(x_1^{(i)}, x_2^{(i)}\right) & = y_1 \\ g_2\left(x_1^{(i)}, x_2^{(i)}\right) & = y_2 \end{cases} \quad \text{et où} \quad J\left(x_1^{(i)}, x_2^{(i)}\right) = \det\begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \frac{\partial g_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x_1} & \frac{\partial g_2}{\partial x_2} \end{pmatrix}$$

Introduction
Caractérisation
Opérations
Systèmes sans mémoire
Systèmes avec mémoire (LTI)
Autres Systèmes
Génération

Densité de probabilité de rang 2

Soit $y(t) = g[x(t)]$, alors

$$p_{y_1 y_2}(y_1, t_1; y_2, t_2) = \frac{p_{x_1 x_2}\left(x_1^{(1)}, t_1; x_2^{(1)}, t_2\right)}{\left|J\left(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}\right)\right|} + \ldots + \frac{p_{x_1 x_2}\left(x_1^{(k)}, t_1; x_2^{(k)}, t_2\right)}{\left|J\left(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}\right)\right|}$$

Et donc, par exemple,

$$E[y(t_1)\, y(t_2)] = \iint_{-\infty}^{+\infty} g(x_1)\, g(x_2)\; p_x(x_1, t_1; x_2, t_2)\, dx_1 dx_2.$$

Exemple

Soit la transformation $y(t) = x^2(t)$, du processus stationnaire gaussien $x(t)$

$$p_y(y,t) = \frac{p_x\left[\sqrt{y},t\right]}{2\sqrt{y}} + \frac{p_x\left[-\sqrt{y},t\right]}{2\sqrt{y}}$$

et

$$\begin{aligned} R_y(\tau) &= \sigma_x^4 + 2R_x^2(\tau) \\ S_y(\omega) &= \sigma_x^4\delta(\omega) + 2\int_{-\infty}^{+\infty} S_x(\bar{\omega})\, S_x(\omega-\bar{\omega})\, d\bar{\omega} \end{aligned}$$

Introduction

Caractérisation de processus stochastiques
- Généralités
- Processus discrets
- Processus continus
- Processus Stationnaires
- Processus/Chaines de Markov

Opérations sur les processus aléatoires
- Systèmes sans mémoire
- Systèmes avec mémoire (LTI)
- Autres Systèmes

Génération de réalisations de processus stochastiques

Système Linear Time-Invariant

▷ un système représenté par un opérateur $\mathcal{L}$ est dit ***linéaire*** ssi, $\forall a_1, a_2 \in \mathbb{R}$,

$$\mathcal{L}\left[a_1 x_1(t) + a_2 x_2(t)\right] = a_1 \mathcal{L}\left[x_1(t)\right] + a_2 \mathcal{L}\left[x_2(t)\right]$$

▷ un système caractérisé par un opérateur $\mathcal{L}[\cdot]$ est dit ***temps-invariant*** ssi, $\forall t_0 \in \mathbb{R}$,

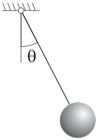
$$y(t) = \mathcal{L}\left[x(t)\right] \Rightarrow y(t - t_0) = \mathcal{L}\left[x(t - t_0)\right]$$

(un décalage de t_0 dans l'entrée résulte en un décalage identique dans la sortie)

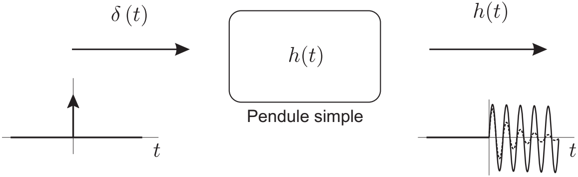
→ systèmes LTI (linear time-invariant)

Un système LTI est complètement représenté par sa ***fonction de réponse impulsionnelle***, obtenue par la réponse du système à une fonction de Dirac en entrée.

Exemple : $\ddot{\theta}(t) + (g/\ell)\,\theta(t) = m(t)$



$$h(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq 0 \\ \frac{1}{\sqrt{g/\ell}} \sin \sqrt{g/\ell}\, t & \text{si } t > 0 \end{cases}$$



Rappels de la Solution Déterministe

Réponse (déterministe) à un système LTI, $y(t) = \mathcal{L}[x(t)]$:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)\, x(t-\tau)\, d\tau$$

Solution dans le domaine de Fourier :

$$Y(\omega) = H(\omega)\, X(\omega)$$

où

$$X(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{-j\omega t} dt \quad ; \quad Y(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} y(t)\, e^{-j\omega t} dt,$$

et

$$H(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t)\, e^{-j\omega t} dt$$

représente la fonction de réponse fréquentielle.

Solution Stochastique

Pour une réalisation x_i de l'entrée

$$y_i(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x_i(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)\, x_i(t-\tau)\, d\tau$$

La moyenne de $y(t) = \mathcal{L}[x(t)]$ s'exprime donc par

$$E[y(t)] = \mu_y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} E[x(\tau)]\, h(t-\tau)\, d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} \mu_x(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau$$

(Si $x(t)$ est stationnaire au sens large, alors sa moyenne ne dépend pas du temps, $\mu_x(\tau) \equiv \mu_x$ et $\mu_y(t) \equiv \text{cst}$)

Solution Stochastique

De même, la fonction d'autocorrélation de $y(t) = \mathcal{L}[x(t)]$ est

$$\begin{aligned} R_y(t_1, t_2) &= \iint_{-\infty}^{+\infty} R_x(\tau_1, \tau_2)\, h(t_1 - \tau_1)\, h(t_2 - \tau_2)\, d\tau_1 d\tau_2 \\ &= \iint_{-\infty}^{+\infty} R_x(t_1 - \tau_1, t_2 - \tau_2)\, h(\tau_1)\, h(\tau_2)\, d\tau_1 d\tau_2 \end{aligned}$$

Evolution de la variance :

$$\sigma_y^2(t) = \iint_{-\infty}^{+\infty} R_x(\Delta\tau)\, h(t - \tau_1)\, h(t - \tau_1 - \Delta\tau)\, d\tau_1 d\Delta\tau$$

Solution stationnaire :

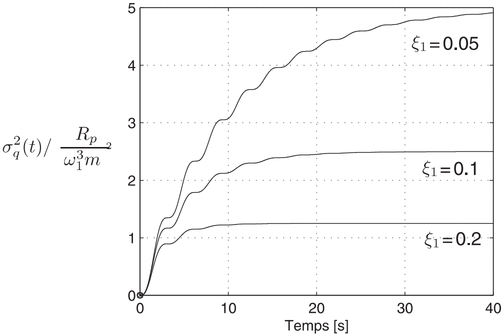
$$R_y(\Delta t) = \iint_{-\infty}^{+\infty} R_x(\Delta\tau)\, h(\tau_1)\, h(\tau_1 + \Delta t - \Delta\tau)\, d\tau_1 d\Delta\tau$$

Exemple

Exemple : Oscillateur simple soumis à un bruit blanc

$R_y(\tau) = R_p \delta(\tau) = 2\pi S_0 \delta(\tau)$

$$h(t) = \begin{cases} 0 & \text{pour } t \leq 0 \\ \frac{1}{m\omega_1\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\xi_1\omega_1 t} \sin\left(\sqrt{1-\xi^2}\omega_1 t\right) & \text{pour } t > 0. \end{cases}$$



Exemple

$$\sigma_q^2(t) = \frac{R_p \omega_1}{4\xi_1 k^2} \left[1 - e^{-2\xi_1 \omega_1 t} \left(\frac{1}{1-\xi_1^2} - \frac{\xi_1^2}{1-\xi_1^2} \cos(2\omega_d t) + \frac{\xi_1}{\sqrt{1-\xi_1^2}} \sin(2\omega_d t) \right) \right]$$

$$R_y(\Delta t) = 2\pi S_0 \frac{\omega_1}{4\xi_1 k^2} e^{-\Delta t \xi \omega} \left(\frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \sin(\Delta t \omega_d) + \cos(\Delta t \omega_d) \right)$$

Solution Dans le Domaine Fréquentiel

Une alternative à la solution dans le domaine temporel consiste à utiliser la transformée de Fourier de la réponse sous entrée arbitraire

$$Y(\omega) = H(\omega)\, X(\omega)$$

Pour un processus ergodique, on obtient donc :

$$\begin{aligned} S_y(\omega) &= \lim_{T\to\infty} \frac{2\pi}{T} \left|Y(\omega, T)\right|^2 = \left|H(\omega)\right|^2 \lim_{T\to\infty} \frac{2\pi}{T} \left|X(\omega, T)\right|^2 \\ &= \left|H(\omega)\right|^2 S_x(\omega)\,. \end{aligned}$$

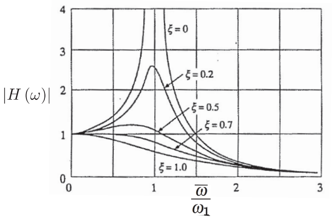
De façon plus générale, la densité spectrale de puissance de la solution stationnaire est obtenue par la transformée de Fourier de la fonction d'autocorrélation, soit

$$\begin{aligned} S_y(\omega) &= \frac{1}{2\pi} \iiint_{-\infty}^{+\infty} R_x(\Delta\tau)\, h(t_1)\, h(t_1 + \tau - \Delta\tau)\, e^{-j\omega\tau} d\tau dt_1 d\Delta\tau \\ &= \ldots = \left|H(\omega)\right|^2 S_x(\omega)\,. \end{aligned}$$

Solution Dans le Domaine Fréquentiel

Exemple 1 : Oscillateur simple soumis à un bruit blanc, $S_y(\omega) = S_0$

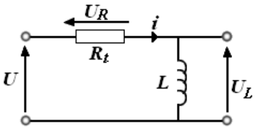
$$H(\omega) = \frac{\frac{1}{k}}{1 - \frac{\overline{\omega}^2}{\omega_1^2} + 2j\frac{\overline{\omega}}{\omega_1}\xi_1}$$



$$\sigma_x^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} S_x(\omega)\, d\omega = \frac{S_0}{k^2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_1^2}\right)^2 + \left(2\xi_1\frac{\omega}{\omega_1}\right)^2} d\omega = \frac{\pi S_0 \omega_1}{2\xi_1 k^2}$$

Solution Dans le Domaine Fréquentiel

Exemple 2 : Circuit RL série



$$u(t) = L\frac{di(t)}{dt} + Ri(t) \quad \rightarrow \quad I(\omega) = \frac{U(\omega)}{Lj\omega + R}$$

u la tension aux bornes du montage, en V ; i l'intensité du courant électrique en A ; L l'inductance de la bobine en H ; R la résistance totale du circuit en Ω

Si $u(t)$ est un bruit blanc d'intensité S_u, alors

$$\sigma_i^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{S_u}{(L\omega)^2 + R^2} d\omega = \frac{S_u \pi}{L\,R}$$

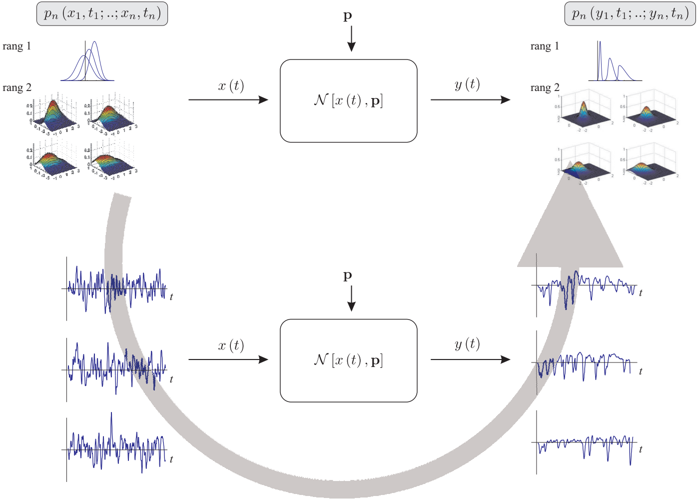
Introduction

Caractérisation de processus stochastiques
- Généralités
- Processus discrets
- Processus continus
- Processus Stationnaires
- Processus/Chaines de Markov

Opérations sur les processus aléatoires
- Systèmes sans mémoire
- Systèmes avec mémoire (LTI)
- Autres Systèmes

Génération de réalisations de processus stochastiques

Autres Systèmes



Introduction

Caractérisation de processus stochastiques

Généralités

Processus discrets

Processus continus

Processus Stationnaires

Processus/Chaines de Markov

Opérations sur les processus aléatoires

Systèmes sans mémoire

Systèmes avec mémoire (LTI)

Autres Systèmes

Génération de réalisations de processus stochastiques

Partie IV : Génération de réalisations de processus stochastiques

Différents Contextes

- processus aléatoires construits à partir de variables aléatoires ; dans ce cas, la génération se limite essentiellement à de la génération de variables aléatoires ;

$$x(t) = f[\varphi(t), \mathbf{p}]$$

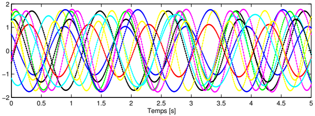
- processus de Markov, ou représentés par une densité de probabilité transitionnelle ;
- processus représentés par leur densités de probabilités de tous rangs. Plus précisément, nous nous intéresserons essentiellement à la simulation de réalisations d'échantillons de processus stationnaires.

Processus construits à partir de Variables Aléatoires

$$x(t) = f\left[\{\varphi_1(t), \cdots, \varphi_N(t)\}, t, \mathbf{p}\right]$$

$\rightarrow$ simulation de réalisations de variables aléatoires $\mathbf{p}$

Exemple : $x(t) = P_1 \sin(P_2 t + P_3)$



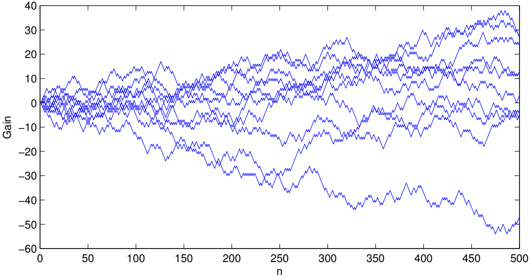
Matlab -

```
figure
N=12; clr = {'r','k','b','m','c','y','g'};
t = 0:0.01:5;
for i=1:N
  A = 1 + rand(1);
  w = 2*pi + randn(1);
  phi = 2*pi * rand(1);
  f = A * sin(w*t+phi);
  plot(t,f, char(clr(mod(i,7)+1)),'marker','.'); hold on
end
```

Processus de Markov

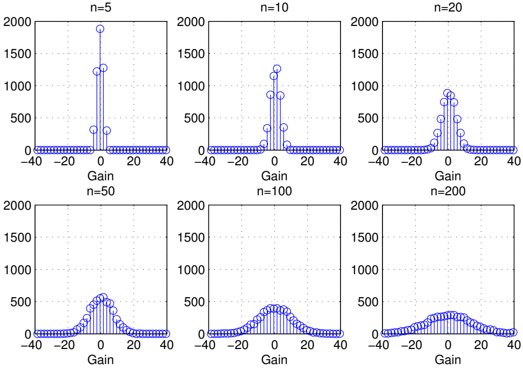
On connait une densité de probabilité initiale $p\left(x_0\right)$ et une densité de probabilité transitionnelle $q\left(x_{n+1}, t_{n+1} | x_n, t_n\right)$.

1. Initialiser l'échantillon $\rightarrow$ $X\left(t_0\right)$
2. Itérer pour déterminer les $X\left(t_n\right)$, avec $n \geq 0$



Gain cumulé au jeu de pile ou face (mise = 1).

Densité de probabilité du gain, après n parties

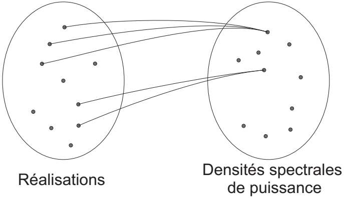


(nb : il existe des méthodes pour déterminer ces densités de probabilités explicitemenent)

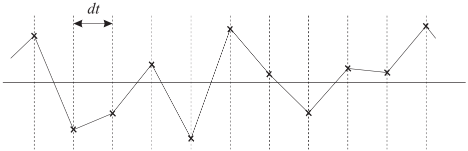
Objectif

Soit un processus aléatoire $x(t)$ stationnaire déterminé par sa densité spectrale de puissance $S(\omega)$. Mettre au point une réalisation de ce processus aléatoire.

Pourquoi parle-t-on de génération / simulation ?



1. Simulation d'un bruit blanc



$$R\left(\Delta t\right) = R_0 \delta\left(\Delta t\right) = 2\pi S_0 \delta\left(\Delta t\right) \qquad \Leftrightarrow \qquad S\left(\omega\right) = S_0$$

Variance d'un bruit blanc ? ? ?
→ utilité comme entrée d'un système qui filtre l'énergie (infinie) du bruit blanc

Processus Stationnaire au Second Ordre

Théorème de Shannon :

Echantillonner un signal avec un pas de temps dt ne permet pas d'apprécier le contenu fréquentiel supérieur à la fréquence de Nyquist $f_s = \frac{1}{2\,dt}$.

→ ***Bruit blanc en bande limitée***

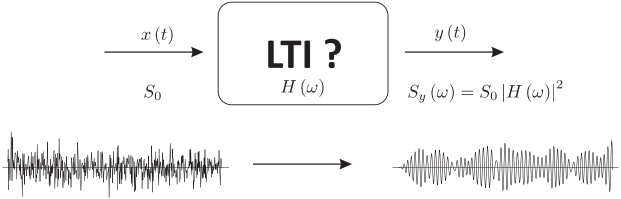
$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} S(\omega)\, d\omega = \int_{-2\pi f_s}^{+2\pi f_s} S(\omega)\, d\omega = 4\pi S_o f_s = 2\pi \frac{S_o}{dt}.$$

Génération d'un bruit blanc en bande limitée :

```
x0 = randn(N,1);
x =sqrt(2*pi*S0/dt)*x0;
```

2. Filtrage d'un bruit blanc

$$S_y(\omega) = |H(\omega)|^2 \, S_x(\omega) = |H(\omega)|^2 \, S_0$$



Processus Stationnaire au Second Ordre

Processus autrorégressif / moyenne mobile (ARMA) :

$$\sum_{i=0}^{p} \alpha_i \frac{d^i y(t)}{dt^i} = \sum_{i=0}^{q} \beta_i \frac{d^i x(t)}{dt^i} \quad \rightarrow \quad S_y^{arma}(\omega) = \frac{\left|\sum_{i=0}^{q} \beta_i (j\omega)^i\right|^2}{\left|\sum_{i=0}^{p} \alpha_i (j\omega)^i\right|^2} S_0$$

Exemple :

$$\alpha_1 y'(t) + \alpha_0 y(t) = \beta_0 x(t)$$
$$(\alpha_1 j\omega + \alpha_0) Y(\omega) = \beta_0 X(\omega)$$

$$S_y(\omega) = \frac{\beta_0^2}{(\alpha_1 \omega)^2 + \alpha_0^2} S_0$$

3. Décomposition fréquentielle

Pour un processus aléatoire ergodique :

$$S_x(\omega) = \lim_{T\to\infty} \frac{2\pi}{T} |X_i(\omega; T)|^2 \qquad \rightarrow \qquad S_x(\omega) = \frac{2\pi}{T} |X_i(\omega; T)|^2$$

$$|X_i(\omega; T)| = \sqrt{\frac{T}{2\pi} S_x(\omega)}$$

$\rightarrow$ choisir $X_i(\omega; T) = \sqrt{\frac{T}{2\pi} S_x(\omega)} e^{j\phi(\omega)}$

avec $\phi(\omega)$ un déphasage aléatoire

Commandes Matlab I

Lectures complémentaires I

A. Papoulis, *Probability, Random Variables, and Stochastic Processes*, McGraw Hill, New York, 1965.

A. Preumont, *Vibrations aléatoires et analyse spectrale*, Kluwer Academic Publishers, 1994.

R. L. Stratonovich, *Topics in the Theory of Random Noise : Volume 1*, Gordon and Breach, Science Publishers, Inc., New-York, 1963.