Analyse des Structures II (GCIV 2037-1)

Année académique 2017-2018

V. Denoël

Devoir 22 mars 2018 (à rendre le 19 avril 2018)

La méthode d'intégration appelée Wilson-θ est une méthode qui suppose que l'accélération varie linéairement entre les deux instants $t_i = i\Delta t$ et $t_{i+\theta} = t_i + \theta\Delta t$, où $\theta \geq 1$. En utilisant la variable $\tau \in [0, \theta\Delta t]$, on a donc

$$\ddot{x}_{t+\tau} = \ddot{x}_t + \tau\frac{\ddot{x}_{t+\theta\Delta t} - \ddot{x}_t}{\theta\Delta t}$$

Tout comme pour les schémas d'intégration de Newmark, on peut ensuite exprimer le déplacement (cubique) et la vitesse (quadratique) tout au long du pas de temps pour $\tau \in [0, \Delta t]$, et même au-delà, pour $\tau \in [\Delta t, \Delta t + \theta\Delta t]$. Le schéma d'intégration est ensuite obtenu (i) en écrivant l'équilibre à l'instant $t + \theta\Delta t$ de façon à déterminer la valeur de l'accélération $\ddot{x}_{t+\theta\Delta t}$, (ii) en utilisant cette valeur de $\ddot{x}_{t+\theta\Delta t}$ pour calculer $\ddot{x}_{t+\Delta t}$, $\dot{x}_{t+\Delta t}$ et $x_{t+\Delta t}$.

La particularité de l'algorithme Wilson-θ est qu'il écrit l'équilibre à un instant ultérieur à la fin du pas de temps, puis qu'il revient ensuite en arrière pour déterminer les valeurs du déplacement, de la vitesse et de l'accélération à la fin du pas de temps. Dans cet exercice, on se limitera au développement et à l'analyse du schéma d'intégration pour analyser des **structures non amorties**.

1. Ecrivez la première étape du schéma d'intégration sous la forme
$$\mathbf{B}\mathbf{x}_{t+\theta\Delta t} = \mathbf{C}\mathbf{x}_t + \mathbf{L}\mathbf{p}_{t+\theta\Delta t}$$
et explicitez les matrices **B**, **C** et **L**.
2. Ecrivez la seconde étape du schéma d'intégration sous la forme
$$\mathbf{x}_{t+\Delta t} = \mathbf{D}\mathbf{x}_t + \mathbf{E}\mathbf{x}_{t+\theta\Delta t}$$
et explicitez les matrices **D** et **E**.
3. Etablissez la matrice d'itération **A** qui relie $\mathbf{x}_{t+\Delta t}$ et $\mathbf{x}_t$.
4. A l'aide du rayon spectral de la matrice d'itération, montrez que l'algorithme est stable pour autant que θ soit plus grand qu'une valeur critique. Quelle est-elle ?
5. Pour les trois valeurs de θ égales à 1.0, 1.2 et 1.4, déterminez si l'algorithme est stable (év. conditionnellement), instable et/ou numériquement dissipatif.
6. Illustrez vos résultats à l'aide de simulations numériques en calculant la réponse d'un oscillateur simple non amorti (m = 1000to, f = 1.3Hz) soumis à un lâcher libre l'amplitude initiale 0.2m.

Solution

L'évolution au cours du pas de temps du déplacement et de la vitesse sont donnés par

$$\dot{x}_{t+\tau} = \dot{x}_t + \ddot{x}_t \tau + \frac{\tau^2}{2\theta\Delta t}\left(\ddot{x}_{t+\theta\Delta t} - \ddot{x}_t\right)$$
$$x_{t+\tau} = x_t + \dot{x}_t \tau + \ddot{x}_t \frac{\tau^2}{2} + \frac{\tau^3}{6\theta\Delta t}\left(\ddot{x}_{t+\theta\Delta t} - \ddot{x}_t\right)$$

si bien qu'en $\tau = \theta\Delta t$, ils vaillent

$$\dot{x}_{t+\theta\Delta t} = \dot{x}_t + \frac{\theta\Delta t}{2}\left(\ddot{x}_{t+\theta\Delta t} + \ddot{x}_t\right)$$
$$x_{t+\theta\Delta t} = x_t + \theta\Delta t\, \dot{x}_t + (\theta\Delta t)^2 \left(\frac{1}{6}\ddot{x}_{t+\theta\Delta t} + \frac{1}{3}\ddot{x}_t\right)$$

En combinant avec l'équation d'équilibre écrite en $t + \theta\Delta t$, on obtient

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{6}(\theta\Delta t)^2 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2}\theta\Delta t \\ m & c & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{t+\theta\Delta t} \\ \dot{x}_{t+\theta\Delta t} \\ \ddot{x}_{t+\theta\Delta t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \theta\Delta t & \frac{1}{3}(\theta\Delta t)^2 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2}\theta\Delta t \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_t \\ \dot{x}_t \\ \ddot{x}_t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ p_{t+\theta\Delta} \end{pmatrix}$$

qui s'écrit aussi

$$\mathbf{B}\mathbf{x}_{t+\theta\Delta t} = \mathbf{C}\mathbf{x}_t + \mathbf{L}\mathbf{p}_{t+\theta\Delta t}$$

On écrit ensuite les équations du schéma de façon à déterminer les déplacements à la fin du pas de temps, soit

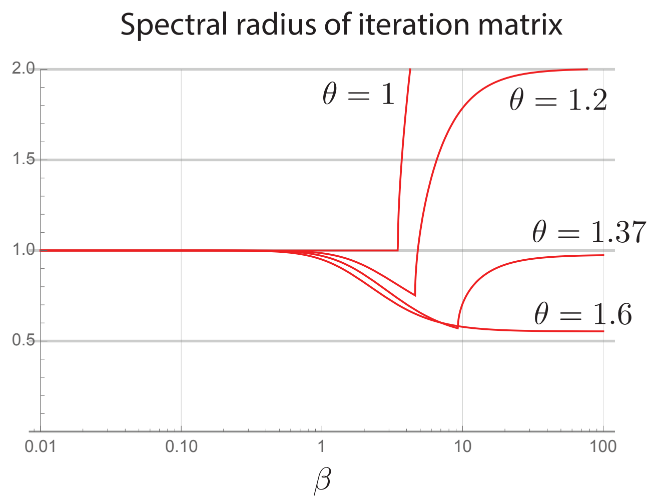
$$\dot{x}_{t+\Delta t} = \dot{x}_t + \ddot{x}_t \Delta t + \frac{\Delta t}{2\theta}\left(\ddot{x}_{t+\theta\Delta t} - \ddot{x}_t\right)$$
$$x_{t+\Delta t} = x_t + \dot{x}_t \Delta t + \ddot{x}_t \frac{\Delta t^2}{2} + \frac{\Delta t^2}{6\theta}\left(\ddot{x}_{t+\theta\Delta t} - \ddot{x}_t\right)$$

$$\begin{pmatrix} x_{t+\Delta t} \\ \dot{x}_{t+\Delta t} \\ \ddot{x}_{t+\Delta t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \Delta t & \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6\theta}\right)\Delta t^2 \\ 0 & 1 & \left(1 - \frac{1}{2\theta}\right)\Delta t \\ 0 & 0 & 1 - \frac{1}{\theta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_t \\ \dot{x}_t \\ \ddot{x}_t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{6\theta}\Delta t^2 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2\theta}\Delta t \\ 0 & 0 & \frac{1}{\theta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{t+\theta\Delta t} \\ \dot{x}_{t+\theta\Delta t} \\ \ddot{x}_{t+\theta\Delta t} \end{pmatrix}$$

qui s'écrit aussi

$$\mathbf{x}_{t+\Delta t} = \mathbf{D}\mathbf{x}_t + \mathbf{E}\mathbf{x}_{t+\theta\Delta t} = \left(\mathbf{D} + \mathbf{E}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{C}\right)\mathbf{x}_t + \mathbf{E}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{L}\mathbf{p}_{t+\theta\Delta t}$$

Le rayon spectral de la matrice d'itération $\mathbf{A} = \mathbf{D} + \mathbf{E}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{C}$ est représenté à la figure ci-dessous, en version non amortie



L'algorithme es donc conditionnellement stable lorsque $\theta < 1.37$. Il est ensuite stable et dissipatif (numériquement) lorsque $\theta \geq 1.37$.