Analyse des Structures II (GCIV 2037-1)

Année académique 2017-2018

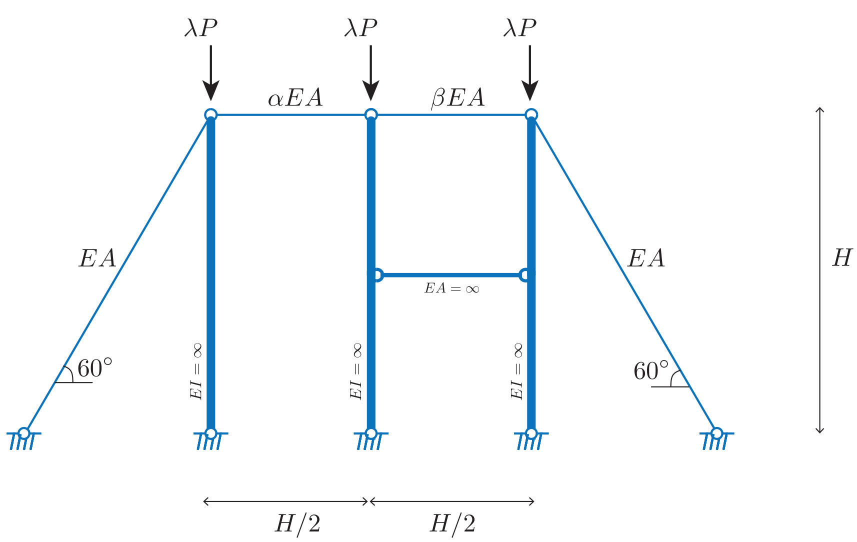
V. Denoël

Interro Stabilité, jeudi 12 avril, 9 :30-11 :30

[lisez les questions attentivement et ne répondez qu'à ce qui est demandé, écrivez votre nom sur chaque page, calculatrice autorisée, durée totale de l'épreuve : 2 heures]

Une structure de chapiteau est construite à partir de trois colonnes supposées infiniment raides en flexion. Ces trois colonnes sont stabilisées d'une part, par un plancher (supposé inextensible) situé à mi-hauteur dans la travée de droite et par 4 câbles de raideurs extensionnelles différentes. Ces câbles sont modélisés comme des barres de treillis dont les raideurs valent respectivement EA pour les deux câbles inclinés à 60° installés aux deux extrémités, αEA pour le câble au-dessus de la travée de gauche et βEA pour le câble au-dessus de la travée de droite.

La stabilité de la structure dans sa configuration actuelle est jugée trop critique et il est demandé d'augmenter sa stabilité (ses multiplicateurs critiques) en jouant sur les raideurs de l'un ou l'autre des câbles positionnés en tête. Pour ce faire, on vous demande de déterminer l'influence de α et β sur le premier multiplicateur critique.



Questions :

1. Déterminez le nombre de degrés de liberté de cette structure.

2. Déterminez, en fonction de α, β et des autres paramètres du problème, les multiplicateurs associés à tous les modes critiques de la structure.

3. Esquissez l'évolution du premier multiplicateur critique en fonction de α et β.

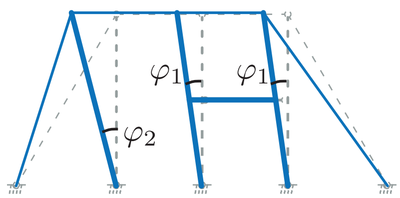
4. Pour $\beta = 1$ et dans le cas particulier $\alpha = 1$ (situation courante), déterminez les valeurs numériques des charges critiques, ainsi que les formes des modes propres. Esquissez-les.

5. Pour $\beta = 1$ et dans le cas particulier $\alpha = 0$, déterminez les valeurs numériques des charges critiques, ainsi que les formes des modes propres. Esquissez-les. Donnez une signification physique à cette configuration.

6. Pour $\beta = 1$ et dans le cas particulier $\alpha = +\infty$, déterminez les valeurs numériques des charges critiques, ainsi que les formes des modes propres. Esquissez-les. Donnez une signification physique à cette configuration.

Solution

1. La structure possède 2 degrés de liberté. Les deux colonnes de droite doivent s'incliner simultanément en raison de la bielle indéformable à mi-hauteur. Il n'y a donc aucun effort dans le câble situé au-dessus de la travée de droite et le paramètre β est inutile. La figure ci-dessous représente les deux degrés de liberté choisis.



2. Le travail des forces extérieures correspond au tassement des trois charges λP appliquées en tête des colonne. Il s'écrit

$$\mathcal{T} = \frac{1}{2}\lambda P\, H\left(2\varphi_1^2 + \varphi_2^2\right).$$

Sous une rotation φ_2 de la colonne de gauche, le sommet se déplace horizontalement de $\varphi_2 H$ et le câble de gauche se raccourcit de $\varphi_2 H \cos 60° = \varphi_2 H/2$. La longueur du câble de gauche est $H/\sin 60° = 2H/\sqrt{3}$. La raideur extensionnelle des câbles d'extrémité est donc $\sqrt{3}/2 \cdot EA/H$, alors que celle du câble au-dessus de la travée de gauche est $2\alpha EA/H$.

L'énergie de déformation interne est la somme des énergies associées à chaque morceau de câble. Elle s'écrit

$$\begin{aligned}\mathcal{U} &= \frac{1}{2}\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{EA}{H}\left(\frac{\varphi_2 H}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}\frac{2\alpha EA}{H}\left(\varphi_1 H - \varphi_2 H\right)^2 + \frac{1}{2}\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{EA}{H}\left(\frac{\varphi_1 H}{2}\right)^2 \\ &= \frac{1}{2}EA\,H\left(\frac{\sqrt{3}}{8}\left(\varphi_1^2+\varphi_2^2\right) + 2\alpha\left(\varphi_1-\varphi_2\right)^2\right)\end{aligned}$$

Les matrices de raideur et des contraintes sont donc

$$\mathbf{K} = EA\,H\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{8}+2\alpha & -2\alpha \\ -2\alpha & \frac{\sqrt{3}}{8}+2\alpha \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{K}_\sigma = \lambda P\,H\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

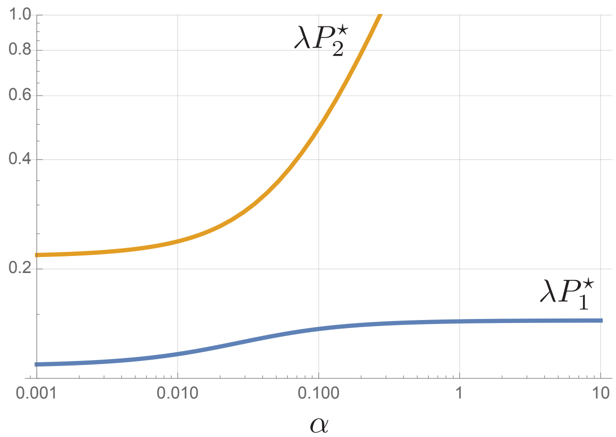
Les multiplicateurs critiques sont obtenus en annulant le déterminant de $\mathbf{K} - \mathbf{K}_\sigma$, soit

$$\begin{vmatrix} k - 2\lambda P^\star & -2\alpha \\ -2\alpha & k - \lambda P^\star \end{vmatrix} = 0$$

où $\lambda P^\star = \lambda P/EA$ et $k = \frac{\sqrt{3}}{8} + 2\alpha$. On trouve que les deux racines du polynôme caractéristique sont

$$\lambda P^\star = \frac{1}{4}\left(3k \pm \sqrt{k^2 + 32\alpha^2}\right)$$

3. La figure ci-dessous représente les deux valeurs critiques ainsi obtenues. Notamment, on voit que le multiplicateur du mode fondamental augmente, en fonction de α, de façon monotone entre $\lambda P^\star_{\min} = \sqrt{3}/16 = 0.108$ (pour $\alpha = 0$) et $\lambda P^\star_{\max} = 1/4\sqrt{3} = 0.144$.



Ce graphique montre que cela ne vaut pas la peine d'avoir une valeur de α plus grande que 0.1, car le multiplicateur critique n'augmente pas significativement au-delà de cette valeur.

4. Pour $\alpha = 1$, les deux valeurs propres valent $\lambda P^{\star} = 0.143$ et $\lambda P^{\star} = 3.181$. Les deux modes critiques sont obtenus en calculant les vecteurs propres associés à ces valeurs propres :

$$\Phi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0.965 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \Phi_2 = \begin{pmatrix} -0.482 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ces modes propres sont illustrés à la Figure-résumé ci-dessous.

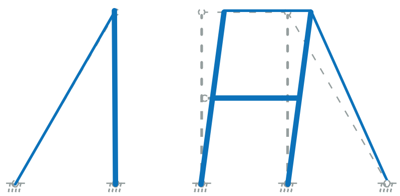
5. Pour $\alpha = 0$, les deux valeurs propres valent $\lambda P^{\star} = 0.108$ et $\lambda P^{\star} = 0.217$. Pour $\alpha = 0$, la matrice de raideur est diagonale et la structure se comporte comme deux sous-structures indépendantes. Les modes propres sont donc naturellement

$$\Phi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \Phi_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

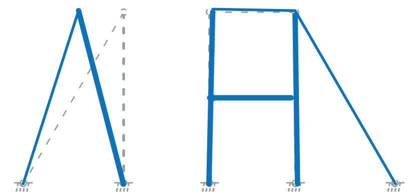
6. Pour $\alpha = +\infty$, une des deux valeurs propres tend vers l'infini. Il ne reste plus qu'une seule valeur propre, ce qui est attendu puisque les trois colonnes possèdent alors la même inclinaison et il n'y a plus qu'un seul degré de liberté. La valeur critique associée vaut $\lambda P^{\star} = 0.144$ et le mode propre est donc naturellement

$$\Phi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\alpha = 0$

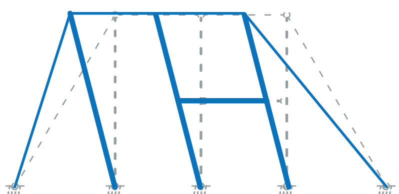


Mode 1: $\lambda P_1^\star = 0.108$

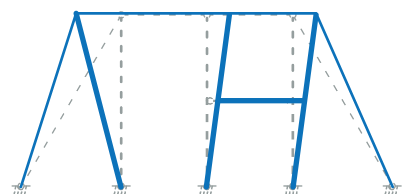


Mode 2: $\lambda P_2^\star = 0.217$

$\alpha = 1$

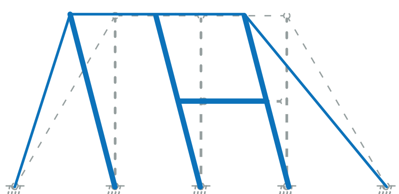


Mode 1: $\lambda P_1^\star = 0.143$



Mode 2: $\lambda P_2^\star = 3.181$

$\alpha = +\infty$



Mode 1: $\lambda P_1^\star = 0.144$

n/a

Mode 2: $\lambda P_2^\star \to +\infty$