

Analyse des Structures II GCIIV 2037-1

Devoir

Flament Clément

Avril 2018

1 Première étape du schéma d'intégration de WILSON- θ

Pour des structures non amorties, l'équation du mouvement s'écrit de la façon suivante :

$$m\ddot{x}_{t+\theta\Delta t} + \cancel{c\dot{x}_{t+\theta\Delta t}} + kx_{t+\theta\Delta t} = p_{t+\theta\Delta t} \quad (1)$$

Comme la méthode d'intégration de WILSON- θ considère une accélération variant linéairement entre $t_i = i\Delta t$ et $t_{i+\theta} = t_i + \theta\Delta t$ avec $\theta \geq 1$, le schéma d'intégration de cette méthode s'écrit comme suit :

$$\begin{cases} \ddot{x}_{t+\tau} = \ddot{x}_t + \frac{\ddot{x}_{t+\theta\Delta t} - \ddot{x}_t}{\theta\Delta t} \tau \\ \dot{x}_{t+\tau} = \dot{x}_t + \ddot{x}_t \tau + \frac{\ddot{x}_{t+\theta\Delta t} - \ddot{x}_t}{\theta\Delta t} \frac{\tau^2}{2} \\ x_{t+\tau} = x_t + \dot{x}_t \tau + \ddot{x}_t \frac{\tau^2}{2} + \frac{\ddot{x}_{t+\theta\Delta t} - \ddot{x}_t}{\theta\Delta t} \frac{\tau^3}{6} \end{cases} \quad (2)$$

La première étape de ce schéma d'intégration peut être réécrite sur base de l'équation (1) et (2), ce qui donne la forme suivante, si $\tau = \theta\Delta t$:

$$\underline{\mathbf{B}}\mathbf{x}_{t+\theta\Delta t} = \underline{\mathbf{C}}\mathbf{x}_t + \underline{\mathbf{L}}p_{t+\theta\Delta t}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -\frac{1}{2}\theta\Delta t \\ 1 & 0 & -\frac{1}{6}\theta^2\Delta t^2 \\ k & 0 & m \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_{t+\theta\Delta t} \\ \dot{x}_{t+\theta\Delta t} \\ \ddot{x}_{t+\theta\Delta t} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \frac{1}{2}\theta\Delta t \\ 1 & \theta\Delta t & \frac{1}{3}\theta^2\Delta t^2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_t \\ \dot{x}_t \\ \ddot{x}_t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} p_{t+\theta\Delta t}$$

Qui peut se réécrire :

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -\frac{1}{2}\theta \\ 1 & 0 & -\frac{1}{6}\theta^2 \\ \frac{k}{m}\Delta t^2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_{t+\theta\Delta t} \\ \Delta t \dot{x}_{t+\theta\Delta t} \\ \Delta t^2 \ddot{x}_{t+\theta\Delta t} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \frac{1}{2}\theta \\ 1 & \theta & \frac{1}{3}\theta^2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_t \\ \Delta t \dot{x}_t \\ \Delta t^2 \ddot{x}_t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\Delta t^2}{m} \end{pmatrix} p_{t+\theta\Delta t}$$

En considérant les paramètres $w_1 = \sqrt{k/m}$ et $\beta = w_1\Delta t$, on a finalement :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & -\frac{1}{2}\theta \\ 1 & 0 & -\frac{1}{6}\theta^2 \\ \beta^2 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\underline{\mathbf{B}}} \underbrace{\begin{pmatrix} x_{t+\theta\Delta t} \\ \Delta t \dot{x}_{t+\theta\Delta t} \\ \Delta t^2 \ddot{x}_{t+\theta\Delta t} \end{pmatrix}}_{\mathbf{x}_{t+\theta\Delta t}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & \frac{1}{2}\theta \\ 1 & \theta & \frac{1}{3}\theta^2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\underline{\mathbf{C}}} \underbrace{\begin{pmatrix} x_t \\ \Delta t \dot{x}_t \\ \Delta t^2 \ddot{x}_t \end{pmatrix}}_{\mathbf{x}_t} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\Delta t^2}{m} \end{pmatrix}}_{\underline{\mathbf{L}}} p_{t+\theta\Delta t}$$

2 Seconde étape du schéma d'intégration de WILSON- θ

Cette étape consiste à obtenir le système matriciel de la forme suivante :

$$\mathbf{x}_{t+\Delta t} = \underline{\mathbf{D}}\mathbf{x}_t + \underline{\mathbf{E}}\mathbf{x}_{t+\theta\Delta t}$$

Si $\tau = \Delta t$, les équations (2) deviennent :

$$\begin{cases} \ddot{x}_{t+\Delta t} = \left(1 - \frac{1}{\theta}\right) \ddot{x}_t + \frac{1}{\theta} \ddot{x}_{t+\theta\Delta t} \\ \dot{x}_{t+\Delta t} = \dot{x}_t + \Delta t \left(1 - \frac{1}{2\theta}\right) \ddot{x}_t + \frac{\Delta t}{2\theta} \ddot{x}_{t+\theta\Delta t} \\ x_{t+\Delta t} = x_t + \Delta t \dot{x}_t + \Delta t^2 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6\theta}\right) \ddot{x}_t + \frac{\Delta t^2}{6\theta} \ddot{x}_{t+\theta\Delta t} \end{cases} \quad (3)$$

Ainsi, sur base de ce nouveau système d'équations (3) nous pouvons réécrire sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} x_{t+\Delta t} \\ \dot{x}_{t+\Delta t} \\ \ddot{x}_{t+\Delta t} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \Delta t & \Delta t^2 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6\theta}\right) \\ 0 & 1 & \Delta t \left(1 - \frac{1}{2\theta}\right) \\ 0 & 0 & 1 - \frac{1}{\theta} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_t \\ \dot{x}_t \\ \ddot{x}_t \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{\Delta t^2}{6\theta} \\ 0 & 0 & \frac{\Delta t}{2\theta} \\ 0 & 0 & \frac{1}{\theta} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_{t+\theta\Delta t} \\ \dot{x}_{t+\theta\Delta t} \\ \ddot{x}_{t+\theta\Delta t} \end{pmatrix}$$

Ou encore :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} x_{t+\Delta t} \\ \Delta t \dot{x}_{t+\Delta t} \\ \Delta t^2 \ddot{x}_{t+\Delta t} \end{pmatrix}}_{\underline{\mathbf{x}}_{t+\Delta t}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6\theta}\right) \\ 0 & 1 & \left(1 - \frac{1}{2\theta}\right) \\ 0 & 0 & 1 - \frac{1}{\theta} \end{bmatrix}}_{\underline{\mathbf{D}}} \underbrace{\begin{pmatrix} x_t \\ \Delta t \dot{x}_t \\ \Delta t^2 \ddot{x}_t \end{pmatrix}}_{\underline{\mathbf{x}}_t} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{6\theta} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2\theta} \\ 0 & 0 & \frac{1}{\theta} \end{bmatrix}}_{\underline{\mathbf{E}}} \underbrace{\begin{pmatrix} x_{t+\theta\Delta t} \\ \Delta t \dot{x}_{t+\theta\Delta t} \\ \Delta t^2 \ddot{x}_{t+\theta\Delta t} \end{pmatrix}}_{\underline{\mathbf{x}}_{t+\theta\Delta t}}$$

3 Etablissement de la matrice d'itération $\underline{\mathbf{A}}$ reliant $x_{t+\Delta t}$ à x_t

La forme matricielle du système attendu est la suivante :

$$\underline{\mathbf{x}}_{t+\Delta t} = \underline{\mathbf{A}}\underline{\mathbf{x}}_t + \underline{\mathbf{L}}^* p_{t+\theta\Delta t}$$

Sur base du système résultant de la SECTION 1, nous pouvons obtenir les valeurs des inconnues x en l'instant $t + \theta\delta t$ et ainsi injecter ces valeurs dans le système résultant de la SECTION 2, ce qui donne le résultat matriciel suivant :

$$\underline{\mathbf{x}}_{t+\theta\Delta t} = \underline{\mathbf{B}}^{-1}\underline{\mathbf{C}}\underline{\mathbf{x}}_t + \underline{\mathbf{B}}^{-1}\underline{\mathbf{L}}p_{t+\theta\Delta t} \text{ injecté dans } \underline{\mathbf{x}}_{t+\Delta t} = \underline{\mathbf{D}}\underline{\mathbf{x}}_t + \underline{\mathbf{E}}\underline{\mathbf{x}}_{t+\theta\Delta t} \text{ donne :}$$

$$\underline{\mathbf{x}}_{t+\Delta t} = (\underline{\mathbf{D}} + \underline{\mathbf{E}}\underline{\mathbf{B}}^{-1}\underline{\mathbf{C}})\underline{\mathbf{x}}_t + \underline{\mathbf{E}}\underline{\mathbf{B}}^{-1}\underline{\mathbf{L}}p_{t+\theta\Delta t}$$

$$\text{avec } (\underline{\mathbf{D}} + \underline{\mathbf{E}}\underline{\mathbf{B}}^{-1}\underline{\mathbf{C}}) = \underline{\mathbf{A}} \text{ et } \underline{\mathbf{E}}\underline{\mathbf{B}}^{-1}\underline{\mathbf{L}} = \underline{\mathbf{L}}^*$$

Ainsi, l'expression de la matrice d'itération $\underline{\mathbf{A}}$ obtenue est la suivante :

$$\underline{\mathbf{A}} = \frac{1}{1 + \frac{\beta^2\theta^2}{6}} \begin{bmatrix} 1 + \frac{\beta^2\theta^2}{6} - \frac{\beta^2}{6\theta} & 1 + \frac{\beta^2\theta^2}{6} - \frac{\beta^2}{6} & \frac{1}{2} - \frac{1}{6\theta} + \frac{\beta^2\theta^2}{12} - \frac{\beta^2\theta}{12} \\ -\frac{\beta^2}{2\theta} & 1 + \frac{\beta^2\theta^2}{6} - \frac{\beta^2}{2} & 1 - \frac{1}{2\theta} + \frac{\beta^2\theta^2}{6} - \frac{\beta^2\theta}{4} \\ -\frac{\beta^2}{\theta} & -\beta^2 & 1 - \frac{1}{\theta} + \frac{\beta^2\theta^2}{6} - \frac{\beta^2\theta}{2} \end{bmatrix}$$

4 Stabilité de l'algorithme et calcul de θ_{cr}

Dans cette SECTION, nous voulons calculer le rayon spectral ρ de la matrice d'itération $\underline{\mathbf{A}}$ en fonction des paramètres β et θ afin de trouver une valeur critique de θ pour laquelle l'algorithme est stable. Le calcul du rayon spectral se fait à l'aide de la routine MATLAB *Stability.m*. Lorsque nous affichons la valeur du rayon spectral en fonction des paramètres β et θ , nous obtenons le résultat visible à la FIGURE1 page 3. Sur cette FIGURE, nous pouvons observer la présence d'une valeur critique de θ à partir de laquelle l'algorithme passe d'un état stable à instable. Cette valeur est proche de 1.4.

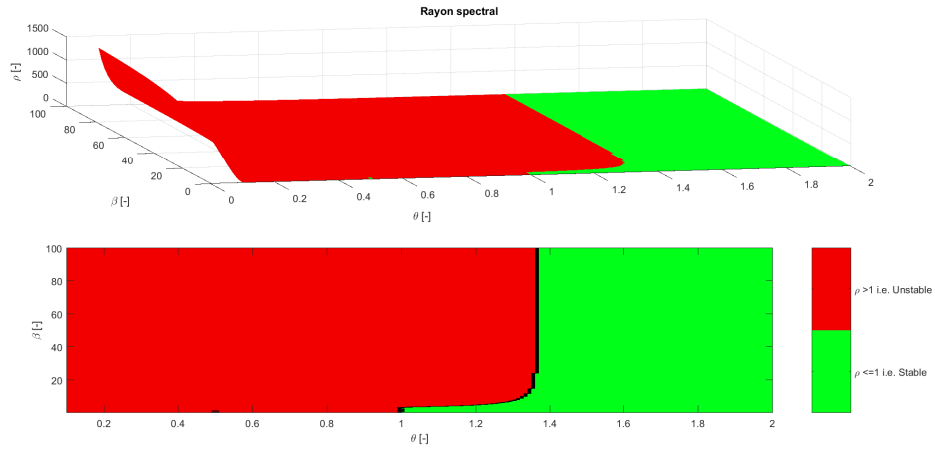


FIGURE 1 – Distribution du rayon spectral en fonction des paramètres β et θ .

Il s'agit dorénavant de déterminer cette valeur critique. A l'aide de la routine MATLAB *Stability.m*, nous obtenons θ_{cr} valant 1.36. La FIGURE 2 ci-dessous montre l'évolution de la distribution du rayon spectral en fonction de β à proximité de cette valeur de θ_{cr} .

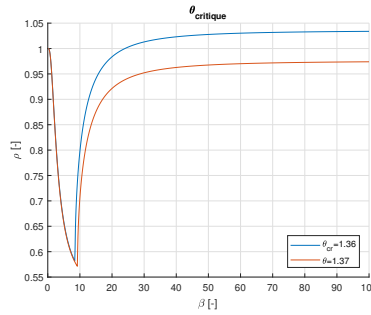


FIGURE 2 – Distribution du rayon spectral en fonction de β pour $\theta = 1.36$ et $\theta = 1.37$.

Sur cette FIGURE 2, nous remarquons que le rayon spectral ρ est inférieur ou égal à l'unité pour un θ valant 1.37 quelle que soit la valeur de β alors que ce n'est pas le cas pour un θ valant 1.36. Ainsi, nous pouvons en déduire que la valeur critique de θ au-dessus de laquelle l'algorithme est stable correspond à 1.36 si l'on considère une approximation à un centième près.

5 Stabilité de l'algorithme pour $\theta = 1.0, 1.2$ et 1.4

La FIGURE 3 ci-après montre l'évolution du rayon spectral de la matrice d'itération \underline{A} en fonction du paramètre β .

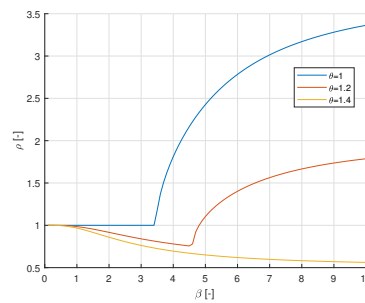


FIGURE 3 – Distribution du rayon spectral en fonction du paramètre β pour $\theta = 1.0, 1.2$ et 1.4 .

Sur cette FIGURE 3, nous remarquons que l'algorithme de WILSON- θ est conditionnellement stable pour θ valant 1.0 puisque le rayon spectral est unitaire pour des valeurs de β inférieures à 3.4 et supérieur à l'unité pour des valeurs de β supérieures à 3.4. Ensuite, dans le cas où θ vaut 1.4, le rayon spectral est unitaire pour une valeur très faible de β puis décroît au fur et à mesure que β augmente. Cela signifie dans ce cas que l'algorithme est stable et numériquement dissipatif. Enfin, concernant une valeur de θ de 1.2, l'algorithme est conditionnellement stable et numériquement dissipatif mais devient instable à partir de $\beta = 4.9$.

Remarquons que toutes ces observations sont corroborées par la valeur de θ_{cr} de 1.36 trouvée à la SECTION 4, puisque pour des θ inférieurs nous avons trouvé que l'algorithme était conditionnellement stable alors que pour un θ supérieur à la valeur critique l'algorithme se trouvait être stable quel que soit β .

6 Calcul de la réponse d'un oscillateur simple non amorti

Les résultats des simulations numériques effectuées pour obtenir la réponse d'un oscillateur simple non amorti de masse $m = 10^6 kg$ et de fréquence $f = 1.3Hz$ soumis à un lâcher libre d'amplitude initiale de $0.2m$ sont visibles aux FIGURES 4 et 5 ci-dessous pour des valeurs remarquables de β et pour les valeurs de θ étudiées à la SECTION 5.

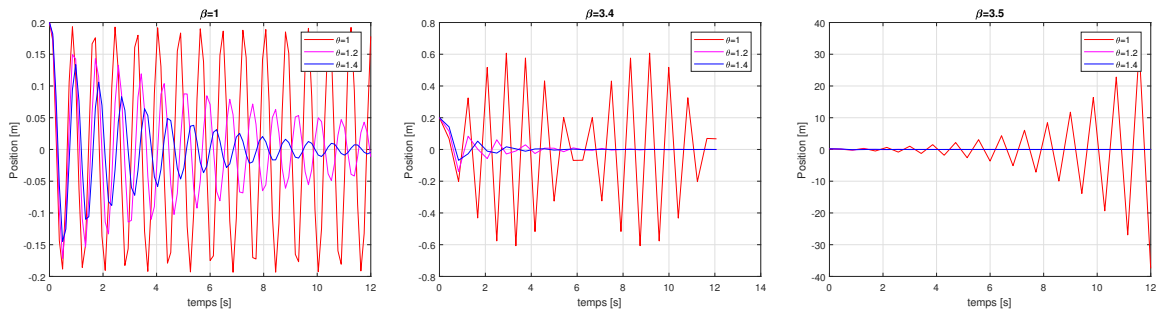


FIGURE 4 – Réponse de l'oscillateur simple non amorti pour $\theta = 1.0, 1.2$ et 1.4 dans les cas respectifs où $\beta = 1, 3.4$ et 3.5 .

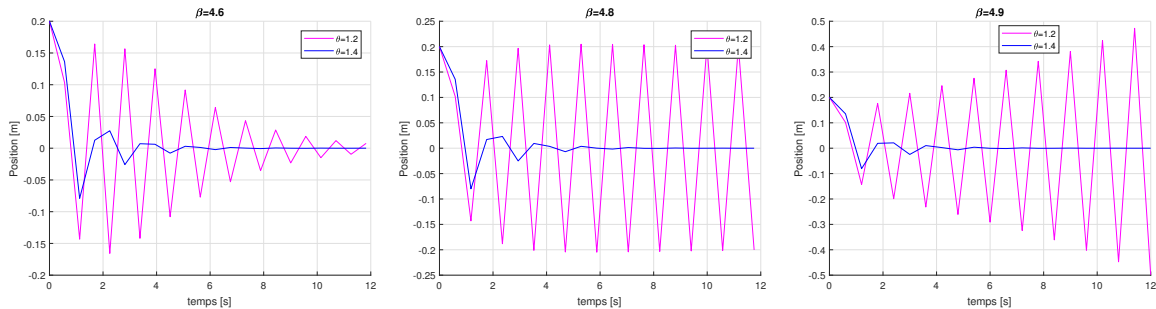


FIGURE 5 – Réponse de l'oscillateur simple non amorti pour $\theta = 1.0, 1.2$ et 1.4 dans les cas respectifs où $\beta = 4.6, 4.8$ et 4.9 .

Sachant que $\beta = w_1 \Delta t$, avec la pulsation $w_1 = 2\pi f$, les valeurs de pas de temps Δt correspondant aux valeurs de β des FIGURES 4 et 5 sont reprises dans le TABLEAU suivant.

β [-]	1	3.4	3.5	4.6	4.8	4.9
Δt [s]	0.12243	0.41625	0.42849	0.56316	0.58765	0.59989

TABLEAU 1 – Valeurs de pas de temps correspondant à des valeurs remarquables de β .

Comme attendu, nous pouvons observer à la FIGURE 4 que la réponse de l'oscillateur pour $\theta = 1.0$ est la première à devenir instable lorsqu'on augmente progressivement le pas de temps et par conséquent β . On observe également que cette réponse possède un pas de temps pour lequel elle se trouve dans un état transitoire entre stable et instable, c'est-à-dire pour $\beta = 3.4$. Sur cette même FIGURE, en ce qui

concerne les réponses de l'oscillateur pour $\theta = 1.2$ et $\theta = 1.4$, ces dernières sont stables pour $\beta \leq 3.5$ mais sont également dissipatives et ce d'autant plus que le pas de temps choisi est grand. Ensuite, les graphes de la FIGURE 5 page 4 montrent que la dissipation du signal harmonique est plus rapide pour $\theta = 1.4$ que pour $\theta = 1.2$. Nous pouvons aussi remarquer que la réponse harmonique pour $\theta = 1.2$ est stable lorsque le pas de temps est tel que $\beta = 4.8$ et qu'elle devient instable une fois dépassé cette valeur. En revanche, la réponse harmonique pour $\theta = 1.4 > \theta_{cr}$ ne devient jamais instable et reste toujours numériquement dissipatif. Toutes ces observations corroborent bel et bien les conclusions tirées des SECTIONS 4 et 5.