

APPLICATION D'UN PRINCIPE VARIATIONNEL INCREMENTIEL
AU CALCUL PAR ELEMENTS FINIS
DE LA REPARTITION DU CHAMP MAGNETIQUE
DANS LES MACHINES ELECTRIQUES

PAR

S. CESCOTTO

Ingénieur Civil des Constructions
Service de Résistance des Matériaux et Stabilité des Constructions,
Université de Liège.

ET

J.-L. LIJEN

Ingénieur Civil Electricien
Service de Construction des Machines Electriques
Institut Montefiore - Université de Liège

RESUME

Les auteurs présentent dans cet article une adaptation aux phénomènes électromagnétiques des méthodes, actuellement en essor, utilisées en mécanique des milieux continus. Ces procédés sont basés sur un principe variationnel incrémentiel. Ils peuvent se combiner au processus, mieux connu, de correction de Newton-Raphson et fournissent un algorithme particulièrement performant pour résoudre par éléments finis les problèmes de répartition de champs magnétiques en milieux non linéaires.

Une interprétation graphique des divers procédés est également proposée et permet de visualiser les étapes successives propres à chaque processus.

A titre d'illustration, les auteurs ont appliqué la méthode citée au calcul de la répartition du champ magnétique dans un turbo-alternateur discrétisé à l'aide d'éléments finis isoparamétriques plans à champ de potentiel quadratique.

SUMMARY

In this paper, the authors present an adaptation to electromagnetic phenomena of methods currently used in continuum mechanics. These methods are based on an incremental variational principle. They can be combined with the well-known Newton-Raphson procedure and give an efficient algorithm to solve by finite elements the problems of magnetic field distribution in non-linear media.

I. INTRODUCTION

A graphic interpretation of the various methods is presented to make clear the successive phases of each process.

As a practical example, the authors have computed the magnetic field distribution in a turbo-alternator discretized by isoparametric finite elements with quadratic potential field.

La conception des machines, électriques (alternateurs-transformateurs, etc.) s'attache à connaître de façon plus précise la répartition du champ magnétique dans les diverses parties de la machine.

Les méthodes mathématiques d'analyse ne permettent pas, dans la généralité des cas, de faire cette étude et l'on doit, le plus souvent, avoir recours aux méthodes numériques.

En vue de tenir compte de l'état de saturation et de la géométrie exacte du circuit magnétique, ont été appliquées ces derniers temps plusieurs méthodes de résolutions parmi lesquelles :

— la méthode de Neidhöfer [1] qui propose la subdivision de la machine en cellules et considère finalement un schéma magnétique équivalent dont les éléments sont non-linéaires;

— le procédé des différences finies [2] [3] basé sur la discrétisation d'une équation différentielle liée à la

NOTATION

Symbole	Signification
A	: potentiel vecteur.
B	: induction magnétique.
B_x, B_y ou B_i ($i = x, y$)	: composante de l'induction magnétique B dans la direction des axes orthogonaux de référence.
B_n, B_t	: composantes de l'induction magnétique B dans les directions normale et tangentielle à un contour.
μ	: perméabilité magnétique.
ν	: rigidité magnétique = inverse de la perméabilité magnétique.
H	: champ magnétique.
H_x, H_y ou H_i ($i = x, y$)	: composantes du champ magnétique H dans la direction des axes orthogonaux de référence.
H_n, H_t	: composantes du champ magnétique H dans les directions normale et tangentielle à un contour.
J	: densité de courant électrique.
R	: domaine étudié = section transversale de la machine.
R_e	: domaine défini par un élément fini.
χ	: fonctionnelle relative au domaine R_e .
χ_e	: fonctionnelle relative au domaine R_e .
x, y	: axes orthogonaux de référence du domaine R.
ξ, η	: axes curvilignes locaux relatifs à un élément fini particulier.
I, J, K, ...	: nœuds d'un élément fini.
i, j, k, ...	: indices associés aux axes x, y.
$\alpha_k(\xi, \eta)$: valeur de la fonction d'interpolation relative au nœud K d'un élément fini, au point (ξ, η) .
$\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial t}, \dots$: symboles de dérivation partielle.
Δv	: incrément d'une variable v quelle qu'elle soit.
δv	: variation d'une variable v quelle qu'elle soit.
χ_v	: fonctionnelle incrémentelle relative au domaine R.
χ_e	: fonctionnelle incrémentelle relative au domaine R_e .
w_v^t	: densité d'énergie magnétique incrémentelle.
$\ A \ $: module d'un vecteur $\{ A \}$.

A part ces restrictions, la structure peut avoir une géométrie quelconque et être composée de matériaux de perméabilité, différente, pourvu que leur courbe de magnétisation soit connue.

2) Les phénomènes d'hystérésis sont négligés. Notons que certains auteurs tiennent compte, dans les équations, d'une éventuelle aimantation rémanente [13].

1) La machine est supposée de longueur infinie, c'est-à-dire qu'on se limitera à l'étude des problèmes bi-dimensionnels. La méthode des éléments finis peut s'adapter aux problèmes tridimensionnels [12] mais la formulation devient alors plus complexe et le temps de calcul augmente fortement, aussi nous sommes-nous limités à cette hypothèse généralement admise.

3. HYPOTHESES

D'autre part, la résolution du système d'équations auquel conduit la méthode des éléments finis, est effectuée par la technique dite *frontale*, [16], [17] qui, par le fait de combiner l'assemblage et la résolution des équations, permet de réduire considérablement l'occupation mémoire du programme ordinateur. Par exemple, les auteurs ont appliqué leur programme au calcul de la répartition du flux magnétique d'un turbo-alternateur à vide, discrétisé en 155 éléments. Le maillage comportait 512 nœuds mais il n'a fallu réserver en mémoire centrale pour la matrice des coefficients du système d'équation que 496 variables, ce qui correspond à la moitié (diagonale incluse) d'une matrice 32×32 . C'est à notre avis la première fois que cette technique est appliquée en électromagnétisme.

A titre d'illustration, elle est appliquée à un élément fini isoparamétrique à 8 nœuds [12] et on s'en sert pour déterminer la répartition du flux magnétique dans un turbo-alternateur.

Le but du présent travail est de fournir une méthode systématique permettant de résoudre ce problème et d'en étudier les performances. Cette méthode, basée sur l'introduction d'un principe variationnel interne, connaît un essor important en mécanique des milieux continus mais, à notre connaissance, n'a pas encore été employée en électromagnétisme.

2. OBJECTIFS DE CE TRAVAIL

L'élément triangulaire à 3 nœuds est généralement employé [4], [8], [9], [11]. Certains auteurs cependant précisent l'emploi de l'élément quadrilatéral à 8 nœuds pour son adaptabilité géométrique. De plus l'induction magnétique et donc la perméabilité peuvent varier d'un point à l'autre de l'élément et le nombre d'éléments requis est moins élevé [10].

(*) Ces définitions sont reprises de l'introduction de l'excellent article de P. Rabinéjad, J.C. Coulomb et J.C. Sabonnadière [4].

Le type de l'élément (triangulaire à 3 ou 6 nœuds, quadrilatéral à 4 ou 8 nœuds, etc.) intervient quant à la rapidité, le respect de la géométrie, la précision, entres autres.

La méthode par élimination gaussienne est souvent adoptée [4], [8], [9], [10].

3) Le troisième problème était la mise au point d'un programme qui consiste en un assemblage des éléments suivi d'une résolution du système d'équations généralement d'ordre élevé (200 à 700 équations).

- résolution avec accélération de la convergence du type « surrelaxation ponctuelle non linéaire » [8],
- méthode de Newton généralisée [4], [9], [10], [11].

2) Le second point a dû être étudié plus en détail vu la difficulté de la convergence liée à l'allure de la courbe de l'inverse de la perméabilité en fonction de l'induction magnétique :

1) Pour le premier point, plusieurs types de solutions ont été proposées :

- courbe représentée par une équation mathématique [6], [7], [8],
- « Spline Interpolation » [9].

Les principaux problèmes rencontrés sont :

- le choix de l'approximation de la courbe de l'inverse de la perméabilité en fonction de l'induction magnétique;
- l'étude d'un processus itératif à convergence rapide de manière à minimiser le temps de calcul;
- la mise au point d'un programme adéquat d'assemblage et de résolution de manière à optimiser l'occupation mémoire.

Etat de la question

L'approximation faite entre le domaine réel et son idéalisation est de nature physique : à la structure continue réelle est substitué un système structural modifié mais il n'y aura pas d'approximation dans le calcul de la structure idéalisée; ce qui distingue la méthode des éléments finis de celle des différences finies, où les équations exactes du système physique réel sont résolues par des méthodes mathématiques approchées [5].

— la technique des éléments finis (E.F.) dont le principe fondamental est la minimisation d'une fonctionnelle associée à un découpage du domaine en éléments de dimensions finies sur lesquels la fonction inconnue est représentée par une approximation polynomiale (*).

décomposition en série de Taylor de la fonction étudiée (*):

4. METHODE DES ELEMENTS FINIS ET CHOIX D'UN ELEMENT

a. Principe variationnel

Les phénomènes électromagnétiques, bidimensionnels sont caractérisés par l'équation de Poisson

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(v \cdot \frac{\partial A}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(v \cdot \frac{\partial A}{\partial y} \right) + J = 0 \quad (1)$$

où v = perméabilité magnétique du matériau, A = potentiel vecteur, J = densité de courant,

(x, y) = un système d'axes cartésien.

Le calcul des variations montre qu'il est équivalent de minimiser la fonctionnelle [12]

$$\chi = \iint_R \left[\frac{1}{2} \left(v \cdot \frac{\partial A}{\partial x} \right)^2 + v \cdot \left(\frac{\partial A}{\partial y} \right)^2 \right] - J \cdot A \quad dR \quad (2)$$

où R = le domaine considéré (en l'occurrence une section transversale de la machine).

On voit que χ représente la différence existant entre une énergie d'origine interne

$$W_1 = \iint_R \frac{1}{2} [v \cdot |B|^2] \quad dR$$

$$|B|^2 = (B_x)^2 + (B_y)^2 = \left(\frac{\partial A}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial A}{\partial x} \right)^2$$

et une énergie d'origine extérieure, fournie par le courant qui parcourt le domaine

$$W_E = \iint_R J \cdot A \quad dR \quad (4)$$

Dès lors, la minimisation de χ revient à réaliser l'égalité des variations δW_1 et δW_E des énergies internes, externes sur le domaine considéré. En d'autres termes, parmi toutes les distributions possibles du potentiel vecteur A , dans le domaine considéré, celle qui se produit réellement est telle que $\delta \chi = \delta W_1 - \delta W_E = 0$. L'énergie étant une variable extensive, on peut, pour un domaine divisé en EF , additionner les contributions énergétiques de chaque élément.

Par conséquent, pour minimiser la fonctionnelle χ sur le domaine R , il suffit de la minimiser pour chaque élément.

b. Élément isoparamétrique à 8 nœuds

Dans ce travail, nous avons choisi l'élément isoparamétrique à 8 nœuds [12] à champ de potentiel quadratique (fig. 1).

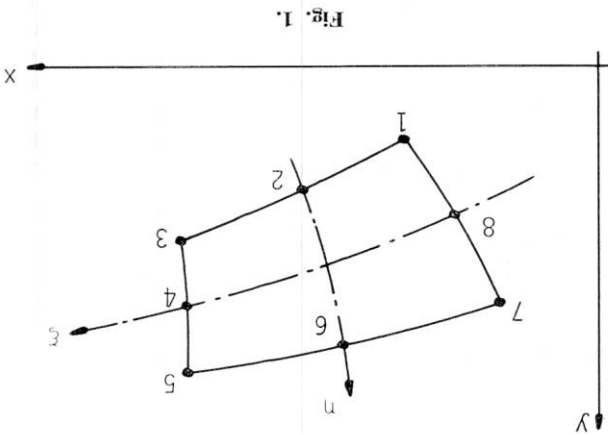


Fig. 1.

où $A_k(\xi, \eta) = \sum_{k=1}^8 \alpha_k(\xi, \eta) \cdot A_k$ (6)

A_k est le potentiel vecteur au nœud K , $\alpha_k(\xi, \eta)$ est la fonction d'interpolation relative au nœud K .

Cet élément, à côtés paraboliques, est d'une grande souplesse d'utilisation tout en fournissant des résultats précis pour des discrétisations raisonnables. En particulier, il peut dégénérer en triangle, en demi-cercle (fig. 2a et fig. 2b) ou d'autres formes assez distordues. [Signalons cependant que la distorsion en quadrilatère non convexe (fig. 2c et fig. 2d) n'est pas permise].

Le développement d'un EF isoparamétrique linéaire est un exercice de routine qui ne demande guère d'explication. Cependant, comme nous en aurons besoin ultérieurement, nous en donnons brièvement les résultats en annexe 2.

c. Conditions aux limites

Il convient de faire la distinction entre les conditions limites imposées aux contours de la machine étudiée, et celles existant aux interfaces des éléments composés de matériaux différents [air-fer, par exemple] (fig. 3).

Les premières sont du type Neuman $\left(\frac{\partial A}{\partial x} = 0 \right)$ ou Dirichlet ($A = \text{constante}$).

Il est démontré dans [4] qu'elles conduisent à un terme supplémentaire dans la fonctionnelle χ mais que celui-ci n'intervient pas dans la minimisation. Dès lors, le principe variationnel [5] reste valable.

Pour les deuxièmes, il faut respecter :

— la continuité de la composante tangentielle du champ magnétique H

$$H_{t \text{ fer}} = H_{t \text{ air}} \quad (7)$$

ou encore

$$v_{\text{fer}} B_{l \text{ fer}} = v_{\text{air}} B_{l \text{ air}} \quad (8)$$

— la continuité de la composante normale de l'induction magnétique B

$$B_{n \text{ fer}} = B_{n \text{ air}} \quad (9)$$

L'équation (A3-11) n'est valable que pour $v = \text{const}$, c'est-à-dire pour des matériaux amagnétiques. Cependant, pour les matériaux ferromagnétiques, couramment utilisés dans la construction des machines électriques, cette condition est loin d'être réalisée. On se trouve donc en présence d'un problème non linéaire qui peut-être approché par la résolution d'une série de problèmes linéaires successifs.

a) Nécessité de processus itératifs

5. RESOLUTION DU PROBLEME NON LINEAIRE

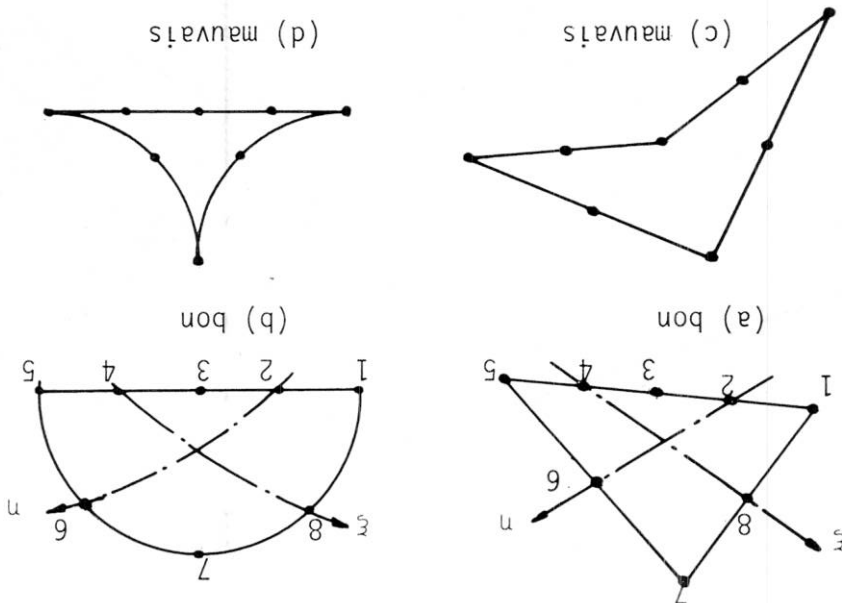
Quant à l'équation (8), elle ne peut pas se démontrer de manière mathématique : dans la méthode des EF, cette égalité n'est vérifiée qu'approximativement, et d'autant mieux que la discrétisation est plus fine. Pour s'en convaincre, il suffit d'examiner les résultats d'un exemple numérique. Cet exemple a été choisi de manière à ressembler grossièrement à un turbo-alternateur à pôles fonctionnant à vide et ne comportant qu'une seule encoche rotorique. Sur la figure 4 on trouvera la discrétisation étudiée qui comporte 22 éléments et la figure 5 montre les valeurs de l'induction obtenue au nœud 43. On constate bien l'égalité rigoureuse des composantes normales des inductions dans l'air et le fer, alors que leurs composantes tangentes ne vérifient qu'approximativement l'équation (8). E.F. Fuchs a d'ailleurs déjà insisté sur ce point dans la discussion de [10].

puisqu'en un nœud donné, le potentiel vecteur A prend une valeur unique. L'égalité (9) est donc démontrée.

$$\begin{aligned} (A_1)_{\text{fer}} &= (A_1)_{\text{air}} = A_1 \\ (A_j)_{\text{fer}} &= (A_j)_{\text{air}} = A_j \\ (A_K)_{\text{fer}} &= (A_K)_{\text{air}} = A_K \end{aligned}$$

Or, la méthode des éléments finis impose :

Fig. 2 (a) - (b) - (c) - (d)



Car, vu la forme des fonctions d'interpolation $\frac{\partial \alpha_N}{\partial t} = 0$ pour $N \neq 1, J, K$.

$$\frac{\partial \alpha_1}{\partial t} = \frac{\partial \alpha_1}{\partial t} \cdot (A_1)_{\text{fer}} + \frac{\partial \alpha_j}{\partial t} \cdot (A_j)_{\text{fer}} + \frac{\partial \alpha_K}{\partial t} \cdot (A_K)_{\text{fer}}$$

$$\left(\frac{\partial A}{\partial t} \right)_{\text{fer}} = \sum_{l=1}^8 \frac{\partial \alpha_l}{\partial t} \cdot (A_l)_{\text{fer}}$$

Or, par (6), il vient :

$$\left(\frac{\partial A}{\partial t} \right)_{\text{fer}} = \left(\frac{\partial A}{\partial t} \right)_{\text{air}} \quad (10)$$

Il est facile de montrer que cette dernière équation est automatiquement satisfaite par la méthode des éléments finis, quelle que soit la finesse de la discrétisation. En effet, il est équivalent d'écrire (9) sous la forme

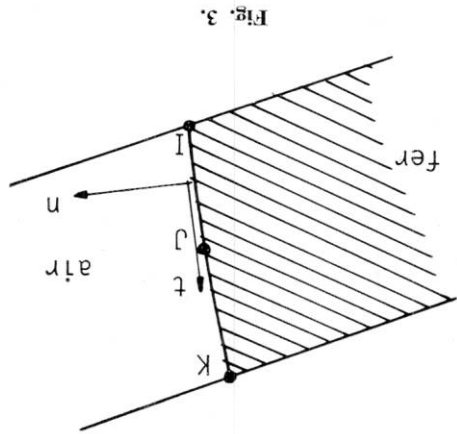


Fig. 3.

De la même manière :

$$\frac{\partial \alpha_j}{\partial t} (A_j)_{\text{air}} + \frac{\partial \alpha_K}{\partial t} (A_K)_{\text{air}}$$

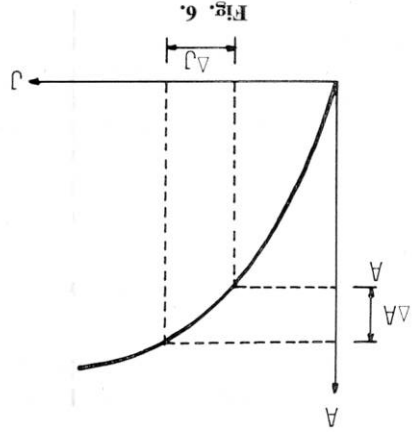


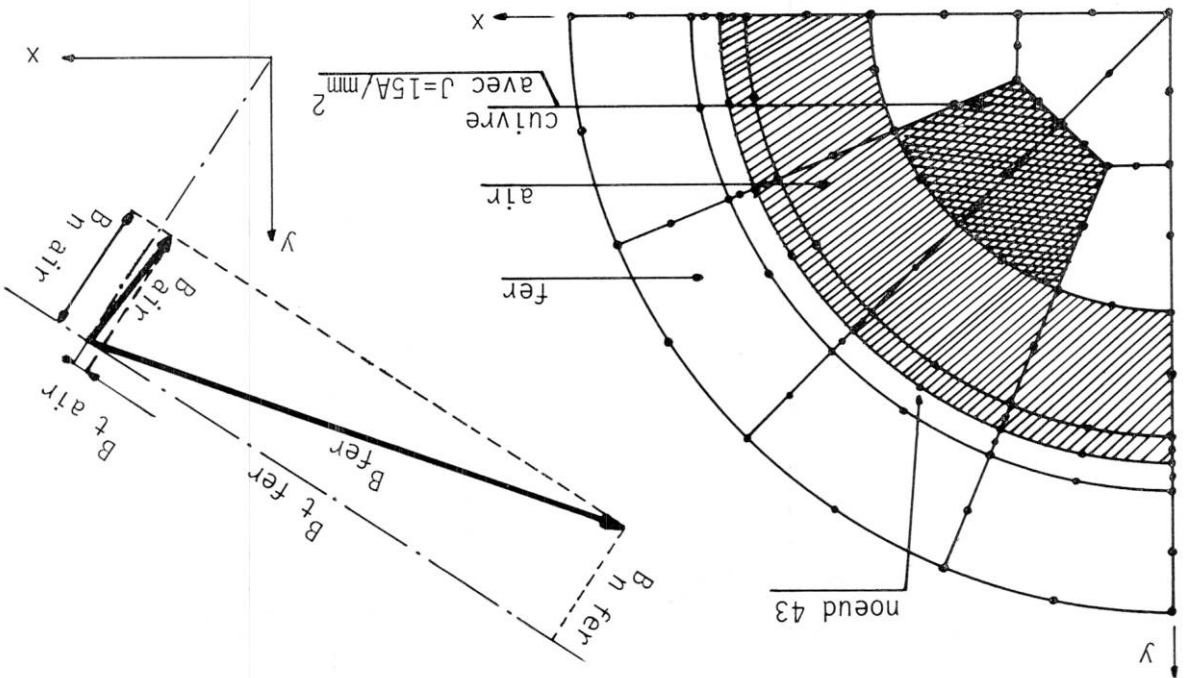
Fig. 6. Considérons deux configurations de la structure étudiée. La première, dite configuration initiale T_1 est caractérisée par des valeurs supposées connues de A_1

c) Équation d'équilibre énergétique et principe variationnel incrémentiel

Considérons deux configurations de la structure étudiée. La première, dite configuration initiale T_1 est caractérisée par des valeurs supposées connues de A_1 et J_1 . La seconde, dite configuration T_2 est caractérisée par les valeurs $A + \Delta A$, $J + \Delta J$, qui doivent également vérifier l'équation (1) et les conditions aux limites. La seconde, dite configuration T_2 est caractérisée par les valeurs $A + \Delta A$, $J + \Delta J$, qui doivent également vérifier l'équation (1) et les conditions aux limites. Les auteurs ont également effectué quelques expériences numériques à l'aide de ces méthodes et ne peuvent que confirmer les conclusions de l'article précité. On notera simplement que le paramètre de pondération p_n de la formule (6-5) de [8] $p_n v^{(n)} = p_n v^{(n-1)} + (1 - p_n) v(x, A_n^0) > p_n > 1$, de même que le paramètre w des algorithmes de *surrelaxation ponctuelle non linéaire* SNL 1 et SNL 2, ne peuvent pas être définis *a priori* et que le nombre d'itérations en dépend très fortement. Selon [8], ce nombre peut atteindre 750 ou plus si w est mal choisi.

b) Résolution par linéarisation et accélération de la convergence

Fig. 4 et 5.



$$\iint_R (H_y + \Delta H_y) \cdot \delta \Delta B_y + (H_x + \Delta H_x) \cdot \delta \Delta B_x \, dR = \iint_R (J + \Delta J) \cdot \delta \Delta A \cdot dR. \quad (12)$$

$$\iint_R (H_y + \Delta H_y) \cdot \delta \Delta B_y + (H_x + \Delta H_x) \cdot \delta \Delta B_x \, dR$$

Le même processus appliqué à la configuration T_2 donne, en prenant cette fois ΔA comme variable indépendante :

$$\iint_R (H_y \cdot \delta B_y + H_x \cdot \delta B_x) \, dR = \iint_R J \cdot \delta A \, dR. \quad (11)$$

ou encore

$$- J \cdot \delta A \quad \left\{ \begin{array}{l} \delta R = 0 \end{array} \right.$$

$$\delta \chi = \iint_R \left\{ v \cdot \frac{\partial A}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial \Delta A} + v \cdot \frac{\partial A}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial \Delta A} \right\} dR$$

Exprimons l'équilibre énergétique de la configuration T_1 en prenant la variation première de la fonctionnelle (2) par rapport à la variable indépendante A

Les développements qui suivent sont parallèles à ceux de G. Horrigmoe et P.G. Bergan [14] qui ont établi des principes variationnels incrémentiels valables en mécanique des milieux continus.

Nous prendrons comme variables indépendantes les incréments du potentiel vecteur ΔA , les autres variables (ΔB_x , etc.) s'en déduisant (fig. 6).

Nous nous proposons de déterminer les valeurs inconnues ΔA , ΔB_x , ΔB_y , Δv , ΔH_x , ΔH_y , en tout point du domaine, lorsque ΔJ est donné et suffisamment petit.

et les conditions aux limites. Les auteurs ont également effectué quelques expériences numériques à l'aide de ces méthodes et ne peuvent que confirmer les conclusions de l'article précité. On notera simplement que le paramètre de pondération p_n de la formule (6-5) de [8] $p_n v^{(n)} = p_n v^{(n-1)} + (1 - p_n) v(x, A_n^0) > p_n > 1$, de même que le paramètre w des algorithmes de *surrelaxation ponctuelle non linéaire* SNL 1 et SNL 2, ne peuvent pas être définis *a priori* et que le nombre d'itérations en dépend très fortement. Selon [8], ce nombre peut atteindre 750 ou plus si w est mal choisi.

$$\Delta Q_K = \iint_{R_e} \Delta J \cdot \alpha_K \cdot dR_e \quad (32)$$

$$S_K^x = \iint_{R_e} 2 \frac{dB_z}{dv} \cdot B_k \cdot B_i \cdot C_{kj} \cdot C_{ik} \cdot dR_e \quad (31)$$

$$S_{JK} = \iint_{R_e} v \cdot C_{ij} \cdot C_{ik} \cdot dR_e \quad (30)$$

Posons :

$$= \iint_{R_e} (\Delta J \cdot \alpha_K \cdot \delta \Delta A_K) \cdot dR_e$$

$$\iint_{R_e} \left[\Delta A_j \cdot C_{ik} \cdot \delta \Delta A_k \right] \cdot dR_e \quad (29)$$

$$\left[\left(2 \frac{dB_z}{dv} \cdot B_k \cdot C_{kj} \cdot B_i + v \cdot C_{ij} \right) \right] \cdot dR_e$$

Regroupons (21), (26), (27) et (28). Il vient :

$$\delta \Delta A = \alpha_K \cdot \delta \Delta A_K \quad (28)$$

enfin, selon (A2-3)

$$\delta \Delta B_i = C_{ik} \cdot \delta \Delta A_K \quad (27)$$

D'autre part,

$$\Delta H_i = \left(2 \frac{dB_z}{dv} \cdot B_k \cdot C_{kj} \cdot B_i + v \cdot C_{ij} \right) \Delta A_j \quad (26)$$

et, par suite, on a :

$$\Delta v = 2 \frac{dB_z}{dv} \cdot B_k \cdot C_{kj} \cdot \Delta A_j \quad (25)$$

Dès lors, (23) devient

$$B_i = C_{ij} \cdot A_j \quad (24)$$

avec

$$C_{ij} = \begin{cases} -\frac{\partial \alpha_j}{\partial x_i} & \text{si } i = 1 \\ +\frac{\partial \alpha_j}{\partial y_i} & \text{si } i = 2 \end{cases}$$

ou,

$$\Delta v = \frac{dB_z}{dv} \cdot \Delta (B_z^2) = 2 \frac{dB_z}{dv} \cdot B_i \cdot \Delta B_i \quad (23)$$

avec :

$$\Delta H_i = \Delta (v \cdot B_i) = \Delta v \cdot B_i + v \cdot \Delta B_i \quad (22)$$

$$\iint_{R_e} \Delta H_i \cdot \delta \Delta B_i \cdot dR_e = \iint_{R_e} \Delta J \cdot \delta \Delta A \cdot dR_e \quad (21)$$

élément
 Dans ces conditions, l'équation (13) s'écrit, pour un
 d'application.
 sur les indices répétés dans le même monôme est
 des nœuds de l'élément. La convention de sommation
 ceux en lettres majuscules représentent les numéros
 (i, j, k, ...) valant successivement x et y, tandis que

Pour la commodité des calculs, nous employons ici
 la notation indicelle : les indices en lettres minuscules

d) Application du principe variationnel incrémentiel
 à l'élément soparamétrique à 8 nœuds

$$\delta \chi_\Delta^v = \delta W_\Delta^v - \delta W_\Delta^E = 0 \quad (20)$$

La minimisation de la fonctionnelle χ_Δ^v exprime que
 parmi toutes les distributions possibles de l'accroisse-
 ment du potentiel ΔA dans le domaine consi-
 déré initialement dans la configuration T_1 , celle qui se
 produit réellement est telle que

$$W_\Delta^v = \iint_R \Delta J \cdot \Delta A \cdot dR \quad (19)$$

et d'une énergie incrémentielle d'origine extérieure,
 fournie par l'accroissement de la densité courant ΔJ :

$$W_\Delta^v = \iint_R w_\Delta^v \cdot dR \quad (18)$$

La fonctionnelle χ_Δ^v représente la différence existant
 entre une énergie incrémentielle d'origine interne :

ce qui donne bien l'équation (13).

$$\delta w_\Delta^v = \frac{\partial w_\Delta^v}{\partial \Delta B_x} \cdot \delta \Delta B_x + \frac{\partial w_\Delta^v}{\partial \Delta B_y} \cdot \delta \Delta B_y \quad (17)$$

$$= \Delta H_x \delta \Delta B_x + \Delta H_y \delta \Delta B_y$$

$$\delta \chi_\Delta^v = \iint_R (\delta w_\Delta^v - \Delta J \cdot \delta \Delta A) \cdot dR = 0 \quad (16)$$

En exprimant que sa variation première, avec ΔA
 comme variable indépendante, est nulle, on obtient :

$$\chi_\Delta^v = \iint_R (w_\Delta^v - \Delta J \cdot \Delta A) \cdot dR \quad (15)$$

Soit, en effet, la fonctionnelle

$$\frac{\partial w_\Delta^v}{\partial \Delta B_x} = \Delta H_x \quad \frac{\partial w_\Delta^v}{\partial \Delta B_y} = \Delta H_y \quad (14)$$

Cette équation exprime l'équilibre énergétique incré-
 mental de la structure étudiée. Cet équilibre peut
 également s'exprimer sous forme d'un principe varia-
 tionnel incrémentiel, à condition d'admettre l'existence
 d'une densité d'énergie magnétique incrémentielle w_Δ^v
 définie par les équations différentielles

$$\iint_R (\Delta H_x \cdot \delta \Delta B_y + \Delta H_y \cdot \delta \Delta B_x) \cdot dR = \iint_R \Delta J \cdot \delta \Delta A \cdot dR \quad (13)$$

En soustrayant les équations (11) et (12) membre à
 membre et en tenant compte des remarques précé-
 dentes, on obtient :

D'autre part, la variation $\delta \Delta A$ étant absolument
 arbitraire, on peut la prendre égale à $\delta \Delta$. De ce fait et
 de la définition de B_x et B_y , il résulte que $\delta B_x = \delta \Delta B_x$;
 $\delta B_y = \delta \Delta B_y$.

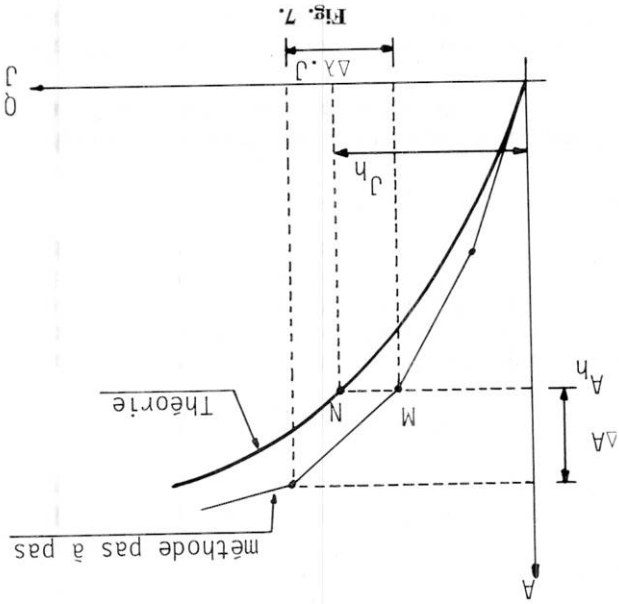


Fig. 7.

Il est évident que le coefficient $\Delta\lambda$ peut être changé d'un pas à l'autre. Par exemple, on pourrait prendre des pas plus petits à mesure qu'on s'approche de la saturation.

Considérons une machine électrique (un turbo-alternateur par exemple) excitée par un courant d'une densité J A/mm². Pour déterminer numériquement la répartition du champ magnétique, appliquons successivement des incréments de densité de courant $\Delta\lambda \cdot J$ ($\Delta\lambda > 1$) jusqu'à atteindre la valeur finale J . Cela conduit à résoudre plusieurs fois le problème traité au *livre d.* C'est l'idée de base de la méthode pas à pas. En principe, le coefficient $\Delta\lambda$ doit être très petit puisqu'on a supposé que l'on pouvait traiter les incréments Δ comme des dérivées. En pratique, les incréments de charge auront des valeurs finies et la solution obtenue par cette méthode s'écarte progressivement de la solution théorique exacte. L'écart est d'autant plus faible que les incréments sont plus petits. On peut visualiser ce phénomène (*fig. 7*) pour un cas élémentaire où il n'y aurait qu'un seul potentiel vecteur inconnu.

f) Méthode pas à pas d'Euler

Cette démonstration est une variante de celle proposée par [4] et constitue une autre vérification du principe variationnel incrémental proposé.

d'où

$$\begin{aligned} dA_j &\approx \Delta A_j \\ dJ &\approx \Delta J \\ dQ_k &\approx \Delta Q_k \end{aligned} \quad \text{on retrouve bien l'équation (34).}$$

Dès lors (39) s'écrit, en tenant compte de (31) :

$$(S_{jk}^x + S_{jk}) \cdot dA_j = dQ_k \quad (44)$$

En assimilant les dérivées à des incréments suffisamment petits :

$$dS_{jk} \cdot A_j = \left[\int \int \int_R 2 \frac{dB^2}{dv} B_k \cdot B_i \cdot C_{kj} \cdot C_{ik} dR \right] \cdot dA_j \quad (43)$$

En regroupant, on trouve :

$$dv = 2 \frac{dB^2}{dv} B_k dB_k = 2 \frac{dB^2}{dv} \cdot B_k \cdot C_{kj} \cdot C_{ik} \cdot dA_j \quad (42)$$

Or,

$$dS_{jk} \cdot A_j = \left[\int \int \int_R dv \cdot C_{ji} \cdot C_{ik} dR \right] \cdot A_j \quad (41)$$

$$dQ_k = \int \int \int_R dJ \cdot \alpha_k \cdot dR, \quad \text{avec} \quad (40)$$

$$dS_{jk} \cdot A_j + S_{jk} \cdot dA_j = dQ_k \quad (39)$$

Preons la différentielle totale de (36) :

$$Q_k = \int \int \int_R J \cdot \alpha_k \cdot dR, \quad (38)$$

$$S_{jk} = \int \int \int_R v \cdot C_{ji} \cdot C_{ik} \cdot dR, \quad (37)$$

$$S_{jk} A_j = Q_k \quad \text{avec} \quad (36)$$

On a donc :

Ecrivons l'équation (A2-11) sous forme indicelle. Par commodité, nous ne reproduisons pas l'indice e relatif à l'élément traité.

e) Autre manière d'obtenir la matrice de rigidité magnétique tangentielle

Ainsi à partir d'une configuration connue T_1 , le système (35) permet de calculer l'incrément du potentiel vecteur $\{\Delta A\}$ pour un incrément donné ΔJ de la densité de courant.

Par analogie avec la terminologie employée en mécanique des milieux continus, nous appellerons $[[S]] + [[S^x]]$ la matrice de rigidité magnétique tangentielle de la structure. Elle a d'ailleurs la dimension de v qui est l'inverse de la perméabilité magnétique μ .

$$[[S]] + [[S^x]] \{ \Delta A \} = \{ \Delta Q \} \quad (35)$$

Après assemblage des équations (34) pour tous les éléments, on obtiendra un système d'équations ayant la forme matricielle

La matrice S_{jk}^x représente donc la correction tenant compte des inductions existant dans la configuration T_1 .

La matrice S_{jk} est semblable à celle obtenue en *annexe 2* pour le cas linéaire.

$$(S_{jk}^x + S_{jk}) \cdot \Delta A_j = \Delta Q_k \quad (34)$$

et comme $\delta\Delta A_k$ est absolument arbitraire, il en résulte :

$$(S_{jk}^x + S_{jk}) \cdot \Delta A_j \cdot \delta\Delta A_k = \Delta Q_k \cdot \delta\Delta A_k \quad (33)$$

On peut mettre (29) sous la forme

La courbe de référence constitue la solution exacte obtenue par de nombreux pas de Newton-Raphson, pour lesquels la convergence a été atteinte, l'écart relatif du potentiel vecteur en tout nœud, au cours de deux corrections successives, étant inférieur à 0,005. La courbe obtenue par 10 pas simples (méthode pas à pas d'Euler), s'écarte progressivement de la courbe de référence. Par contre, on constate que 10 pas de Wilson et Murray donnent des résultats nettement meilleurs.

Cet exemple simple a été choisi afin d'illustrer les possibilités offertes par les diverses méthodes rappelées ci-avant.

La figure 11 montre la discrétisation adoptée et les résultats obtenus pour les degrés de liberté n° 1 et n° 34 sont tracés aux figures 12 et 13.

Signalons que la densité de courant correspondant à $\lambda = 1$ vaut $0,070 \text{ A/mm}^2$, et que la courbe $v = f(B^2)$ employée est celle définie à l'annexe I.

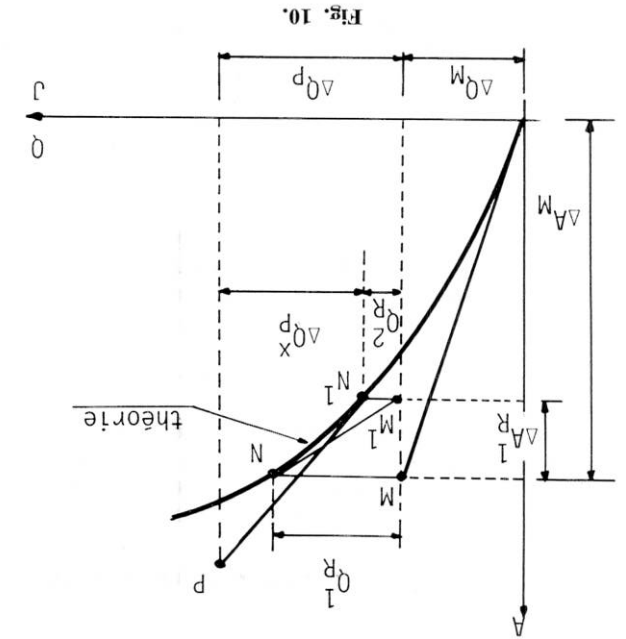
a) Conducteur circulaire ferromagnétique

6. APPLICATIONS ET EXEMPLES

ce qui conduit à la solution P qui peut être améliorée à son tour par des corrections de Newton-Raphson.

$$\{ \Delta Q_2^p \} = \{ \Delta Q_1^p \} - \{ Q_2^R \}$$

L'état hors d'équilibre M est amélioré en M'. Le résidu correspondant à M' est $\{ Q_2^R \}$. On pourra donc commencer le pas suivant comme dans la méthode de Wilson et Murray, en appliquant une charge



Il s'agit d'une combinaison des deux méthodes précédentes. Dans la méthode de Newton-Raphson, on peut limiter arbitrairement le nombre de corrections. La figure 10 est dessinée en supposant qu'on ne fait qu'une correction.

j) Méthode combinée

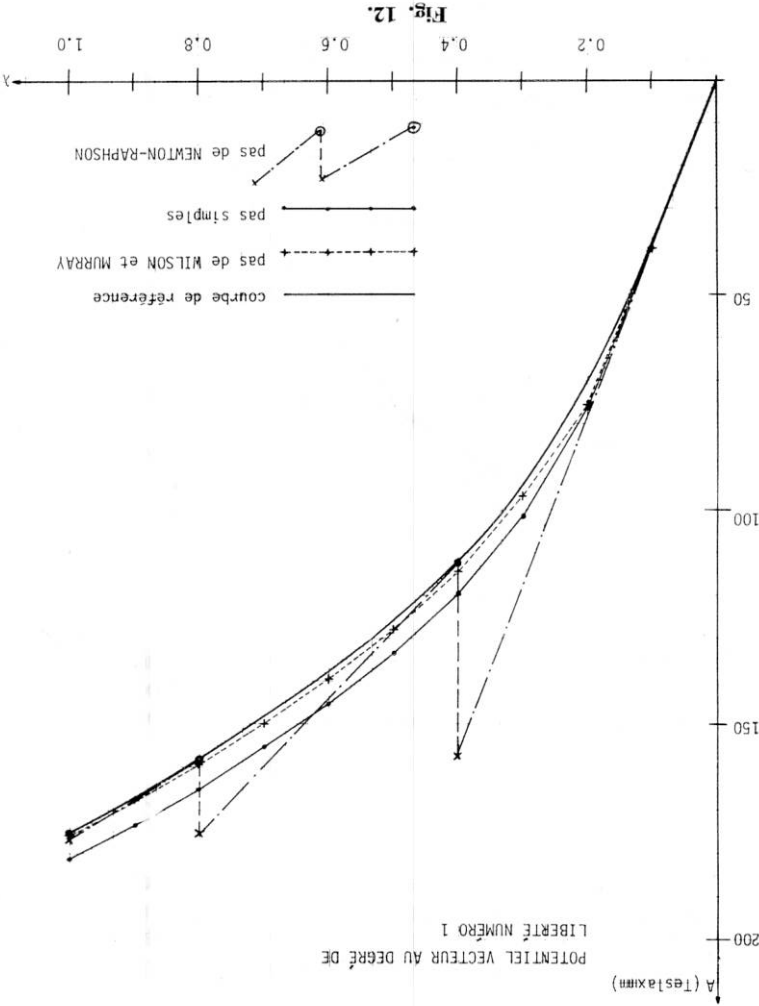


Fig. 12.

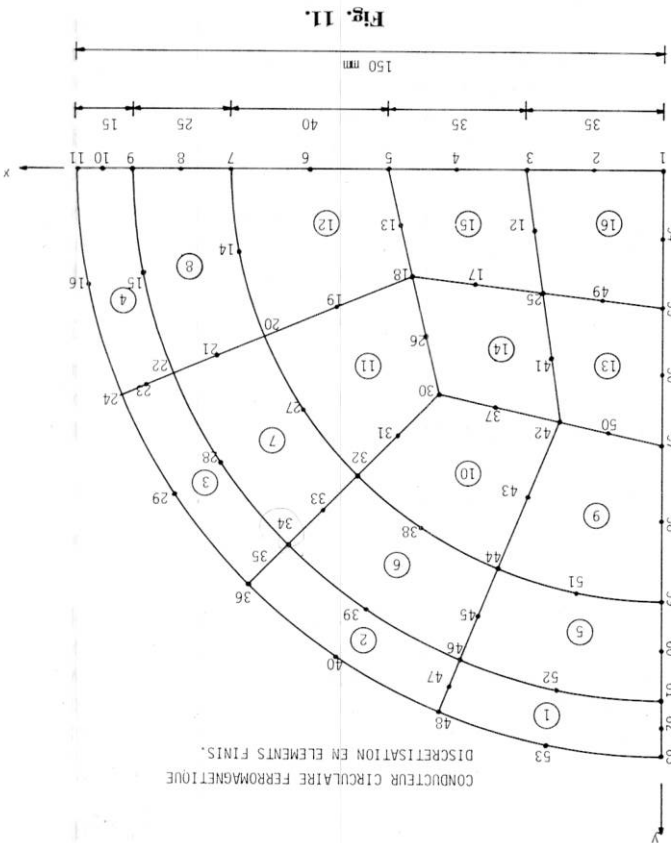
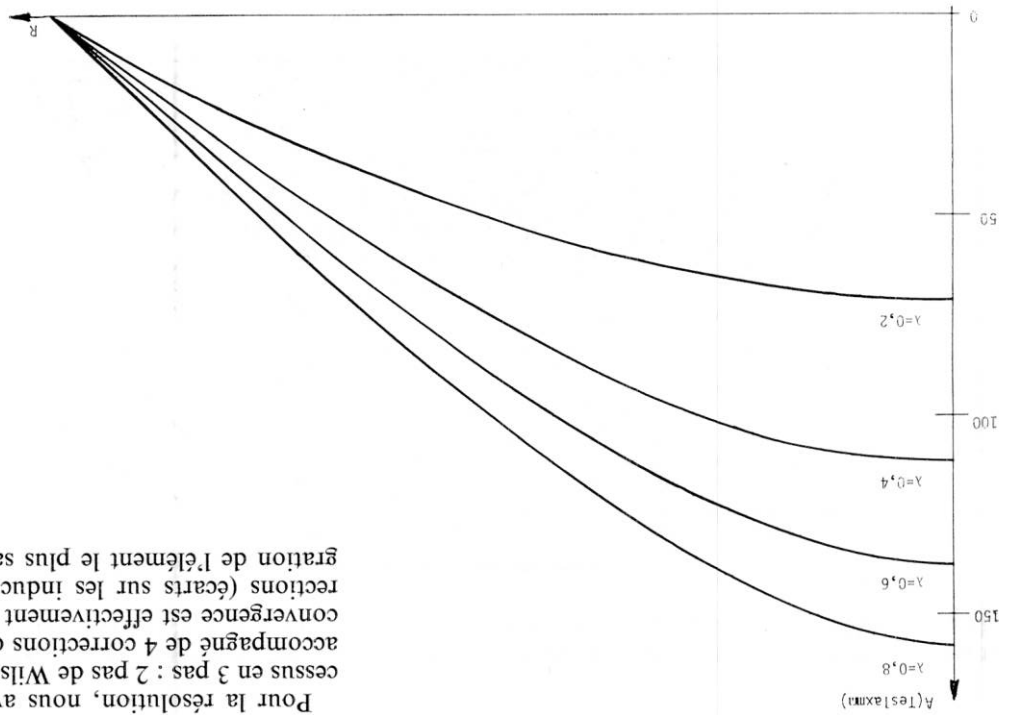


Fig. 11.

CONDUCTEUR CIRCULAIRE FERROMAGNÉTIQUE
DISCRÉTISATION EN ÉLÉMENTS FINIS.

POTENTIEL VECTEUR AU DEGRÉ DE
LIBERTÉ NUMÉRO 1

Fig. 14.



Pour la résolution, nous avons décomposé le processus en 3 pas : 2 pas de Wilson-Murray et 1 pas final accompagné de 4 corrections de Newton-Raphson. La convergence est effectivement atteinte après ces 4 corrections (écarts sur les inductions aux points d'intégration de l'élément le plus saturé inférieur au 0.001%).

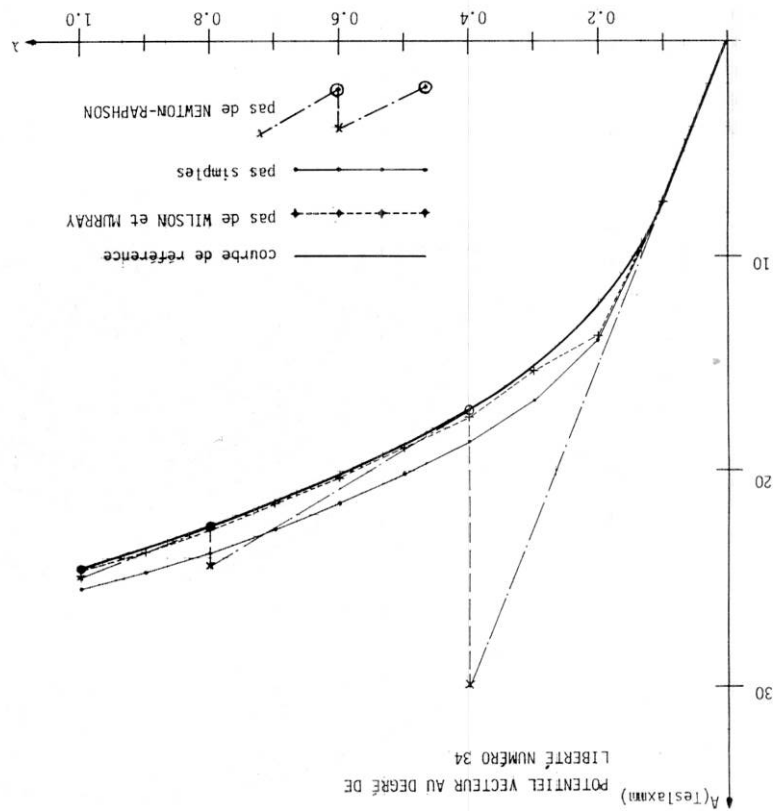
Les caractéristiques de la machine et les valeurs des courants rotoriques et statoriques sont indiquées sur la figure.

On peut voir (fig. 15) la discrétisation adoptée qui comporte 581 nœuds et 174 éléments.

b) Application au calcul de la répartition du champ magnétique dans un turbo-alternateur

On a également effectué 3 pas de Newton-Raphson avec des incréments de charge $\Delta\lambda$ importants, qui conduisent néanmoins à la solution exacte pour $\lambda = 1$. Enfin, la figure 14 montre l'évolution de la répartition du potentiel vecteur le long d'un rayon en fonction de λ . Tous les points de ce diagramme sont des points convergés.

Fig. 13.



POTENTIEL VECTEUR AU DEGRÉ DE LIBERTÉ NUMÉRO 34

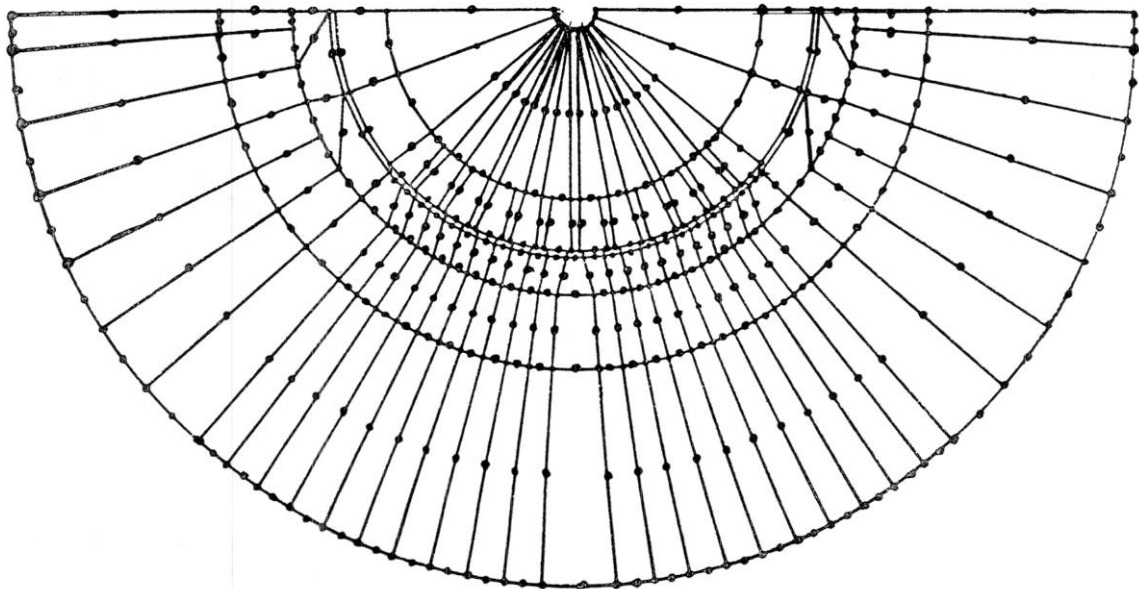


Fig. 15.

pondantes ainsi que la recherche des courbes caractéristiques à vide et en charge. Notons que ces dernières peuvent s'obtenir en un seul passage; il suffit de faire autant de pas que l'on désire de points, chaque pas étant accompagné d'un nombre suffisant de corrections de Newton-Raphson.

CONCLUSIONS

Dans ce travail, on a établi un principe variationnel incrémentiel

$$\delta\chi_\Delta = 0$$

avec

$$\chi_\Delta = \iint_R (w_\Delta^T - \Delta l \cdot \Delta A) dR$$

où ΔA est la variable indépendante sur laquelle est prise la variation.

On a montré comment on peut en déduire la théorie non linéaire d'un élément fini plan à champ quadra-

Le calcul a été effectué sur un ordinateur IBM 370/158 en 4 minutes environ. Les lignes de champs ont été tracées sommairement sur la figure 16.

Pour ce cas en charge nous avons imposé une condition de périodicité comme indiqué en [11].

De ces résultats on déduit la valeur du flux en charge après avoir calculé la fondamentale du potentiel vecteur au niveau de l'alésage. On a successivement :

$$A(\theta) = C \cdot \cos(p\theta - \zeta)$$

où p est le nombre de paires de pôles, l'induction radiale au même niveau,

$$B_r(\theta) = -\frac{R_a}{p} C \sin(p\theta - \zeta)$$

(R_a est le rayon au niveau de l'alésage) et enfin le flux

$$\Phi = 2 \cdot p \cdot C \text{ Webers par unité de longueur.}$$

Actuellement, le programme est complété par le calcul des divers flux de fuites et réactances corres-

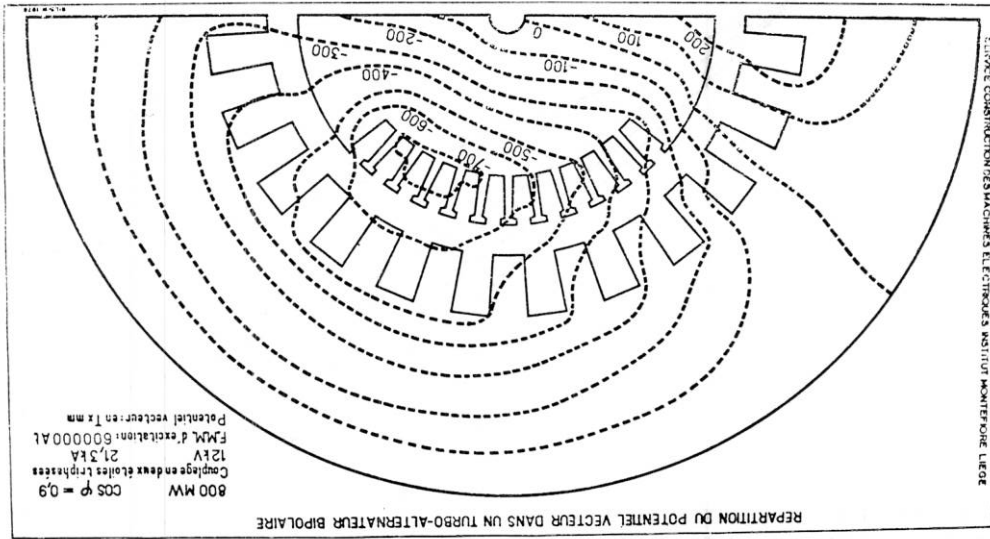


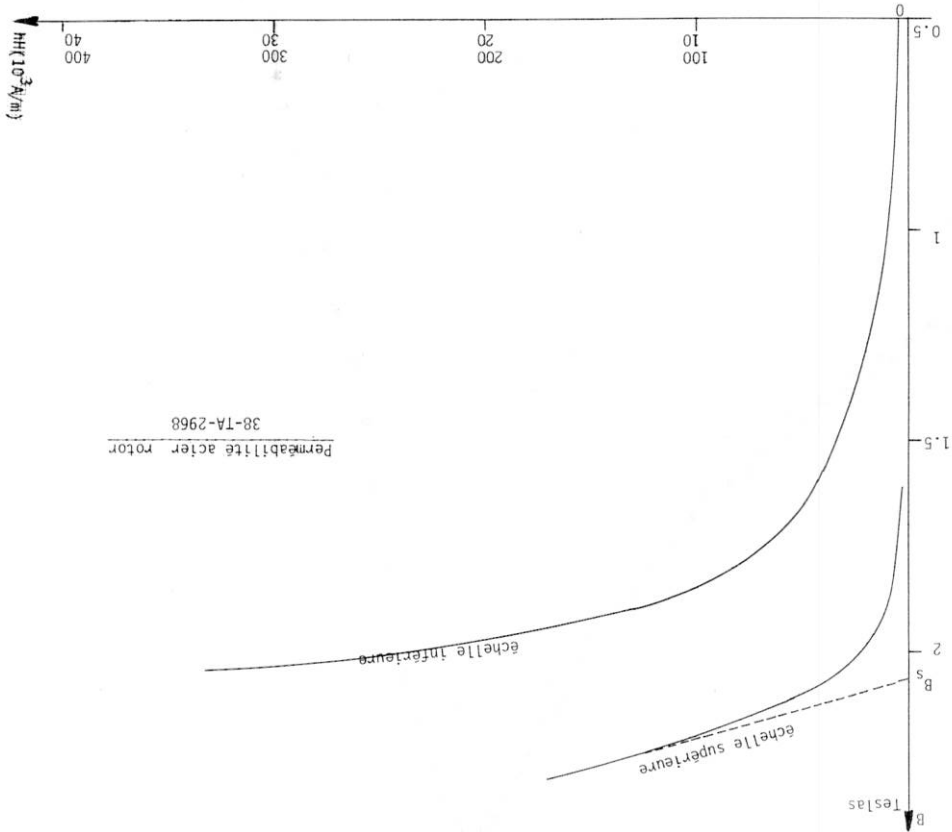
Fig. 16.

800 MW $\cos \varphi = 0,9$
 Couplage en deux états triphasés
 12 kV 21,3 kA
 F.M.M. d'excitation: 600000 A1
 Potentiel vecteur: en T mm

REPARTITION DU POTENTIEL VECTEUR DANS UN TURBO-ALTERNATEUR BIPOLAIRE

CENTRE CONSTRUCTION DES MACHINES ELECTRIQUES INSTITUT MONTELORE LIÈGE

Fig. 17.



(voir figure 17); dès lors dans la zone linéaire de saturation, on peut écrire :

$$v = v_0 \left(1 - \frac{B}{B_s} \right) \quad (2)$$

où

$$v_0 = \frac{1}{\mu_0} \text{ avec } \mu_0 = 4 \pi 10^{-7} \text{ H/m;}$$

B_s = valeur indiquée sur la figure 17 obtenue à l'intersection de la prolongation de la partie linéaire en saturation avec l'axe des ordonnées.

b) l'abscisse « B^2 » en [Tesla²].

La perméabilité intervenant dans l'équation de Poisson est la perméabilité totale, qui relie le champ magnétique à l'induction magnétique. On a $H = vB$ la perméabilité magnétique du matériau.

a) l'ordonnée $v = \frac{\mu}{l}$ en (m/Henry) où $\mu = \mu_0$ est

1. Le choix des coordonnées v et B^2

LA COURBE DE L'INVERSE DE LA PERMEABILITE EN FONCTION DU CARRE DE L'INDUCTION $v = f(B^2)$

Les développements de cet article ne sont donc par spécifiques à la méthode des éléments finis mais présentent un caractère général.

Dans le cadre de la méthode des éléments finis, nous avons exposé diverses techniques itératives fournissant une solution efficace au problème non linéaire : pas de simples d'Euler, pas de Wilson et Murray, pas de Newton-Raphson et pas combinés. Les exemples numériques traités montrent que si on désire connaître l'évolution exacte du champ magnétique sous une intensité croissante du courant d'excitation, il faut recourir aux pas de Newton-Raphson. Par contre, si on s'intéresse seulement à l'état de la machine sous sa charge nominale, on peut employer deux ou trois pas de Wilson et Murray suivis d'un pas de Newton-Raphson pour la valeur finale du courant.

Par exemple, si on développe ΔA en série double de Fourier

$$\Delta A = \sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N \Delta A_{mn}$$

$$\left(\sin \frac{L}{mx} \sin \frac{L}{ny} + \cos \frac{L}{mx} \cos \frac{L}{ny} \right)$$

sur le domaine R, l'application de la méthode proposée au paragraphe 5 d conduit à un système d'équations en les ΔA_{mn} dont la solution fournit la meilleure approximation du champ ΔA , compatible avec le développement en série adopté et avec l'équation de Poisson (1).

ANNEXE 1

**

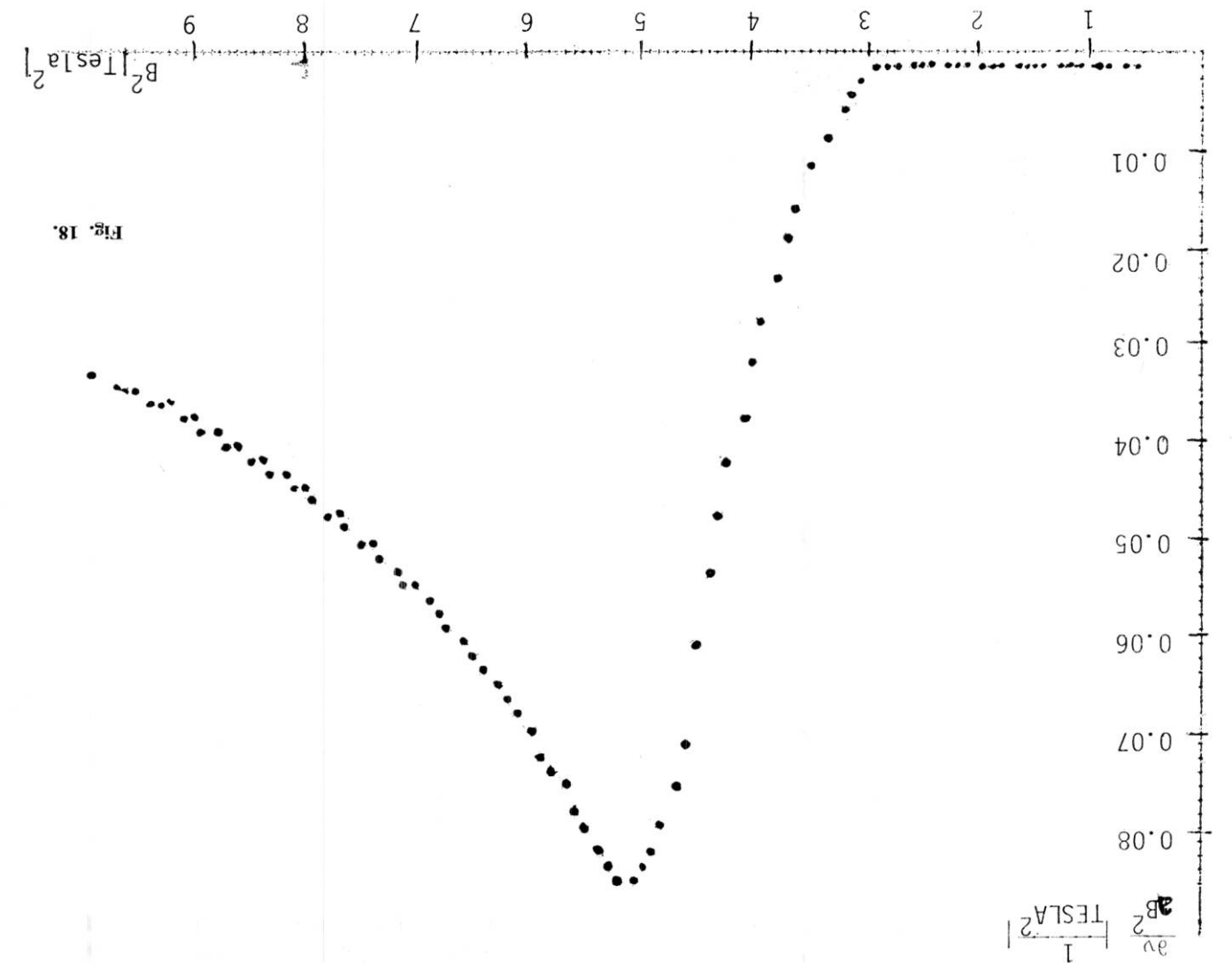
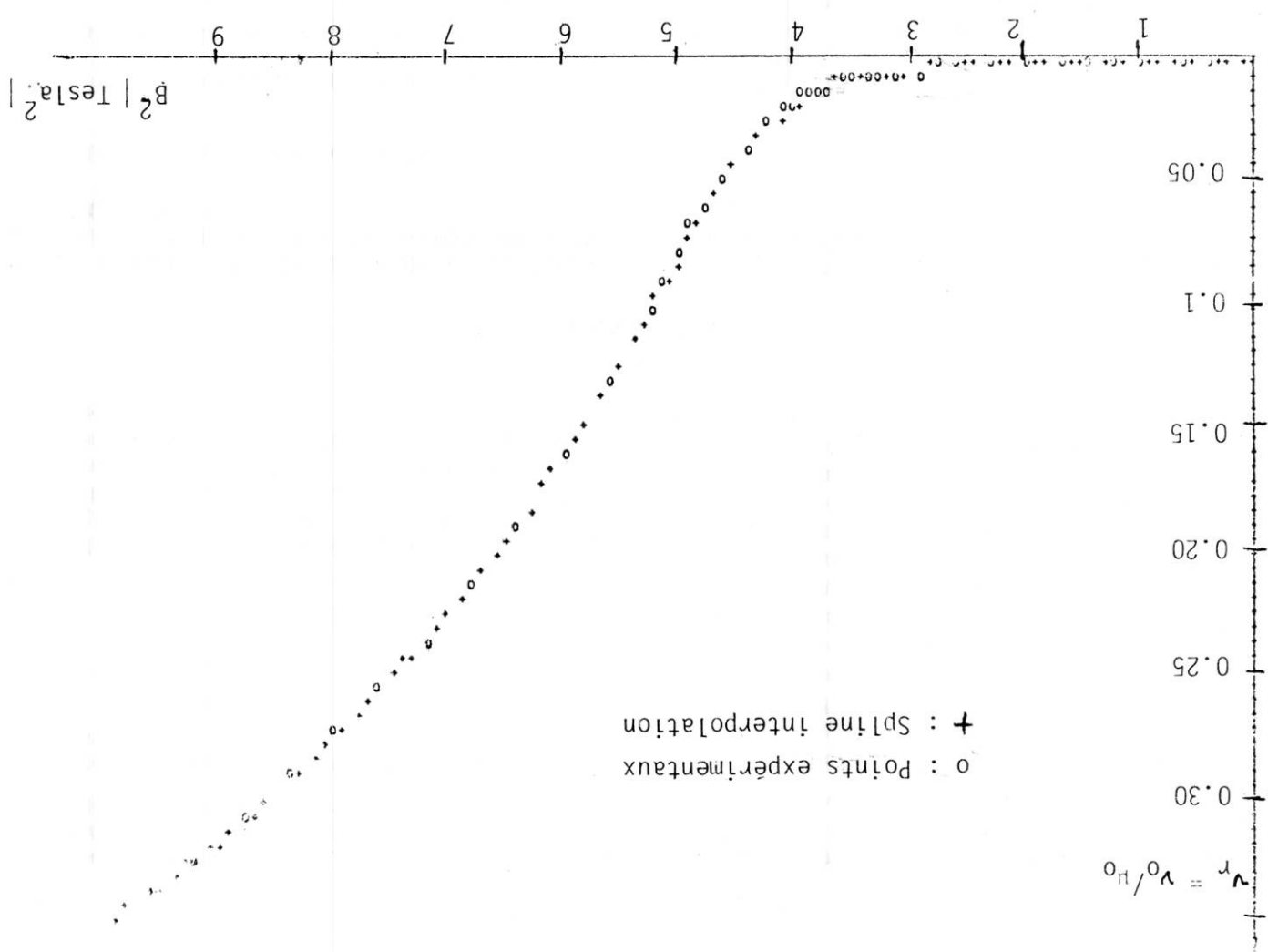


Fig. 18.



Cette option est prise de manière à économiser l'extraction de nombreuses racines carrées à chaque itération.

2. Le relevé de la courbe

Nous négligeons les phénomènes d'hystérésis et ne considérons que la courbe moyenne d'aimantation.

Pour chaque couple de points (B, H) obtenu expérimentalement sur le type de tôles choisi, on calcule un nouveau couple de points (v, B₂) qui permet de tracer une courbe qui a l'allure représentée sur la figure 18.

Il est à noter que l'on travaille avec la variable sans dimension v_s = v₀ μ₀ plutôt que v.

3. L'approximation de la courbe

Dans la théorie développée sur les processus itératifs, il est apparu la nécessité de pouvoir calculer en fonction de B² la valeur et la dérivée de v.

Nous avons opté pour la *Spline-Interpolation* [9] qui consiste dans un découpage de la courbe en plusieurs tronçons sur chacun desquels la portion de courbe est approximée par une parabole cubique permettant d'imposer la continuité des valeurs et de la dérivée première à chaque extrémité de segments adjacents :

— on travaille avec la variable réduite

$$x = \frac{B_2 - B_0}{B_2 - B_1} \frac{B_1 - B_0}{B_2 - B_0}$$

ANNEXE 2

On peut définir le vecteur

$$\{ B \} = \begin{Bmatrix} B_x \\ B_y \end{Bmatrix}$$

soit

$$\{ B \} = \begin{Bmatrix} -\frac{\partial A}{\partial x} \\ +\frac{\partial A}{\partial y} \end{Bmatrix} \quad (1)$$

Vu l'équation (6)

$$A = \sum_{k=1}^8 \alpha_k A_k$$

il vient

$$\{ B \} = [C] \{ A \} \quad (2)$$

et

$$A = \{ A \}^T \{ \alpha \} \quad (3)$$

$$\chi_c = \iint_{R_c} v \{ B \}^T \{ B \} - \iint_{R_c} v \{ A \}^T \{ \alpha \} dR_c$$

Des lors, la fonctionnelle (2) s'écrit

$$\{ \alpha \}^T = \langle \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_8 \rangle \quad (5)$$

$$\{ A \}^T = \langle A_1 A_2 \dots A_8 \rangle \quad (6)$$

et

$$| C | = \begin{bmatrix} \frac{\partial \alpha_1}{\partial x} & -\frac{\partial \alpha_1}{\partial y} & \dots & -\frac{\partial \alpha_8}{\partial x} \\ \frac{\partial \alpha_2}{\partial x} & -\frac{\partial \alpha_2}{\partial y} & \dots & -\frac{\partial \alpha_8}{\partial x} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial \alpha_8}{\partial x} & -\frac{\partial \alpha_8}{\partial y} & \dots & -\frac{\partial \alpha_8}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (4)$$

avec

— sur le premier tronçon on prendra :

$$\begin{cases} a_0 = v_0 \\ a_1 = v_0' \\ a_2 = -3v_0 + 3v_1 - 2v_0' - v_1' \\ a_3 = 2v_0 - 2v_1 + v_0' + v_1' \end{cases}$$

v₀ = valeur de la pente initiale de la courbe de magnétisation,

$$v_0' = 0,$$

— sur le dernier tronçon, on a l'équation :

$$v = v_0 \left(1 - \frac{B}{B_s} \right)$$

d'où

$$\frac{\partial v}{\partial B} = \frac{v_0}{B_s}$$

On peut voir figure 18 le tracé de la courbe expérimentales de son approximation et de sa dérivée obtenue par cette méthode.

potentiel vecteur. Il en résulte, si on suppose v constant (problème linéaire)

$$\delta \chi_e = \{ \delta A \}_T^T [S]_e \{ A \}_e - \{ \delta A \}_T^T \{ Q \}_e = 0 \quad \{ \delta A \}_e$$

d'où l'équation

$$[S]_e \{ A \}_e = \{ Q \}_e \quad (11)$$

L'assemblage des équations (A.2-11) par une méthode classique [15] conduit, pour la structure complète, au système

$$[S] \{ A \} = \{ Q \} \quad (12)$$

où $\{ A \}$ regroupe cette fois les valeurs des potentiels vecteurs en tous les nœuds de la structure.

Les valeurs de $\{ A \}$ qui satisfont cette équation rendent χ minimale et sont donc solutions de l'équation de Poisson (1).

En posant

$$[S]_e = \iint_{R_e} v [C]^T [C] dR_e \quad (8)$$

$$\{ Q \}_e = \iint_{R_e} J \{ \alpha \} dR_e \quad (9)$$

il vient

$$\chi_e = \frac{1}{2} \{ A \}_T^T [S]_e \{ A \}_e - \{ A \}_T^T \{ Q \}_e \quad (10)$$

Par le principe variationnel exposé au paragraphe 3a, on doit avoir $\delta \chi_e = 0$ pour toute variation $\{ \delta A \}$ du

$$\frac{1}{2} \{ A \}_T^T \left[\iint_{R_e} v [C]^T [C] dR_e \right] \{ A \} - \{ A \}_T^T \left[\iint_{R_e} J \{ \alpha \} dR_e \right] \quad (7)$$

REFERENCES

[1] NEIDHÖFER, Méthode permettant de calculer avec précision le circuit magnétique des machines synchrones à rotor lisse, Revue Brown-Boveri, sept. 1966, pp. 513-520.

[2] E.F. FUCHS and E.A. ERDELYI, *Nonlinear Theory of Turboalternators. Part I: Magnetic Fields at No-Load and Balanced Loads*, Trans IEE on Power Apparatus and Systems, vol. IEE on Power Apparatus and Systems, 1972, pp. 1985-1999.

[3] N.A. DEMERDASH, H.B. HAMILTON, G.W. BROWN, *Simulation for Design Purposes of Magnetic Fields in Turbogenerators with Symmetrical and Asymmetrical Rotors. Part I: Model Development and Solution Technique*, IEE Trans. *Development and Solution Technique*, IEE Trans. on Power Apparatus and Systems, PAS, vol. 91, 1972, pp. 1985-1999.

[4] P. RAFINEJAD, J.L. COULOMB et J.C. SABONNADIÈRE, *Elaboration de modèles informatiques interactifs dans les calculs de machines à induction*, RGE sept. 1975.

[5] G. DEPPEZ, G. FONDER, F. FREY, R. MAQUOI, J. RONDAL, *Application des ordinateurs au calcul des structures. Notion d'éléments finis et philosophie du calcul électronique des structures par éléments finis*, Laboratoire de Mécanique des Matériaux et Statique des Constructions, Notes de cours, Université de Liège, 1975.

[6] G.F.T. WIDGER, *Representation of Magnetisation Curves over Extensive Range by Rational Fraction Approximations*, Proc. IEE, vol. 116, Jan. 1969.

[7] F.C. TRUTT, E.A. ERDELYI, R.E. HOPKINS, *Representation of the Magnetisation Characteristics of DC Machines for Computer Use*, IEE Trans. PAS, vol. PAS-87, n° 3, March 1968.

[8] R. GLOWINSKI et A. MARROCCO, *Analyse numérique du champ magnétique d'un alternateur*

[9] P. SILVESTER, H.S. CABAYAN, B.T. BROWNE, *Efficient Technique for Finite Elements Analysis of Electric Machines*, IEE Trans. PAS n° 4, 1973, pp. 1274-1281.

[10] P. SILVESTER, P. RAFINEJAD, *Curvilinear Finite Elements for Two-Dimensional Saturable Fields*, IEE Meeting, Winter Meeting, New York, Feb. 1974.

[11] M.V.K. CHARI, P. SILVESTER, *Finite Element Analysis of Magnetically saturated D.C. Machines*, Trans. IEE, PAS 90, pp. 2362-2372.

[12] O.C. ZIENKIEWICZ, *The Finite Element Method in Engineering Science*, Mc Graw Hill, 1971.

[13] K. REICHERT, W. VOGT, *Das Finite Elemente Verfahren, angewandt, auf die Analyse magnetischer Kreise*, Bull. ASE 62, (1971).

[14] G. HORRIGMOE, P.G. BERGAN, *Incremental Variational Principles and Finite Element Models for Nonlinear Problems*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 7, (1976), 201-217.

[15] J.T. ODEEN, *Finite Elements of Nonlinear Continua*, Mc Graw Hill, 1972, p. 25 sqd.

[16] G. FONDER, *The Frontal Solution Technique: Principles, Examples and Programs*, Internal Report, (1974), University of Wales.

[17] B.M. IRONS, *A Frontal Solution Program*, Int. J. Numerical Methods in Engineering, vol. 2, n° 1, (1970), pp. 5-32.

[18] D.W. MURRAY, E.L. WILSON, *Finite Element Large Deflection Analysis of Plates*, Journal of the eng. mec. div. ASCE, vol. 95, 1969, p. 143.

[19] NAYAK G.C., *Plasticity and Large Deformation Problems by the Finite Element Method*, Ph. D. Thesis, University of Wales, 1971.