

Le profil des raies d'absorption dans une atmosphère stellaire stratifiée,

par P. SWINGS et P. LEDOUX.

1. Le problème de la structure des atmosphères stellaires, c'est-à-dire de la distribution des conditions physiques et des éléments au sein des couches extérieures des étoiles a pris une importance considérable en ces dernières années; il en est de même des applications de cette structure à de nombreuses questions d'actualité en Astrophysique.

On peut essayer de se faire une idée théorique de la structure d'une atmosphère stellaire en adoptant certains modèles physiques. Les conséquences tirées de ces modèles doivent ensuite être discutées en partant d'observations dans lesquelles la structure des couches extérieures intervient. Ces observations concernent essentiellement :

- a) Le spectre continu et, dans le cas du Soleil, sa variation d'un point à l'autre du disque;
- b) Les raies d'absorption simples (c'est-à-dire non superposées) et, dans le cas du Soleil, leur variation sur le disque;
- c) Les raies d'absorption superposées.

Il faut encore y ajouter un ensemble d'autres questions: l'évolution de l'intensité des raies atomiques ou moléculaires en fonction du type spectral et de la magnitude absolue; les relations avec les problèmes soulevés par la classification spectrale; l'équilibre de dissociation moléculaire au sein d'une atmosphère d'étoile; le problème des étoiles variables; etc... Un exposé d'ensemble de ces questions vient d'être fait par l'un de nous ⁽¹⁾.

Le problème théorique du profil des raies d'absorption, dans ses rapports avec la structure des atmosphères, a fait l'objet de nombreuses recherches récentes. On sait que la résolution de l'équation de transport se ramène à l'intégration d'une équation différentielle du type

$$\frac{d}{d\tau_\nu} \left[\frac{1}{1 + \eta_\nu} \cdot \frac{dJ_\nu}{d\tau_\nu} \right] = 3(J_\nu - B_\nu) \quad (1)$$

dans laquelle les symboles ont les significations suivantes :

- a) ν est la fréquence considérée;

(1) P. SWINGS, Considérations relatives à la distribution des conditions physiques au sein des atmosphères stellaires. (*Mém. de la Soc. roy. des Sc. de Liège*, 1938, en voie d'impression.)



b) J_ν est la valeur moyenne du rayonnement de fréquence ν pour toutes les directions, c'est-à-dire

$$J_\nu = \int_{4\pi} I_\nu(\theta) \cdot \frac{d\omega}{4\pi},$$

où $I_\nu(\theta)$ est l'intensité du rayonnement dans la direction θ et $d\omega$ l'élément d'angle solide, l'intégrale étant effectuée sur tout l'angle solide 4π ;

c) τ_ν est défini par

$$d\tau_\nu = k_\nu \rho dx,$$

k_ν étant le coefficient d'absorption continue, ρ la densité et x la profondeur mesurée à partir d'un niveau déterminé de l'atmosphère stellaire;

d) $\eta_\nu = \frac{l_\nu}{k_\nu}$, l_ν étant le coefficient de diffusion sélective à la fréquence ν ;

e) B_ν est le rayonnement du corps noir à la fréquence ν et à la profondeur x .

L'équation (1) ne tient compte ni de l'énergie absorbée par chocs de deuxième espèce, ni de l'énergie émise à la suite des chocs, ni de la fluorescence entre les niveaux stationnaires et les électrons libres. Mais la résolution du « problème complet » ne diffère guère de celle du cas « simplifié » considéré ici.

2. Le traitement mathématique ⁽¹⁾ de l'équation (1) dépend essentiellement des hypothèses faites sur $(1 + \tau_\nu)^{-1}$:

a) On a commencé par prendre une valeur moyenne de $(1 + \tau_\nu)^{-1}$ indépendante de τ_ν et on a remplacé B_ν par une expression linéaire approchée en τ_ν ; on peut alors trouver aisément l'intensité moyenne émise et, par suite, le contraste r_ν en tout point de la raie d'absorption (Milne, Eddington, etc.);

b) On a ensuite choisi une expression linéaire approchée de $(1 + \tau_\nu)^{-1}$ et de B_ν . Le problème peut encore s'intégrer analytiquement en employant les fonctions de Bessel (Eddington). Une application a été faite à l'analyse des profils des raies de Ca et Ca⁺ dans le Soleil (v. d. R. Woolley). D'autres intégrations analytiques rigoureuses ont été faites par L. Spitzer (1938) pour certaines autres expressions de $(1 + \tau_\nu)^{-1}$; ce problème est actuellement encore à l'étude à Cointe et donnera lieu prochainement à une publication;

c) Unsöld a montré que, pour les parties extrêmes des ailes, on peut calculer r_ν sans se soucier de la forme de la fonction τ_ν ;

(1) Pour la bibliographie, voir le mémoire de P. Swings.

d) Pannekoek a choisi la voie numérique : on peut toujours résoudre numériquement l'équation (1) si on connaît les expressions numériques des fonctions $(1 + \eta_\nu)^{-1}$ et B_ν ;

e) Dans le cas où $(1 + \eta_\nu)^{-1}$ varie de telle façon que ses modifications relatives ne soient pas grandes au sein de l'atmosphère (en étant d'ailleurs arbitraires), B. Strömgren a pu obtenir des formules commodes pour le calcul du contraste r_ν . On peut d'ailleurs montrer que les modifications de η_ν peuvent être assez grandes sans introduire d'erreur grave dans la valeur calculée de r_ν ;

f) On peut subdiviser l'atmosphère en un certain nombre de couches séparées, dans chacune desquelles $(1 + \eta_\nu)^{-1}$ peut être considéré comme constante ou comme fonction linéaire de τ_ν . Cette voie a été suivie par Eddington, Woolley, Unsöld, ten Bruggencate et Wellmann. La note actuelle a pour objet d'apporter un complément à la méthode de ten Bruggencate.

3. Il se peut, en effet, que η_ν varie de façon appréciable et irrégulière au sein de l'atmosphère stellaire, de sorte qu'une représentation de $(1 + \eta_\nu)^{-1}$ sous forme de deux segments de droite ne constitue pas une approximation suffisante et que ni les procédés de B. Strömgren, ni les autres méthodes approchées ne soient applicables. Il peut alors parfois être utile d'employer le procédé suivant :

Pour simplifier l'écriture, laissons de côté l'indice ν des différents symboles η , τ , B , J , etc... Subdivisons l'atmosphère en n couches limitées aux valeurs $(\tau)_1, (\tau)_2 \dots (\tau)_i \dots$ de la profondeur optique à la fréquence ν , la $n^{\text{ième}}$ couche s'étendant de $\tau = (\tau)_{n-1}$ à $\tau = \infty$. Dans chaque couche, nous supposons la densité ρ et le coefficient η constants et désignerons leurs valeurs dans la $i^{\text{ième}}$ couche par ρ_i et η_i . Nous poserons encore

$$d\tau_i = k_i \rho_i dx, \quad \text{ou} \quad \tau_i = \int_{x_{i-1}}^{x_i} k_i \rho_i dx,$$

x étant compris x_{i-1} et x_i , profondeurs réelles correspondant à $(\tau)_{i-1}$ et $(\tau)_i$.

Si τ est la profondeur optique totale d'un point situé dans la $i^{\text{ième}}$ couche, on aura

$$\tau = (\tau)_{i-1} + \tau_i,$$

de sorte que τ et τ_i ne diffèrent que par une constante.

Nous écrivons l'équation différentielle du second ordre (1) sous la forme

$$\frac{d^2 J_i}{d\tau^2} = 3(1 + \eta_i)(J_i - B_i) \quad (2)$$

et adopterons l'expression linéaire

$$B = a + b\tau. \quad (3)$$

L'intégration de (2) fournit, comme d'habitude,

$$J_i = a + b\tau + \alpha_i \cdot e^{-q_i\tau} + \alpha'_i \cdot e^{q_i\tau}, \quad (4)$$

avec

$$q_i^2 = 3(1 + r_i), \quad (5)$$

α_i et α'_i étant des constantes d'intégration.

Par dérivation de (4), on aura aussi

$$\frac{3}{4}(1 + r_i) \cdot F_i = b - \alpha_i q_i e^{-q_i\tau} + \alpha'_i q_i e^{q_i\tau}, \quad (6)$$

si

$$F_i = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} I_i \cdot \sin \theta \cdot \cos \theta \cdot d\theta \quad (7)$$

est le flux moyen.

Nous devons écrire une paire d'équations telles que (4) et (6) pour chaque couche, étant bien entendu que, pour une couche i donnée, le τ qui y figure est compris entre $(\tau)_{i-1}$ et $(\tau)_i$. Il y aura $2n$ constantes d'intégration à déterminer : $\alpha_1, \alpha'_1, \alpha_2, \alpha'_2, \dots, \alpha_n, \alpha'_n$.

1° La condition que $J - B$ ne grandisse pas exponentiellement quand $\tau \rightarrow \infty$ fournit $\alpha'_n = 0$.

2° La condition habituelle en $\tau = 0$ donne ici

$$\alpha_1 \left(\xi_1 + \frac{2}{3} q_1 \right) + \alpha'_1 \left(\xi_1 - \frac{2}{3} q_1 \right) = - \left(\xi_1 a - \frac{2}{3} b \right), \quad (8)$$

avec

$$\xi_i = 1 + r_i. \quad (9)$$

3° Les conditions de continuité des J et F aux surfaces de séparation fournissent $n - 1$ paires d'équations de la forme

$$\left. \begin{aligned} \alpha_i \cdot e^{-q_i(\tau)_i} + \alpha'_i \cdot e^{q_i(\tau)_i} - \alpha_{i+1} \cdot e^{-q_{i+1}(\tau)_i} - \alpha'_{i+1} \cdot e^{q_{i+1}(\tau)_i} &= 0 \\ \alpha_i \cdot q_i \cdot \xi_{i+1} \cdot e^{-q_i(\tau)_i} - \alpha'_i \cdot q_i \cdot \xi_{i+1} \cdot e^{q_i(\tau)_i} - \alpha_{i+1} \cdot q_{i+1} \cdot \xi_i \cdot e^{-q_{i+1}(\tau)_i} & \\ + \alpha'_{i+1} \cdot q_{i+1} \cdot \xi_i \cdot e^{q_{i+1}(\tau)_i} &= -b(\xi_i - \xi_{i+1}) \end{aligned} \right\} (10)$$

($i = 1, 2, \dots, n - 1$)

Les équations (8) et (10) constituent un système de $2n - 1$ équations linéaires non homogènes à $2n - 1$ inconnues.

Les deux seules inconnues qu'il nous faille obtenir explicitement sont α_1 et α'_1 ; en effet, le flux sortant est

$$F_{\tau=0} = \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{\xi_1} \cdot \{ b + q_1 \cdot (\alpha'_1 - \alpha_1) \} \quad (11)$$

et l'intensité résiduelle r est

$$r = \frac{F(0)}{F^*(0)}, \quad (12)$$

$F^*(0)$ représentant le flux émergent dans le fonds continu au voisinage immédiat de la raie ⁽¹⁾.

On peut écrire les solutions α_1 et α'_1 comme quotients de deux déterminants d'ordre $2n - 1$:

$$\alpha_1 = \frac{D_1}{D} \quad \text{et} \quad \alpha'_1 = \frac{D'_1}{D}.$$

D a la forme suivante :

$$D = \begin{vmatrix} \xi_1 + \frac{2}{3} q_1 & \xi_1 - \frac{2}{3} q_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ e^{-q_1(\tau)_1} & e^{q_1(\tau)_1} & -e^{-q_2(\tau)_1} & -e^{q_2(\tau)_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-q_2(\tau)_2} & e^{q_2(\tau)_2} & -e^{-q_3(\tau)_2} & -e^{q_3(\tau)_2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e^{-q_3(\tau)_2} & e^{q_3(\tau)_2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ q_1 \cdot \xi_2 \cdot e^{-q_1(\tau)_1} & -q_1 \cdot \xi_2 \cdot e^{q_1(\tau)_1} & -q_2 \cdot \xi_1 \cdot e^{-q_2(\tau)_1} & q_2 \cdot \xi_1 \cdot e^{q_2(\tau)_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q_2 \cdot \xi_3 \cdot e^{-q_2(\tau)_2} & -q_2 \cdot \xi_3 \cdot e^{q_2(\tau)_2} & -q_3 \cdot \xi_2 \cdot e^{-q_3(\tau)_2} & q_3 \cdot \xi_2 \cdot e^{q_3(\tau)_2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & q_3 \cdot \xi_4 \cdot e^{-q_3(\tau)_3} & -q_3 \cdot \xi_4 \cdot e^{q_3(\tau)_3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ e^{-q_{n-1}(\tau)_{n-1}} & e^{q_{n-1}(\tau)_{n-1}} & -e^{-q_n(\tau)_{n-1}} & & & \\ 0 & 0 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 0 & & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ q_{n-1} \cdot \xi_n \cdot e^{q_{n-1}(\tau)_{n-1}} & -q_{n-1} \cdot \xi_n \cdot e^{-q_{n-1}(\tau)_{n-1}} & -q_n \cdot \xi_{n-1} \cdot e^{-q_n(\tau)_{n-1}} & & & \end{vmatrix} \quad (13)$$

⁽¹⁾ On peut définir la surface photosphérique équivalente comme on le fait dans le cas d'une atmosphère à η_0 constant. Dans ce cas-ci, une surface photosphérique équivalente pourrait rendre compte de $\frac{n}{2}$ points du profil au lieu d'un seul.

On obtient D_1 et D'_1 en remplaçant respectivement la première colonne de D ou la seconde par

$$\left| \begin{array}{c|c} -(\xi_1 a - \frac{2}{3} b) & 1 \\ 0 & 2 \\ 0 & \vdots \\ \vdots & \vdots \\ 0 & n \\ -b(\xi_1 - \xi_2) & n+1 \\ -b(\xi_2 - \xi_3) & n+2 \\ -b(\xi_3 - \xi_4) & \vdots \\ \vdots & \vdots \\ -b(\xi_{n-1} - \xi_n) & 2n-1 \end{array} \right| \quad (14)$$

Pour $n=2$, on retrouve l'expression donnée par P. Swings et S. Chandrasekhar dans le cas de deux couches composées d'atomes différents ⁽¹⁾.

Il n'y a aucun intérêt à écrire les développements pour $n > 2$. Il est beaucoup plus simple d'introduire les valeurs numériques dans les déterminants et de calculer ceux-ci directement. A cause des nombreux termes nuls, ce calcul peut encore s'effectuer assez vite.

Si on multiplie la $n^{\text{ème}}$ ligne par $(-q_n \xi_{n-1})$ et qu'on lui ajoute la $(2n-1)^{\text{ème}}$, la colonne $(2n-1)^{\text{ème}}$ ne contient plus que l'élément $-q_n \xi_{n-1} e^{-q_n(\tau)_{n-1}}$. On le divisera par $-q_n \xi_{n-1}$ pour compenser la multiplication précédente et on aura, pour le calcul, ramené le déterminant à l'ordre $2n-2$. Et ainsi de suite. On peut par des opérations semblables ramener à 3 le nombre d'éléments non nuls dans les lignes 2, 3, 4... $n-1$.

Pour une profondeur assez grande, $\eta \rightarrow 0$, $\xi \rightarrow 1$ et $q \rightarrow \sqrt{3}$. Nous supposons que nous faisons commencer la $n^{\text{ème}}$ couche à une profondeur où pratiquement $\eta = 0$: on aura alors $\xi_n = 1$ et $q_n = \sqrt{3}$. Cette couche pourra être assimilée à la couche infinie du problème de Schwarzschild. Au contraire, pour les premières couches, c'est l'absorption sélective qui prend toute l'importance et c'est essentiellement un problème de Schuster que l'on y résout.

(1) M. N. R. A. S., 97, 24, 1936.

4. Afin d'illustrer la variation de τ_{ν} avec τ_{ν} (ou avec τ , opacité moyenne de Rosseland), nous allons examiner comment sont distribués les atomes absorbants d'un élément typique, par exemple l'hydrogène non ionisé, au niveau de Balmer. Nous admettrons pour cela un modèle déterminé d'atmosphère, par exemple celui de S. Chandrasekhar caractérisé par les relations

$$T^4 = \frac{T_e^4}{2} \left(1 + \frac{3}{2} \tau \right); \quad (15)$$

$$p_e = \beta T^{\frac{49}{4}} \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{T_0}{T} \right)^{\frac{49}{2}}}, \quad (16)$$

avec

τ = profondeur optique de Rosseland;

T_e = température effective;

T = température à la profondeur τ ;

T_0 = température superficielle;

β = constante.

Des résultats qualitativement analogues seraient obtenus en employant un modèle différent (par exemple une distribution du type de Pannekoek).

Nous effectuerons ces calculs pour différents types spectraux et différentes gravités; de sorte que, du même coup, nous pourrions montrer l'importance de la structure de l'atmosphère pour ce qui concerne l'évolution de l'intensité des raies en fonction du type spectral et de la gravité. Pour faire ressortir cette importance, nous comparerons nos résultats avec ceux qu'on obtiendrait en adoptant un modèle de Milne à température constante.

La formule fournissant la fraction $(n_0)_1$ d'atomes neutres d'hydrogène capables d'absorber les raies de la série de Balmer est

$$(n_0)_1 = \frac{(\overline{\omega}_0)_1 \cdot e^{(\chi_0)_1/kT}}{2e^{\chi_0/kT} + 0.664 \cdot T^{\frac{5}{2}} p_e},$$

avec les notations habituelles :

$\chi_0 = 13\ 54$ (potentiel d'ionisation en e. V. à partir du niveau normal);

$(\chi_0)_1 = 3.385$ (potentiel d'ionisation à partir du niveau $n = 2$);

$(\overline{\omega}_0)_1 = 8$ (poids statistique du niveau $n = 2$).

En fait, nous avons effectué les calculs pour les types 05, B1,

A0, F5, KO et M en adoptant trois valeurs β_0 , $100 \beta_0$ et $\frac{\beta_0}{100}$ de la constante de la formule (16), c'est-à-dire en considérant succes-

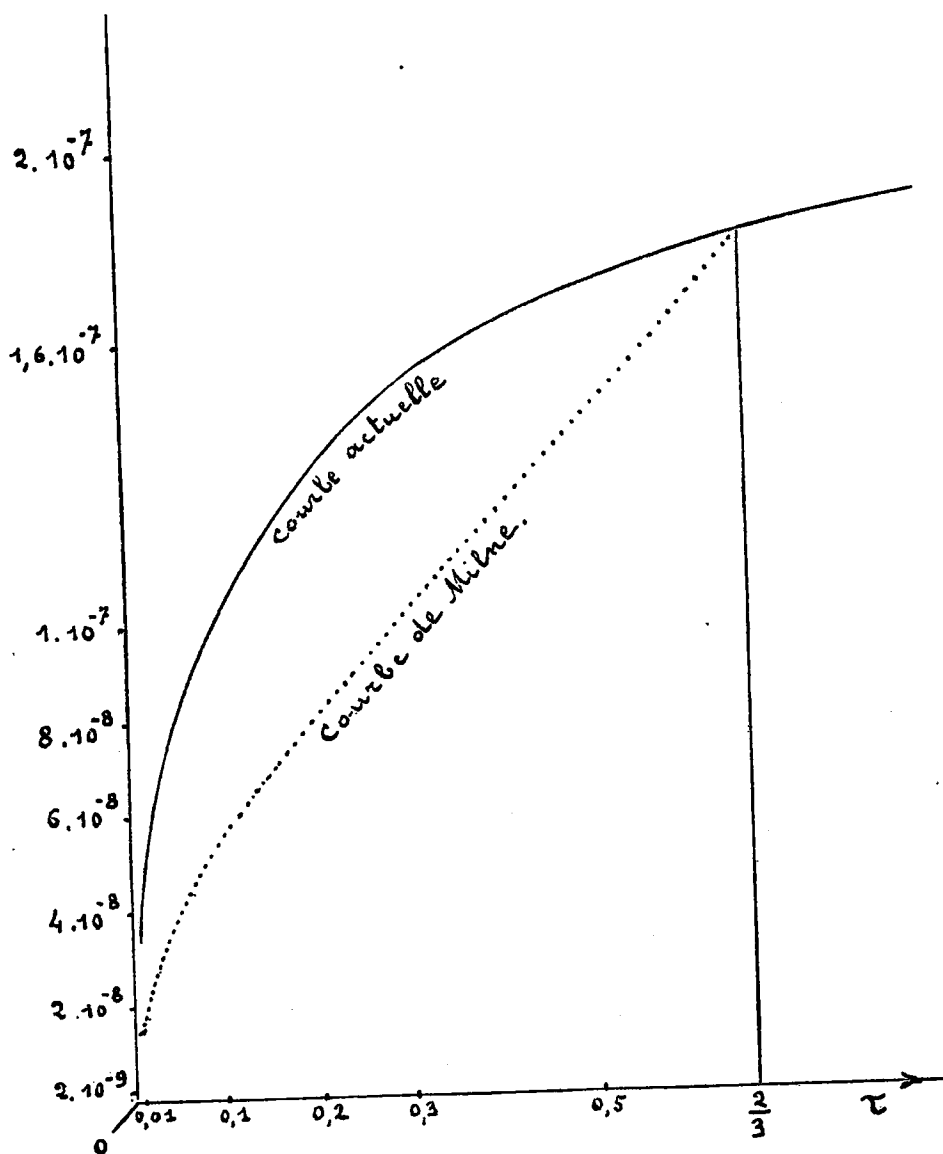


FIG. 1.

sivement une étoile moyenne, une naine et une géante de chaque type spectral ⁽¹⁾. Prenons l'exemple de la classe B1. Adoptons

$$\left\{ \begin{array}{l} \beta_0 = 5 \cdot 10^{-19} \text{ (c. à d. } (p_e)_{\tau=\frac{2}{3}} = 1,7 \cdot 10^{+2} \text{ c.g.s.)} \\ T_e = 20000^\circ. \end{array} \right.$$

⁽¹⁾ Les résultats complets des calculs se trouvent dans la dissertation manuscrite de P. Ledoux, déposée dans la Bibliothèque de l'Institut d'Astrophysique de Liège. Voir aussi D. CRESPIAN, *Bull. Acad. roy. Belg.*, Cl. Sc., 23, 560, 1937, et *Bull. Soc. roy. Sc. de Liège*, 6, 268, 1937.

La figure 1 fournit la distribution de $(n_0)_1$, de $\tau = 0$ à $\tau = \frac{2}{3}$ pour le modèle de Chandrasekhar et pour un modèle de Milne où l'on adopterait une température constante.

Il s'agit en fait ici d'un cas typique ordinaire; il arrive parfois que les deux distributions diffèrent beaucoup plus fortement.

Partant du diagramme de $(n_0)_1$, on pourra calculer les valeurs de l_ν , donc de η_ν pour un $\nu - \nu_0$ déterminé ($\nu_0 =$ centre de la raie), en fonction de τ . Si l'on veut ensuite appliquer la méthode indiquée au § 3, on décomposera l'intervalle des τ (ou des τ_ν , l'un se ramenant à l'autre) en régions où $(1 + \eta_\nu)^{-1}$ peut être considérée comme pratiquement constante.

La figure 1 nous montre d'ailleurs que, dans l'étude de l'évolution de l'intensité des raies en fonction du type spectral et de la magnitude absolue, la distribution joue un rôle important. Cette question est discutée dans le mémoire de P. Swings, dans ses relations avec les recherches de Russell et de Pannekoek.

Institut d'Astrophysique de l'Université de Liège.
Février 1938.