SUR LE SYSTÈME APLANÉTIQUE DE DEUX MIROIRS DANS LE CAS D'UN POINT OBJET SITUÉ A DISTANCE FINIE

par F. BUREAU et P. SWINGS

Sommaire. — *Les auteurs étudient un système aplanétique de deux miroirs dans le cas d'un objet situé à distance finie; ils donnent la solution rigoureuse de l'équation différentielle de ce problème.*

Le problème du télescope aplanétique (cas d'un point objet rejeté à l'infini) a été résolu complètement par Schwarzschild. M. H. Chrétien (1) a donné une autre solution. Pour un point objet situé à distance finie, M. Chrétien a établi l'équation différentielle et a donné une solution approchée du problème correspondant à la dioptrique du troisième ordre. La présente note a pour but de donner la solution complète de l'équation différentielle du problème; elle est susceptible d'applications pratiques, par exemple pour l'éclairage des microscopes.

1. Equation différentielle du problème. — Sauf légères modifications (2), nous utiliserons les notations de M. Chrétien. Désignons par (M) et (M') les sections méridiennes des deux miroirs; par X et X', les points objet et image conjugués; par $\overline{X}$, l'image intermédiaire pour un rayon lumineux déterminé (fig. 1). Posons :

$$\text{MX} = x, \qquad \text{MM}' = e, \qquad \text{M}'\text{X}' = x',$$
$$\text{IX} = l, \qquad \text{II}' = \bar{e}, \qquad \text{I}'\text{X}' = l'.$$

(1) *Revue d'Optique*, 1 (1922), 13 et 49; *Cours de calcul des combinaisons optiques*, 1928-1929, p. 494 et suiv., 523 et suiv.

(2) M. Chrétien désigne l'angle $\widehat{\text{IXA}}$ par $-\bar{\alpha}$ et écrit $\frac{1}{g}$ au lieu de β.

Appelons encore α, α' et $\bar{\bar{\alpha}}$ respectivement les angles AXB, AX'B et $\bar{\text{I}}\bar{\text{X}}$A. Les conditions d'aplanétisme permettent d'écrire :

1° Condition du stigmatisme :

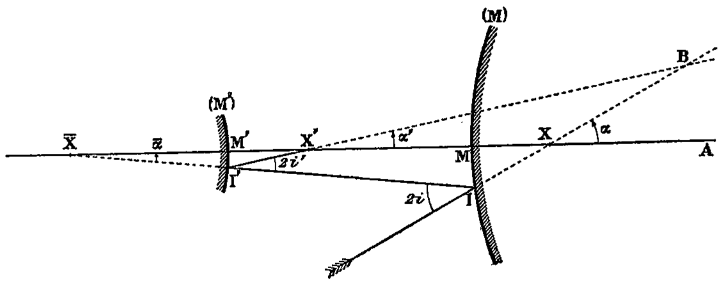
$$-l + \bar{e} + l' = -x + e + x'; \qquad (1)$$

2° Condition des sinus :

$$\sin\alpha' = \beta \sin\alpha, \qquad (2)$$

où nous avons posé :

$$\beta = \frac{a}{a'}, \qquad a = \text{XA}, \qquad a' = \text{X'A}.$$



Nous avons, de plus, les conditions géométriques évidentes :

$$l\cos\alpha + \bar{e}\cos\bar{\alpha} - l'\cos\alpha' = x + e - x'; \qquad (3)$$

$$l\sin\alpha = \bar{e}\sin\bar{\alpha} + l'\sin\alpha'; \qquad (4)$$

$$\bar{\alpha} = 2i - \alpha = 2i' - \alpha'. \qquad (5)$$

Nous avons ensuite :

$$\operatorname{tg} i = \frac{1}{l}\cdot\frac{dl}{d\alpha} \qquad \text{et} \qquad \operatorname{tg} i' = \frac{1}{l'}\cdot\frac{dl'}{d\alpha'} \qquad (6)$$

A l'aide des six relations qui précèdent, nous allons former l'équation différentielle du miroir (M) en coordonnées polaires l et α. Pour cela, éliminons l' et $\bar{e}$ des équations (1), (3), (4). En posant :

$$x - x' = h, \qquad (7)$$

il vient [3] :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & l + e - h \\ \sin\alpha' & \sin\bar{\alpha} & l\sin\alpha \\ \cos\alpha' & -\cos\bar{\alpha} & l\cos\alpha - e - h \end{vmatrix} = 0. \qquad (8)$$

(3) L'équation (8) est (sauf légères modifications de notations) celle à laquelle s'arrête M. Chrétien pour le cas du point objet à distance finie.

D'après la condition des sinus (2), nous avons :

$$\sin\alpha' = \beta\sin\alpha, \qquad \cos\alpha' = \sqrt{1 - \beta^2\sin^2\alpha}. \qquad (9)$$

Les relations (5) et (6) nous permettent d'écrire :

$$\operatorname{tg}\frac{\bar{\alpha}}{2} = \operatorname{tg}\left(i - \frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\dfrac{dl}{d\alpha} - l\cdot\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}}{l + \dfrac{dl}{d\alpha}\cdot\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}};$$

$$\cos^2\frac{\bar{\alpha}}{2} = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2\dfrac{\bar{\alpha}}{2}} = \frac{\left(l + \dfrac{dl}{d\alpha}\cdot\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}\right)^2\cos^2\dfrac{\alpha}{2}}{l^2 + \left(\dfrac{dl}{d\alpha}\right)^2};$$

$$\cos\bar{\alpha} = 2\cos^2\frac{\bar{\alpha}}{2} - 1 = \frac{\left\{l^2 - \left(\dfrac{dl}{d\alpha}\right)^2\right\}\cos\alpha + 2l\dfrac{dl}{d\alpha}\cdot\sin\alpha}{l^2 + \left(\dfrac{dl}{d\alpha}\right)^2}; \qquad (10)$$

$$\sin\bar{\alpha} = 2\operatorname{tg}\frac{\bar{\alpha}}{2}\cos^2\frac{\bar{\alpha}}{2} = \frac{2l\dfrac{dl}{d\alpha}\cos\alpha - \left\{l^2 - \left(\dfrac{dl}{d\alpha}\right)^2\right\}\sin\alpha}{l^2 + \left(\dfrac{dl}{d\alpha}\right)^2}. \qquad (11)$$

En tenant compte des relations (9), (10) et (11), l'équation (8) s'écrit :

$$\begin{vmatrix} 1 & \left(\dfrac{dl}{d\alpha}\right)^2 + l^2 & l + e - h \\ \beta\sin\alpha & \left(\dfrac{dl}{d\alpha}\right)^2\sin\alpha + 2l\dfrac{dl}{d\alpha}\cos\alpha - l^2\sin\alpha & l\sin\alpha \\ \sqrt{1 - \beta^2\sin^2\alpha} & \left(\dfrac{dl}{d\alpha}\right)^2\cos\alpha - 2l\dfrac{dl}{d\alpha}\sin\alpha - l^2\cos\alpha & l\cos\alpha - e - h \end{vmatrix} = 0 \qquad (12)$$

C'est l'équation différentielle du miroir (M). Nous devons en chercher une solution vérifiant les conditions suivantes :

$$l(\pi) = x, \qquad (\operatorname{tg} i)_{\alpha=\pi} = \frac{1}{l(\pi)}\cdot\left(\frac{dl}{d\alpha}\right)_{\alpha=\pi} = 0. \qquad (13)$$

Pour étudier l'équation précédente, il est avantageux de poser : $\sin\alpha = u$; les conditions (13) deviennent :

$$l(0) = x, \qquad \left(\frac{dl}{du}\right)_{u=0} = 0 \qquad (14)$$

et l'équation (12) s'écrit, après quelques calculs :

$$u(1 - u^2)\text{A}\left(\frac{dl}{du}\right)^2 + 2l\sqrt{1 - u^2}\,\text{B}\,\frac{dl}{du} + l^2u\text{C} = 0; \qquad (15)$$

où nous avons posé :

$$\left.\begin{aligned} A&=(e+h)(\beta-1)+(e-h)\beta\sqrt{1-u^2}-(e-h)\sqrt{1-\beta^2u^2}\\ B&=l-(e+h)\sqrt{1-u^2}-(l+e-h)[\beta u^2+\sqrt{(1-u^2)(1-\beta^2u^2)}]\\ C&=(e+h)(1+\beta)-\beta(2l+e-h)\sqrt{1-u^2}+(2l+e-h)\sqrt{1-\beta^2u^2}\end{aligned}\right\}\quad(16)$$

2. Etude des intégrales de l'équation (15). — En résolvant l'équation (15) par rapport à $\frac{dl}{du}$ nous avons :

$$\frac{dl}{du}=-\frac{l}{uA\sqrt{1-u^2}}\left[B\pm\sqrt{B^2-u^2AC}\right]\qquad(17)$$

On voit aisément que la fonction B^2-u^2AC des deux variables u et l est holomorphe au voisinage du point $u=0$, $l=x$, en lequel elle se réduit à $4e^2$. D'ailleurs, on a :

$$\begin{aligned} A&=2e(\beta-1)+\alpha_1u^2+\alpha_2u^4+\ldots\\ B&=-2e+b_1u^2+b_2u^4+\ldots\\ C&=(e+h)(1+\beta)+(1-\beta)(2l+e-h)+c_1u^2+c_2u^4+\ldots\end{aligned}$$

les α étant des coefficients numériques, les b et c dépendant linéairement de l. On en conclut aussitôt que :

$$B^2-u^2AC=4e^2-2e[\beta^2(e+h)-(1-\beta)^2l]u^2+\ldots$$

et, par suite, on peut écrire :

$$\sqrt{B^2-u^2AC}=2e-\frac{1}{2}[\beta^2(e+h)-(1-\beta)^2l]u^2+\ldots\qquad(18)$$

série procédant suivant les puissances de u^2.

La relation (18) montre qu'*une seule* des équations (17) admet une intégrale vérifiant les conditions (14); cette intégrale est holomorphe au voisinage de $u=0$ et peut s'écrire (puisque le miroir est symétrique par rapport à l'axe polaire XX') :

$$l(u)=x+a_1u^2+a_2u^4+\ldots,$$

les a étant des coefficients numériques.

En résumé, l'équation (15) possède une et une seule solution vérifiant les conditions (14); cette solution peut s'écrire sous la forme (19).

3. Calcul de l'intégrale de l'équation différentielle (15). — Posons $u^2=y$; l'équation (15) devient :

$$4y(1-y)A\left(\frac{dl}{dy}\right)^2+4lB\frac{dl}{dy}+l^2C=0,\qquad(20)$$

moyennant :

$$\begin{aligned} A&=(e+h)(\beta-1)+(e-h)\beta\sqrt{1-y}-(e-h)\sqrt{1-\beta^2y};\\ B&=l\sqrt{1-y}-(e+h)(1-y)-(l+e-h)\beta y\sqrt{1-y}-\\ &\quad-(l+e-h)(1-y)\sqrt{1-\beta^2y};\\ C&=(e+h)(1+\beta)-\beta(2l+e-h)\sqrt{1-y}+(2l+e-h)\sqrt{1-\beta^2y}.\end{aligned}$$

Pour calculer les coefficients a de l'intégrale :

$$l(y)=x+a_1y+a_2y^2+\ldots,\qquad(21)$$

nous remplacerons $l(y)$ dans (20) par sa valeur (21) et nous annulerons les coefficients des diverses puissances de y.

Désignons par A_0, B_0, C_0 les valeurs de A, B, C en $y=0$ et par B_0', C_0' respectivement les valeurs de $\frac{dB}{dy}$ et $\frac{dC}{dy}$ en $y=0$. En remarquant que l'on a posé $h=x-x'$ (formule 7), on trouve aisément :

$$\left.\begin{aligned} A_0&=2e(\beta-1);\\ B_0&=-2e;\\ C_0&=2(e+x-\beta x');\\ B'_0&=\frac{x}{2}+2e+(e+x')\beta\left(\frac{\beta}{2}-1\right)\\ C'_0&=2a_1(1-\beta)+(e+x+x')\frac{\beta}{2}(1-\beta).\end{aligned}\right\}\quad(22)$$

L'équation (20) donne alors :

$$a_1=\frac{x}{2e}C_0=\frac{x}{e}(e+x-\beta x').\qquad(23)$$

En dérivant l'équation (20) par rapport à y, en faisant $y=0$ dans le résultat et en tenant compte des formules (22) et (23), on trouve :

$$16xea_2=8e\beta a_1^2+4a_1xB_0'+x^2C_0'.\qquad(24)$$

4. Recherche de l'équation du miroir en coordonnées cartésiennes. — Nous prendrons comme axe positif des Z la semi-droite MX et comme axe positif des Y la perpendiculaire (dirigée vers le haut) en M à MX. Nous avons :

$$-Z=l\cos\alpha=l(u).\sqrt{1-u^2};\qquad(25)$$

$$Y=l\sin\alpha=l(u).u.\qquad(26)$$

Nous éliminerons u entre ces deux relations. La formule (26) donne u en fonction de Y; on trouve aisément :

$$u=\frac{1}{x}.Y-\frac{a_1}{x^4}Y^3+\frac{3a_1^2-a_2x}{x^7}Y^5+\ldots.$$

En remplaçant u par cette valeur dans (25), on trouve :

$$-Z = x + \frac{1}{4ex}(x - \beta x' - e)\,Y^2 + EY^4 + \dots, \qquad (27)$$

avec :

$$E = -\frac{2a_1^2}{x^5} + \frac{a_1 + 2a_2}{2x^4} - \frac{1}{8x^3}. \qquad (28)$$

Il ne semble pas utile de chercher à mettre E sous une forme plus simple; à l'occasion d'un problème déterminé, il semble plus facile de calculer a_1, a_2, puis E, à l'aide des données.

La méthode indiquée permet de déterminer les termes en Y^6, Y^8, ... de l'équation du miroir; il n'y a pas d'autre difficulté que la complexité des calculs.

Pour obtenir l'équation du miroir (M′) rapportée à des axes ayant pour origine M′ et parallèles aux axes MZ et MY, il suffit de permuter x et x' dans la formule précédente et de remplacer β par $\frac{1}{\beta}$. D'ailleurs, la section méridienne d'un miroir étant connue, on peut en déduire, par une construction géométrique assez simple, la section méridienne de l'autre miroir, comme cela a été indiqué par M. Chrétien (4).

Institut d'Astrophysique de l'Université de Liége.

Le 10 *mars* 1934

(4) H. Chrétien, *Calcul des combinaisons optiques*, p. 496.

18.648. — Bordeaux, Imprimerie-Librairie de l'Université, 6, pl. St-Christoly. — 1934.

T. 890 B

Reprinted for private circulation from
The Astrophysical Journal, Vol. 80, No. 3, October 1934
PRINTED IN THE U.S.A.

P. SWINGS and M. NICOLET