ACADÉMIE ROYALE DE BELGIQUE

Extrait des *Bulletins de la Classe des Sciences*, 5e série, t. XIII, n° 12.
Séance du 3 novembre 1927, pp. 837-848.

OPTIQUE ASTRONOMIQUE. — Sur le changement d'amplification dans le télescope aplanétique,

par P. SWINGS (*), docteur en sciences physiques et mathématiques (**).

1. M. Chrétien (***) a étudié dans quelles conditions un télescope de Cassegrain constitue un système aplanétique au sens moderne donné à ce mot par Abbe, c'est-à-dire vérifie la condition des sinus. Il a trouvé que le miroir principal doit avoir une section méridienne d'équation bien déterminée et que le petit miroir correspondant est également bien déterminé.

Le même problème avait déjà été étudié par K. Schwarzschild (IV) dans le cas d'un système de Gregory. M. Couder (V) a indiqué un télescope de Schwarzschild d'ouverture relative considérable et ayant une netteté supérieure à la seconde d'arc.

Dans une note récente (VI), MM. Ritchey et Chrétien écrivaient : « On a objecté à l'emploi du télescope aplanétique que cet instrument ne se prête pas à l'adaptation successive

(*) Présenté par M. Dehalu.

(**) Cette question, que j'ai étudiée sur le conseil de M. le Profr Dehalu, a fait l'objet d'une des thèses imposées pour la défense publique du Concours des Bourses de voyages de 1927. J'en ai exposé les résultats devant le jury du Concours, le 10 novembre 1927. M. le Profr Chrétien, qui avait eu l'extrême obligeance d'examiner mon travail, m'a fait part, le 19 novembre, des résultats auxquels il était parvenu par une autre voie : les résultats de M. Chrétien ont été publiés dans les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Paris*, le 24 novembre.

La méthode de résolution du problème étant différente, je me décide néanmoins, à la demande de M. le Profr Dehalu, à publier mes résultats.

(***) H. CHRÉTIEN, *Revue d'Optique*, 1922, t. I, pp. 13-22 et 49-64.

(IV) K. SCHWARZSCHILD, *Theorie der Spiegel telescope*. (ABH. DER GES. DER WISS. ZU GÖTTINGEN [MATH.-PHYS. KLASSE], 1905, Bd IV.)

(V) A. COUDER, *C. R. de l'Acad. des Sc. de Paris*, 20 décembre 1926, t. CLXXXIII, p. 1276.

(VI) RITCHEY et CHRÉTIEN, *C. R.*, 25 juillet 1927, t. CLXXXV, p. 267.

de plusieurs miroirs secondaires à amplifications différentes, comme on le fait couramment avec le miroir parabolique. Cette objection n'est pas fondée. On ne voit pas bien *a priori* pourquoi une combinaison optique initialement bien supérieure à une autre au point de vue des aberrations lui deviendrait subitement inférieure à la moindre modification de ses éléments. En fait, on peut changer ici l'amplification de l'image fournie par le grand miroir tout en conservant la correction de l'aberration sphérique, et l'on ne demande rien de plus au télescope newtonien. »

Nous nous proposons d'étudier les problèmes suivants :

Supposons construit un télescope aplanétique. Est-il possible de trouver des miroirs convexes secondaires à amplifications différentes, qu'on puisse associer au grand miroir en conservant à la fois, pratiquement, la correction de l'aberration sphérique et l'aplanétisme au sens d'Abbe ?

Il faut bien noter en effet que la précision obtenue en taillant les miroirs est finie ; nous ne tiendrons compte que des termes ayant une importance pratique effective et chercherons si, dans ces conditions, le problème n'est pas résoluble.

Nous examinerons aussi s'il est possible, en conservant toujours le même grand miroir, de trouver un petit miroir concave (système de Gregory), tel que le nouveau télescope soit encore pratiquement aplanétique.

Enfin, nous calculerons les éléments des nouveaux télescopes obtenus (distance des miroirs, longueur focale, position du foyer final, coefficient d'obturation, etc.).

2. Observons d'abord que, pour la construction, il est utile de mettre les équations des miroirs sous formes de développements en séries, telles que

$$x = A + By^2 + Cy^4 + \cdots$$

et qu'en pratique, on ne doit utiliser qu'un nombre restreint de termes de ces développements.

Nous emploierons les mêmes notations que M. Chrétien (*) et désignerons donc :

par $F = 1$, la longueur focale résultante du système aplanétique en Cassegrain ;

par e, la distance des sommets des deux miroirs ;

par m, la distance du sommet du petit miroir au foyer final O ;

par x et y, les coordonnées rectangulaires de la section méridienne du grand miroir dans un système d'axes d'origine O et d'axe Ox dirigé vers le petit miroir ;

par x' et y' les coordonnées du petit miroir dans le même système ;

par u, l'angle qu'un rayon lumineux fait avec Ox, après ses deux réflexions ;

par $\rho = \rho(u)$, l'équation polaire du petit miroir ;

par r et f, le rayon de courbure et la distance focale du grand miroir ;

par r' et f', les mêmes éléments du petit miroir.

M. Chrétien a trouvé que pour vérifier les conditions d'aplanétisme, les sections méridiennes du grand et du petit miroir doivent avoir respectivement pour équations

$$\left.\begin{aligned} x = m - e + \frac{1-m}{4e}\cdot y^2 - \frac{m}{32e}\cdot y^4 - \frac{(1+4e)}{384e^2}\cdot y^6 \\ - \frac{(2+11e+30e^2)}{4\times 1536\,.\,e^3}\cdot y^8 + \cdots \end{aligned}\right\} \quad (I)$$

et

$$x' = m + \frac{y'^2}{4m}\left(\frac{1-m}{e} - 1\right) + \cdots \quad (I')$$

Supposons donc construit le système aplanétique de Cassegrain déterminé par les équations (I) et (I') ; ce système correspond à $F = 1$.

(*) H. Chrétien, *Revue d'Optique*, 1922.

Nous nous proposerons de garder le même grand miroir; donc f et $r = 2f$ ont des valeurs bien déterminées.

3. Considérons maintenant un autre système aplanétique sur lequel, provisoirement, nous ne faisons aucune hypothèse spéciale. Nous désignerons ses éléments par les mêmes lettres que pour le système (I, I′), mais en les affectant de l'indice 1. Si nous respectons les conventions de signes concernant les distances focales, nous pouvons ne faire aucune hypothèse sur le sens de la concavité du petit miroir. Pour obtenir les équations des nouvelles sections méridiennes, nous pourrions reprendre les calculs de M. Chrétien, avec $F_1 \neq 1$. Mais on comprend que cela revient à changer d'unité dans les équations (I), (I′) et à ajouter l'indice 1. Ou encore pour obtenir les équations cherchées, il suffit de rendre homogènes les équations (I) et (I′) et d'ajouter l'indice 1. On remplacera donc x, y, m, e, x' et y' respectivement par

$$\frac{x_1}{F_1},\ \frac{y_1}{F_1},\ \frac{m_1}{F_1},\ \frac{e_1}{F_1},\ \frac{x'_1}{F_1} \quad \text{et} \quad \frac{y'_1}{F_1}.$$

On obtient ainsi

$$\left\{\begin{aligned} &x_1 = m_1 - e_1 + \frac{F_1 - m_1}{4e_1F_1}\cdot y_1^2 - \frac{m_1}{32e_1F_1^3}\cdot y_1^4 - \frac{(F_1+4e_1)m_1}{384e_1^2F_1^5}\cdot y_1^6 \\ &\qquad\qquad - \frac{(2F_1^2+11e_1F_1+30e_1^2)}{4\times 1536\,.\,e_1^3F_1^7}\cdot y_1^8 + \cdots \qquad \text{(II)} \\ &x'_1 = m_1 + \frac{y_1'^2}{4m_1}\cdot\left(\frac{F_1-m_1}{e_1} - 1\right) + \cdots \qquad \text{(II′)} \end{aligned}\right.$$

Pour obtenir le sens de la concavité du petit miroir, nous considérerons la valeur de $\frac{d^2x'_1}{dy_1'^2}$, pour $y'_1 = 0$. On a

$$\left(\frac{d^2x'_1}{dy_1'^2}\right)_0 = \frac{1}{2m_1}\cdot\left(\frac{F_1-m_1}{e_1} - 1\right).$$

Le petit miroir est donc convexe (Cassegrain) si $F_1 - m_1 > e_1$,

concave (Gregory) si $F_1 - m_1 < e_1$. Dans le cas où $F_1 - m_1 = e_1$, il faut envisager les termes suivants du développement (II′); nous ne considérerons pas ce cas.

Le système (II, II′) est aplanétique — au même titre que (I, I′) — quelles que soient les valeurs de m_1, e_1 et F_1; en particulier, nous pourrons choisir pour m_1, e_1 et F_1 des valeurs telles que le grand miroir du second système soit pratiquement le même que celui du premier système (équation I).

4. — La recherche des solutions du problème revient donc, au fond, à l'identification des équations (I) et (II), sauf les termes constants : une modification de ceux-ci correspond en effet tout simplement à un déplacement du foyer principal.

On voit immédiatement que l'on ne pourra obtenir des solutions m_1, e_1 et F_1 différentes de m, e et F que si on limite les séries (I) et (II) à quelques termes; il faudra voir d'ailleurs si les termes supprimés n'ont pas de l'importance au point de vue pratique.

Afin d'avoir une idée de l'ordre de grandeur des erreurs que l'on fera en négligeant les termes en y^6, y^8, ... , nous allons calculer une valeur maximum des termes en y^6 et y^8 dans le cas du télescope de MM. Ritchey et Chrétien, pour les rayons extrêmes du bord du champ. Pour cet instrument (*), on a

$$e = \frac{4{,}286}{15{,}625}, \qquad m = \frac{4{,}911}{15{,}625}, \qquad \text{valeur maximum de } y = \frac{1{,}25}{15{,}625}.$$

On trouve :

$$\text{terme en } y^6 < 0{,}023 \times 2{,}6 \times 10^{-7}\,\mathrm{F}, \quad \text{soit } < 6{,}2\,.\,10^{-9}\,\mathrm{F}, \quad \text{ou } < \frac{\mu}{10};$$

$$\text{terme en } y^8 < \frac{\mathrm{F}}{2.800.000.000}, \qquad \text{ou } < \frac{\mu}{180}.$$

On voit donc que ces termes n'ont pas d'effet important pour la taille du miroir; notons aussi qu'il s'agit des rayons du bord

(*) H. Chrétien, *Revue d'Optique*, 1922.

du champ. On peut étudier, de plus, l'influence sur la direction de la normale, etc., et constater qu'en se bornant aux termes en y^4, on réalise pratiquement l'aplanétisme.

A la fin de cette étude, nous envisagerons aussi le cas où l'on garde les termes en y^6, ainsi que le cas où l'on désire que la position du foyer définitif ne soit pas modifiée.

Identifions dans (I) et (II) les coefficients des termes en y^2 et y^4.

$$\left\{\begin{aligned} \frac{F_1 - m_1}{F_1 e_1} &= \frac{1-m}{e} \\ \frac{m_1}{F_1^3 \cdot e_1} &= \frac{m}{e}. \end{aligned}\right.$$

On en tire (*)

$$m_1 = \frac{mF_1^3}{(1-m) + mF_1^2} \quad \text{et} \quad e_1 = \frac{e}{(1-m) + mF_1^2}. \qquad \text{(III)}$$

La distance focale du grand miroir étant $f = \frac{e}{1-m}$, on a certainement (**) $e_1 < f$.

Le coefficient d'obturation λ_1 $\left[\text{savoir } \frac{r_1'}{r_1} = \frac{m_1}{F_1}\right]$ vaut

$$\lambda_1 = \frac{mF_1^2}{(1-m) + mF_1^2}. \qquad \text{(IV)}$$

5. — *Pour que le petit miroir soit concave*, on doit avoir la condition

$$F_1 - m_1 < e_1,$$

c'est-à-dire, d'après (III),

$$F_1 - \frac{mF_1^3}{(1-m) + mF_1^2} < \frac{e}{(1-m) + mF_1^2},$$

ou

$$F_1 < \frac{e}{1-m}. \qquad \text{(V, condition du grégorien)}$$

(*) Ces formules sont en accord avec l'expression donnée par M. Chrétien. (*C. R.*, 21 novembre 1927, p. 1127.)

(**) Il n'y aura donc pas redressement de l'image.

Pour arriver à la formule (V), nous avons dû supposer $(1 - m) + mF_1^2 > 0$, ce qui est certainement exact si $m < 1$. Or cette dernière condition est vérifiée, car le télescope de MM. Ritchey et Chrétien diminue l'encombrement (*).

Remarquons que, par suite de (V), on a $F_1 < 1$, vu que $\frac{e}{1-m} = f < 1$. [Le système de Cassegrain augmente la distance focale.]

Si donc on se place dans le cas de la condition (V), la seconde formule (III) montre que l'on doit avoir

$$e_1 > e.$$

Supposons que l'on pose, de plus, la condition $m_1 > e_1$. On devra écrire

$$\frac{mF_1^3}{(1-m) + mF_1^2} > \frac{e}{(1-m) + mF_1^2}$$

ou

$$F_1 > \sqrt[3]{\frac{e}{m}}.$$

Pour que cette condition soit compatible avec (V), on doit avoir

$$\frac{e}{1-m} > \sqrt[3]{\frac{e}{m}}$$

ou

$$\frac{e^2}{(1-m)^3} > \frac{1}{m}.$$

Dans le cas des dimensions données par M. Chrétien (voir n° 4), on verrait tout de suite que cette condition n'est pas réalisée et que les foyers résultants des grégoriens seront certainement entre les deux miroirs.

(*) Si au lieu d'un système initial en Cassegrain, on avait un télescope de Gregory, il se pourrait que l'on eût $m > 1$ et il faudrait continuer la discussion dans ce sens.

6. *Exemple.* — Reprenons le télescope de MM. Ritchey et Chrétien :

$$e = \frac{4{,}286}{15{,}625} = 0{,}274; \quad m = \frac{4{,}911}{15{,}625} = 0{,}314; \quad \frac{e}{1-m} = 0{,}4.$$

Pour que le petit miroir soit concave, on doit donc prendre

$$F_1 < 0{,}4.$$

Soit $F_1 = 0{,}38$ [c'est-à-dire 5m937].
On tire des formules (III) et (IV)

$$e_1 = 0{,}374\,[= 5^m{,}84], \quad m_1 = 0{,}024\,[= 0^m{,}375], \quad \lambda_1 = 0{,}06.$$

L'ouverture efficace est sensiblement F/2,4. Le miroir auxiliaire a pour rayon de courbure $r_1' = 15$ [$= 234^m375$]; c'est donc un miroir presque plan; son diamètre d_1' vaut 16,4 cm.

On pourrait placer entre le petit miroir et le foyer définitif un miroir plan à 45°. La combinaison trouvée est peu pratique, mais elle permettrait de passer d'un $\frac{F}{6{,}25}$ à un $\frac{F}{2{,}4}$.

7. *Pour que le petit miroir soit convexe*, on doit prendre

$$F_1 > \frac{e}{1-m} \qquad \text{(VI, condition de Cassegrain)}$$

ou, ce qui est identique,

$$F_1 > f.$$

On remarquera que

a) Si $f < F_1 < 1$, on a $e_1 > e$

b) Si $F_1 > 1$, on a $e_1 < e$.

Si l'on veut avoir de plus la relation $m_1 > e_1$, on doit ajouter la condition

$$F_1 > \sqrt[3]{\frac{e}{m}}.$$

8. *Exemple.* — Télescope ayant les dimensions signalées aux numéros 4 et 6. On a

$$\sqrt[3]{\frac{e}{m}} = 0{,}955.$$

Si donc on prend $F_1 < 0{,}955$, le foyer résultant sera encore situé entre les deux miroirs.

1) $F_1 = 0{,}5$; on trouve $e_1 = 0{,}36\,[= 5^m{,}625]$, $m_1 = 0{,}052\,[= 0^m{,}812]$, $\lambda_1 = 0{,}104$.

2) $F_1 = 0{,}6$; on trouve $e_1 = 0{,}343\,[= 5^m{,}359]$, $m_1 = 0{,}085\,[= 1^m{,}328]$, $\lambda_1 = 0{,}14$.

3) $F_1 = 0{,}8$; on trouve $e_1 = 0{,}309\,[= 4^m{,}828]$, $m_1 = 0{,}181\,[= 2^m{,}828]$, $\lambda_1 = 0{,}3$.

4) $F_1 = 0{,}96$; on trouve $e_1 = 0{,}281\,[= 4^m{,}391]$, $m_1 = 0{,}285\,[= 4^m{,}453]$, $\lambda_1 = 0{,}475$.

5) $F_1 = 1{,}1$; on trouve $e_1 = 0{,}257\,[= 4^m{,}016]$, $m_1 = 0{,}392\,[= 6^m{,}127]$, $\lambda_1 = 0{,}65$.

On constate donc qu'on est arrêté assez rapidement dans le choix de F_1; néanmoins, on peut aller de $F_1 = 0{,}5$ à $F_1 = 1{,}1$.

Si l'on désire de plus fortes variations dans la distance focale, tout en gardant pour l'instrument des dimensions pratiques, on ne pourra plus garder l'aplanétisme. On ne conservera plus, parmi les conditions imposées, la relation des sinus; le système ne vérifiera plus alors que la relation de suppression de l'aberration sphérique.

9. Si l'on désire qu'il y ait égalité, dans les équations (I) et (II), entre les coefficients des termes en y^2, y^4 et y^6, on doit écrire

$$\left.\begin{aligned} \frac{F_1 - m_1}{F_1 e_1} &= \frac{1-m}{e} && (1)\\ \frac{m_1}{F_1^3 \cdot e_1} &= \frac{m}{e} && (2)\\ \frac{(F_1 + 4e_1)\cdot m_1}{F_1^5 \cdot e_1^2} &= \frac{1+4e}{e^2}\cdot m. && (3) \end{aligned}\right\}$$

Entre ces trois équations, éliminons e_1 et m_1.
Des équations (1) et (2), nous tirons [formules II]

$$m_1 = \frac{mF_1^3}{(1-m)+mF_1^2} \quad \text{et} \quad e_1 = \frac{e}{(1-m)+mF_1^2}.$$

Remplaçons dans (3); on obtient

$$mF_1^3 - (1+4e)F_1^2 + (1-m)F_1 + 4e = 0. \tag{4}$$

Une solution de cette équation est $F_1 = 1$ (télescope de M. Chrétien); les autres solutions sont racines de l'équation obtenue en égalant à zéro le quotient du premier membre de (4), par $F_1 - 1$, savoir

$$mF_1^2 + F_1(m-1-4e) - 4e = 0. \tag{5}$$

Les deux racines de (5) sont réelles et de signes contraires. La seule racine qui convienne étant la valeur positive, on doit prendre

$$F_1 = \frac{-(m-1-4e)+\sqrt{(m-1-4e)^2+16em}}{2m}. \tag{6}$$

Posons

$$M = (m-1-4e)^2 + 16em.$$

On obtient, tous calculs faits,

$$\left.\begin{aligned} e_1 &= \frac{2em}{(4e+1-m)\left(4e+1+m+\sqrt{M}\right)}; \\ m_1 &= \frac{(4e+1-m).[(4e+1-m)^2+12em]+\sqrt{M}.[(4e+1-m)^2+4em]}{m.(4e+1-m)\left(4e+1+m+\sqrt{M}\right)}; \\ F_1 - m_1 &= \frac{\left(4e+1-m+\sqrt{M}\right).(1-m)}{(4e+1-m)\left(4e+1+m+\sqrt{M}\right)}. \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

On aura
1° $F_1 - m_1 > e_1$ [Cassegrain], si

$$\left(4e+1-m+\sqrt{M}\right)(1-m) > 2em;$$

2° $F_1 - m_1 < e_1$ [Gregory], si

$$\left(4e+1-m+\sqrt{M}\right)(1-m) < 2em.$$

Si l'on applique les formules (6) et (7) aux données numériques du numéro 4, on obtient un système dépourvu d'intérêt pratique.

10. Si l'on désire que le foyer résultant soit conservé au même point, on peut montrer qu'il est impossible d'obtenir un système aplanétique autre que le télescope initial.
En effet, il faut alors écrire

$$\left.\begin{aligned} m_1 - e_1 &= m - e, \\ \frac{F_1 - m_1}{F_1 e_1} &= \frac{1-m}{e}, \\ \frac{m_1}{F_1^3 e_1} &= \frac{m}{e}. \end{aligned}\right\}$$

Des deux dernières équations, nous tirons les formules (III); si alors nous remplaçons dans la première, nous obtenons

$$(F_1 - 1).[F_1^2 + (1-m+e)F_1 + (1-m+e)] = 0.$$

Les solutions différentes de $F_1 = 1$ seront données par

$$F_1^2 + (1-m+e)F_1 + (1-m+e) = 0. \tag{8}$$

Les racines de cette équation seraient réelles si

$$(1-m+e)(-3-m+e) \geq 0.$$

Or, il est très aisé de voir que cette condition n'est pas vérifiée dans le cas qui nous occupe.

Par conséquent, si l'on veut que le foyer final soit conservé au même point, il ne sera pas possible d'introduire un miroir auxiliaire réalisant l'aplanétisme. Il faudra alors simplement se contenter de la suppression de l'aberration sur l'axe; il sera très simple, en partant des formules connues, de déterminer la coma correspondante.

11. En résumé, supposons construit un télescope aplanétique, du genre de ceux de MM. Ritchey et Chrétien. Il est possible de trouver des miroirs auxiliaires modifiant l'amplification de l'image et réalisant à la fois la suppression de l'aberration sur l'axe et l'aplanétisme au sens d'Abbe. Toutefois, les limites entre lesquelles cette amplification peut varier sont assez restreintes. Si l'on désire les élargir, les systèmes obtenus ne seront plus aplanétiques; mais on pourra toujours supprimer l'aberration sphérique. Enfin, si l'on veut que la position du foyer final soit conservée, il sera impossible de trouver des combinaisons auxiliaires aplanétiques.

En terminant, je tiens à remercier M. le Profr Dehalu, qui m'a signalé ce sujet d'étude et a guidé mes premières recherches.

Université de Liège Bibliothèque

Marcel Hayez, imprimeur, rue de Louvain, 112, Bruxelles.

P. 890 B

UNIVERSITÉ DE LIÈGE

INSTITUT D'ASTRONOMIE ET DE GÉODÉSIE

N° 18

QUELQUES ANALOGIES FORMELLES

entre

CERTAINES ORBITES

PAR

P. SWINGS
Docteur en Sciences physiques et mathématiques

BRUXELLES
MARCEL HAYEZ, IMPRIMEUR DE L'ACADÉMIE ROYALE DE BELGIQUE
112, Rue de Louvain, 112

1928

Université de Liège Bibliothèque